МАТЕМАТИКА

УДК 512.623.23 MSC 12F20, 12J15
DOI 10.17223/19988621/53/1

Н.Ю. Галанова

О СИММЕТРИЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ ОДНОГО ВЕЩЕСТВЕННО ЗАМКНУТОГО ПОЛЯ

Рассматривается конструкция вещественно замкнутого подполя H поля ограниченных формальных степенных рядов, $\mathbf{R}[[G,\beta]] \subset H \subset \mathbf{R}[[G,\beta^+]]$. Доказывается замкнутость относительно усечений полей H, $\overline{H(x_{\beta^+})}$. Доказывается, что конфинальность симметричных сечений поля H, производимых элементами из $\overline{H(x_{\beta^+})} \setminus H$, равна β^+. Используются классификации сечений по Пестову (симметричные, алгебраические, трансцендентные) и по Шелаху (симметричные, алгебраические), рассматривается связь между этими понятиями. Принимается ОКГ.

Ключевые слова: *вещественно замкнутое поле*, *поле ограниченных формальных степенных рядов*, *симметричное сечение*, *конфинальность сечения*, *замкнутое относительно усечений поле.*

1. Основные понятия

В данной статье исследуются вещественно замкнутые подполя поля ограниченных формальных степенных рядов методами теории сечений.

Здесь $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbf{R}$ – поле вещественных чисел. Далее все поля в данной статье линейно упорядоченные и неархимедовы. Поле F называется неархимедовым, если $\exists\, a \in F^+$ такое, что $\forall\, n \in \mathbf{N} \quad a > n$. Элементы $a, b \in F \setminus \{0\}$ упорядоченного поля F называются *архимедовски эквивалентными*, если существует такое натуральное число n, что $n|a|>|b|$ и $n|b|>|a|$. Фактор-группа G_F мультипликативной группы $F \setminus \{0\}$ упорядоченного поля F по отношению архимедовской эквивалентности называется *группой архимедовых классов* поля F [1].

Поле называется *вещественно замкнутым*, если -1 не представляется в нём в виде суммы квадратов, но в каждом его собственном алгебраическом расширении -1 можно представить в виде суммы квадратов. Каждое вещественно замкнутое поле можно единственным образом упорядочить [2–4].

Как известно (Kaplansky, [2]), каждое вещественно замкнутое поле F вкладывается с сохранением порядка в поле формальных степенных рядов $\mathbf{R}[[G_F]]$, элементы которого имеют вид $x = \sum_{g \in G_F} r_g g$, где $r_g \in \mathbf{R}$, и носитель ряда

$\mathrm{supp}(x) = \{g \in G_F \mid r_g \neq 0\}$ – вполне антиупорядоченное (каждое непустое подмножество имеет наибольший элемент) подмножество группы архимедовых классов G_F поля F. Полагаем $x > 0 \Leftrightarrow r_{g_0} > 0,\ g_0 = \max(\mathrm{supp}(x))$ [1]. В дальнейшем, говоря об F как о подполе поля $\mathbf{R}[[G_F]]$, мы имеем в виду вложение $\varphi : F \to \mathbf{R}[[G_F]]$, такое, что каждый архимедов класс поля $\mathbf{R}[[G_F]]$ содержит элемент из $\varphi(F)$ [2].

Пусть G – линейно упорядоченная мультипликативная абелева группа, β – кардинал, $\aleph_0 < \beta \leq |G|$. Через $\mathbf{R}[[G,\beta]]$ обозначается поле таких формальных степенных рядов x, что $|\mathrm{supp}(x)| < \beta$. Это поле называется *полем ограниченных формальных степенных рядов*. Группы архимедовых классов упорядоченных полей $\mathbf{R}[[G]]$ и $\mathbf{R}[[G,\beta]]$ изоморфны G [2]. Будем отождествлять группы архимедовых классов полей $\mathbf{R}[[G]]$ и $\mathbf{R}[[G,\beta]]$ с группой G. При изоморфном вложении вещественно замкнутого поля F в поле $\mathbf{R}[[G_F]]$ будем отождествлять группу архимедовых классов поля $\mathbf{R}[[G_F]]$ с группой G_F.

Мультипликативная группа G называется *делимой*, если для любого $g \in G$ и любого натурального n существует решение уравнения $h^n = g$. Известно (S. MacLane, [2]), что если группа G делимая, то поля $\mathbf{R}[[G]]$, $\mathbf{R}[[G,\beta]]$ вещественно замкнуты.

Пара непустых подмножеств A и B упорядоченного поля F называется *сечением* поля F, если $A < B$ и $A \cup B = F$. В этом случае сечение обозначим (A,B).

