

## ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.6

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗОМОРФИЗМА ГРАФОВ  
С ПОМОЩЬЮ ЖОРДАНОВЫХ ФОРМ МАТРИЦ СМЕЖНОСТИ

М. И. Володичева\*, С. Н. Леора\*\*

\* Санкт-Петербургский государственный морской технический университет,  
г. Санкт-Петербург, Россия,

\*\* Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Россия

Для установления отсутствия изоморфизма между орграфами предлагается использовать жорданову форму матриц смежности графов. Задача приведения матрицы к жордановой форме имеет полиномиальную временную сложность, верхняя оценка необходимого числа операций для  $n$ -вершинного графа составляет  $O(n^4)$ . Показано, что жорданова форма матриц смежности орграфов содержит больше информации о структуре графа, чем его спектр, определяемый собственными значениями матрицы смежности и их кратностью. В результате исследования жордановых форм матриц смежности орграфов на отдельных примерах установлено, что изоспектральные матрицы, имеющие одинаковый набор собственных значений, могут приводиться к различным жордановым формам. Это означает, что матрицы смежности не являются подобными, т. е. не являются и перестановочно подобными, что свидетельствует об отсутствии изоморфизма между графами.

**Ключевые слова:** *граф, орграф, изоморфизм графов, матрица смежности, подобие матриц, жорданова форма.*

DOI 10.17223/20710410/40/7

STUDY OF GRAPH ISOMORPHISM USING JORDAN FORMS OF  
ADJACENCY MATRICES

M. I. Volodicheva\*, S. N. Leora\*\*

\* State Marine Technical University of St. Petersburg, Saint Petersburg, Russia,

\*\* Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia

**E-mail:** mvolodicheva@mail.ru, leora2008@mail.ru

It is proposed to use a Jordan form of adjacency matrices to establish the absence of isomorphism between direct graphs. The problem of reduction of a matrix to a Jordan form has polynomial time complexity. The upper estimate of the required number of operations for  $n$ -vertex graph is  $O(n^4)$ . It is shown that the Jordan form of the adjacency matrix contains more information about the structure of the graph than its spectrum determined by the eigenvalues of the adjacency matrix and their multiplicity. As a result of research on specific examples it was found that the isospectral matrices of the same set of eigenvalues may have different Jordan forms. This means that the adjacency matrices are not similar and therefore are not permutation similar, indicating a lack of isomorphism between direct graphs.

**Keywords:** *graph, directed graph, graph isomorphism, adjacency matrix, similarity matrices, Jordan form of matrix.*

### Введение

Графы широко используются для исследования структурных свойств объектов в различных областях науки и техники: радиоэлектронике, экономике, теоретической физике, энергетике, химии, биологии, социологии, математической лингвистике и др. В частности, графами представляются электронные схемы, искусственные нейронные сети, молекулярные структуры в химии и биологии, сетевые структуры программных систем и баз данных, транспорта, нефтепроводов, газопроводов и др. [1–8]. С помощью графов решаются задачи распознавания образов, создаются системы автоматизированного управления, разрабатываются алгоритмы в теории информации и проектирования. Одним из важнейших направлений развития прикладной теории графов является исследование структурного сходства (или структурного различия) графов, которыми моделируются изучаемые объекты.

При построении графовой модели вводятся вершины (множество  $V$ ), которые описывают компоненты объекта, и рёбра или дуги (множество  $E$ ), которые описывают отношения между компонентами объекта. Два графа  $G_1 = (V_1, E_1)$  и  $G_2 = (V_2, E_2)$  называются изоморфными, если существует биекция  $f: V_1 \rightarrow V_2$ , сохраняющая смежность, т. е. такая, что для любых двух вершин  $u$  и  $v$  графа  $G_1$  их образы  $f(u)$  и  $f(v)$  смежны в графе  $G_2$  тогда и только тогда, когда  $u$  и  $v$  смежны в графе  $G_1$ . В случае ориентированных графов для изоморфных графов требуется дополнительно сохранение ориентации дуг. Отношение изоморфизма графов является отношением эквивалентности, т. е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Следовательно, множество всех графов можно разбить на классы изоморфных графов, которые называются абстрактными графами. Проверка изоморфизма графов необходима для ответа на вопрос, являются ли некоторые структуры, которые моделируются заданными графами, принципиально различными или они являются различными представителями одной и той же структуры.

Непосредственная проверка на изоморфизм двух  $n$ -вершинных графов заключается в рассмотрении всех  $n!$  перестановок вершин и установлении совмещаемости рёбер графов хотя бы при одной перестановке. Однако даже при сравнительно небольших  $n$  ( $n > 15$ ) решение проблемы изоморфизма таким образом затруднительно из-за ограниченных возможностей современных вычислительных машин. Задача проверки изоморфизма графов принадлежит к классу задач, для которых пока неизвестно, являются ли они полиномиально разрешимыми или нет, т. е. пока не построен полиномиальный алгоритм проверки изоморфизма любых графов. В 2015–2017 гг. Ласло Бабай разработал новый быстрый алгоритм, решающий задачу изоморфизма графов за квазиполиномиальное время ( $\exp(\log(n)^{O(1)})$ , где  $n$  — число вершин графа). Уточнение этого алгоритма появилось в январе 2017 г. [9].

