УДК 512.552 MSC 15A30
DOI 10.17223/19988621/53/2

П.А. Крылов, Ц.Д. Норбосамбуев

ГРУППА АВТОМОРФИЗМОВ ОДНОГО КЛАССА АЛГЕБР ФОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ

При некоторых условиях найдено строение группы автоморфизмов алгебры формальных матриц над коммутативным кольцом. Группа автоморфизмов такой алгебры является полупрямым произведением нескольких подгрупп, состоящих из автоморфизмов с известным строением. Это достигается за счет того, что алгебра формальных матриц представляется как расщепляющееся расширение некоторого нильпотентного идеала с помощью произведения обычных колец матриц.

Ключевые слова: *автоморфизм*, *алгебра формальных матриц*, *полупрямое произведение.*

Автоморфизмы и изоморфизмы различных колец и алгебр всегда привлекают внимание специалистов (см., например, [1–8]). В данной статье рассматриваются автоморфизмы алгебр формальных матриц над коммутативным кольцом.

Если R – кольцо, то $M(n, R)$ – кольцо всех $(n\times n)$-матриц над R, E – единичная матрица. Через $\mathrm{Aut}_R(T)$ обозначается группа автоморфизмов R-алгебры T над коммутативным кольцом R.

1. Алгебры формальных матриц

Общая теория колец формальных матриц изложена в книгах [9] и [10]. Определим их один частный вид – алгебры формальных матриц над данным коммутативным кольцом R.

Пусть $n \geq 2$ и $\{s_{ijk} \mid i, j, k = 1,\ldots,n\}$ – некоторое множество элементов кольца R, удовлетворяющих равенствам

$$s_{iik} = 1 = s_{ikk},\ \ s_{ijk}\cdot s_{ikl} = s_{ijl}\cdot s_{jkl} \tag{1}$$

для всех индексов $i, j, k, l = 1,\ldots,n$.

Для произвольных матриц $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ из $M(n, R)$ положим

$$AB = C = (c_{ij}),\ \text{где}\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ikj}a_{ik}b_{kj}\ .$$

Все матрицы порядка n над кольцом R относительно сложения и введенного нового умножения образуют ассоциативную R-алгебру с единицей. Будем её обозначать $M(n, R, \Sigma)$, где $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1,\ldots,n\}$, или буквой K. Алгебра K называется алгеброй формальных матриц порядка n над кольцом R. Множество Σ – система множителей, а его элементы называются множителями R-алгебры K. Если все s_{ijk} равны 1, то получаем алгебру $M(n, R)$.

Из тождеств (1) вытекают следующие тождества:

$$s_{iji} = s_{jij} = s_{ijl}\cdot s_{jil} = s_{lij}\cdot s_{lji}. \tag{2}$$

Симметрическая матрица $S = (s_{iji})$ называется матрицей множителей алгебры K.

Пусть $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1,\ldots,n\}$ – система множителей, τ – подстановка степени n. Тогда $\{s_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)} \mid i, j, k = 1,\ldots,n\}$ – тоже система множителей, так как она удовлетворяет равенствам (1). Обозначим её через $\tau\Sigma$. Существует алгебра формальных матриц $\tau K = M(n, R, \tau\Sigma)$. Соответствие $A \to \tau A$, где $A = (a_{ij})$, $\tau A = (a_{\tau(i)\tau(j)})$, задает изоморфизм алгебр K и τK.

До конца статьи буква K обозначает некоторую алгебру формальных матриц $M(n, R, \Sigma)$, все множители которой равны 1 или 0.

Пусть индексы i, j, k попарно различны. С помощью тождеств (2) нетрудно убедиться, что для множителей s_{iji}, s_{jkj} и s_{kik} имеет место только одна из следующих возможностей:

1) все три элемента – единицы;

2) какие-то два из этих трех элементов – нули, а третий – единица;

3) все три элемента – нули.