В данной статье будем использовать понятия симметричного и трансцендентного сечений из классификации, разработанной Г.Г. Пестовым [5–8], а также классификацию сечений Шелаха (S. Shelah, [9]).

Сечение (A,B) упорядоченного поля F называется *симметричным* (*по Пестову*), если для каждого $a \in A$ существует такое $a_1 \in A$, что $(a_1 + (a_1 - a)) \in B$ и для каждого $b \in B$ существует такое $b_1 \in B$, что $(b_1 - (b - b_1)) \in A$ [5–8].

Пусть A – упорядоченное множество, $X \subset A$. Говорят, что X *конфинально* (*коинициально*) A, если для каждого $x \in A$ существует $y \in X$ такое, что $x \leq y$ ($x \geq y$). Наименьшая мощность среди мощностей всех множеств, конфинальных (коинициальных) A, называется *конфинальностью* (*коинициальностью*) A и обозначается $cf(A)$ и $coi(A)$ соответственно [2].

Замечание 1.1. Если сечение симметрично по Пестову, то $cf(A) = coi(B)$. *Конфинальностью симметричного сечения* (A, B) называется $cf(A)$ [8].

Сечение (A,B) упорядоченного поля F называется *симметричным* (*по Шелаху*), если $cf(A) = coi(B)$ [9].

Замечание 1.2. Каждое сечение, симметричное по Пестову, симметрично и по Шелаху, обратное неверно, как показывает пример из [10]. Далее в этой статье будем рассматривать симметричность только по Пестову.

Пусть F – упорядоченное расширение поля K. Будем говорить, что элемент $x \in F \setminus K$ *порождает сечение* (A,B) в упорядоченном поле K, если $A < x < B$ [8, 9].

Говорят, что *многочлен* $f(x)$ *меняет знак на сечении* (A,B) упорядоченного поля F, если существуют такие $a \in A,\ b \in B$, что на множестве $A \cap [a,b]$ многочлен строго положителен (отрицателен), а на множестве $B \cap [a,b]$ строго отрицателен (положителен). Если существует многочлен из $F[x]$, меняющий знак на сечении, то это сечение будем называть *алгебраическим* (*по Пестову*). В противном случае сечение называется *трансцендентным* [5–8].

Замечание 1.3. Каждое сечение, производимое элементом самого поля, является несимметричным (по Пестову и по Шелаху) и трансцендентным.

Будем называть сечение (A,B) упорядоченного поля K *алгебраическим* (*по Шелаху*), если существуют упорядоченное расширение F поля K и элемент $x \in F \setminus K$, порождающий данное сечение (A,B), причем x является алгебраическим элементом над K. В противном случае говорят, что сечение *не является алгебраическим* (*по Шелаху*) [9].

Через $\overline{K}$ будем обозначать *вещественное замыкание* поля K (максимальное вещественно замкнутое поле, содержащее K).

Замечание 1.4. Если поле K вещественно замкнуто, то $\overline{K} = K$. Вещественное замыкание единственно с точностью до изоморфизма [3, 4, 11].

Лемма 1.5. Если сечение (A,B) упорядоченного поля K алгебраическое по Пестову, то оно алгебраическое и по Шелаху.

Доказательство. Пусть (A,B) – алгебраическое по Пестову сечение упорядоченного поля K. Тогда существует многочлен $f(x) \in K[x]$, который меняет знак на сечении (A,B). То есть существуют $a \in A,\ b \in B,$ такие, что на множестве $A \cap [a,b]$ многочлен $f(x)$ строго положителен (для определённости), а на множестве $B \cap [a,b]$ строго отрицателен. В частности, $f(a)f(b) < 0$, поэтому в вещественном замыкании $\overline{K}$ поля K найдётся элемент c, такой, что $a < c < b$ и $f(c) = 0$. Докажем, что $A < c < B$.

Допустим, что между A и B нет корней многочлена $f(x)$. При этом может оказаться, что

1). Существует $c_1 \in \overline{K}$ – наибольший корень многочлена $f(x)$, такой, что $a < c_1 < B$, существует $c_2 \in \overline{K}$ – наименьший корень $f(x)$, такой, что $A < c_2 < b$. Так как алгебраическое сечение не производится никаким элементом из K, найдутся $a_1 \in A,\quad b_1 \in B,\quad c_1 < a_1 < b_1 < c_2$, причём $f(a_1)f(b_1) < 0$. Тогда между a_1 и b_1 найдётся корень $f(x)$ из $\overline{K}$. Противоречие.