Для исследования графов на изоморфизм часто применяются эвристические алгоритмы, которые в общем случае не являются полиномиальными, лишь для отдельных классов графов с определёнными структурными свойствами разработаны полиномиальные алгоритмы. В основе эвристических методов лежит разделение всех вершин графов на классы так, что рассматривается отображение вершин графа в другие вершины того же класса. Для этого используются некоторые свойства вершин графов, инвариантные относительно изоморфизма. В качестве инвариантов, неизменных для всего класса изоморфных графов, рассматриваются числовые, векторные, матричные

инварианты [10–12]. Матричные инварианты графа, найденные путём исследования разнообразия специальной матрицы, построенной по матрице смежности и её степеням до  $n$ -й включительно, предложены в [11, 12]. В работах [13–15] описан полиномиальный алгоритм вычисления полного инварианта графа с помощью интегрального описателя структуры, построенного методом интеграции структурных различий графа (методом ISD). При этом абстрактная структура графа представляется системой числовых кодов для всех вершин графа. Полный инвариант, полученный методом ISD, зависит от используемой системы кодирования, поэтому сравнивать можно только полные инварианты, полученные с помощью одной и той же системы кодирования.

Другой подход исследования графов на изоморфизм изложен в работах [16–20]. В 1981 г. Брендан МакКей разработал обладающий большим быстродействием программный пакет *nauty* [16], который в дальнейшем был усовершенствован и появился под названием *traces* [17]. Модификациями пакета *nauty* являются программные пакеты *saucy* [18], *bliss* [19], *conauto* [20]. В основе этих программ лежит построение канонического кода графа, не зависящего от начального порядка нумерации вершин. Два графа изоморфны тогда и только тогда, когда совпадают их канонические коды, которым соответствует каноническая нумерация вершин.

Для решения этой задачи в пакете *nauty* используется представление множества всех вершин графа в виде разбиения — упорядоченного набора непересекающихся ячеек (подмножеств вершин). Перебору всех перестановок вершин соответствует перебор и уточнение разбиений, в результате которых появляется каноническая нумерация вершин. Уточнение разбиений сопоставляется обходу по дереву разбиений (дереву поиска). Перебор разбиений при нахождении канонической перестановки существенно сокращается при использовании группы автоморфизмов графа. Составной частью *nauty* является генерация автоморфизмов графа, в результате действия которых появляются орбиты вершин — подмножества вершин, в которые переходят заданные вершины. С помощью *nauty* можно найти каноническую нумерацию, построить автоморфизмы в неориентированных и ориентированных графах (а также в раскрашенных графах) и провести исследование графов на изоморфизм.

Для больших разреженных графов разработаны программные пакеты *saucy* и *bliss*, которые по быстродействию превосходят *nauty*. Пакет *bliss*, так же как и *nauty*, находит каноническую нумерацию вершин, тогда как *saucy* в настоящее время оптимизирован для нахождения автоморфизмов графов. Пакет *conauto* осуществляет проверку изоморфности двух графов без построения полной группы автоморфизмов. В основе этого пакета лежит построение последовательности разбиений вершин и некоторых автоморфизмов одного графа, которые затем используются для генерации последовательности разбиений другого графа и обрезания дерева поиска. Пакеты *nauty* и *traces* различаются стратегией выбора первой ячейки и направлением обхода дерева поиска (по глубине и по ширине соответственно), что позволяет в случае *traces* более эффективно использовать операцию обрезания поиска. В настоящее время *traces* является лидером проверки на изоморфизм неорграфов с большим числом вершин, тогда как *nauty* целесообразно использовать для массового исследования на изоморфизм небольших графов.

## 1. Матричный метод проверки изоморфизма графов

Одним из направлений проверки изоморфности графов является матричный метод, в основе которого лежит использование матрицы смежности. Абстрактный граф может иметь различные матрицы смежности в зависимости от нумерации вершин. Пусть

два графа  $G_1 = (V_1, E_1)$  и  $G_2 = (V_2, E_2)$  различаются только нумерацией вершин, т. е. изоморфны, и имеют матрицы смежности  $A$  и  $B$  соответственно. В этом случае существует биекция  $f: V_1 \rightarrow V_2$ , которая определяет соотношение между элементами матриц  $A$  и  $B$ :

$$b_{f(i)f(j)} = a_{ij}. \quad (1)$$

Из (1) следует, что матрицы смежности  $A$  и  $B$  получаются друг из друга одинаковыми перестановками строк и столбцов. Изменение нумерации вершин графа можно описать квадратной  $(0, 1)$ -матрицей перестановки  $P$ , которая в каждой строке и каждом столбце имеет ровно одну единицу. Эта матрица удовлетворяет соотношению  $PP^T = P^T P = E$ , т. е.  $P^T = P^{-1}$ . Перестановочным преобразованием подобия называется переход от одной матрицы к другой с помощью перестановки строк и такой же перестановки столбцов. Если в исходной нумерации вершин граф  $G$  задается матрицей смежности  $A$  и тот же граф в новой нумерации вершин задается матрицей  $B$ , то матрицы смежности  $A$  и  $B$  перестановочно подобны:

$$B = P^{-1}AP = P^T AP. \quad (2)$$

Вследствие взаимно однозначного соответствия между графом с конкретной нумерацией вершин и его матрицей смежности можно определить абстрактный граф матрично как класс матриц смежностей графа при всевозможных различных наборах нумераций его вершин, т. е. как класс перестановочно подобных квадратных матриц. Проблема исследования изоморфизма графов сводится к задаче установления перестановочного подобия двух матриц  $A$  и  $B$  одного порядка, т. е. к проверке условия (2). Если для некоторой матрицы перестановки  $P$  условие (2) выполняется, то матрицы  $A$  и  $B$  перестановочно подобны и являются представителями одного и того же графа. Если ни для одной из  $n!$  матриц перестановок  $P$  порядка  $n$  условие (2) не выполняется, то матрицы  $A$  и  $B$  не являются перестановочно подобными и задают разные графы.

