УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 517.977
DOI: 10.17223/19988605/43/1

К.Б. Мансимов, А.А. Аликберов

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Рассматривается одна задача оптимального управления, описываемая совокупностью дифференциальных и интегральных уравнений. Установлены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.
Ключевые слова: дифференциальное уравнение; интегральное уравнение типа Вольтерра; необходимое условие оптимальности; аналог уравнения Эйлера; аналог условия Лежандра–Клебша; необходимое условие оптимальности второго порядка.

На практике очень важным вопросом является адекватное описание изучаемого процесса. Во многих случаях это приводит к необходимости изучения многоэтапных процессов (составных или ступенчатых), которые очень широко распространены на практике. Такие процессы возникают в космонавтике, теории локомоционнных процессов, химической технологии и др. [1–4].

В работах [1–10] и других изучен ряд задач оптимального управления многоэтапными процессами, описываемых на различных отрезках времени (или же в различных областях) разными дифференциальными (разностными) уравнениями. Подобные задачи оптимального управления называются также задачами оптимального управления с переменной структурой. В предлагаемой работе исследуется одна многоэтапная задача оптимального управления, описываемая совокупностью дифференциальных и интегральных уравнений. При предположении открытости области управления установлен аналог уравнения Эйлера [11–13]. Выведены необходимые условия оптимальности второго порядка.

1. Постановка задачи

Допустим, что на заданном отрезке времени $T = T_1 \cup T_2$ $\left(T_1 = [t_0, t_1],\ T_2 = [t_1, t_2]\right)$ управляемый процесс описывается системой уравнений

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f\left(t, s, x(s), u(s)\right) ds, \quad t \in T_1, \tag{1}$$

$$\dot{y} = g(t, y, v), \quad t \in T_2, \tag{2}$$

$$y(t_1) = G\left(x(t_1)\right). \tag{3}$$

Здесь $f(t,s,x,u)$ $\left(g(t,y,v)\right)$ – заданная n (m)-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (x,u) $\left((y,v)\right)$ до второго порядка включительно, $G(x)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая m-мерная вектор-функция, t_0, t_1, t_2 заданы, причем $t_0 < t_1 < t_2$, $u(t)$ $\left(v(t)\right)$ – r(q)-мерный кусочно-непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и открытого множества U (V), т.е.

$$
\begin{aligned}
&u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T_1 = [t_0, t_1], \\
&v(t) \in V \subset R^q, \quad t \in T_2 = [t_1, t_2].
\end{aligned} \tag{4}
$$

Пару $\left(u^{\mathrm{o}}(t), v^{\mathrm{o}}(t)\right)$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $\left(u^{\mathrm{o}}(t), v^{\mathrm{o}}(t)\right)$ соответствует единственное непрерывное (кусочно-гладкое) решение $x^{\mathrm{o}}(t)$ $\left(y^{\mathrm{o}}(t)\right)$ уравнения (1) (задачи Коши (2)–(3)).

На решениях системы (1)–(3), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим терминального типа функционал

$$
I(u,v) = \varphi_1\left(x(t_1)\right) + \varphi_2\left(y(t_2)\right). \tag{5}
$$

Здесь $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ – заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции.

Допустимое управление $\left(u^{\mathrm{o}}(t), v^{\mathrm{o}}(t)\right)$, доставляющее минимум функционалу (5) при ограничениях (1)–(4), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $\left(u^{\mathrm{o}}(t), v^{\mathrm{o}}(t), x^{\mathrm{o}}(t), y^{\mathrm{o}}(t)\right)$ – оптимальным процессом.

Нашей целью является вывод необходимых условий оптимальности при предположении открытости области управления.

2. Вариации функционала и неявные необходимые условия оптимальности

Пусть $\left(u^{\mathrm{o}}(t), v^{\mathrm{o}}(t), x^{\mathrm{o}}(t), y^{\mathrm{o}}(t)\right)$ – фиксированный допустимый процесс. Через $\left(\bar{u}(t) = u^{\mathrm{o}}(t) + \Delta u(t),\ \bar{v}(t) = v^{\mathrm{o}}(t) + \Delta v(t),\ \bar{x}(t) = x^{\mathrm{o}}(t) + \Delta x(t),\ \ \bar{y}(t) = y^{\mathrm{o}}(t) + \Delta y(t)\right)$ обозначим произвольный допустимый процесс и, используя формулу Тейлора, запишем приращение критерия качества (5):

$$
\begin{aligned}
\Delta I\left(u^{\mathrm{o}}, v^{\mathrm{o}}\right) &= \mathrm{I}(\bar{u}, \bar{v}) - \mathrm{I}\left(u^{\mathrm{o}}, v^{\mathrm{o}}\right) = \left[\varphi_1\left(\bar{x}(t_1)\right) - \varphi_1\left(x^{\mathrm{o}}(t_1)\right)\right] + \left[\varphi_2\left(\bar{y}(t_2)\right) - \varphi_2\left(y^{\mathrm{o}}(t_2)\right)\right] = \\
&= \frac{\partial \varphi_1'\left(x^{\mathrm{o}}(t_1)\right)}{\partial x} \Delta x(t_1) + \frac{1}{2} \Delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi_1\left(x^{\mathrm{o}}(t_1)\right)}{\partial x^2} \Delta x(t_1) + \frac{\partial \varphi_2'\left(y^{\mathrm{o}}(t_2)\right)}{\partial y} \Delta y(t_2) + \\
&+ \frac{1}{2} \Delta y'(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2\left(y^{\mathrm{o}}(t_2)\right)}{\partial y^2} \Delta y(t_2) + \mathrm{o}_1\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right) + \mathrm{o}_2\left(\left\|\Delta y(t_2)\right\|^2\right).
\end{aligned} \tag{6}
$$

Здесь и в дальнейшем $\|\alpha\|$ есть норма вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)'$, в R^n определяемая формулой $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$, штрих для матриц – операция транспонирования, а для векторов – знак скалярно произведения, а $\mathrm{o}\left(\beta^2\right)$ есть величина более высокого порядка малости, чем β^2, т.е. $\mathrm{o}\left(\beta^2\right)/\beta^2 \to 0$ при $\beta \to 0$.

Далее ясно, что $\left(\Delta x(t), \Delta y(t)\right)$ будет решением задачи

$$
\Delta x(t) = \int_{t_0}^{t} \left[f\left(t, s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)\right) - f\left(t, s, x^{\mathrm{o}}(s), u^{\mathrm{o}}(s)\right) \right] ds, \quad t \in T_1, \tag{7}
$$

$$
\Delta \dot{y}(t) = g\left(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)\right) - g\left(t, y^{\mathrm{o}}(t), v^{\mathrm{o}}(t)\right), \tag{8}
$$

$$
\Delta y(t_1) = G\left(\bar{x}(t_1)\right) - G\left(x^{\mathrm{o}}(t_1)\right). \tag{9}
$$

Предположим, что $\psi^{\mathrm{o}}(t)$, $p^{o}(t)$ –пока неизвестные *n* и *m*-мерные вектор-функции.