2). В $\overline{K}$ нет корней $f(x)$, лежащих между a и B, но существует c_2 – наименьший корень $f(x)$, такой, что $A < c_2 < b$. Тогда найдётся $b_1 \in B,\quad b_1 < c_2$, причём $f(a)f(b_1) < 0$. Поэтому между a и b_1 есть корень многочлена $f(x)$ из $\overline{K}$. Но c_2 был между A и b наименьшим корнем. Противоречие. Случай, когда в $\overline{K}$ нет корней $f(x)$, лежащих между A и b, но существует c_1 – наибольший корень $f(x)$, такой, что $a < c_1 < B$, рассматривается аналогично.

Итак, $A < c < B$. Таким образом, $c \in \overline{K}$, являясь алгебраическим над K, порождает сечение (A, B). Значит, сечение (A, B) алгебраическое по Шелаху. □

2. Свойства упорядоченных полей, связанные с сечениями

Строение сечений в упорядоченном поле несёт существенную информацию о свойствах самого поля. Для исследования полей формальных степенных рядов получим некоторые следствия из теорем теории упорядоченных полей.

Через $F(x)$ будем обозначать простое расширение поля F (наименьшее поле, содержащее F и x).

Теорема 2.1 [6]. Если сечение (A, B) поля F трансцендентно, x принадлежит некоторому упорядоченному расширению поля F и $A < x < B$, то порядок из F единственным образом продолжается на поле $F(x)$, полученное заполнением этого сечения, и далее на вещественное замыкание $\overline{F(x)}$.

Теорема 2.2 [5]. Упорядоченное поле F вещественно замкнуто тогда и только тогда, когда все сечения F трансцендентны.

Следствие 2.3. Пусть (A, B) – сечение вещественно замкнутого поля F, порождённое элементом $x \in \mathbf{R}[[G_F]] \setminus F$, $A < x < B$. Если $y \in \mathbf{R}[[G_F]] \setminus F$, $A < y < B$, то $\overline{F(x)}$ и $\overline{F(y)}$ упорядоченно изоморфны.

Доказательство. По теореме 2.2 в вещественно замкнутом поле F все сечения трансцендентны, далее применяем теорему 2.1 (см. также [11]). □

Теорема 2.4 [7]. Пусть (A, B) – сечение упорядоченного поля K, $f(x) \in K[x]$. Если сам многочлен и все его производные не меняют знак на сечении (A, B), то найдутся такие $a \in A$ и $b \in B$, что для каждого упорядоченного расширения F поля K выполняется:

1) $f(x) > 0$ всюду на отрезке $[a, b]_F$ поля F или $f(x) < 0$ всюду на отрезке $[a, b]_F$ поля F;

2) $f(x)$ строго монотонно на $[a, b]_F$.

Следствие 2.5. Пусть (A, B) – трансцендентное сечение упорядоченного поля K. Если F есть упорядоченное расширение поля K и элемент $t \in F$ таков, что $A < t < B$, то элемент t трансцендентен над K.

Доказательство. Если t – алгебраический над K элемент, то найдётся многочлен $f(x) \in K[x]$, такой, что $f(t) = 0$. Так как сечение (A, B) трансцендентное, то $f(x)$ и его производные не меняют знак на (A, B). По теореме 2.4 $f(x)$ не меняет знак всюду на некотором отрезке $[a, b]_F$ поля F, где $a \in A$ и $b \in B$, $A < t < B$. Значит, $f(t) \neq 0$. Получаем противоречие. □

Следствие 2.6. Пусть (A, B) – сечение вещественно замкнутого поля K. Если F есть упорядоченное расширение поля K и элемент $t \in F$ таков, что $A < t < B$, то элемент t трансцендентен над K.

Доказательство. По теореме 2.2 сечение (A, B) трансцендентно. Далее применяем следствие 2.5. □

Таким образом, если поле вещественно замкнуто, то между берегами каждого его сечения в любом его упорядоченном расширении нет алгебраических над этим полем элементов.

Лемма 2.7. Пусть (A,B) – трансцендентное (т.е. не являющееся алгебраическим по Пестову) сечение упорядоченного поля K. Тогда (A,B) не является алгебраическим и по Шелаху.

Доказательство. Если (A,B) алгебраическое (по Шелаху), то, по определению, существуют упорядоченное расширение F поля K и элемент $t \in F \setminus K$, порождающий данное сечение (A,B), причем t является алгебраическим элементом над K. Однако по следствию 2.5 элемент t трансцендентен над K. Противоречие. □

Таким образом, для упорядоченного поля понятия «сечение, алгебраическое по Пестову» и «сечение, алгебраическое по Шелаху» совпадают.

Следствие 2.8. Сечение упорядоченного поля алгебраическое по Пестову тогда и только тогда, когда оно алгебраическое по Шелаху.