Частным случаем матричного метода проверки графов на изоморфизм является спектральный подход к решению этой задачи, в основе которого лежит исследование и сравнение спектров графов, т. е. собственных значений и их кратностей, а также собственных векторов матриц смежности исследуемых графов. Одно время полагали, что неизоморфные графы имеют различные спектры. Позднее было обнаружено, что существуют изоспектральные (коспектральные) неизоморфные графы, т. е. спектр графа не является его полным инвариантом. Подробное исследование семейств неизоморфных коспектральных графов содержится в [1].

В данной работе для установления отсутствия изоморфизма орграфов предлагается использовать жордановы формы матриц смежности графов. Решение этой задачи является актуальным в связи с исследованиями искусственных нейронных и других сетей, которые моделируются орграфами.

## 2. Построение жордановой формы матриц смежности

Жорданова матрица представляет собой клеточно-диагональную матрицу  $J$ , которая отличается от диагональной матрицы тем, что выше главной диагонали в параллельном ей ряду могут быть расположены единицы. Её диагональные клетки — жордановы клетки  $J_{n_i}(\lambda_i)$  соответствующих порядков с диагональными элементами, равными корням характеристического многочлена матрицы:

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}, \quad J_{n_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix},$$

где числа  $\lambda_i$  в некоторых клетках могут быть одинаковыми, при этом порядки  $n_i$  некоторых клеток могут совпадать. Число жордановых клеток, соответствующих фиксированному собственному значению  $\lambda_i$ , равно геометрической кратности собственного значения, которая определяется как кратность  $t_i$  корня  $\lambda_i$  минимального многочлена и равна размерности соответствующего собственного подпространства. Сумма порядков всех жордановых клеток, соответствующих фиксированному собственному значению  $\lambda_i$ , равна алгебраической кратности  $k_i$  корня  $\lambda_i$  характеристического многочлена. Полное число жордановых клеток, среди которых могут быть повторяющиеся, равно максимальному числу линейно независимых собственных векторов матрицы.

Обычно принимается соглашение о том, что различные вещественные собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  вещественной матрицы  $A$  упорядочиваются в порядке убывания и в жордановой форме сначала располагаются клетки, соответствующие  $\lambda_1$ , затем  $\lambda_2$  и т. д. Для каждого собственного значения соответствующие жордановы клетки располагают по невозрастанию их порядка. Если матрица  $A$  вещественна и обладает только вещественными собственными значениями, то существует вещественная преобразующая матрица  $S$  [21]. В случае комплексных собственных значений вещественной матрицы  $A$  жорданова форма становится комплексной. Частным случаем жордановой матрицы является диагональная матрица, диагональными элементами которой являются собственные числа матрицы.

Для решения задачи об отсутствии изоморфизма между графами будем использовать теорему Жордана, в основе которой лежат следующие два утверждения.

**Утверждение 1.** Каждая квадратная матрица подобна некоторой жордановой матрице, т.е. для каждой матрицы  $A \in M_n$  существует невырожденная матрица  $S \in M_n$ , такая, что  $S^{-1}AS = A_J$ , где  $A_J$  — жорданова форма. Жорданова матрица  $A_J$  для матрицы  $A$  определяется однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток на её главной диагонали.

**Утверждение 2.** Для подобия двух матриц  $A$  и  $B$  необходимо и достаточно, чтобы соответствующие жордановы матрицы совпадали с точностью до порядка следования клеток.

Если жордановы формы матриц смежности  $A$  и  $B$  двух графов отличаются не только порядком следования жордановых клеток, то матрицы  $A$  и  $B$  не являются подобными, а следовательно, они не являются и перестановочно подобными, так как перестановочное подобие является частным видом подобия матриц. В этом случае графы не являются изоморфными. Следовательно, отсутствие изоморфизма между графами можно установить с помощью жордановых форм соответствующих матриц смежности.

