УДК 519.2, 539.3
DOI 10.17223/19988621/53/10

Э.Ф. Кривулина, И.Ю. Каневская

ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ ПО УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ РАМЫ, ВЫПОЛНЕННОЙ ИЗ ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА, НА ОСНОВЕ ВЕРОЯТНОСТНОГО ПОДХОДА

Представлено решение задачи устойчивости прямоугольной рамы. Стойки и ригель рамы выполнены из пористого материала. Закон распределения пористости по сечению задан близким к рациональному. Нагрузка считается случайной величиной. Решение задачи получено с использованием теории стационарных случайных процессов. Дан сравнительный анализ надежности и массового расхода материала рам со сплошными и пористыми сечениями. Для решения задачи упругого деформирования пористых материалов используется классическая гипотеза сплошности с механическими характеристиками материала, скорректированными на пористость.

Ключевые слова: *рама*, *пористость*, *устойчивость*, *вероятность*, *надежность.*

Пористые материалы получают в настоящее время все большее распространение в связи с целым рядом их специфических свойств. Одним из таких свойств является повышенная удельная прочность по сравнению со сплошными материалами. Следует также отметить, что при работе конструкций при видах нагружения, дающих неравномерное распределение напряжений по сечению (например, при изгибе), в зонах с низким уровнем напряжений целесообразно выполнить конструкцию с переменной по сечению пористостью [1, с.122]. Следует заметить, что наличие пористости в материале нарушает основной постулат механики деформируемых твердых тел – гипотезу сплошности. Выходом из сложившейся ситуации является условное принятие пористого материала сплошным, но с корректированными на пористость свойствами [2, с.165]. Полагая в дальнейшем использование в качестве исполнительного материала пористую сталь, выразим основную механическую характеристику (модуль Юнга) в виде формулы [1, с.122]

$$E = a_1 + a_2 P + a_3 P^2 , \tag{1}$$

где P – пористость, а коэффициенты a_1, a_2, a_3 получены следующими:

$$a_1 = 209285.7143 \text{ МПа},$$

$$a_2 = -535000 \text{ МПа},$$

$$a_3 = 321428.5714 \text{ МПа}. \tag{2}$$

Модуль Юнга для сплошного материала равен $E = 210000$ МПа.

Рассмотрим прямоугольную симметричную раму, нагруженную двумя одинаковыми усилиями G, приложенными в узлах и ориентированными по осям стоек рамы (рис. 1). Материал рамы – пористая сталь; B_1, B_2 – изгибные жесткости стоек и ригеля соответственно.

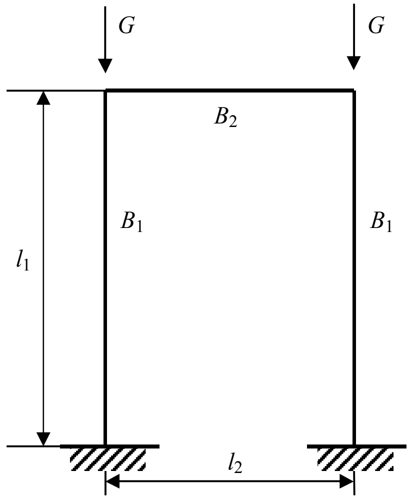

Рис. 1. Схема нагружения портальной рамы
Fig. 1. Loading condition for a portal frame

Полагаем, что нагрузка являет собой нормальный стационарный случайный процесс. В этом случае мерой надежности является вероятность того, что за время эксплуатации T действующая нагрузка G ни разу не превысит критической, то есть надежность по устойчивости будет равна [3, с.58]

$$H = \exp\left[-\int_0^T\int_0^\infty \dot{G}\, f(G_{kr}, \frac{\dot{G}}{t}) dG\, dt\right]. \quad (3)$$

Для нормального стационарного процесса $G(t)$ выражение (3) примет вид

$$H = \exp\left\{-\frac{T\sigma_{\dot{G}}}{2\pi\sigma_G}\exp\left[-\frac{(G_{kr}-m_G)^2}{2\sigma_G^2}\right]\right\}. \quad (4)$$

При нагрузке $G = G_{\text{kr}}$ возможны две формы потери устойчивости – симметричная и асимметричная.