Доказательство. По лемме 1.5 и лемме 2.7.

Из результатов [9] следует

Теорема 2.9 [9]. Пусть $x \in \overline{\overline{F}(x)} \setminus \overline{F}$ порождает сечение (A_x, B_x) в поле $\overline{F}$. Тогда для каждого сечения (A_y, B_y) в $\overline{F}$, порождённого некоторым $y \in \overline{\overline{F}(x)} \setminus \overline{F}$ и не являющегося алгебраическим по Шелаху, имеют место равенства $cf(A_x) = cf(A_y),\ \ coi(B_x) = coi(B_y)$.

Следствие 2.10. Пусть F – вещественно замкнутое поле и $x \in \overline{F(x)} \setminus F$ порождает сечение (A_x, B_x) в поле F. Тогда для каждого сечения (A_y, B_y) в F, порождённого некоторым $y \in \overline{F(x)} \setminus F$, имеют место равенства $cf(A_x) = cf(A_y)$, $coi(B_x) = coi(B_y)$.

Доказательство. Применяем лемму 2.7 и теорему 2.9. □

Теорема 2.11 [12]. Пусть G – линейно упорядоченная делимая абелева группа. Пусть β – кардинал, $\aleph_0 < \beta \le |G|$. Тогда конфинальность каждого симметричного сечения поля $\mathbf{R}[[G,\beta]]$ равна $cf(\beta)$. В частности, если β – регулярный кардинал, то конфинальность каждого симметричного сечения $\mathbf{R}[[G,\beta]]$ равна β.

Теорема 2.12 [6]. Пусть вещественно замкнутые поля F_1, F_2 таковы, что $|F_1| = |F_2| = \alpha > \aleph_0$ и конфинальность каждого симметричного сечения в обоих полях равна α. Тогда для того чтобы F_1, F_2 были упорядоченно изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы группы архимедовых классов этих полей были изоморфны.

Следствие 2.13 (ОКГ) [13]. Пусть G – линейно упорядоченная делимая абелева группа, β – регулярный кардинал, $\aleph_0 < \beta = cf(G) = |G|$. Тогда каждое вещественно замкнутое поле F мощности β с группой архимедовых классов G, в котором каждое симметричное сечение имеет конфинальность β, упорядоченно изоморфно полю $\mathbf{R}[[G,\beta]]$.

Теорема 2.14 [13]. Пусть вещественно замкнутое поле F имеет группу архимедовых классов G_F. Сечение (A, B) поля F симметрично тогда и только тогда, когда существует элемент $x \in \mathbf{R}[[G_F]] \setminus F$, такой, что $A < x < B$.

Пусть G – линейно упорядоченная абелева группа, $x \in \mathbf{R}[[G]]$. *Усечением* (*начальным отрезком*) ряда $x = \sum_{g \in G} r_g g$ называется ряд вида $\sum_{g \in \operatorname{supp}(x), g > \tilde{g}} r_g g$ для некоторого $\tilde{g} \in \operatorname{supp}(x)$, $\tilde{g} < \max \operatorname{supp}(x)$. Поле $F \subset \mathbf{R}[[G]]$ называется *замкнутым относительно усечений*, если усечение каждого ряда из поля F принадлежит F [14, 15]. Например, поле ограниченных формальных степенных рядов замкнуто относительно усечений.

Далее будем использовать более общие результаты из [15] для нашего частного случая формальных степенных рядов с вещественными коэффициентами.

Теорема 2.15 ([15], лемма 3.4, с. 644). Пусть G – линейно упорядоченная абелева группа, F – замкнутое относительно усечений подполе поля $\mathbf{R}[[G]]$ и $x \in \mathbf{R}[[G]]$ – такой элемент, что все его усечения принадлежат полю F. Тогда $F(x)$ тоже замкнуто относительно усечений.

Теорема 2.16 (F. Delon, [15], лемма 3.5, с. 644). Пусть F – замкнутое относительно усечений подполе $\mathbf{R}[[G_F]]$. Тогда $\overline{F}$ тоже замкнуто относительно усечений.

3. Простые расширения полей ограниченных формальных степенных рядов

В [13] вводится конструкция вещественно замкнутого поля H, имеющего симметричное сечение заданной конфинальности. Применим эту конструкцию для полей ограниченных формальных степенных рядов. Будем принимать обобщённую континуум-гипотезу.

