

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2013

№ 4(24)

Свидетельство о регистрации: ПИ № ФС77-30658
от 20 декабря 2007 г.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

Глазунов А.А., д-р физ.-мат. наук, проф. (председатель); Гулько С.П., д-р физ.-мат. наук, проф. (зам. председателя); Лазарева Е.Г., канд. физ.-мат. наук, доц. (отв. секретарь по разделу математики); Александров И.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Берцун В.Н., канд. физ.-мат. наук, доц.; Биматов В.И., д-р физ.-мат. наук, проф.; Бубенчиков А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Васенин И.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Гришин А.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Ищенко А.Н., д-р физ.-мат. наук, проф.; Конев В.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Крайнов А.Ю., д-р физ.-мат. наук; Крылов П.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Панько С.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Пергаменщиков С.М., д-р физ.-мат. наук, проф.; Сипачёва О.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Скрипняк В.А., д-р физ.-мат. наук, проф.; Старченко А.В., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Г.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Шрагер Э.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Щербаков Н.Р., д-р физ.-мат. наук, проф.; Хайруллина В.Ю. (отв. секретарь по разделу механики); Cauty R., prof.

Научный журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» был выделен в самостоятельное периодическое издание из общенаучного журнала «Вестник Томского государственного университета» в 2007 г. Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия (свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-30658 от 20 декабря 2007 г.), ему присвоен международный стандартный номер сериального издания (ISSN 1998-8621). Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, его подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России».

«Вестник ТГУ. Математика и механика» входит в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) на платформе <http://elibrary.ru>, а также в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Кроме того, все номера журнала присутствуют и обрабатываются на общероссийском математическом портале <http://Math-Net.ru>.

Адрес редакции:

634050, г. Томск, пр. Ленина, д.36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

ООО «Издательство научно-технической литературы»

634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*

Верстка *Д.В. Фортеса*

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

| | |
|--|----|
| Гриншпон С.Я., Рогозинский М.И. k -вполне транзитивность однородно разложимых групп | 5 |
| Зюзьков В.М. Последовательность $Fibonacci(n) \bmod n$ | 15 |
| Кайгородов Е.В. Хопфовы вполне разложимые группы без кручения | 24 |
| Несмеев Ю.А. Развитие одного подхода к решению алгебраического уравнения 4-й степени | 29 |
| Онищук Н.М. Экстремали геодезического кручения неголомомного распределения | 39 |
| Царев А.В. T -кольца и факторно делимые группы ранга 1 | 50 |
| Чехлов А.Р., Агафонцева М.В. Об абелевых группах с центральными квадратами коммутаторов эндоморфизмов | 54 |

МЕХАНИКА

| | |
|--|-----|
| Биматов В.И., Савкина Н.В. Экспериментально-расчетный метод определения нелинейных аэродинамических характеристик острого конуса | 60 |
| Каракулов В.В., Смолин И.Ю., Скрипняк В.А. Численная методика прогнозирования эффективных механических свойств стохастических композитов при ударно-волновом нагружении с учётом эволюции структуры | 70 |
| Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В. Напряженное состояние вблизи особой точки составной конструкции в плоской задаче | 78 |
| Севастьянов Н.Н. Создание математической модели внешних возмущающих моментов для режима «прогноз» спутника связи «Ямал-200» | 88 |
| Скрипняк В.В., Лобанов Д.В., Скрипняк В.А., Янюшкин А.С. Моделирование напряженно-деформированного состояния в пластине из композиционного материала (WC – Co) при алмазном затачивании | 99 |
| Смолин А.Ю., Анисеева Г.М., Шилько Е.В., Псахье С.Г. Моделирование деформации наноструктурных покрытий на титановой подложке при наноиндентировании | 111 |
| Шваб А.В., Марценко А.А., Марценко М.С. Моделирование гидродинамики высококонцентрированной гранулированной среды в смешительном бункере | 126 |
| СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ | 133 |