При реальном проектировании рам отмечено, что наиболее вероятной формой потери устойчивости является асимметричная, которая в дальнейшем принята за основную. Следуя [1], зададим корреляционную функцию в виде

$$K_G(\tau) = \sigma_G^2 e^{-\alpha|\tau|}(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|). \quad (5)$$

На основании (5) выражение (4) примет вид

$$H = \exp\left\{-\frac{T\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2\pi}\exp\left[-\frac{(G_{kr}-m_G)^2}{2\sigma_G^2}\right]\right\}. \quad (6)$$

Решая детерминистическую задачу устойчивости и определяя G_{kr}, подставив последнюю в (6), определим искомую надежность. Условием гарантии устойчивости конструкции за время ее эксплуатации будет $H \ge H_{\text{norm}}$, где H_{norm} – нормативная надежность.

К решению детерминистической задачи устойчивости и поиска критической силы G_{kr} подходим с энергетических позиций. Аппроксимируем асимметричную форму потери устойчивости рамы ее упругой линией от горизонтальной силы Q, приложенной к ригелю.

Раскрывая статическую неопределимость, построим эпюру изгибающих моментов от действующей силы Q (рис. 2).

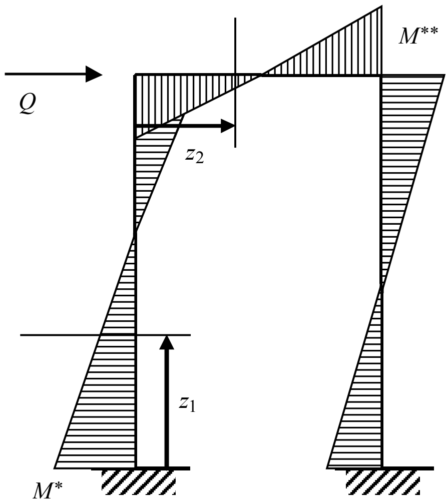

Рис. 2. Эпюра изгибающих моментов от поперечной нагрузки
Fig. 2. Bending-moment diagram due to the shear load

На рис. 2

$$M^* = \frac{Q}{2}[l_1 - kl_2], \quad M^{**} = kQ\frac{l_2}{2}, \quad k = \frac{l_1^2 l_2}{4B_1} \frac{1}{\frac{l_1 l_2^2}{2B_1} + \frac{l_2^3}{12B_2}}. \tag{7}$$

Функция изгибающих моментов на стойках при отсчете снизу имеет вид

$$M_1 = \frac{Q}{2}[l_1 - kl_2 - z_1]. \tag{8}$$

Функция изгибающих моментов на ригеле, отсчитываемых слева, имеет вид

$$M_2 = \frac{kQ}{2}[l_2 - 2z_2]. \tag{9}$$

Потенциальная энергия изгиба рамы равна

$$U = 2\int_0^{l_1} \frac{M_1^2 dz}{2B_1} + \int_0^{l_2} \frac{M_2^2 dz}{2B_2}. \tag{10}$$

Подставляя (8) и (9) в (10) и выполняя интегрирование, получим

$$U = \frac{Q^2}{4B_1}\left[-l_1(l_1 - kl_2)\cdot kl_2 + \frac{l_1^3}{3}\right] + \frac{k^2 Q^2 l_2^3}{24B_2}. \tag{11}$$

Для определения вертикальных смещений точек приложения сил G предварительно найдем угол поворота стойки θ. Для этого приложим к основной системе единичный момент (рис. 3) в произвольном сечении z и построим эпюру изгибающего момента $\bar{M}$.

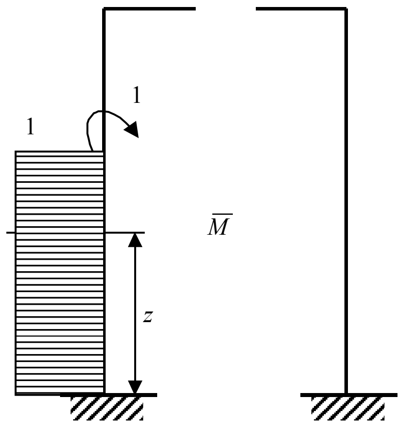

Рис. 3. Нагружение единичным моментом
Fig. 3. Load by a single moment

Для определения угла поворота в сечении z запишем формулу интеграла Мора

$$\theta = \frac{1}{B_1}\int_0^z M_1 \cdot \bar{M} dz . \tag{12}$$

Подставив в (12) функции M_1, $\bar{M}$, получаем

$$\theta = \frac{1}{B_1}\int_0^z \frac{Q}{2}[l_1 - kl_2 - z_1]\cdot 1 \cdot dz ,$$