Пусть G – линейно упорядоченная делимая абелева группа, β – регулярный кардинал, $\aleph_0 < \beta < \beta^+ = cf(G) = |G|$. При ОКГ имеем

$$|\mathbf{R}[[G, \beta]]| = |\mathbf{R}[[G, \beta^+]]| = |G| = \beta^+ \quad < \quad |\mathbf{R}[[G]]| = 2^{|G|} = 2^{\beta^+} \text{ [2, 16].}$$

Так как $\beta^+ = cf(G)$, найдётся $\Gamma = \{g_\gamma\}_{\gamma \in \beta^+}$ – подмножество группы G, такое, что отображение $\gamma \mapsto g_\gamma$ задаёт инверсное подобие кардинала β^+ и множества Г. Зададим ряд: $x_{\beta^+} = \sum_{g \in \Gamma} 1g$, $x_{\beta^+} \in \mathbf{R}[[G]] \setminus \mathbf{R}[[G, \beta^+]]$. По теоремам 2.11 и 2.14 ряд x_{β^+} порождает в поле $\mathbf{R}[[G, \beta^+]]$ симметричное сечение конфинальности β^+, обозначим его (A, B).

Для каждого γ, $\beta \le \gamma < \beta^+$, через x_γ обозначим усечение $\sum_{\delta < \gamma} 1g_\delta$ ряда x_{β^+}. Так как мощность $\operatorname{supp}(x_\gamma)$ равна β, каждый ряд x_γ принадлежит полю $\mathbf{R}[[G, \beta^+]]$. Возрастающая последовательность $\{x_\gamma\}_{\beta \le \gamma < \beta^+}$ конфинальна A. По трансфинитной рекурсии строим последовательность вещественно замкнутых полей

$\{K_\gamma\}_{\beta\le\gamma<\beta^+}$. Первое поле в этой последовательности $K_\beta = \overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\beta)}$ – вещественное замыкание простого трансцендентного расширения поля $\mathbf{R}[[G,\beta]]$. Если γ – непредельный ординал, то полагаем $K_\gamma = \overline{K_{\gamma-1}(x_\gamma)}$. Заметим, что если $x_\gamma \in K_{\gamma-1}$, то $K_\gamma = K_{\gamma-1}$. Если γ – предельный ординал, то полагаем $K_\gamma = \overline{\left(\bigcup_{\beta\le\delta<\gamma} K_\delta\right)(x_\gamma)}$. Полагаем также $H = \bigcup_{\beta\le\gamma<\beta^+} K_\gamma$. В [13] доказано, что элемент x_{β^+} порождает в поле H симметричное сечение конфинальности β^+. Заметим, что при этом $\mathbf{R}[[G,\beta]] \subset H \subset \mathbf{R}[[G,\beta^+]]$ и x_{β^+} в поле $\mathbf{R}[[G,\beta]]$ порождает симметричное сечение конфинальности β, а в поле $\mathbf{R}[[G,\beta^+]]$ порождает симметричное сечение конфинальности β^+.

Сечение (A,B) упорядоченного поля F называется *фундаментальным* (*сечением Скотта*), если $\forall\varepsilon\in F^+ \ \exists a\in A,\ \exists b\in B,\ |b-a|<\varepsilon$ [2, 5, 9].

Если носитель $\Gamma = \operatorname{supp}(x_{\beta^+})$ коинициален G, то сечение (A,B) фундаментально и не производится элементом самого поля; такие сечения всегда имеют конфинальность, равную $cf(G)$ [12]. Если Γ не коинициально G (группу, имеющую такие подмножества, можно построить [10]), то сечение (A,B) не является фундаментальным [17]. Если в поле H все симметричные сечения фундаментальны, то H упорядоченно изоморфно $\mathbf{R}[[G,\beta^+]]$. Действительно, по следствию 2.13 из теоремы 2.12 об изоморфизме каждое вещественно замкнутое поле мощности β^+ с группой архимедовых классов G, в котором каждое симметричное сечение имеет конфинальность β^+, упорядоченно изоморфно полю $\mathbf{R}[[G,\beta^+]]$. И если в поле H все симметричные сечения фундаментальны, то по [12] они будут иметь конфинальность, равную $cf(G)=\beta^+$.

Утверждение 3.1. Поле H – наименьшее по включению вещественно замкнутое подполе поля $\mathbf{R}[[G,\beta^+]]$, содержащее поле $\mathbf{R}[[G,\beta]]$ и все усечения ряда x_{β^+}.