Существует подстановка τ, такая, что в матрице τS (как действуют подстановки на матрицах написано выше) на главной диагонали стоят блоки, состоящие из единиц, а все позиции вне этих блоков заняты нулями (можно говорить, что матрица τS имеет канонический вид). Алгебры K и τK изоморфны. Договоримся, что матрица множителей S алгебры K уже имеет указанный блочный вид.

Можно получить теперь некоторое разложение алгебры K. Пусть число блоков на главной диагонали матрицы S равно m. На главной диагонали каждой матрицы A из K выделим блоки $A_1,\ldots,A_m$ того же порядка и в той же последовательности, что и на главной диагонали матрицы S. Тогда блоки A_l для фиксированного l всех матриц из K образуют алгебру матриц $M(k_l, R)$ для какого-то l. Обозначим ее K_l.

В дальнейшем буква L обозначает прямую сумму алгебр $K_1 \oplus \ldots \oplus K_m$, а I – множество всех матриц $A \in K$, для которых блоки $A_1,\ldots,A_m$ состоят из нулей. Тогда I – нильпотентный идеал алгебры K. И верно равенство $K = L \oplus I$, т. е. K есть расщепляющееся расширение идеала I с помощью алгебры L.

Считаем, что множители s_{ijk} удовлетворяют следующему дополнительному условию: для любых попарно различных индексов i, j, k из $s_{iji} = s_{jkj} = s_{kik} = 0$ следует $s_{ijk} = 0$. В таком случае $I^2 = 0$.

2. Автоморфизмы алгебр формальных матриц

Пусть дана R-алгебра K. Запишем ее, как в разделе 1, в виде $K = L \oplus I$. Предполагаем, что для L и I выполняются условия, сформулированные в разделе 1. Еще считаем, что $\varphi I = I$ для всех $\varphi \in \mathrm{Aut}_R(K)$. Это будет так, когда, например, R – полупервичное кольцо.

Естественным образом идеал I является L–L-бимодулем. Если $\alpha \in \mathrm{Aut}_R(L)$, то имеем также притягивающий L–L-бимодуль ${}_\alpha I_\alpha$, где $x \circ a \circ y = \alpha(x) a \alpha(y)$ для всех $x, y \in L$, $a \in I$. Разложение $L = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m$ позволяет рассматривать каждую матрицу из K как блочную матрицу порядка m. Запишем $E = e_1 \oplus \ldots \oplus e_m$, где e_i – единичный элемент кольца K_i. Положим $I_{ij} = e_i I e_j$. Здесь I_{ij} – подбимодуль L–L-бимодуля I.

Каждый автоморфизм φ R-алгебры K можно представить матрицей $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\delta} & \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$ относительно разложения $K = L \oplus I$. В этой матрице $\alpha{:}L \to L$, $\beta{:}I \to I$, $\delta{:}L \to I$ – R-модульные гомоморфизмы. Кроме того, α – автоморфизм R-алгебры L, β – изоморфизм между бимодулями ${}_1I_1$ и ${}_\alpha I_\alpha$, δ – дифференцирование алгебры L со значениями в бимодуле ${}_\alpha I_\alpha$.

Верно и обратное. Если $\alpha{:}L\to L$, $\beta{:}I\to I$, $\delta{:}L\to I$ – отображения со свойствами, перечисленными выше, то преобразование алгебры K, задаваемое матрицей $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{\delta} & \boldsymbol{\beta}\end{pmatrix}$, является её автоморфизмом. Не будем различать автоморфизм и соответствующую матрицу.

Алгебра L сепарабельна. Поэтому всякое дифференцирование со значениями в L–L-бимодуле ${}_\alpha I_\alpha$ является внутренним. То есть найдется матрица $D\in I$ со свойством $\delta(X)=(\alpha X)D-D(\alpha X)$, $X\in L$. Изоморфизм β «переставляет» бимодули I_{ij} для всех $i,j=1,\ldots,m$ с $i\neq j$.