что после интегрирования дает функцию

$$\theta = \frac{Q}{2B_1}\left\{(l_1 - kl_2)z - \frac{z^2}{2}\right\}. \tag{13}$$

Соответственно (13) вертикальное перемещение точки приложения силы G равно

$$\delta = \frac{1}{2}\int_0^{l_1}\theta^2 dz = \frac{Q^2}{8B_1^2}\left\{\frac{(l_1 - kl_2)^2 l_1^3}{3} - \frac{(l_1 - kl_2)l_1^4}{4} + \frac{l_1^5}{20}\right\}. \tag{14}$$

Работа, совершаемая двумя силами G на перемещении δ, равна

$$A = 2G\delta = \frac{Q^2 G}{4B_1^2}\left\{(l_1 - kl_2)\left[\frac{(l_1 - kl_2)l_1^3}{3} - \frac{l_1^4}{4}\right] + \frac{l_1^5}{20}\right\}. \tag{15}$$

Полагая $G = G_{\text{kr}}$ и приравнивая работу сил G_{kr} потенциальной энергии деформации, получаем

$$G_{kr} = \frac{B_1\left[-l_1(l_1-kl_2)kl_2+\frac{l_1^3}{3}\right]+\frac{k^2l_2^3B_1^2}{6B_2}}{(l_1-kl_2)\left[(l_1-kl_2)\frac{l_1^3}{3}-\frac{l_1^4}{4}\right]+\frac{l_1^5}{20}}. \quad (16)$$

Для дальнейшего примем профиль поперечного сечения в виде прямоугольника. Полагая, что нейтральной осью при изгибе будет ось x и учитывая целесообразность увеличения пористости при приближении к оси x, представим закон распределения пористости по высоте сечении в виде квадратной параболы (рис. 4):

$$P = P_0\left(1-\frac{4}{h^2}y^2\right). \quad (17)$$

Здесь P_0 – пористость в центре тяжести сечения, обусловленная техническими возможностями производства.

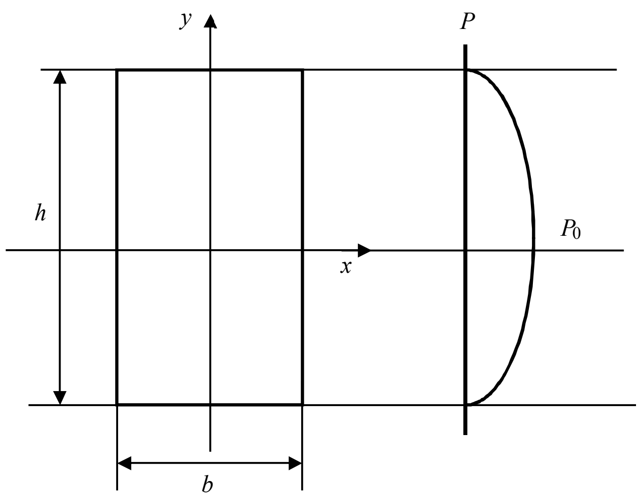

Рис. 4. Распределение пористости по высоте сечения
Fig. 4. Distribution of the porous along the cross-section

На основании (1) и (17) распределение модуля Юнга по высоте поперечного сечения будет следующим:

$$E(y) = a_1 + a_2P_0\left[1-\frac{4}{h^2}y^2\right]+a_3P_0^2\left[1-\frac{4}{h^2}y^2\right]^2. \quad (18)$$

Параметр B жесткости бруса при изгибе представится формулой

$$B = 2b\int_0^{\frac{h}{2}} E(y)y^2dy,$$

что при использовании (18) дает

$$B = \frac{bh^3}{12}(a_1 + a_2P_0\cdot 0.2 + a_3P_0^2\cdot 0.114285). \quad (19)$$

В качестве примера расчета рассмотрим раму, для которой $l_1 = l_2 = l = 3$ м, сечение – квадрат $b \times h = 10 \times 10$ см.

Рабочая нагрузка G с математическим ожиданием $m_G = 810$ кН. Среднее квадратическое отклонение нагрузки $\sigma_G = 80$ кН.

Материал – сталь пористой структуры с характеристиками (2), $P_0 = 0,4$.