Для построения жордановой формы матрицы можно использовать разные методы, один из которых основан на использовании инвариантных множителей характеристической матрицы  $A - \lambda E$ , с помощью которых затем находятся элементарные делители и жорданова форма матрицы [22, 23]. Простой способ построения жордановой формы для некоторых классов бинарных и взвешенных матриц смежности, основанный на

представлении графа в виде объединения циклов и цепей, приведён в [24, 25]. В данной работе для нахождения жордановой формы матрицы применяется метод, приведённый в [26] и использованный в [27]. Способы приведения матрицы к жордановой форме зависят от вида характеристического многочлена. Пусть характеристический многочлен для матрицы смежности порядка  $n$  имеет вид

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{k_r},$$

где  $k_i$  — кратность корня  $\lambda_i$  и  $k_1 + \dots + k_r = n$ . Минимальный многочлен имеет вид

$$\mu(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{t_1} (\lambda - \lambda_2)^{t_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{t_r}.$$

Показатели степеней  $t_i$ , входящие в минимальный многочлен, определяются из равенства

$$r_{t_i} = \text{rang}(A - \lambda_i E)^{t_i} = n - k_i. \quad (3)$$

Для определения  $t_i$  нужно возводить матрицу  $B_i = A - \lambda_i E$  в степени  $j = 1, 2, \dots$ , вычисляя при этом ранги матриц  $B_i^j$  и сравнивая эти ранги с числом  $n - k_i$ . Тогда наименьший показатель степени, для которого выполняется равенство (3), равен  $t_i$ . Величина  $t_i$  определяет максимальный размер клетки Жордана, соответствующей собственному значению  $\lambda_i$ . Число  $s_{t_i}$  клеток максимального порядка  $t_i$  равно

$$s_{t_i} = r_{t_i-1} - r_{t_i}.$$

Число  $s_{j_i}$  жордановых клеток любого порядка  $j_i$ , кроме максимального, находится из равенства

$$s_{j_i} = r_{j_i+1} - 2r_{j_i} + r_{j_i-1}. \quad (4)$$

В частности, число жордановых клеток первого порядка равно  $s_1 = r_2 - 2r_1 + n$ . Отметим, что некоторые из клеток низшего порядка могут отсутствовать.

В том случае, когда имеется одно собственное значение  $\lambda_1$  кратности  $n$  и характеристический многочлен матрицы имеет вид  $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^n$ , а минимальный многочлен равен  $\mu(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^t$ , порядок максимальной клетки Жордана равен  $t$ . Чтобы найти  $t$ , нужно последовательно вычислять степени матрицы  $B = A - \lambda_1 E$  до тех пор, пока не получится нулевая матрица. Число клеток меньшей размерности находится по формуле (4).

Найдём верхнюю оценку числа операций, которые необходимо осуществить при установлении отсутствия изоморфизма между графами с помощью жордановой формы матрицы. Вычисление собственных значений матрицы смежности порядка  $n$  и определение их кратности требует проведения  $O(n^3)$  операций [22, 23]. Для сортировки собственных значений матрицы необходимо  $O(n \ln(n))$  операций. Для каждого собственного значения  $\lambda_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) верхняя оценка числа операций, необходимых для вычисления степеней матрицы  $B_i$ , составляет  $O(n^4)$ . Вычисление ранга матриц  $B_i^j$  методом Гаусса требует  $O(n^3)$  операций. Сравнение вычисленного ранга матрицы  $B_i^j$  с  $(n - k_i)$  требует  $O(n)$  операций. Сопоставление жордановых форм матриц смежности двух графов требует  $O(n)$  операций. Общая верхняя оценка необходимого числа операций составляет  $O(n^4)$ .

### 3. Примеры исследования изоморфизма графов с помощью жордановых форм матриц смежности

**Пример 1.** Рассмотрим изоспектральные орграфы  $G_1$  и  $G_2$ , представленные на рис. 1, собственные значения матриц смежности которых равны нулю и имеют кратность, равную 10, что следует из общей теории структуры спектров орграфов без циклов: все орграфы порядка  $n$ , не содержащие циклов, имеют один и тот же спектр  $(0,0,\dots,0)$  [1].

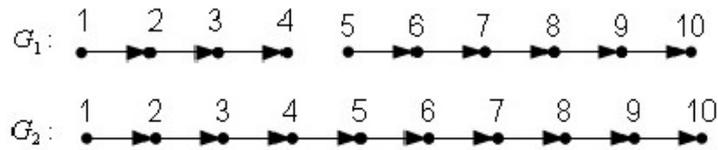


Рис. 1. Изоспектральные неизоморфные графы

Жордановы формы  $A_{1J}$  и  $A_{2J}$  матриц смежности этих графов не подобны: матрица  $A_{1J}$  содержит две клетки Жордана шестого и четвертого порядков, а матрица  $A_{2J}$  представляет собой одну клетку Жордана десятого порядка:

$$A_{1J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{2J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вследствие различия жордановых форм  $A_{1J}$  и  $A_{2J}$  матриц смежности изоспектральные графы  $G_1$  и  $G_2$  не изоморфны. Отсюда следует, что жорданова форма матрицы несет в себе больше информации о структуре графа, чем его спектр, т. е. изоспектральные матрицы могут быть не подобны, а значит, и не перестановочно подобны.