Умножая обе части соотношения (7) ((8)) слева скалярно на $\psi^{o}(t)\ \ \left(p^{o}(t)\right)$, а затем интегрируя обе части полученного тождества по $T_1\ \ \left(T_2\right)$, будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_1}\psi^{o'}(t)\Delta x(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}\psi^{o'}(t)\left[\int_{t_0}^{t}\left[f\left(t,s,\bar{x}(s),\bar{u}(s)\right)-f\left(t,s,x^{o}(s),u^{o}(s)\right)\right]ds\right]dt, \tag{10}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}p^{o'}(t)\Delta\dot{y}(t)dt=\int_{t_1}^{t_2}p^{o'}(t)\left[g\left(t,\bar{y}(t),\bar{v}(t)\right)-g\left(t,y^{o}(t),v^{o}(t)\right)\right]dt. \tag{11}$$

Полагая $N\left(p^{o},x\right)=p^{o}(t_1)G(x)$ и используя формулу интегрирования по частям, в определенном интеграле получим

$$\int_{t_1}^{t_2}p^{o'}(t)\Delta\dot{y}(t)dt=p^{o'}(t_2)\Delta y(t_2)-\left[N\left(p^{o},\bar{x}(t_1)\right)-N\left(p^{o},x^{o}(t_1)\right)\right]-\int_{t_1}^{t_2}\dot{p}^{o'}(t)\Delta y(t)dt. \tag{12}$$

Учитывая тождества (10)–(12), из формулы приращения (6) получим

$$\begin{gathered}
\Delta I\left(u^{o},v^{o}\right)=\frac{\partial\varphi_1'\left(x^{o}(t_1)\right)}{\partial x}\Delta x(t_1)+\frac{\partial\varphi_2'\left(y^{o}(t_2)\right)}{\partial y}\Delta y(t_2)+\int_{t_0}^{t_1}\psi^{o'}(t)\Delta x(t)dt-\\
-\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\psi^{o}(s)\left[f\left(s,t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)\right)-f\left(s,t,x^{o}(t),u^{o}(t)\right)\right]ds\right]dt+p^{o'}(t_2)\Delta y(t_2)-\\
-\frac{\partial N'\left(p^{o},x^{o}(t_1)\right)}{\partial x}\Delta x(t_1)-\int_{t_1}^{t_2}\dot{p}^{o'}(t)\Delta y(t)dt-\int_{t_1}^{t_2}p^{o'}(t)\left[g\left(t,\bar{y}(t),\bar{v}(t)\right)-g\left(t,y^{o}(t),v^{o}(t)\right)\right]dt+\\
+\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^{o}(t_1)\right)}{\partial x^2}\Delta x(t_1)-\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2 N\left(p^{o},x^{o}(t_1)\right)}{\partial x^2}\Delta x(t_1)+\\
+\frac{1}{2}\Delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{o}(t_2)\right)}{\partial y^2}\Delta y(t_2)+o_1\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right)+o_2\left(\left\|\Delta y(t_2)\right\|^2\right)-o_3\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right).
\end{gathered} \tag{12}$$

Из (7) ясно, что

$$\Delta x(t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\left[f\left(t_1,t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)\right)-f\left(t_1,t,x^{o}(t),u^{o}(t)\right)\right]dt. \tag{13}$$

Принимая во внимание (13), из (12) будем иметь

$$\begin{gathered}
\Delta I\left(u^{o},v^{o}\right)=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\varphi_1'\left(x^{o}(t_1)\right)}{\partial x}\left[f\left(t_1,t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)\right)-f\left(t_1,t,x^{o}(t),u^{o}(t)\right)\right]dt+\frac{\partial\varphi_2'\left(y^{o}(t_2)\right)}{\partial y}\Delta y(t_2)+\\
+\int_{t_0}^{t_1}\psi^{o'}(t)\Delta x(t)dt-\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\psi^{o}(s)\left[f\left(s,t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)\right)-f\left(s,t,x^{o}(t),u^{o}(t)\right)\right]ds\right]dt+p^{o'}(t_2)\Delta y(t_2)-\\
-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial N'\left(p^{o},x^{o}(t_1)\right)}{\partial x}\left[f\left(t_1,t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)\right)-f\left(t_1,t,x^{o}(t),u^{o}(t)\right)\right]dt-\int_{t_1}^{t_2}\dot{p}^{o'}(t)\Delta y(t)dt-\\
-\int_{t_1}^{t_2}p^{o'}(t)\left[g\left(t,\bar{y}(t),\bar{v}(t)\right)-g\left(t,y^{o}(t),v^{o}(t)\right)\right]dt+\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^{o}(t_1)\right)}{\partial x^2}\Delta x(t_1)-\\
-\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2 N\left(p^{o},x^{o}(t_1)\right)}{\partial x^2}\Delta x(t_1)+\frac{1}{2}\Delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{o}(t_2)\right)}{\partial y^2}\Delta y(t_2)+o_1\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right)+\\
+o_2\left(\left\|\Delta y(t_2)\right\|^2\right)-o_3\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right).
\end{gathered} \tag{14}$$

Введем аналоги функции Гамильтона–Понтрягина:

$$H\left(t,\mathrm{x},\mathrm{u},\psi^{\circ}\right)=-\frac{\partial\varphi_1'\left(x^{\circ}\left(t_1\right)\right)}{\partial x}f\left(t_1,t,x,u\right)+\int_t^{t_1}\psi^{\circ'}\left(s\right)f\left(s,t,x,u\right)ds+\frac{\partial N'\left(p^{\circ},x^{\circ}\left(t_1\right)\right)}{\partial x}f\left(t_1,t,x,u\right),$$

$$M\left(t,\mathrm{y},\mathrm{v},p^{\circ}\right)=p^{\circ'}g\left(t,y,v\right).$$

С учетом введенных обозначений формула приращения (14) примет вид:

$$\begin{gathered}\Delta I\left(u^{\circ},v^{\circ}\right)=-\int_{t_0}^{t_1}\left[H\left(t,\bar{x}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right),\psi^{\circ}\left(t\right)\right)-H\left(t,x^{\circ}\left(t\right),u^{\circ}\left(t\right),\psi^{\circ}\left(t\right)\right)\right]dt-\\-\int_{t_1}^{t_2}\left[M\left(t,\bar{y}\left(t\right),\bar{v}\left(t\right),p^{\circ}\left(t\right)\right)-M\left(t,y^{\circ}\left(t\right),v^{\circ}\left(t\right),p^{\circ}\left(t\right)\right)\right]dt+\frac{1}{2}\Delta x'\left(t_1\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^{\circ}\left(t_1\right)\right)}{\partial x^2}\Delta x\left(t_1\right)+\\+\frac{1}{2}\Delta y'\left(t_2\right)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}\left(t_2\right)\right)}{\partial y^2}\Delta y\left(t_2\right)-\frac{1}{2}\Delta x'\left(t_1\right)\frac{\partial^2 N\left(p^{\circ},x^{\circ}\left(t_1\right)\right)}{\partial x^2}\Delta x\left(t_1\right)+\int_{t_0}^{t_1}\psi^{\circ'}\left(t\right)\Delta y\left(t\right)dt+p^{\circ'}\left(t_2\right)\Delta y\left(t_2\right)-\\-\int_{t_1}^{t_2}\dot{p}^{\circ'}\left(t\right)\Delta y\left(t\right)dt+\frac{\partial\varphi_2'\left(y^{\circ}\left(t_2\right)\right)}{\partial y}\Delta y\left(t_2\right)+\mathrm{o}_1\left(\left\|\Delta x\left(t_1\right)\right\|^2\right)+\mathrm{o}_2\left(\left\|\Delta y\left(t_2\right)\right\|^2\right)-\mathrm{o}_3\left(\left\|\Delta x\left(t_1\right)\right\|^2\right).\end{gathered}\tag{15}$$

Из (15), используя формулу Тейлора, будем иметь

$$\begin{gathered}\Delta I\left(u^{\circ},v^{\circ}\right)=\frac{\partial\varphi_2'\left(y^{\circ}\left(t_2\right)\right)}{\partial y}\Delta y\left(t_2\right)+p^{\circ'}\left(t_2\right)\Delta y\left(t_2\right)-\int_{t_1}^{t_2}\dot{p}^{\circ'}\left(t\right)\Delta y\left(t\right)dt+\int_{t_0}^{t_1}\psi^{\circ'}\left(t\right)\Delta x\left(t\right)dt-\\-\int_{t_0}^{t_1}H_u'\left(t,x^{\circ}\left(t\right),u^{\circ}\left(t\right),\psi^{\circ}\left(t\right)\right)\Delta u\left(t\right)dt-\int_{t_0}^{t_1}H_x'\left(t,x^{\circ}\left(t\right),u^{\circ}\left(t\right),\psi^{\circ}\left(t\right)\right)\Delta x\left(t\right)dt-\\-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Big[\Delta x'\left(t\right)H_{xx}\left(t,x^{\circ}\left(t\right),u^{\circ}\left(t\right),\psi^{\circ}\left(t\right)\right)\Delta x\left(t\right)+2\Delta u'\left(t\right)H_{ux}\left(t,x^{\circ}\left(t\right),u^{\circ}\left(t\right),\psi^{\circ}\left(t\right)\right)\Delta x\left(t\right)+\\+\Delta x'\left(t\right)H_{uu}\left(t,x^{\circ}\left(t\right),u^{\circ}\left(t\right),\psi^{\circ}\left(t\right)\right)\Delta u\left(t\right)\Big]dt-\int_{t_1}^{t_2}M_v'\left(t,y^{\circ}\left(t\right),v^{\circ}\left(t\right),p^{\circ}\left(t\right)\right)\Delta v\left(t\right)dt-\\-\int_{t_1}^{t_2}M_y'\left(t,y^{\circ}\left(t\right),v^{\circ}\left(t\right),p^{\circ}\left(t\right)\right)\Delta y\left(t\right)dt-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Big[\Delta y'\left(t\right)M_{yy}\left(t,y^{\circ}\left(t\right),v^{\circ}\left(t\right),p^{\circ}\left(t\right)\right)\Delta y\left(t\right)+\\+2\Delta v'\left(t\right)M_{vy}\left(t,y^{\circ}\left(t\right),v^{\circ}\left(t\right),p^{\circ}\left(t\right)\right)\Delta y\left(t\right)+\Delta v'\left(t\right)M_{vv}\left(t,y^{\circ}\left(t\right),v^{\circ}\left(t\right),p^{\circ}\left(t\right)\right)\Delta v\left(t\right)\Big]dt+\\+\mathrm{o}_1\left(\left\|\Delta x\left(t_1\right)\right\|^2\right)+\mathrm{o}_2\left(\left\|\Delta y\left(t_2\right)\right\|^2\right)-\mathrm{o}_3\left(\left\|\Delta x\left(t_1\right)\right\|^2\right)+\frac{1}{2}\Delta x'\left(t_1\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^{\circ}\left(t_1\right)\right)}{\partial x^2}\Delta x\left(t_1\right)+\\+\frac{1}{2}\Delta y'\left(t_2\right)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}\left(t_2\right)\right)}{\partial y^2}\Delta y\left(t_2\right)-\frac{1}{2}\Delta x'\left(t_1\right)\frac{\partial^2 N\left(p^{\circ},x^{\circ}\left(t_1\right)\right)}{\partial x^2}\Delta x\left(t_1\right)-\\-\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{o}_4\left(\left[\left\|\Delta x\left(t\right)\right\|+\left\|\Delta u\left(t\right)\right\|\right]^2\right)dt-\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{o}_5\left(\left[\left\|\Delta y\left(t\right)\right\|+\left\|\Delta v\left(t\right)\right\|\right]^2\right)dt.\end{gathered}$$

Предположим, что $\left(\psi^{\circ}\left(t\right),p^{\circ}\left(t\right)\right)$ удовлетворяет соотношениям

$$\psi^{\circ}\left(t\right)=H_x\left(t,x^{\circ}\left(t\right),u^{\circ}\left(t\right),\psi^{\circ}\left(t\right)\right),\tag{17}$$

$$\dot{p}^{\circ}\left(t\right)=-M_y\left(t,y^{\circ}\left(t\right),v^{\circ}\left(t\right),p^{\circ}\left(t\right)\right),\tag{18}$$

$$p^{\circ}\left(t_2\right)=-\frac{\partial\varphi_2\left(y^{\circ}\left(t_2\right)\right)}{\partial y}.\tag{19}$$

Соотношение (17) есть линейное неоднородное интегральное уравнение типа Вольтерра относительно $\psi^{\circ}(t)$, а соотношение (28) – линейное однородное дифференциальное уравнение относительно $p^{\circ}(t)$. Систему (17)–(19) назовем сопряженной системой для задачи (1)–(5).