Параметры случайного процесса: $\alpha = 0.3\frac{1}{c}$, $\beta = 0.4\frac{1}{c}$. Срок эксплуатации рамы $T = 10$ лет $=315 \cdot 10^6$ с. Нормативная надежность $H_{\text{norm}} = 0.999$.

Расчет параметра жесткости по формуле (19) дает

$$B_1 = B_2 = B_{\text{por}} = 1713.2863 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot \text{м}^2.$$

Расчет критической силы для пористой конструкции дает значение

$$G_{\text{kr.por}} = 7.446\frac{B_{\text{por}}}{l^2} = 1417.46 \cdot 10^{-3} \text{ МН}.$$

Для определения надежности рамы по устойчивости подставим расчетные данные в формулу (6), получим

$$H_{\text{por}} = \exp\left\{-\frac{315 \cdot 10^6 \sqrt{0,3^2 + 0,4^2}}{2\pi}\exp\left[-\frac{(1417.46 - 810)^2}{2 \cdot 80^2}\right]\right\} = 0.99992$$

Полученная надежность $H_{\text{por}} = 0.99992 > H_{\text{norm}} = 0.999$, то есть эксплуатационная надежность рамы обеспечена.

В качестве сравнительного анализа рассмотрим ту же раму, но выполненную из сплошного материала. Решение этой задачи при тех же параметрах было получено в [4]:

$$G_{\text{kr.spl}} = 7,446\frac{EI}{l^2} = 7.446\frac{Ebh^3}{12l^2} = 1448 \cdot 10^{-3} \text{ МН}.$$

Надежность для сплошного профиля сечения по формуле (6) будет равна

$$H_{\text{spl}} = 0.9999996 > H_{\text{norm}} = 0.999 .$$

Как видим, надежность пористой рамы незначительно ниже сплошной, что не влияет на ее эксплуатацию.

Соотношение критических сил обеих рам следующее:

$$\frac{G_{\text{kr.por}}}{G_{\text{kr.spl}}} = \frac{1417.46}{1448} = 0.98 .$$

Детерминистические коэффициенты запаса рам равны $n_y = \frac{G_{\text{kr}}}{G}$.

$$n_{\text{spl}} = \frac{1448}{810} = 1.78 ,$$

$$n_y = \frac{1417}{810} = 1.75 .$$

Как видим, наличие пористости снижает показатели устойчивости не более 2 %.

Для оценки справедливости используемых расчетных приемов заменим раму условной стойкой и определим ее гибкость.

Запишем формулу Эйлера для условной стойки $EI = B$:

$$P_{\text{kr}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = 7.446 \frac{B}{l^2}$$

откуда получаем коэффициент свободной длины

$$\mu = \sqrt{\frac{\pi^2}{7.446}} = 1.15 .$$

Гибкость условной стойки равна

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{\mu l}{\sqrt{\frac{I_{\text{pr}}}{A}}} .$$

где $I_{\text{pr}} = \frac{B}{E}$ – приведенный момент инерции сечения, $A = b \times h$ – площадь сечения.

$$I_{pr} = \frac{1713.2863 \cdot 10^{-3}}{2.1 \cdot 10^5} = 815.85 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

$$A = 100 \text{ см}^2 = 100 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

$$\lambda = \frac{1.15 \cdot 300}{\sqrt{\frac{815.85}{100}}} = 121$$

Найденное значение $\lambda = 121 > \lambda_{\text{pred}} = 100$, следовательно, предложенное решение приемлемо.

Как видим из расчетов, наличие пористости при надлежащем ее выборе практически не снижает надежности конструкции. Оценим теперь материалоемкость обеих рам, для чего подсчитаем площадь пор в сечении пористой рамы

$$A_{\text{por}} = b \cdot 2 \int_0^{\frac{h}{2}} P(y) dy = 2bP_0 \int_0^{\frac{h}{2}} \left(1 - \frac{4}{h^2} y^2\right) dy = 0.266666 bh .$$

$A_{\text{spl}} = b \cdot h$ – площадь сплошного сечения.