**Пример 2.** Рассмотрим изоспектральные орграфы  $G_3$ ,  $G_4$  и  $G_5$ , приведённые на рис. 2.

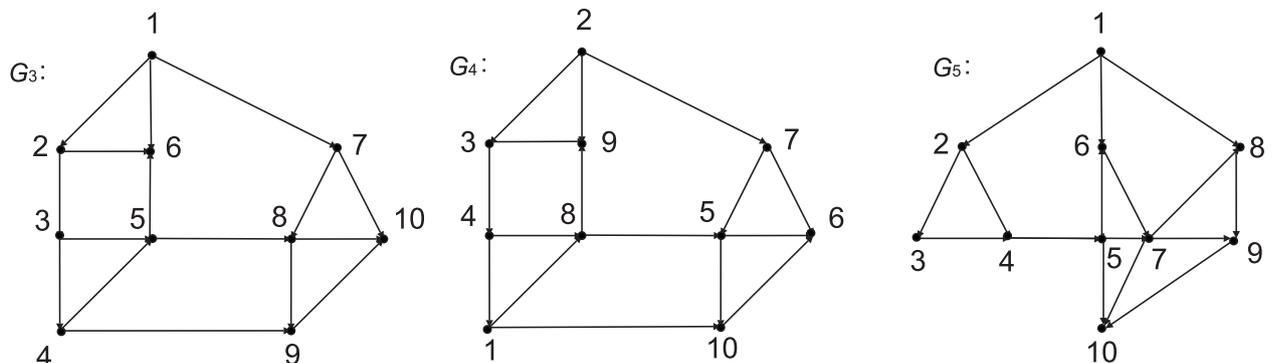


Рис. 2. Изоспектральные орграфы

Жордановы формы  $A_{3J}$  и  $A_{4J}$  матриц смежности для графов  $G_3$  и  $G_4$  совпадают: они соответствуют собственному значению 0 кратности 10 и представляют собой две жордановы клетки порядка 2 и 8 соответственно. Жорданова форма  $A_{5J}$  матрицы смежности для графа  $G_5$  содержит одну клетку десятого порядка, она отличается от жордановой формы матриц смежности для графов  $G_3$  и  $G_4$ :

$$A_{3J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{4J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{5J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, графы  $G_3$  и  $G_5$ , а также графы  $G_4$  и  $G_5$  не изоморфны. Эти орграфы не содержат циклов и поэтому все собственные значения их матриц смежности равны нулю. Для графа  $G_6$ , отличающегося от  $G_5$  изменением направления дуги (5, 7), в результате чего образуется цикл (5, 6, 7, 5), жорданова форма матрицы смежности имеет следующий вид:

$$A_{6J} = \begin{pmatrix} -0,5 - 0,866i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 + 0,866i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица представляет собой прямую сумму трёх жордановых клеток первого порядка, соответствующих собственным значениям  $1$ ,  $-0,5 + 0,866i$ ,  $-0,5 - 0,866i$ , и одной жордановой клетки седьмого порядка, соответствующей собственному значению 0 кратности 7. Она отличается от жордановых форм матриц смежности графов  $G_3$  и  $G_4$ . Следовательно, графы  $G_3$  и  $G_6$ , а также графы  $G_4$  и  $G_6$  не изоморфны.

Полученные результаты подтверждены с помощью пакета Mathematica 9.

**Пример 3.** Рассмотрим неорграфы  $\tilde{G}_3$ ,  $\tilde{G}_4$ ,  $\tilde{G}_5$ , соответствующие орграфам  $G_3$ ,  $G_4$ ,  $G_5$ . Матрицы смежности этих графов симметричны и приводятся к диагональной форме. Собственные числа матриц смежности неорграфов  $\tilde{G}_3$ ,  $\tilde{G}_4$  совпадают и имеют следующие значения:

$$3,257, 2,217, 1,721, 0,219, 0, -0,359, -1,037, -1,750, -1,920, -2,348.$$

Собственные значения матрицы смежности графа  $\tilde{G}_5$  равны

$$3,213, 2,138, 1,365, 0,927, -0,330, -0,592, -1,103, -1,574, -1,876, -2,169.$$

Они отличаются от собственных значений матриц смежности неорграфов  $\tilde{G}_3$ ,  $\tilde{G}_4$ . Следовательно, графы  $\tilde{G}_3$  и  $\tilde{G}_4$  коспектральны, тогда как графы  $\tilde{G}_3$  и  $\tilde{G}_5$ , а также  $\tilde{G}_4$

и  $\tilde{G}_5$  имеют различные спектры. Отсюда следует, что графы  $\tilde{G}_3$  и  $\tilde{G}_5$  ( $\tilde{G}_4$  и  $\tilde{G}_5$ ) не изоморфны. Такой же результат получается с помощью пакета Mathematica 9.

В том случае, когда матрицы смежности двух орграфов подобны, с помощью их жордановых форм нельзя дать однозначного ответа на вопрос об изоморфизме графов, так как матрицы смежности могут быть подобны, но не перестановочно подобны.

**Пример 4.** Рассмотрим орграфы  $G_7, G_8, G_9$ , представленные на рис. 3.

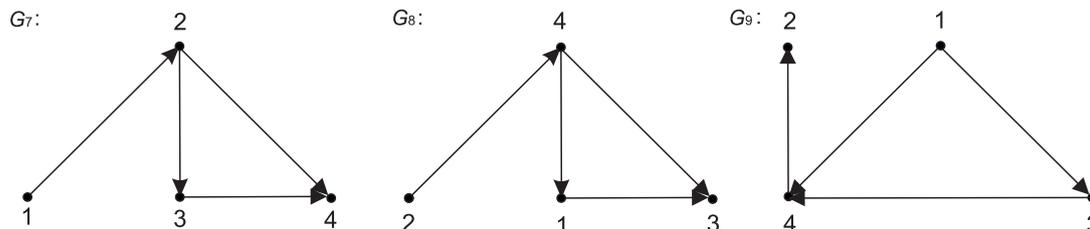


Рис. 3. Изоспектральные орграфы с одинаковыми жордановыми формами матриц смежности