Доказательство. Пусть H_1 – наименьшее по включению вещественно замкнутое подполе поля $\mathbf{R}[[G,\beta^+]]$, содержащее поле $\mathbf{R}[[G,\beta]]$ и все усечения ряда x_{β^+}. Очевидно, что $H_1 \subset H$. Обратное включение докажем по трансфинитной индукции. Имеем $K_\beta = \overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\beta)} \subset H_1$. Далее, пусть для всех δ, таких, что $\beta\le\delta<\gamma$, выполняется $K_\delta \subset H_1$. Если γ – непредельный ординал, то $\overline{K_{\gamma-1}(x_\gamma)} = K_\gamma \subset H_1$. Если γ – предельный ординал, то $\bigcup_{\beta\le\delta<\gamma} K_\delta \subset H_1$ и $K_\gamma = \overline{\left(\bigcup_{\beta\le\delta<\gamma} K_\delta\right)(x_\gamma)} \subset H_1$. Следовательно, $H = \bigcup_{\beta\le\gamma<\beta^+} K_\gamma \subset H_1$. □

Утверждение 3.2. Поле H замкнуто относительно усечений.

Доказательство. По трансфинитной индукции.

База индукции: $K_\beta = \overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\beta)}$ замкнуто относительно усечений. Действительно, мощность носителя каждого усечения ряда x_β строго меньше β, поэтому $\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\beta)$ по теореме 2.15 замкнуто относительно усечений и по теореме 2.16 поле $\overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\beta)}$ замкнуто относительно усечений.

Пусть теперь для всех δ, таких, что $\beta \le \delta < \gamma$, поле K_δ замкнуто относительно усечений. Если γ – непредельный ординал, то $\overline{K_{\gamma-1}(x_\gamma)} = K_\gamma$ замкнуто относительно усечений по теоремам 2.15, 2.16. Если γ – предельный ординал, то по построению $\bigcup\limits_{\beta\le\delta<\gamma} K_\delta$ есть объединение расширяющихся полей, замкнутых относительно усечений. Поэтому само объединение также замкнуто относительно усечений. К полю $K_\gamma = \overline{\left(\bigcup\limits_{\beta\le\delta<\gamma} K_\delta\right)(x_\gamma)}$ применяем теоремы 2.15, 2.16. Поле H есть объединение вложенных расширяющихся полей K_γ, замкнутых относительно усечений, поэтому H замкнуто относительно усечений. □

Утверждение 3.3. Поле $\overline{H(x_{\beta^+})}$ замкнуто относительно усечений.

Доказательство. По утверждению 3.2 поле H замкнуто относительно усечений. Далее применяем теоремы 2.15, 2.16. □

Теорема 3.4.

1) $\bigcup\limits_{\beta\le\gamma<\beta^+} \overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\gamma)} \subset H$ и каждое поле из объединения упорядоченно изоморфно полю $\overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\beta)}$.

2) Если для каждого предельного ординала γ, $\beta \le \gamma < \beta^+$, поле $\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\gamma)$ замкнуто относительно усечений, то $\bigcup\limits_{\beta\le\gamma<\beta^+} \overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\gamma)} = H$.

Доказательство.

1) $\mathbf{R}[[G,\beta]] \subset H$ и для каждого γ, $\beta \le \gamma < \beta^+$, имеем $x_\gamma \in H$. Тогда $\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\gamma) \subset H$, и так как H вещественно замкнуто, $\overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\gamma)} \subset H$, поэтому $\bigcup\limits_{\beta\le\gamma<\beta^+} \overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\gamma)} \subset H$.

Рассмотрим теперь вещественно замкнутые поля $\overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\beta)}$ и $\overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\gamma)}$, где $\beta \le \gamma \le \beta^+$. Ряды x_β и x_γ порождают в $\mathbf{R}[[G,\beta]]$ то же самое сечение (A,B), что и ряд x_{β^+}, то есть $A < x_\beta \le x_\gamma \le x_{\beta^+} < B$. Тогда по следствию 2.3 $\overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\beta)}$ и $\overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\gamma)}$ упорядоченно изоморфны.

2) Докажем по трансфинитной индукции, что $K_\gamma = \overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\gamma)}$ для всех $\beta \le \gamma < \beta^+$. Имеем $K_\beta = \overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\beta)}$. Далее, пусть для всех δ, таких, что $\beta \le \delta < \gamma < \beta^+$, выполняется $K_\delta = \overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\delta)}$. Докажем, что $K_\gamma = \overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\gamma)}$.

2А) Пусть γ – непредельный ординал, тогда, с одной стороны, $\overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\gamma)} \subset \overline{\overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_{\gamma-1})}(x_\gamma)} = \overline{K_{\gamma-1}(x_\gamma)} = K_\gamma$. С другой – $x_\gamma - 1g_{\gamma-1} = = x_{\gamma-1} \in \overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\gamma)}$, следовательно, $\overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_{\gamma-1})} \subset \overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\gamma)}$ и, далее, $K_\gamma = \overline{\overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_{\gamma-1})}(x_\gamma)} \subset \overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\gamma)}$. Получаем $K_\gamma = \overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\gamma)}$.