Приведем некоторую полезную информацию о группе $\mathrm{Aut}_R(L)$. Считаем далее кольцо R неразложимым. Несложно проверить, что всякий автоморфизм α алгебры L «переставляет» кольца $K_1,\ldots,K_m$ в том смысле, что для любого $i=1,\ldots,m$ верно равенство $\alpha K_i=K_j$ для какого-то j. Используя это наблюдение, можно выделить в группе $\mathrm{Aut}_R(L)$ подгруппу Σ, изоморфную некоторой группе подстановок степени m (ее строение известно; мы отождествляем автоморфизмы из Σ с соответствующими подстановками). Обозначим через Γ нормальную подгруппу в $\mathrm{Aut}_R(L)$, состоящую из автоморфизмов, переводящих каждое кольцо K_i в себя. Тогда $\Gamma\cap\Sigma=\langle e\rangle$ и группа $\mathrm{Aut}_R(L)$ есть полупрямое произведение $\Gamma\leftthreetimes\Sigma$ подгрупп Γ и Σ. Последнее означает, что каждый автоморфизм $\alpha\in\mathrm{Aut}_R(L)$ можно единственным образом записать в виде $\alpha=\mu\tau$, где $\mu\in\Gamma$, $\tau\in\Sigma$. Это дает гомоморфизм h: $\mathrm{Aut}_R(L)\to\Sigma$, $\alpha\to\tau$.

Определим еще такой гомоморфизм $f{:}\,\mathrm{Aut}_R(K)\to\mathrm{Aut}_R(L)$, что $f(\varphi)=\alpha$ для каждого $\varphi=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{\delta} & \boldsymbol{\beta}\end{pmatrix}\in\mathrm{Aut}_R(K)$. Далее положим $g=hf$. Тогда $\mathrm{Ker}g=\left\{\varphi=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{\delta} & \boldsymbol{\beta}\end{pmatrix}\mid \alpha K_i=K_i, i=1,\ldots,m\right\}$. Что важно, подгруппа $\mathrm{Im}g$ совпадает с Σ.

Подстановки из Σ естественным образом можно считать подстановками степени n. Затем, используя соглашение о множителях s_{ijk}, находим, что для всякой подстановки $\tau\in\Sigma$ верно равенство $s_{ijk}=s_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)}$ при всех $i,j,k=1,\ldots,n$. Получается, что соответствие $(a_{ijk})\to(a_{\tau(i)\tau(j)})$ является автоморфизмом R-алгебры K (см. раздел 1). Обозначим этот автоморфизм через ξ_τ. Он переставляет в матрицах из K те же строки и столбцы, что и автоморфизм τ в матрицах из L. Автоморфизмы вида ξ_τ для всех $\tau\in\Sigma$ образуют подгруппу в $\mathrm{Aut}_R(K)$. Она изоморфна Σ при соответствии $\xi_\tau\to\tau$. Отождествляем ξ_τ с τ. После этого можно записать полупрямое произведение $\mathrm{Aut}_R(K)=\mathrm{Ker}g\leftthreetimes\Sigma$.

Есть еще одно полупрямое разложение группы $\mathrm{Aut}_R(K)$. Пусть буква Δ обозначает нормальную подгруппу автоморфизмов вида $\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{\delta} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$. Поскольку дифференцирование δ является внутренним, то подгруппа Δ изоморфна мультипликативной группе $E{+}I$. Пусть Λ – подгруппа автоморфизмов вида $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta}\end{pmatrix}$. Имеем разложение $\mathrm{Aut}_R(K)=\Delta\leftthreetimes\Lambda$. Существуют также разложения

$$\mathrm{Ker}g=\Delta\leftthreetimes\left\{\varphi=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta}\end{pmatrix}\mid \alpha K_i=K_i, i=1,\ldots,m\right\}$$

и
$$\mathrm{Aut}_R(K)=\Delta\leftthreetimes\left\{\varphi=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta}\end{pmatrix}\mid \alpha K_i=K_i, i=1,\ldots,m\right\}\leftthreetimes\Sigma.$$

Отметим, что строение подгрупп Δ и Σ понятно. Подгруппа Ker$f$ также имеет достаточно ясное строение (некоторые сведения о ней есть в разделе 4). Проблема описания группы $\mathrm{Aut}_R(K)$ фактически сводится к вычислению группы $\mathrm{Im}(f\,|_{\mathrm{Ker}g})$. Обозначим ее через Ω. Таким образом, $\Omega = \{\,\alpha \in \Gamma \mid$ найдется $\varphi \in \mathrm{Aut}_R(K)$ такой, что $\varphi = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$ для некоторого $\beta\}$. Справедливо равенство $\mathrm{Im}f = \Omega \rightthreetimes \Sigma$. В ряде случаев строение группы Ω будет выявлено в следующем разделе.