При выполнении соотношений (17)–(19) формула приращения (16) примет вид:

$$\Delta I\left(u^{\circ},v^{\circ}\right)=-\int_{t_0}^{t_1} H_u'\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\Delta u(t)dt-\int_{t_1}^{t_2} M_v'\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\Delta v(t)dt+$$
$$+\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^{\circ}(t_1)\right)}{\partial x^2}\Delta x(t_1)+\frac{1}{2}\Delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2)\right)}{\partial y^2}\Delta y(t_2)-\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2 N\left(p^{\circ},x^{\circ}(t_1)\right)}{\partial x^2}\Delta x(t_1)-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Big[\Delta x'(t)H_{xx}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\Delta x(t)+2\Delta u'(t)H_{ux}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\Delta x(t)+$$
$$+\Delta x'(t)H_{uu}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\Delta u(t)\Big]dt-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\Big[\Delta y'(t)M_{yy}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\Delta y(t)+$$
$$+2\Delta v'(t)M_{vy}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\Delta y(t)+\Delta v'(t)M_{vv}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\Delta v(t)\Big]dt+\eta_1(\Delta u,\Delta v),\qquad(20)$$

где по определению

$$\eta_1(\Delta u,\Delta v)=o_1\left(\|\Delta x(t_1)\|^2\right)+o_2\left(\|\Delta y(t_2)\|^2\right)-o_3\left(\|\Delta x(t_1)\|^2\right)-\int_{t_0}^{t_1}o_4\left(\left[\|\Delta x(t)\|+\|\Delta u(t)\|\right]^2\right)dt-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}o_5\left(\left[\|\Delta y(t)\|+\|\Delta v(t)\|\right]^2\right)dt.\qquad(21)$$

Из (7)–(9), используя условию Липшица, получаем, что

$$\|\Delta x(t)\|\le L_1\int_{t_0}^{t}\left[\|\Delta x(\tau)\|+\|\Delta u(\tau)\|\right]d\tau,\qquad(22)$$

$$\|\Delta y(t)\|\le L_2\int_{t_0}^{t}\left[\|\Delta y(\tau)\|+\|\Delta v(\tau)\|\right]d\tau+L_2\|\Delta x(t_1)\|,\qquad(23)$$

где $L_i=\text{const}>0$, $i=\overline{1,3}$ – некоторые постоянные.

Применяя к неравенству (22) аналог леммы Гронуолла–Беллмана будем иметь

$$\|\Delta x(t)\|\le L_4\int_{t_0}^{t_1}\|\Delta u(\tau)\|d\tau.\qquad(24)$$

А из (23) следует, что

$$\|\Delta y(t)\|\le L_5\int_{t_1}^{t_2}\|\Delta v(\tau)\|d\tau+L_6\|\Delta x(t_1)\|,\qquad(25)$$

где L_4, L_5, L_6 – некоторые положительные постоянные.

С учетом (24) из (25) получим

$$\|\Delta y(t)\|\le L_5\int_{t_1}^{t_2}\|\Delta v(\tau)\|d\tau+L_6\int_{t_1}^{t_2}\|\Delta u(\tau)\|d\tau,\qquad(26)$$

где $L_7=const>0$ – некоторое постоянное.

По предположению, U и V открытые множества. Поэтому специальное приращение управления $\left(u^{\circ}(t),v^{\circ}(t)\right)$ можно определить как

$$\Delta u_\varepsilon(t)=\varepsilon\delta u(t),\ \ t\in T_1,$$
$$\Delta v_\varepsilon(t)=\varepsilon\delta v(t),\ \ t\in T_2, \tag{27}$$

где ε – достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t)\in R^r$, $t\in T_1$ $\left(\delta v(t)\in R^r,\ t\in T_2\right)$ – произвольная кусочно-непрерывная (с конечным числом точек разрыва первого рода) r (q)-мерная вектор-функция – допустимая вариация управляющей функции $u^{\mathrm{o}}(t)$ $\left(v^{\mathrm{o}}(t)\right)$.

Через $\left(\Delta x_\varepsilon(t),\Delta y_\varepsilon(t)\right)$ обозначим специальное приращение траектории $\left(x^{\mathrm{o}}(t),y^{\mathrm{o}}(t)\right)$, отвечающее приращению (27) управления $\left(u^{\mathrm{o}}(t),v^{\mathrm{o}}(t)\right)$.

Из оценок (24), (26) следует, что

$$\left\|\Delta x_\varepsilon(t)\right\|\le L_8\,\varepsilon,\ \ t\in T_1,$$
$$\left\|\Delta y_\varepsilon(t)\right\|\le L_9\,\varepsilon,\ \ t\in T_2, \tag{28}$$

где $L_8,\ L_9=\mathrm{const}>0$ – некоторые постоянные.

Используя оценки (18) и учитывая (27), при помощи (7)–(9) по схеме, например, из [14] доказывается

Лемма 1. Для $\left(\Delta x_\varepsilon(t),\Delta y_\varepsilon(t)\right)$ справедливы разложения

$$\Delta x_\varepsilon(t)=\varepsilon\delta x(t)+\mathrm{o}(\varepsilon;t), \tag{29}$$

$$\Delta y_\varepsilon(t)=\varepsilon\delta y(t)+\mathrm{o}(\varepsilon;t), \tag{30}$$

где $\left(\delta x(t),\delta y(t)\right)$ – вариация траектории, являющаяся решением уравнения в вариациях

$$\delta x(t)=\int_{t_0}^{t}\left[f_x\left(t,s,x^{\mathrm{o}}(s),u^{\mathrm{o}}(s)\right)\delta x(s)+f_u\left(t,s,x^{\mathrm{o}}(s),u^{\mathrm{o}}(s)\right)\delta u(s)\right]ds,\quad t\in T_1, \tag{31}$$

$$\delta\dot y(t)=g_y\left(t,y^{\mathrm{o}}(t),v^{\mathrm{o}}(t)\right)\delta y(t)+g_v\left(t,y^{\mathrm{o}}(t),v^{\mathrm{o}}(t)\right)\delta v(t),\quad t\in T_2, \tag{32}$$

$$\delta y(t_1)=G_x\left(x^{\mathrm{o}}(t_1)\right)\delta y(t_1). \tag{33}$$

Учитывая (27) и разложения (29), (30) в формуле приращения (20) получаем, что

$$\Delta I_\varepsilon\left(u^{\mathrm{o}},v^{\mathrm{o}}\right)=I\left(u^{\mathrm{o}}+\Delta u_\varepsilon,v^{\mathrm{o}}+\Delta v_\varepsilon\right)-I\left(u^{\mathrm{o}},v^{\mathrm{o}}\right)=$$
$$=-\varepsilon\left[\int_{t_0}^{t_1}H_u'\left(t,x^{\mathrm{o}}(t),u^{\mathrm{o}}(t),\psi^{\mathrm{o}}(t)\right)\delta u(t)dt+\int_{t_1}^{t_2}M_v'\left(t,y^{\mathrm{o}}(t),v^{\mathrm{o}}(t),p^{\mathrm{o}}(t)\right)\delta v(t)dt\right]+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left[\delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^{\mathrm{o}}(t_1)\right)}{\partial x^2}\delta x(t_1)-\delta x'(t_1)\frac{\partial^2N\left(p^{\mathrm{o}},x^{\mathrm{o}}(t_1)\right)}{\partial x^2}\delta x(t_1)+\delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\mathrm{o}}(t_2)\right)}{\partial y^2}\delta y(t_2)-\right.$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta x'(t)H_{xx}\left(t,x^{\mathrm{o}}(t),u^{\mathrm{o}}(t),\psi^{\mathrm{o}}(t)\right)\delta x(t)+2\delta u'(t)H_{ux}\left(t,x^{\mathrm{o}}(t),u^{\mathrm{o}}(t),\psi^{\mathrm{o}}(t)\right)\delta x(t)+\right.$$
$$\left.+\delta x'(t)H_{uu}\left(t,x^{\mathrm{o}}(t),u^{\mathrm{o}}(t),\psi^{\mathrm{o}}(t)\right)\delta u(t)\right]dt-\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta y'(t)M_{yy}\left(t,y^{\mathrm{o}}(t),v^{\mathrm{o}}(t),p^{\mathrm{o}}(t)\right)\delta y(t)+\right.$$
$$\left.\left.+2\delta v'(t)M_{vy}\left(t,y^{\mathrm{o}}(t),v^{\mathrm{o}}(t),p^{\mathrm{o}}(t)\right)\delta y(t)+\delta v'(t)M_{vv}\left(t,y^{\mathrm{o}}(t),v^{\mathrm{o}}(t),p^{\mathrm{o}}(t)\right)\delta v(t)\right]dt\right]+\mathrm{o}\left(\varepsilon^2\right). \tag{34}$$