2Б) Пусть γ – предельный ординал по построению и индукционному предположению: $K_\gamma = \overline{\left(\bigcup_{\beta\le\delta<\gamma} K_\delta\right)(x_\gamma)} = \overline{\left(\bigcup_{\beta\le\delta<\gamma} \overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\delta)}\right)(x_\gamma)}$. С одной стороны, $\overline{\boldsymbol{R}[[G,\beta]](x_\gamma)} \subset K_\gamma = \overline{\left(\bigcup_{\beta\le\delta<\gamma} \overline{\boldsymbol{R}[[G,\beta]](x_\delta)}\right)(x_\gamma)}$. С другой – по условию $\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\gamma)$ замкнуто относительно усечений, поэтому $x_\delta \in \mathbf{R}[[G,\beta]](x_\gamma)$ для всех $\beta \le \delta < \gamma$ и $\overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\delta)} \subset \overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\gamma)}$. Значит, $\bigcup_{\beta\le\delta<\gamma} \overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\delta)} \subset \overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\gamma)}$, и наконец,

$$K_\gamma = \overline{\left(\bigcup_{\beta\le\delta<\gamma} \overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\delta)}\right)(x_\gamma)} \subset \overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\gamma)}. \square$$

Теорема 3.5. $\overline{H(x_{\beta^+})} \setminus H \ne \varnothing$ и каждый элемент разности $\overline{H(x_{\beta^+})} \setminus H$ порождает в поле H симметричное сечение конфинальности β^+.

Доказательство. $H \subset \mathbf{R}[[G,\beta^+]]$, поэтому $x_{\beta^+} \notin H$. Значит, уже $H(x_{\beta^+}) \setminus H \ne \varnothing$. Ряд x_{β^+} порождает в H симметричное и трансцендентное сечение конфинальности β^+. Если $t \in \overline{H(x_{\beta^+})} \setminus H$, то t порождает в H симметричное (по теореме 2.14) и трансцендентное сечение. Далее применяем следствие 2.10. □

Замечание 3.6. Если $H = \overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_{\gamma_0})}$ для некоторого γ_0, $\beta \le \gamma_0 < \beta^+$, то H упорядоченно изоморфно $\overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\beta)}$. В этом случае поля H и $\mathbf{R}[[G,\beta^+]]$ упорядоченно изоморфны тогда и только тогда, когда $\mathbf{R}[[G,\beta^+]]$ упорядоченно изоморфно своему подполю $\overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_\beta)}$.

Замечание 3.7. Если H не изоморфно (упорядоченно) полю $\mathbf{R}[[G,\beta^+]]$, то в поле H не все симметричные сечения будут иметь конфинальность β^+. Действительно, если бы все симметричные сечения в H имели конфинальность β^+, то H было бы изоморфно полю $\mathbf{R}[[G,\beta^+]]$ по следствию 2.13. Таким образом, в этом случае H будет примером упорядоченного поля с симметричными сечениями разной конфинальности.

Остаются открытыми вопросы: будет ли H равно (изоморфно) $\mathbf{R}[[G,\beta^+]]$; существует ли упорядоченное поле с симметричными сечениями разной конфинальности? Будут ли упорядоченно изоморфны поля $\overline{\mathbf{R}[[G,\beta]](x_{\beta^+})}$ и $\overline{\mathbf{R}[[G,\beta^+]](x_{\beta^+})}$?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фукс Л.* Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир, 1965.
2. *Dales H.J.*, *Woodin H.* Super real fields. Oxford: Clarenden Press, 1996.
3. *ван дер Варден Б.Л.* Алгебра. М.: Наука, 1979.
4. *Кейслер Г.*, *Чен Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.
5. *Пестов Г.Г.* Строение упорядоченных полей. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980.
6. *Пестов Г.Г.* К теории сечений в упорядоченных полях // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 6. С. 1213–1456.
7. *Пестов Г.Г.* К теории упорядоченных полей и групп: дис. … докт. физ.-мат. наук. Томск, 2003.
8. *Пестов Г.Г.* Исследования по упорядоченным группам и полям в Томском государственном университете // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 3(15).
9. *Shelah S.* Quite complete real closed fields // Israel J. Math. 142 (2004). P. 261–272.
10. *Galanova N.Yu.* Symmetric and asymmetric gaps in some fields of formal power series // Serdica Math. 2004. V. 30. P. 495–504.
11. *Робинсон А.* Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. М.: Наука, 1967.
12. *Галанова Н.Ю.*, *Пестов Г.Г.* Симметрия сечений в полях формальных степенных рядов // Алгебра и логика. 2008. Т. 47. № 2. С. 174–185.
13. *Галанова Н.Ю.* Линейно упорядоченные поля с симметричными сечениями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 46. С. 14–20.
14. *Kuhlmann F.-V.*, *Kuhlmann S.*, *Marshall M.*, *Zekavat M.* Embedding ordered fields in formal power series fields // J. Pure and Applied Algebra. 2002. V. 169. Issue 1. P. 71–90.
15. *Mourgues M.H.*, *Ressayre J.P.* Every real closed field has an integer part // J. Symb. Logic. 1993. V. 58. P. 641–647.
16. *Alling N.L.* On the existence of real-closed fields that are η_α-set of power $\aleph_\alpha$ // Trans. Amer. Math. Soc. V. 103 (1962). P. 341–352.
17. *Галанова Н.Ю.* Симметрия сечений в полях формальных степенных рядов и нестандартной вещественной прямой // Алгебра и логика. 2003. Т. 42. № 1. С. 26–36.