3. Группа Ω

Сохраняются все принятые ранее обозначения. Пусть $\alpha \in \Omega$ и $\varphi = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$ – соответствующий автоморфизм R-алгебры K, то есть $f(\varphi) = \alpha$. Для любых i, $j = 1,\ldots,m$ верны равенства $\beta(I_{ij}) = \alpha(e_i)\mathrm{I}\alpha(e_j) = e_i I e_j = I_{ij}$ (L–L-бимодули I_{ij} появились в разделе 2). Обозначим $\beta_{ij} = \beta\,|_{I_{ij}}$. Запишем еще $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$, где $\alpha_i = \alpha\,|_{K_i} \in \mathrm{Aut}_R(K_i)$. Тогда $\beta_{ij} : {}_1(I_{ij})_1 \to {}_{\alpha_i}(I_{ij})_{\alpha_j}$ – изоморфизм K_i–K_j-бимодулей (бимодули вида ${}_\alpha A_\beta$ определены в разделе 2).

Вопросу о том, какие элементы из Γ входят в Ω, можно придать следующую форму. Для каких автоморфизмов $\alpha_i \in \mathrm{Aut}_R(K_i)$ и $\alpha_j \in \mathrm{Aut}_R(K_j)$ существуют изоморфизмы между K_i–K_j-бимодулями I_{ij}.

Обозначим через $l_1,\ldots,l_m$ порядки колец матриц $K_1,\ldots,K_m$ соответственно. Положим $c = \text{НОК}(l_1,\ldots,l_m)$ и $\overline{K} = M(c, R)$. Автоморфизмы $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ стандартным способом считаем автоморфизмами R-алгебры $\overline{K}$. Сформулируем одно необходимое условие существования изоморфизма L–L-бимодулей ${}_1I_1 \to {}_\alpha I_\alpha$.

Следствие 3.1. *Если L–L-бимодули ${}_1I_1$ и ${}_\alpha I_\alpha$ изоморфны, то для любых $i, j \in \{1,\ldots,m\}$ автоморфизм $\alpha_i^{-1}\alpha_j$ R-алгебры $\overline{K}$ является внутренним.*

Группу внутренних автоморфизмов R-алгебры T будем обозначать $Inn(\mathrm{Aut}_R(T))$.

Предложение 3.2. *Справедливо включение* $Inn(\mathrm{Aut}_R(L)) \subseteq \Omega$.

Следствие 3.3. *Если все автоморфизмы каждой из R-алгебр $K_1,\ldots,K_m$ являются внутренними (это будет так, когда R – кольцо главных идеалов или локальное кольцо), то имеет место равенство* $\Omega = \mathrm{Aut}_R(K_1) \times \ldots \times \mathrm{Aut}_R(K_m)$.

Строение группы Ω можно найти, если все кольца матриц $K_1,\ldots,K_m$ имеют одинаковый порядок. Отождествим эти кольца.

Следствие 3.4. *Пусть все кольца $K_1,\ldots,K_m$ имеют одинаковый порядок. Тогда группа Ω порождается внутренними автоморфизмами R-алгебры L и автоморфизмами вида* $(\gamma,\gamma,\ldots,\gamma)$.

4. Некоторые полупрямые разложения

Установим несколько изоморфизмов, проясняющих строение группы $\mathrm{Aut}_R(K)$.