Находим процент экономии площадей

$$\Delta\ \% = \frac{A_{\text{por}}}{A_{\text{spl}}} \cdot 100\% = \frac{0.26666}{1} \cdot 100\ \% = 26.7\ \% .$$

Итак, при снижении несущей способности рамы пористой структуры лишь на 2 % имеем выигрыш в расходе материала 26.7 %, что свидетельствует о целесообразности выполнения конструкций из пористых материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шляхов С.М., Гаврилов Д.Ю.* Метод последовательных приближений в задаче рационального распределения пористости при чистом изгибе бруса прямоугольного сечения // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3 (29). С. 122–127.
2. *Белов С.В.* Пористые металлы в машиностроении. М.: Машиностроение, 1981. 247 с.
3. *Арасланов А.М.* Расчет элементов конструкций заданной надежности при случайных воздействиях. М.: Машиностроение, 1987. 128 с.
4. *Кривулина Э.Ф., Круглова А.О.* Об оценке надежности по устойчивости прямоугольной рамы по теории стационарных случайных процессов // Техническое регулирование в транспортном строительстве: Электронный журнал. Саратов, СГТУ, 2016. № 5(19).

Статья поступила 27.10.2017 г.

Krivulina E.F., Kanevskaya I.Yu. ESTIMATION OF THE RELIABILITY OF A RECTANGULAR FRAME MADE OF THE POROUS METAL IN TERMS OF ITS RIGIDITY ON THE BASIS OF PROBABILISTIC APPROACH. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 53. pp. 107–115

DOI 10.17223/19988621/53/10

Keywords: frame, porosity, stability, probability, reliability.

This article is aimed to solve one of the problems of mechanics of deformable solids such as the analysis of the influence of material porosity on the structural elements under random loads. The rigidity of the legs and girder of rectangular frame made of the porous material is studied. The porosity distribution law is specified to be rational. In this case, the porosity distribution is opposite to the normal stress distribution law due to the bending-buckling. The elements of rectangular frame are bent during buckling. In the bar cross-section, the stresses are distributed unevenly. Therefore, it is reasonable to distribute porosity in the same manner. The porosity is minimum in the region of maximum stress, and, near the neutral axis of the bend, the maximum porosity is observed. The load is shared symmetrically between the frame legs and is oriented to the axes of the latter. The effect of random load, whose law of variation corresponds to a random stationary process, is considered. It should be noted that the presence of porosity in the material breaks the main postulate of the mechanic of deformable solids that is the hypothesis of continuity. To solve this problem, it is considered that the porous material is continuous, and its mechanical characteristics are consistent with the porosity. In particular, Young 's modulus for the porous material is approximated by power polynomial whose factors are defined by experimental data processing using the least squares method.

A correlation function is used for the random stationary process that is represented as a formula for determination of the frame reliability by rigidity of the construction during the specified operating period. The energy approach is applied to solve the deterministic problem of the theory of stability and to determine the critical force. An asymmetric buckling is used as it is the most probable form. The critical load is defined by condition of the equality of deformation potential energy to the external force energy. Estimation of the frame reliability at the assigned loads and porosity distribution law is demonstrated numerically. For comparison, the frame made of a continuous material is considered. Analysis shows that insignificant decrease in the reliability of the frame porous structure as compared to the continuous structure (about 2%) provides saving in the material of about 26.7%.

KANEVSKAYA Irina (Saratov State Agrarian University named after N.I. Vavilov, Saratov, Russian Federation). E-mail ir.kanevskaya@yandex.ru

KRIVULINA Elvira (Candidate of Technical Sciences, Saratov State Technical University named after Yu.A. Gagarin, Saratov, Russian Federation). E-mail: orifelwi@mail.ru

REFERENCES

1. Araslanov A.M. (1987) *Raschet elementov konstruktsiy zadannoy nadezhnosti pri sluchaynykh vozdeystviyakh* [Calculation of structural elements with a specified reliability under random loads]. Moscow: Mashinostroenie.
2. Belov S.V. (1981) *Poristye metally v mashinostroenii* [Porous metals in mechanical engineering]. Moscow: Mashinostroenie.
3. Krivulina E.F., Kruglova A.O. (2016) Ob otsenke nadezhnosti po ustoychivosti pryamougol'noy ramy po teorii statsionarnykh sluchaynykh protsessov [About estimation of reliability on stability of the square-wave frame on theories of the stationary casual processes]. *Electronic Journal: Technical Regulation in Transport Building*. 5(19). DOI: 10.17223/19988621/46/8.
4. Shlyakhov S.M., Gavrilov D.Yu. (2016) Metod posledovatel'nykh priblizheniy v zadache ratsional'nogo raspredeleniya poristosti pri chistom izgibe brusa pryamougol'nogo secheniya [The method of successive approximations in the problem management distribution of porosity in pure bending rectangular timber]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya – Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State.* 3(29). pp. 122–127.