Собственные значения матриц смежности орграфов  $G_7, G_8, G_9$  равны нулю и имеют кратность  $r = 4$ . Жордановы формы этих матриц одинаковы и представляют собой жордановы клетки четвёртого порядка:

$$A_{7J} = A_{8J} = A_{9J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрицы смежности графов  $G_7, G_8, G_9$  подобны. Однако отсюда не следует, что эти графы изоморфны. Вычислим степенные последовательности вершин графов  $G_7, G_8, G_9$ . Пусть  $\deg^- v$  — полустепень исхода вершины  $v$ ,  $\deg^+ v$  — полустепень захода вершины  $v$ . Тогда для графа  $G_7$  полустепени исхода и захода вершин равны

$$\deg^- 1 = 1, \deg^+ 1 = 0, \deg^- 2 = 2, \deg^+ 2 = 1, \deg^- 3 = 1, \deg^+ 3 = 1, \deg^- 4 = 1, \deg^+ 4 = 2,$$

т. е. степенная последовательность вершин имеет вид  $(2, 1), (1, 1), (0, 2), (1, 0)$ . Для графа  $G_9$  полустепени исхода и захода вершин равны

$$\deg^- 1 = 2, \deg^+ 1 = 0, \deg^- 2 = 0, \deg^+ 2 = 1, \deg^- 3 = 1, \deg^+ 3 = 1, \deg^- 4 = 1, \deg^+ 4 = 2,$$

т. е. степенная последовательность вершин —  $(1, 2), (1, 1), (2, 0), (0, 1)$ . Степенные последовательности различны, следовательно, графы  $G_7$  и  $G_9$  не изоморфны. Для графа  $G_8$  степенная последовательность вершин имеет вид  $(2, 1), (1, 1), (0, 2), (0, 1)$ , которая совпадает с последовательностью для графа  $G_7$ . В данном случае существует биективное отображение между вершинами графов  $G_7$  и  $G_8$ , сохраняющее смежность:  $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 3$ , т. е. графы  $G_7$  и  $G_8$  изоморфны.

Для ответа на вопрос об изоморфизме графов, матрицы смежности которых имеют одинаковые жордановы формы, можно применить методы, основанные на построении различных инвариантов графов [11–20, 28].

В последнее время появились работы [29, 30], в которых жордановы формы и жорданов базис матриц смежностей графов применяются при обработке графических сигналов (GSP) для изучения структурных и функциональных свойств различных сетей.

Пространство графических сигналов в [29, 30] представлено в виде прямой суммы жордановых подпространств, натянутых на жордановы цепочки векторов матрицы смежности. Жордановы подпространства являются спектральными компонентами графического преобразования Фурье, которое инвариантно относительно переименования вершин графа. В [29] введены жордановы классы эквивалентности графов, для которых разложение пространства графических сигналов на жордановы подпространства имеет один и тот же вид. При этом изоморфные графы имеют изоморфные жордановы пространства. В [29] отмечено, что из жордановой эквивалентности графов не следует их изоморфизм. Операция проектирования графических сигналов на жордановы подпространства, описанная в [29], позволяет в значительной степени упростить обработку числовых данных сетей, что показано на примере расчёта числовых характеристик сети автомобильных дорог в Нью-Йорке [30].

При исследовании графов на изоморфизм с помощью жордановых форм матриц смежности могут возникать трудности в случае больших значений коэффициентов перекоса матрицы смежности, когда задача определения собственных значений становится неустойчивой [27]. Эти же трудности возникают при использовании спектрального метода.

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.* Спектры графов. Теория и применение. Киев: Наукова думка, 1984. 378 с.
2. *Касьянов В. Н., Евстигнеев В. А.* Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. СПб.: БХВ-Петербург, 2003. 1104 с.
3. *Ильяшенко М. Б., Голдобин А. А.* Решение задачи поиска изоморфизма графов для проектирования специализированных вычислителей // Радиоэлектроника, информатика, управление. 2012. № 1. С. 31–36.
4. *Марлей В. Е., Плотников С. Н.* Алгоритм распознавания изоморфного вложения алгоритмических сетей // Вестник ВГУ ИТ. 2014. № 3. С. 72–75.
5. *Newman M. E. J.* Networks: an Introduction. Oxford: Oxford University Press, 2010. 784 p.
6. *Sandryhaila A. and Moura J. M. F.* Discrete signal processing on graphs // IEEE Trans. Signal Process. 2013. V. 61. No. 7. P. 1644–1656.
7. *Sandryhaila A. and Moura J. M. F.* Discrete signal processing on graphs: frequency analysis // IEEE Trans. Signal Process. 2014. V. 62. No. 12. P. 3042–3054.
8. *Teke O. and Vaidyanathan P. P.* Uncertainty principles and sparse eigenvectors of graphs // IEEE Trans. Signal Process. 2017. V. 65. No. 20. P. 5406–5420.
9. *Babai L.* Graph isomorphism in quasipolynomial time. arXiv:1512.03547 (v1:11 Dec 2015, v2:19 January 2016). <http://people.cs.uchicago.edu/~laci/update.html>
10. *Зыков А. А.* Основы теории графов. М.: Вузовская книга, 2004. 664 с.
11. *Хитров Г. М.* О разнообразии графа и применении этого понятия к проблеме изоморфизма графов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2006. Сер. 10. № 2. С. 91–100.
12. *Погожев С. В., Хитров Г. М.* О проблеме изоморфизма графов и об одном матричном алгоритме ее решения // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2008. Сер. 10. № 1. С. 1–5.
13. *Погребной А. В.* Полный инвариант графа и алгоритм его вычисления // Известия Томского политехнического университета. 2014. Т. 325. № 5. С. 110–122.
14. *Погребной А. В.* Метод определения сходства структур графов на основе выделения частичного изоморфизма в задачах геоинформатики // Известия Томского политехнического университета. 2015. Т. 326. № 11. С. 56–66.