Из разложения (34) следует, что первая и вторая вариации (в классическом смысле) функционала качества (5) имеют соответственно вид:

$$\delta^1I\left(u^{\mathrm{o}},v^{\mathrm{o}};\delta u,\delta v\right)=-\int_{t_0}^{t_1}H_u'\left(t,x^{\mathrm{o}}(t),u^{\mathrm{o}}(t),\psi^{\mathrm{o}}(t)\right)\delta u(t)dt-\int_{t_1}^{t_2}M_v'\left(t,y^{\mathrm{o}}(t),v^{\mathrm{o}}(t),p^{\mathrm{o}}(t)\right)\delta v(t)dt, \tag{35}$$

$$
\begin{gathered}
\delta^2 I\left(u^{\circ}, v^{\circ}; \delta u, \delta v\right) = \delta x'\left(t_1\right)\frac{\partial^2 \varphi_1\left(x^{\circ}\left(t_1\right)\right)}{\partial x^2}\delta x\left(t_1\right) - \delta x'\left(t_1\right)\frac{\partial^2 N\left(p^{\circ}, x^{\circ}\left(t_1\right)\right)}{\partial x^2}\delta x\left(t_1\right) - \\
-\int_{t_0}^{t_1}\Big[\delta x'(t) H_{xx}\left(t, x^{\circ}(t), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t)\right)\delta x(t) + \\
+2\delta u'(t) H_{ux}\left(t, x^{\circ}(t), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t)\right)\delta x(t) + \delta x'(t) H_{uu}\left(t, x^{\circ}(t), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t)\right)\delta u(t)\Big] dt + \\
+\delta y'\left(t_2\right)\frac{\partial^2 \varphi_2\left(y^{\circ}\left(t_2\right)\right)}{\partial y^2}\delta y\left(t_2\right) - \int_{t_0}^{t_1}\Big[\delta y'(t) M_{yy}\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t), p^{\circ}(t)\right)\delta y(t) + \\
+2\delta v'(t) M_{vy}\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t), p^{\circ}(t)\right)\delta y(t) + \delta v'(t) M_{vv}\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t), p^{\circ}(t)\right)\delta v(t)\Big] dt .
\end{gathered} \tag{36}
$$

Из результатов классического вариационного исчисления (см. напр.: [11–14]) с учетом (35), (36) следует, что вдоль оптимального процесса $\left(u^{\circ}(t), v^{\circ}(t), x^{\circ}(t), y^{\circ}(t)\right)$ для всех $\delta u(t) \in R^r$, $t \in T_1$, $\delta v(t) \in R^r$, $t \in T_2$ выполняются соотношения

$$
\int_{t_0}^{t_1} H_u'\left(t, x^{\circ}(t), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t)\right)\delta u(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} M_v'\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t), p^{\circ}(t)\right)\delta v(t) dt = 0, \tag{37}
$$

$$
\begin{gathered}
\delta x'\left(t_1\right)\frac{\partial^2 \varphi_1\left(x^{\circ}\left(t_1\right)\right)}{\partial x^2}\delta x\left(t_1\right) - \delta x'\left(t_1\right)\frac{\partial^2 N\left(p^{\circ}, x^{\circ}\left(t_1\right)\right)}{\partial x^2}\delta x\left(t_1\right) + \delta y'\left(t_2\right)\frac{\partial^2 \varphi_2\left(y^{\circ}\left(t_2\right)\right)}{\partial y^2}\delta y\left(t_2\right) - \\
-\int_{t_0}^{t_1}\Big[\delta x'(t) H_{xx}\left(t, x^{\circ}(t), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t)\right)\delta x(t) + 2\delta u'(t) H_{ux}\left(t, x^{\circ}(t), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t)\right)\delta x(t) + \\
+\delta x'(t) H_{uu}\left(t, x^{\circ}(t), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t)\right)\delta u(t)\Big] dt - \int_{t_0}^{t_1}\Big[\delta y'(t) M_{yy}\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t), p^{\circ}(t)\right)\delta y(t) + \\
+2\delta v'(t) M_{vy}\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t), p^{\circ}(t)\right)\delta y(t) + \delta v'(t) M_{vv}\left(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t), p^{\circ}(t)\right)\delta v(t)\Big] dt \geq 0.
\end{gathered} \tag{38}
$$

3. Необходимые условия оптимальности

Тождество (37) является неявным необходимым условием оптимальности первого порядка, а неравенство (38) есть неявное необходимое условие оптимальности второго порядка.

Используя произвольность и независимость вариаций $\delta u(t)$, $\delta v(t)$ управляющих функций $u^{\circ}(t)$ и $v^{\circ}(t)$, при помощи (37) доказывается

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $\left(u^{\circ}(t), v^{\circ}(t)\right)$ в задаче (1)–(5) необходимо, чтобы выполнялись соотношения:

$$
H_u\left(\theta, x^{\circ}(\theta), u^{\circ}(\theta), \psi^{\circ}(\theta)\right) = 0, \tag{39}
$$

для всех точек непрерывности $\theta \in \left[t_0, t_1\right)$ управления $u^{\circ}(t)$;

$$
M_v\left(\theta, y^{\circ}(\theta), v^{\circ}(\theta), p^{\circ}(\theta)\right) = 0, \tag{40}
$$

для всех точек непрерывности $\theta \in \left[t_1, t_2\right)$ управления $v^{\circ}(t)$.

Система соотношений (39), (40) есть необходимые условия оптимальности первого порядка и представляют собой аналог уравнения Эйлера.

Каждое допустимое управление $\left(u^{\circ}(t), v^{\circ}(t)\right)$, удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности (39), (40), назовем классической экстремалью. Ясно, что оптимальное управление (если оно существует) находится среди классических экстремалей.

Для сужения множества классических экстремалей, подозрительных на оптимальность, надо иметь необходимые условия оптимальности второго порядка, выраженные непосредственно через параметры задачи (1)–(5). С этой целью будем использовать неявное необходимое условие оптимальности второго порядка (38).