Введенная в разделе 2 подгруппа Δ лежит в $Inn(\mathrm{Aut}_R(K))$. Разложение $\mathrm{Aut}_R(K) = \Delta \rightthreetimes \Lambda$ влечет разложение $Inn(\mathrm{Aut}_R(K)) = \Delta \rightthreetimes Inn_0(\mathrm{Aut}_R(K))$, где $Inn_0(\mathrm{Aut}_R(K))$ – подгруппа внутренних автоморфизмов вида $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$. Здесь α – внутренний автоморфизм алгебры L.

Обозначим через Φ подгруппу всех таких автоморфизмов $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, где α – внутренний автоморфизм алгебры L. Понятно, что $\Phi \subseteq \mathrm{Ker}g$ и верно равенство $\Phi = \mathrm{Ker}f \cdot Inn_o(\mathrm{Aut}_R(K))$.

Введем еще подгруппу Ψ, состоящую из автоморфизмов вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Действие изоморфизма β на каждом бимодуле I_{ij} $(i \neq j)$ совпадает с умножением на некоторый обратимый элемент кольца R. Отсюда следует изоморфизм $\Psi \cong U(R) \times \ldots \times U(R)$, где $U(R)$ – мультипликативная группа кольца R. Так как $\mathrm{Ker}f = \Delta \rtimes \Psi$, то имеем равенства:

$$\Phi = \mathrm{Ker}f \cdot Inn_o(\mathrm{Aut}_R(K)) = (\Delta \rtimes \Psi) \cdot Inn_o(\mathrm{Aut}_R(K)) =$$
$$= (\Delta \rtimes Inn_o(\mathrm{Aut}_R(K))) \cdot \Psi = Inn(\mathrm{Aut}_R(K)) \cdot \Psi.$$

Получается, что о подгруппе Φ мы располагаем полной информацией.

С помощью найденных полупрямых разложений выведем несколько результатов о строении подгруппы $\mathrm{Ker}g$ и всей группы $\mathrm{Aut}_R(K)$.

Следствие 4.1. Фактор-группа $\mathrm{Ker}g/\Phi$ изоморфно вкладывается в фактор-группу $\Gamma/Inn(\mathrm{Aut}_R(L))$ и является ограниченной абелевой группой.

Напомним, что буква S обозначает матрицу множителей кольца K (введена в разделе 1, там же есть сведения о блоках матрицы S).

Следствие 4.2. 1) Если порядки всех блоков на главной диагонали матрицы S попарно различны, то справедливо равенство $\mathrm{Aut}_R(K) = \mathrm{Ker}g$.

2) Если все автоморфизмы каждой R-алгебры $K_1, \ldots, K_m$ являются внутренними, то имеем равенство $\mathrm{Aut}_R(K) = \Delta \rtimes (\Psi \cdot Inn_o(\mathrm{Aut}_R(K))) \rtimes \Sigma$ (см. еще следствие 3.3).

Отметим, что строение всех встречающихся в п. 2 следствия 4.2 подгрупп известно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Anh P.N., van Wyk L.* Automorphism group of generalized triangular matrix rings // Linear Algebra Appl. 2011. V. 434. No. 4. P. 1018–1026. doi:10.1016/j.laa.2010.10.007.
2. *Anh P.N., van Wyk L.* Isomorphisms between strongly triangular matrix rings // Linear Algebra Appl. 2013. V. 438. No. 11. P. 4374–4481. https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.01.030.
3. Khazal K., Dascalescu S., van Wyk L. Isomorphism of generalized triangular matrix rings and recovery of tiles // Int. J. Math. Sci. 2003. No. 9. P. 533–538. http://dx.doi.org/10.1155/S0161171203205251.
4. Boboc C., Dascalescu S., van Wyk L. Isomorphisms between Morita context rings // Linear and Multilinear Algebra. 2012. V. 60. No. 5. P. 545–563. https://doi.org/10.1080/03081087.2011.611946.
5. *Kezlan T.P.* A note on algebra automorphisms of triangular matrices over commutative rings // Linear Algebra Appl. 1990. V. 135. P. 181–184. https://doi.org/10.1016/0024-3795(90)90121-R.
6. *Tang G., Li Ch., Zhou Y.* Study of Morita contexts // Comm. Algebra. 2014. V. 42. P. 1668–1681. https://doi.org/10.1080/00927872.2012.748327.
7. *Крылов П.А.* Об изоморфизме колец обобщенных матриц // Алгебра и логика. 2008. Т. 47. № 4. С. 456–463. https://doi.org/10.1007/s10469-008-9016-y.
8. *Абызов А.Н., Тапкин Д.Т.* Кольца формальных матриц и их изоморфизмы // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56. № 6. С. 1199–1214. https://doi.org/10.17377/smzh.2015.56.601.
9. *Крылов П.А., Туганбаев А.А.* Кольца формальных матриц и модули над ними. М.: МЦНМО, 2017.
10. *Krylov P., Tuganbaev A.* Formal matrices. Algebra and Applications. V. 23. Springer, 2017. 10.1007/978-3-319-53907-2.