15. Погребной В. К., Погребной А. В. Полиномиальный алгоритм вычисления полного инварианта графа на основе интегрального описателя структуры // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 323. № 5. С. 152–159.
16. McKay B. D. Practical graph isomorphism // *Congressus Numerantium*. 1981. V. 30. P. 45–87.
17. McKay B. D. and Piperno A. Practical graph isomorphism, II // *J. Symbolic Computation*. 2014. V. 60. P. 94–112.
18. Darga P. T., Sakallah K. A., and Markov I. L. Faster symmetry discovery using sparsity of symmetries // *Proc. 45th Design Automation Conf.* 2004. P. 149–154.
19. Junntila T. and Kaski P. Engineering an efficient canonical labeling tool for large and sparse graphs // *Proc. 9th Workshop on Algorithm Engineering and Experiments and the 4th Workshop on Analytic Algorithms and Combinatorics*. SIAM, 2007. P. 135–149.
20. López-Presa J. L. and Fernández A. A. Fast algorithm for graph isomorphism testing // *Proc. 8th Intern. Symp. Experimental Algorithms*. 2009. P. 221–232.
21. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
22. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. СПб.: Лань, 2009. 736 с.
23. Уилкинсон Дж. Ч. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 564 с.
24. Cardon D. A. and Tuckfield B. The Jordan canonical form for a class of zero–one matrices // *Linear Algebra and its Appl.* 2011. V. 435. No. 11. P. 2942–2954.
25. Nina H., Soto R. L., and Cardoso D. M. The Jordan canonical form for a class of weighted directed graphs // *Linear Algebra and its Appl.* 2013. V. 438. No. 1. P. 261–268.
26. Беклемышев Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1983. 336 с.
27. Володичева М. И., Григорьев-Голубев В. В., Леора С. Н. Собственные векторы, жордановы формы, функции матриц. MatLab, Mathematica, Maple. СПб.: Изд. центр СПбГМТУ, 2009. 175 с.
28. Пролубников А. В. Прямой алгоритм проверки изоморфизма графов // *Компьютерная оптика*. 2007. Т. 31. № 3. С. 86–92.
29. Deri J. A. and Moura J. M. F. Graph Equivalence Classes for Spectral Projector-Based Graph Fourier Transforms. arXiv:1701.02864 v1 [cs.SI] 11 Jan 2017.
30. Deri J. A. and Moura J. M. F. Spectral projector-based graph Fourier transforms // *IEEE J. Selected Topics in Signal Processing*. 2017. V. 11. No. 6. P. 785–795.

## REFERENCES

1. Tsvetkovich D., Dub M., and Zakhs H. Spektry grafov. Teoriya i primeneniye [Spectra of graphs. Theory and application]. Kiev, Naukova Dumka, 1984. 378 p. (in Russian)
2. Kas'yanov V. N. and Yevstigneyev V. A. Grafy v programmirovani: obrabotka, vizualizatsiya i primeneniye [Graphs in programming: processing, visualization and application]. SPb., BKHV-Peterburg, 2003. 1104 p. (in Russian)
3. P'yashenko M. B. and Goldobin A. A. Resheniye zadachi poiska izomorfizma grafov dlya proyektirovaniya spetsializirovannykh vychisliteley [The solution of problem of search of graph isomorphism for designing special computers]. *Radioelektronika, Informatika, Upravleniye*, 2012, no. 1, pp. 31–36. (in Russian)
4. Marley V. Ye. and Plotnikov S. N. Algoritm raspoznavaniya izomorfno go vlozheniya algoritmicheskikh setey [The algorithm for recognizing isomorphic investment of algorithmic networks]. *Vestnik VGU IT*, 2014, no. 3, pp. 72–75. (in Russian)
5. Newman M. E. J. Networks: an Introduction. Oxford, Oxford University Press, 2010. 784 p.