Пусть $R(t,\tau)$ $(n\times n)$ матричная функция, удовлетворяющая матричным интегральным уравнениям типа Вольтерра [15–17]:

$$R(t,\tau)=\int_{\tau}^{t}R(t,s)\,f_x\left(s,\tau,x^{\circ}(\tau),u^{\circ}(\tau)\right)ds+f_x\left(t,\tau,x^{\circ}(\tau),u^{\circ}(\tau)\right),$$

$$R(t,\tau)=\int_{\tau}^{t}f_x\left(s,\tau,x^{\circ}(\tau),u^{\circ}(\tau)\right)R(s,\tau)ds+f_x\left(s,\tau,x^{\circ}(\tau),u^{\circ}(\tau)\right).$$

Через $F(t,\tau)$ обозначим $(m\times m)$ матричную функцию, являющуюся решением матричного дифференциального уравнения

$$F_{\tau}(t,\tau)=-F(t,\tau)g_y\left(\tau,y^{\circ}(\tau),v^{\circ}(\tau)\right)$$

с начальным условием

$$F(t,t)=E\,,$$

где E – $(m\times m)$ единичная матрица.

Решение $\delta x(t)$ интегрального уравнения (31) допускает представление [15–17]

$$\delta x(t)=\int_{t_0}^{t}R(t,\tau)\left[\int_{t_0}^{\tau}f_u\left(s,\tau,x^{\circ}(\tau),u^{\circ}(\tau)\right)\delta u(s)ds+f_u\left(t,\tau,x^{\circ}(\tau),u^{\circ}(\tau)\right)\delta u(\tau)\right]d\tau. \tag{41}$$

Преобразуя правую часть представления (40), используя формулу Дирихле (см. напр.: [11]), получим

$$\delta x(t)=\int_{t_0}^{t}Q(t,\tau)\delta u(\tau)d\tau\,, \tag{42}$$

где по определению

$$Q(t,\tau)=f_u\left(t,\tau,x^{\circ}(\tau),u^{\circ}(\tau)\right)+\int_{\tau}^{t}R(t,s)\,f_u\left(s,\tau,x^{\circ}(\tau),u^{\circ}(\tau)\right)ds\,.$$

А решение задачи Коши (32)–(33) допускает представление [11, 18]

$$\delta y(t)=F(t,t_1)\delta y(t_1)+\int_{t_1}^{t}F(t,\tau)g_v\left(\tau,y^{\circ}(\tau),v^{\circ}(\tau)\right)\delta v(\tau)d\tau\,.$$

Следовательно,

$$\delta y(t)=F(t,t_1)G_x\left(x^{\circ}(t_1)\right)\delta x(t_1)+\int_{t_1}^{t}F(t,\tau)g_v\left(\tau,y^{\circ}(\tau),v^{\circ}(\tau)\right)\delta v(\tau)d\tau\,. \tag{43}$$

С учетом (42) представление (43) записывается в виде

$$\delta y(t)=\int_{t_0}^{t_1}F(t,t_1)G_x\left(x^{\circ}(t_1)\right)Q(t_1,\tau)\delta u(\tau)d\tau+\int_{t_1}^{t}F(t,\tau)g_v\left(\tau,y^{\circ}(\tau),v^{\circ}(\tau)\right)\delta v(\tau)d\tau\,. \tag{44}$$

Учитывая произвольность вариаций $\delta u(t)$ и $\delta v(t)$, предположим, что $\delta v(t)\equiv 0$.

Тогда из представления (44) будем иметь

$$\delta y(t)=\int_{t_0}^{t_1}L(t,\tau)\delta u(\tau)d\tau\,, \tag{45}$$

где по определению

$$L(t,\tau)=F(t,t_1)G_x\left(x^{\circ}(t_1)\right)Q(t_1,\tau)\,.$$

А неравенство (36) примет вид

$$\delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^{\circ}(t_1)\right)}{\partial x^2}\delta x(t_1)-\delta x'(t_1)\frac{\partial^2 N\left(p^{\circ},x^{\circ}(t_1)\right)}{\partial x^2}\delta x(t_1)+\delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2)\right)}{\partial y^2}\delta y(t_2)-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\Big[\delta x'(t)H_{xx}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\delta x(t)+2\delta u'(t)H_{ux}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\delta x(t)+ \quad (46)$$
$$+\delta x'(t)H_{uu}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\delta u(t)\Big]dt-\int_{t_0}^{t_1}\delta y'(t)M_{yy}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\delta y(t)\geq 0.$$

Используя представление (42), доказывается, что

$$\delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^{\circ}(t_1)\right)}{\partial x^2}\delta x(t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)Q'(t_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^{\circ}(t_1)\right)}{\partial x^2}Q(t_1,s)\delta u(s)\,d\tau, \quad (47)$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(t)H_{ux}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\delta x(t)dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{\tau}^{t_1}\delta u'(\tau)H_{ux}\left(\tau,x^{\circ}(\tau),u^{\circ}(\tau),\psi^{\circ}(\tau)\right)Q(\tau,t)\,d\tau\right]\delta u(t)dt, \quad (48)$$

$$\delta x'(t_1)\frac{\partial^2 N\left(p^{\circ},x^{\circ}(t_1)\right)}{\partial x^2}\delta x(t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)Q'(t_1,\tau)\frac{\partial^2 N\left(p^{\circ},x^{\circ}(t_1)\right)}{\partial x^2}Q(t_1,s)\delta u(s)\,d\tau\,,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta x'(t)H_{xx}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\delta x(t)dt=$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)\left[\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}Q'(t,\tau)H_{xx}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)Q(t,s)dt\right]\delta u(s)ds\,d\tau, \quad (49)$$

Далее при помощи представления (45) доказывается, что

$$\delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2)\right)}{\partial y^2}\delta y(t_2)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)L'(t_2,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2)\right)}{\partial y^2}L(t_2,s)\delta u(s)\,d\tau, \quad (50)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta y'(t)M_{yy}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\delta y(t)dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)\left[\int_{t_1}^{t_2}L'(t,\tau)M_{yy}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)L(t,s)dt\right]\delta u(s)ds\,d\tau.$$

Введя обозначение

$$K(\tau,s)=-Q'(t_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^{\circ}(t_1)\right)}{\partial x^2}Q(t_1,s)-L'(t_2,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2)\right)}{\partial y^2}L(t_2,s)+$$
$$+\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}Q'(t,\tau)H_{xx}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)Q(t,s)dt- \quad (51)$$
$$-Q'(t_1,\tau)\frac{\partial^2 N\left(p^{\circ},x^{\circ}(t_1)\right)}{\partial x^2}Q(t_1,s)+\int_{t_1}^{t_2}L'(t,\tau)M_{yy}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)L(t,s)dt$$