Статья поступила 18.01.2018 г.

Krylov P.A., Norbosambuev T.D. GROUP OF AUTOMORPHISMS OF ONE CLASS OF FORMAL MATRIX ALGEBRAS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 53. pp. 16–21

DOI 10.17223/19988621/53/2

Keywords: automorphism, formal matrix algebra, semidirect product.

The structure of the automorphism group of a formal matrix algebra over a commutative ring has been found under certain conditions. The automorphism group of such algebra is a semidirect product of several subgroups consisting of automorphisms with a known structure. This is achieved due to the fact that the formal matrix algebra is represented as a splitting extension of a certain nilpotent ideal by means of the product of ordinary matrix rings.

AMS Mathematical Subject Classification: 15A30

KRYLOV Piotr Andreevich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: krylov@math.tsu.ru

NORBOSAMBUEV Tsyrendorji Dashatsyrenovich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: NsTsdDts@yandex.ru

REFERENCES

1. Anh P. N., van Wyk L. (2011) Automorphism group of generalized triangular matrix rings. *Linear Algebra Appl.* 434(4). pp. 1018–1026. doi:10.1016/j.laa.2010.10.007.
2. Anh P.N., van Wyk L. (2013) Isomorphisms between strongly triangular matrix rings. *Linear Algebra Appl*. 438(11). pp. 4374–4481. https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.01.030.
3. Khazal K., Dascalescu S., van Wyk L. (2003) Isomorphism of generalized triangular matrix rings and recovery of tiles *Int. J. Math. Sci*. 9. pp. 533–538. http://dx.doi.org/10.1155/S0161171203205251.
4. Boboc C., Dascalescu S., van Wyk L. (2012) Isomorphisms between Morita context rings. *Linear and Multilinear Algebra*. 60(5). pp. 545–563. https://doi.org/10.1080/03081087.2011.611946.
5. Kezlan T.P. (1990) A note on algebra automorphisms of triangular matrices over commutative rings. *Linear Algebra Appl.* 135. pp. 181–184. https://doi.org/10.1016/0024-3795(90)90121-R.
6. Tang G., Li Ch., Zhou Y. (2014) Study of Morita contexts. *Comm. Algebra*. 42. pp. 1668–1681. https://doi.org/10.1080/00927872.2012.748327.
7. Krylov P.A. (2008) Isomorphism of generalized matrix rings. *Algebra and Logic*. 47(4). pp. 456–463. https://doi.org/10.1007/s10469-008-9016-y.
8. Abyzov A.N, Tapkin D.T. (2015) Formal matrix rings and their isomorphisms. *Siberian Mathematical Journal*. 56(6). pp. 1199–1214. https://doi.org/10.17377/smzh.2015.56.601.
9. Krylov P.A., Tuganbaev A.A. *Koltsa formal'nyh matric i moduli nad nimi* [Rings of formal matrices and modules over them]. Moscow: MCNMO, 2017.
10. Krylov P., Tuganbaev A. (2017) *Formal matrices. Algebra and Applications*. 23. Springer. 10.1007/978-3-319-53907-2.