6. *Sandryhaila A. and Moura J. M. F.* Discrete signal processing on graphs. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2013, vol. 61, no. 7, pp. 1644–1656.
7. *Sandryhaila A. and Moura J. M. F.* Discrete signal processing on graphs: frequency analysis. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2014, vol. 62, no. 12, pp. 3042–3054.
8. *Teke O. and Vaidyanathan P. P.* Uncertainty principles and sparse eigenvectors of graphs. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2017, vol. 65, no. 20, pp. 5406–5420.
9. *Babai L.* Graph isomorphism in quasipolynomial time. arXiv:1512.03547 (v1:11 Dec 2015, v2:19 January 2016). <http://people.cs.uchicago.edu/~laci/update.html>
10. *Zykov A. A.* *Osnovy teorii grafov [Fundamentals of Graph Theory]*. Moscow, Vuzovskaya kniga, 2004. 664 p. (in Russian)
11. *Khitrov G. M.* O raznoobrazii grafa i primenenii etogo ponyatiya k probleme izomorfizma grafov [On the graph diversity and the application of this concept to the problem of graph isomorphism]. *Vestn. S.-Peterb. un-ta*, 2006, ser. 10, no. 2, pp. 91–100. (in Russian)
12. *Pogozhev S. V. and Khitrov G. M.* O probleme izomorfizma grafov i ob odnom matrichnom algoritme yeye resheniya [On the problem of graph isomorphism and one matrix algorithm to solve it]. *Vestn. S.-Peterb. un-ta*, 2006, ser. 10, no. 1, pp. 1–5. (in Russian)
13. *Pogrebnoy A. V.* Polnyy invariant grafa i algoritm yego vychisleniya [Complete invariant of the graph and the algorithm of its calculation]. *Izvestiya Tomskogo Politekhnicheskogo Universiteta*, 2014, vol. 325, no. 5, pp. 110–122. (in Russian)
14. *Pogrebnoy A. V.* Metod opredeleniya skhodstva struktur grafov na osnove vydeleniya chastichnogo izomorfizma v zadachakh geoinformatiki [Method for determining the similarity of structures of graphs based on the allocation of partial isomorphism in geoinformatics tasks]. *Izvestiya Tomskogo Politekhnicheskogo Universiteta*, 2015, vol. 326, no. 11, pp. 56–66. (in Russian)
15. *Pogrebnoy V. K. and Pogrebnoy A. V.* Polinomial'nyy algoritm vychisleniya polnogo invarianta grafa na osnove integral'nogo opisatelya struktury [A polynomial algorithm for computing the complete invariant of the graph based on the integral handle structure]. *Izvestiya Tomskogo Politekhnicheskogo Universiteta*, 2013, vol. 323, no. 5, pp. 152–159. (in Russian)
16. *McKay B. D.* Practical graph isomorphism. *Congressus Numerantium*, 1981, vol. 30, pp. 45–87.
17. *McKay B. D. and Piperno A.* Practical graph isomorphism, II. *J. Symbolic Computation*, 2014, vol. 60, pp. 94–112.
18. *Darga P. T., Sakallah K. A., and Markov I. L.* Faster symmetry discovery using sparsity of symmetries. *Proc. 45th Design Automation Conf.*, 2004, pp. 149–154.
19. *Junttila T. and Kaski P.* Engineering an efficient canonical labeling tool for large and sparse graphs. *Proc. 9th Workshop on Algorithm Engineering and Experiments and the 4th Workshop on Analytic Algorithms and Combinatorics, SIAM*, 2007, pp. 135–149.
20. *López-Presa J. L. and Fernández A. A.* Fast algorithm for graph isomorphism testing. *Proc. 8th Intern. Symp. Experimental Algorithms*, 2009, pp. 221–232.
21. *Khorn R. and Dzhonson Ch.* *Matrichnyy analiz [Matrix Analysis]*. Moscow, Mir Publ., 1989. 655 p. (in Russian)
22. *Faddeyev D. K. and Faddeyeva V. N.* *Vychislitel'nyye metody lineynoy algebrы [Computational Methods of Linear Algebra]*. SPb., Lan' Publ., 2009. 736 p. (in Russian)
23. *Uilkinson Dzh. H.* *Algebraicheskaya problema sobstvennykh znacheniy [The Algebraic Problem of Eigenvalues]*. Moscow, Nauka Publ., 1970. 564 p. (in Russian)
24. *Cardon D. A. and Tuckfield B.* The Jordan canonical form for a class of zero–one matrices. *Linear Algebra and its Appl.*, 2011, vol. 435, no. 11, pp. 2942–2954.

25. *Nina H., Soto R. L., and Cardoso D. M.* The Jordan canonical form for a class of weighted directed graphs. *Linear Algebra and its Appl.*, 2013, vol. 438, no. 1, pp. 261–268.
26. *Beklemishev D. V.* *Dopolnitel'nyye glavy lineynoy algebry* [Additional Chapters of Linear Algebra]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 336 p. (in Russian)
27. *Volodicheva M. I., Grigor'yev-Golubev V. V., and Leora S. N.* *Sobstvennyye vektory, zhordanovy formy, funktsii matrits.* MatLab, Mathematica, Maple [Eigenvectors, Jordan Forms and Matrix Functions. MatLab, Mathematica, Maple]. SPb., SPbGMTU Publ., 2009. 175 p. (in Russian)
28. *Prohubnikov A. V.* *Pryamoy algoritm proverki izomorfizma grafov* [Direct algorithm of graph isomorphism testing]. *Komp'yuternaya Optika*, 2007, vol. 31, no. 3, pp. 86–92. (in Russian)
29. *Deri J. A. and Moura J. M. F.* Graph Equivalence Classes for Spectral Projector-Based Graph Fourier Transforms. arXiv:1701.02864 v1 [cs.SI] 11 Jan 2017.
30. *Deri J. A. and Moura J. M. F.* Spectral Projector-Based Graph Fourier Transforms. *IEEE J. Selected Topics in Signal Processing*, 2017, vol. 11, no. 6, pp. 785–795.