и учитывая тождества (47)–(50), из неравенства (46) получим, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)K(\tau,s)\delta u(s)ds\,d\tau+2\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\delta u'(\tau)H_{ux}\left(\tau,x^{\circ}(\tau),u^{\circ}(\tau),\psi^{\circ}(\tau)\right)L(\tau,t)\,d\tau\right]\delta u(t)dt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(t)H_{uu}\left(t,x^{\circ}(t),u^{\circ}(t),\psi^{\circ}(t)\right)\delta u(t)dt\leq 0. \quad (52)$$

Теперь предположим, что $\delta u(t)\equiv 0$, $\delta v(t)\neq 0$. Тогда из представлений (42), (44) получим, что

$$\delta x(t)\equiv 0,\quad t\in T_1,$$

$$\delta y(t)=\int_{t_1}^{t}F(t,\tau)g_v\left(\tau,y^{\circ}(\tau),v^{\circ}(\tau)\right)\delta v(\tau)d\tau. \qquad (53)$$

При этом неравенство (36) примет вид

$$\delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2)\right)}{\partial y^2}\delta y(t_2)-\int_{t_1}^{t_2}\Big[\delta y'(t)M_{yy}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\delta y(t)+$$
$$+2\delta v'(t)M_{vy}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\delta y(t)+\delta v'(t)M_{vv}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\delta v(t)\Big]dt\geq 0. \qquad (54)$$

Используя представление (53), доказывается, что

$$\delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2)\right)}{\partial y^2}\delta y(t_2)=$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2}\delta u'(\tau)g_v'\left(\tau,y^{\circ}(\tau),v^{\circ}(\tau)\right)F'(t_2,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2)\right)}{\partial y^2}F(t_2,s)g_v\left(s,y^{\circ}(s),v^{\circ}(s)\right)\delta u(s)ds\,d\tau, \qquad (55)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta v'(t)M_{vy}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\delta y(t)=$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{t}^{t_2}\delta v'(\tau)M_{vy}\left(\tau,y^{\circ}(\tau),v^{\circ}(\tau),p^{\circ}(\tau)\right)F(\tau,t)d\tau\right]g_v\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t)\right)\delta u(t)dt, \qquad (56)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta y'(t)M_{yy}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\delta y(t)=\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2}\delta u'(\tau)g_v'\left(\tau,y^{\circ}(\tau),v^{\circ}(\tau)\right)\times$$
$$\times\left[\int_{\max(\tau,s)}^{t_2}F'(t,\tau)M_{yy}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)F(t,s)dt\right]g_v\left(s,y^{\circ}(s),v^{\circ}(s)\right)\delta u(s)ds\,d\tau. \qquad (57)$$

Введя обозначение

$$M(\tau,s)=F'(t_2,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2)\right)}{\partial y^2}F(t_2,s)+\int_{\max(\tau,s)}^{t_2}F'(t,\tau)M_{yy}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)F(t,s)dt$$

и учитывая тождества (55)–(57), неравенство (54) записывается в виде

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2}\delta v'(\tau)g_v'\left(\tau,y^{\circ}(\tau),v^{\circ}(\tau)\right)M(\tau,s)g_v\left(s,y^{\circ}(s),v^{\circ}(s)\right)\delta u(s)ds\,d\tau+$$
$$+2\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{t_1}^{t_2}\delta v'(\tau)g_v'\left(\tau,y^{\circ}(\tau),v^{\circ}(\tau)\right)M_{vy}\left(\tau,y^{\circ}(\tau),v^{\circ}(\tau),p^{\circ}(\tau)\right)F(\tau,t)d\tau\right]g_v\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t)\right)\delta v(t)dt+ \qquad (58)$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\delta v'(t)M_{vv}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\delta v(t)\leq 0.$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. Для оптимальности классической экстремали $\left(u^{\circ}(t),v^{\circ}(t)\right)$ в задаче (1)–(5) необходимо, чтобы неравенства (52), (58) выполнялись для всех $\delta u(t)\in R^r$, $t\in T_1$, $\delta v(t)\in R^r$, $t\in T_2$ соответственно.

Заметим, что полученный результат является довольно общим. Из него, используя произвольность вариаций $\delta u(t)$, $\delta v(t)$ управляющих функций $u^{\circ}(t)$, $v^{\circ}(t)$, можно получить ряд более легко проверяемых условий оптимальности и, в частности, исследовать особые в классическом смысле [14, 19, 20] управления.

Заключение

В статье изучается одна задача оптимального управления, описываемая совокупностью дифференциальных и интегральных уравнений. При предположении открытости области управления установлен аналог уравнения Эйлера. Выведено конструктивно проверяемое необходимое условие оптимальности второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габелко К.Н. Последовательное улучшение многоэтапных процессов // Автоматика и телемеханика. 1974. № 11. С. 72–80.
2. Кириченко С.Б. Оптимальное управление системами с промежуточными фазовыми ограничениями // Кибернетика и системный анализ. 1994. № 4. С. 104–111.
3. Величенко В.В. Оптимальное управление составными системами // Доклады АН СССР. 1976. Т. 176, № 4. С. 754–756.
4. Никольский М.С. Об одной вариационной задаче с переменной структурой // Вестник Московского университета. Сер. Вычислительная математика и кибернетика. 1987. № 1. С. 36–41.
5. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск : Наука, 1987. 226 с.
6. Тадумадзе Т.А., Авалишвили Н.М. Регулярные возмущения в оптимальных задачах с переменной структурой // Оптимальные задачи в системах с переменной структурой : сб. Тбилиси : Изд-во Тбилисского гос. ун-та, 1985. С. 100–154.
7. Харатишвили Г.Л. Принцип максимума в оптимальных задачах с переключением // Труды ИСУ АН ГССР. 1980. Т. 19, № 1. С. 5–17.
8. Магеррамов Ш.Ф., Мансимов К.Б. Оптимизация одного класса дискретных ступенчатых систем управления // Журнал вычислительной математики и математияческой физики. 2001. № 3. С. 360–366.
9. Багирова С.А., Мансимов К.Б. Особые управления в одной ступенчатой задаче управления // Автоматика и вычислительная техника. 2007. № 3. С. 74–81.
10. Мансимов К.Б., Насияти М.М. Необходимые условия оптимальности в одной многоэтапной дискретной задаче управления // Математическое и компьютерное моделирование. Сер. физико-математических наук. 2011. № 5. С. 162–179.
11. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М. : Наука, 1979. 429 с.
12. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М. : Высшая школа, 2005. 335 с.
13. Габасов Р., Кириллова Ф.М. и др. Методы оптимизации. Минск : Четыре четверти, 2011. 472 с.
14. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. : Наука, 1973. 256 с.
15. Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра. Баку : Изд-во ЭЛМ, 2013. 224 с.
16. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения. М. : Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 1989. 156 с.
17. Цалюк З.Б. Интегральные уравнения Вольтерра // Итоги науки и техники. Сер. математический анализ. 1977. Т. 15. С. 131–138.
18. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск : Изд-во Белорус. ун-та, 1973. 256 с.
19. Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности особых процессов в задаче оптимального управления : автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. Баку, 1994. 42 с.
20. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку : Изд-во ЭЛМ, 1999. 174 с.