Статья поступила 28.01.2018 г.

Galanova N.Yu. (2018) ON SYMMETRIC CUTS OF A REAL-CLOSED FIELD. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 53. pp. 5–15

DOI 10.17223/19988621/53/1

Keywords: real closed field, truncation closed field, field of bounded formal power series, symmetric cut, cofinality of a cut.

The paper investigates properties of a subfield of the field of bounded formal power series $\mathbf{R}[[G,\beta^+]]$, $|G| = cf(G) = \beta^+ > \beta > \aleph_0$. We construct (under GCH) a real closed field H,

$\mathbf{R}[[G,\beta]] \subset H \subset \mathbf{R}[[G,\beta^+]]$ which has symmetric cuts of cofinality β^+. We show that H and $\overline{H(x_{\beta^+})}$ are truncation closed. We use G. Pestov's and S. Shelah's classifications of cuts (a symmetric cut and a non-algebraic cut).

AMS Mathematical Subject Classification: 12F20, 12J15

GALANOVA Nataliya Yur'evna (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: galanova@math.tsu.ru

REFERENCES

1. Fuchs L. (1963) *Partially ordered algebraic systems*. Pergamon Press.
2. Dales H.J., Woodin H. (1996) *Super real fields*. Oxford: Clarenden Press.
3. van der Waerden B.L. (1971) *Algebra*. New York: Springer.
4. Keisler H.G., Chang C.C. (1973) *Model Theory*. Amsterdam: North-Holland.
5. Pestov G.G. (1980) *Stroenie uporyadochennykh poley* [The structure of ordered fields]. Tomsk: TSU Publ.
6. Pestov G.G. (2001) On the theory of cuts in ordered fields (Russ.). *Sib. Math. J.* 42(6). pp. 1350–1360.
7. Pestov G.G. (2003) *K teorii uporyadochennych poley i grupp* [To the theory of ordered fields and groups]. Dis. Doct. fiz.-mat. nauk; 01.01.06. Tomsk.
8. Pestov G.G. (2011) Issledovaniya po uporyadochennym gruppam i polyam v Tomskom gosudarstvennom universitete [Investigations on ordered groups and fields in Tomsk State University]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika.* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 3(15).
9. Shelah S. (2004) Quite complete real closed fields. *Israel Journal of Mathematics* 142. pp. 261–272. https://arxiv.org/pdf/math/0112212v1.pdf
10. Galanova N.Yu. (2004) Symmetric and asymmetric gaps in some fields of formal power series. *Serdica Math.* 30. pp. 495–504.
11. Robinson A. (1963) *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*. Amsterdam: North-Holland.
12. Galanova N.Y., Pestov G.G. (2008) Symmetry of cuts in fields of formal power series. *Algebra and Logic*. 47(2). pp. 100–106. DOI:10.1007/s10469-008-9001-5.
13. Galanova N.Yu. (2017) Totally ordered fields with symmetric cuts. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 46. pp. 14–20. DOI:10.17223/19988621/46/2
14. Kuhlmann F.-V., Kuhlmann S., Marshall M., Zekavat M. (2002) Embedding ordered fields in formal power series fields. *Journal of Pure and Applied Algebra*. 169(1). pp. 71–90.
15. Mourgues M.H., Ressayre J.P. (1993) Every real closed field has an integer part. *J. Symb. Logic*. 58. pp. 641–647.
16. Alling N.L. (1962) On the existence of real-closed fields that are η_α-set of power $\aleph_\alpha$ // *Trans. Amer. Math. Soc.* V. 103. pp. 341–352.
17. Galanova N.Y. (2003) Symmetry of sections in fields of formal power series and nonstandard real line. *Algebra and Logic.* 42. pp. 14–19. DOI: 10.1023/A:1022672606591.