Поступила в редакцию 2 октября 2017 г.

Mansimov K.B., Alekberov A.A. (2018) THE SECOND ORDER NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS IN A CONTROL PROBLEM WITH VARIABLE STRUCTURE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 43. pp. 4–15

DOI: 10.17223/19988605/43/1

The paper deals with the problem of optimal control by minimizing functional of a terminal type

$$I(u,v)=\varphi_1(x(t_1))+\varphi_2(y(t_2)) \tag{1}$$

with constraints

$$\begin{aligned} u(t)&\in U\subset R^r, \quad t\in T_1=[t_0,t_1],\\ v(t)&\in V\subset R^q, \quad t\in T_2=[t_1,t_2], \end{aligned} \tag{2}$$

$$x(t)=\int_{t_0}^{t} f(t,s,x(s),u(s))ds, \ t\in T_1, \tag{3}$$

$$\dot{y}=g(t,y,v), \ t\in T_2 \tag{4}$$

$$y(t_1)=G(x(t_1)). \tag{5}$$

Here $f(t,s,x,u)$, $(g(t,y,v))$ are give *n* (*m*)-dimensional vector-functions, respectively, continuous with respect to all the variables together with partial derivatives with respect to (x,u) $((y,v))$ up to the second order inclusive, $G(x)$ is *m*-dimensional twice continuously differentiable vector-function, t_0, t_1, t_2 are given and $t_0 < t_1 < t_2$, $u(t)$ $(v(t))$ are *r* (*q*)-dimensional piecewise-continuous (with a finite number of points of discontinuity of the first kind) vector-functions of control actions, values from a given nonempty, bounded, and open sets U (V), $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ are given twice continuously differentiable in $R^n (R^m)$ scalar functions. Here $\varphi_1(x)$ and $\varphi_2(y)$ are given m-dimensional vector functions, respectively, continuous with respect to all the variables together with partial derivatives up to the second order inclusive.

Keywords: differential equations; Volterra type integral equations; necessary optimality conditions; analog Euler equation; analog Lejandr–Klebch conditions; second order necessary optimality conditions.

MANSIMOV Kamil Bairamali ogly (Doktor of Physics and Mathematics, Professor, Baku State University, Institute of Control Systems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan).
E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

ALEKBEROV Aydyn Abdulla ogly. (Institute of Control Systems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan).
E-mail: kmansimov@mail.ru

REFERENCES

1. Gabelko, K.N. (1974) Consistent improvement of multi-stage processes. *Automation and Remote Control*. 11. pp. 72–80. (In Russian).
2. Kirichenko, S.B. (1994) Optimal'noye upravleniye sistemami s promezhutochnymi fazovymi ogranicheniyami [Optimum control of systems with intermediate phase constraints]. *Kibernetika i sistemnyy analiz – Cybernetics and Systems Analysis*. 4. pp. 104–111.
3. Velichenko, V.V. (1976) Optimal'noye upravleniye sostavnymi sistemami [Optimal control of composite systems]. *Doklady AN SSSR*. 176(4). pp. 754–756.
4. Nikolskiy, M.S. (1987) Ob odnoy variatsionnoy zadache s peremennoy strukturoy [On a variational problem with a variable structure]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. Vychislitel'naya matematika i kibernetika*. 1. pp. 36–41.
5. Ashchepkov, L.T. (1987) *Optimal'noye upravleniye razryvnymi sistemami* [Optimum control of discontinuous systems]. Novosibirsk: Nauka.
6. Tadumadze, T.A. & Avalishvili, N.M. (1985) Regulyarnyye vozmushcheniya v optimal'nykh zadachakh s peremennoy strukturoy [Optimum problems in systems with variable structure]. In: *Optimal'nyye zadachi v sistemakh s peremennoy strukturoy* [Optimum problems in systems with variable structure]. Tbilisi: Tbilisi State University. pp. 100–154.
7. Kharatishvili, G.L. (1980) Printsip maksimuma v optimal'nykh zadachakh s pereklyucheniyem [The maximum principle in optimal switching problems]. *Trudy ISU AN GSSR*. 19(1). pp. 5–17.
8. Magerramov, Sh.F. & Mansimov, K.B. (2001) Optimization of a class of discrete step control systems. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematiyacheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 3. pp. 360–366. (In Russian).
9. Bagirova, S.A. & Mansimov, K.B. (2007) Singular control in a single step control problem. *Automation and Remote Control*. 3. pp. 74–81.
10. Mansimov, K.B. & Nasiyati, M.M. (2011) Neobkhodimyye usloviya optimal'nosti v odnoy mnogoetapnoy diskretnoy zadache upravleniya [Necessary optimality conditions in one multi-stage discrete control problem]. *Matematicheskoye i komp'yuternoye modelirovaniye. Ser. fiziko-matematicheskikh nauk*. 5. pp. 162–179.
11. Alekseyev, V.M., Tikhomirov, V.M. & Fomin, S.V. (1979) *Optimal'noye upravleniye* [Optimal control]. Moscow: Nauka.
12. Demyanov, V.F. (2005) *Usloviya ekstremuma i variatsionnoye ischisleniye* [Extremum conditions and calculus of variations]. Moscow: Vysshaya shkola.
13. Gabasov, R., Kirillova, F.M. et al. (2011) *Metody optimizatsii* [Methods of optimization]. Minsk: Chetyre chetverti.
14. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (1973) *Osobyye optimal'nyye upravleniya* [Singular optimal controls]. Moscow: Nauka.
15. Abdullayev, A.A. & Mansimov, K.B. (2013) *Neobkhodimyye usloviya optimal'nosti v protsessakh, opisyvayemykh sistemoy integral'nykh uravneniy tipa Vol'terra* [Necessary optimality conditions in processes described by a system of integral equations of Volterra type]. Baku: ELM.
16. Vasilyeva, A.B. & Tikhonov, A.N. (1989) *Integral'nyye uravneniya* [Integral equations]. Moscow: Moscow State University.
17. Tsalyuk, Z.B. (1977) Integral'nyye uravneniya Vol'terra [Integral equations of Volterra]. *Itogi nauki i tekhniki. Ser. matematicheskiy analiz*. 15. pp. 131–138.
18. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (1973) *Optimizatsiya lineynykh system* [Optimization of linear systems]. Minsk: Belarusian State University.
19. Mansimov, K.B. (1994) *Neobkhodimyye usloviya optimal'nosti osobykh protsessov v zadache optimal'nogo upravleniya* [Necessary conditions for the optimality of singular processes in the optimal control problem]. Abstract of Physics and Mathematics Dr. Diss. Baku.
20. Mansimov, K.B. (1999) *Osobyye upravleniya v sistemakh s zapazdyvaniyem* [Singular controls in systems with time delay]. Baku: ELM.