CONTENTS

MATHEMATICS

| | |
|---|----|
| Grinshpon S.Y., Rogozinsky M.I. k -full transitivity of homogeneously decomposable groups | 5 |
| Zyuz'kov V.M. Fibonacci(n) modulo n sequence | 15 |
| Kaygorodov E.V. Hopfian completely decomposable torsion-free groups..... | 24 |
| Nesmeev Yu.A. The development of an approach for the solution of the fourth degree algebraic equation..... | 29 |
| Onishchuk N.M. Extremal curves of geodesic torsion on a nonholonomic distribution | 39 |
| Tsarev A.V. T-rings and quotient divisible groups of rank 1 | 50 |
| Chekhlov A.R., Agafontseva M.V. On abelian groups with central squares of commutators of endomorphisms | 54 |

MECHANICS

| | |
|---|-----|
| Bimatov V.I., Savkina N.V. Experimental and computational method of determining nonlinear aerodynamic characteristics of a sharp cone | 60 |
| Karakulov V.V., Smolin I.Yu., Skripnyak V.A. Numerical procedure of forecasting effective mechanical properties of stochastic composites under shock-wave loading with allowance for the structure evolution | 70 |
| Pestrenin V.M., Pestenina I.V., Landik L.V. The stress state near a singular point of a flat composite design..... | 78 |
| Sevast'yanov N.N. creation of a mathematical model of external disturbing moments for the "Forecast" regime of the Yamal 200 communication satellite | 88 |
| Skripnyak V.V., Lobanov D.V., Skripnyak V.A., Yanyushkin A.S. Modeling of the stress-strain state in a plate of a composite material (WC – Co) at diamond grinding | 99 |
| Smolin A.Yu., Anikeeva G.M., Shilko E.V., Psakhie S.G. Modeling deformation of nanostructured coatings on a titanium substrate under nanoindentation..... | 111 |
| Shvab A.V., Martsenko A.A., Martsenko M.S. Modeling of hydrodynamics of highly concentrated granulated media in the blending silo | 126 |
| BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS | 133 |

МАТЕМАТИКА

УДК 512.541

С.Я. Гриншпон, М.И. Рогозинский

***k*-ВПОЛНЕ ТРАНЗИТИВНОСТЬ ОДНОРОДНО РАЗЛОЖИМЫХ ГРУПП¹**

Полностью описаны *k*-вполне транзитивные сепарабельные и однородно разложимые группы без кручения, а также *k*-вполне транзитивные вполне разложимые группы.

Ключевые слова: *k*-вполне транзитивность, однородно разложимая группа, сепарабельная группа, эндоморфизм.

Одним из важнейших понятий в теории абелевых групп является понятие вполне транзитивности. Это понятие было рассмотрено И. Капланским в [1] для *p*-групп. Для групп без кручения данное понятие впервые появилось в работе П.А. Крылова [2]. Для произвольной абелевой группы понятие «вполне транзитивность» рассматривалось в [3]. Затем оно уточнилось в [9]. При этом введенное понятие вполне транзитивной абелевой группы согласуется с рассматриваемыми ранее определениями вполне транзитивной *p*-группы и вполне транзитивной группы без кручения. Отметим, что понятие вполне транзитивной группы тесно связано с исследованием вполне характеристических подгрупп абелевых групп [4, 9].

В [5] Д. Кэрролл вводит понятие *k*-вполне транзитивной *p*-группы, тем самым обобщая понятие вполне транзитивности для *p*-групп.

Пусть *G* – *p*-группа и $k \in \mathbb{N}$. Группа *G* называется *k*-вполне транзитивной, если из выполнения условий для кортежей $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ элементов группы *G*

$$(1) \quad H(x_i) \leq H(y_i), \quad i = \overline{1, k};$$

$$(2) \quad \text{кортеж } X \text{ высотно независим, в том смысле, что при } i \neq j, h(rx_i) \neq h(sx_j)$$

для любых $r, s \in \mathbb{Z}$, кроме случая $rx_i = sx_j = 0$,

следует существование эндоморфизма $\theta \in E(G)$ группы *G* со свойством $\theta(x_i) = y_i, i = \overline{1, k}$.

В [6] рассматривается обобщение понятия вполне транзитивности для абелевых групп без кручения.

Определение 1 [6]. Пусть *G* – группа без кручения и $k \in \mathbb{N}$. Кортеж $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ элементов группы *G* называется *t*-независимым, если при $i \neq j$ типы $t(x_i)$ и $t(x_j)$ несравнимы. Наибольшую длину *t*-независимого кортежа

¹ Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.В37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями»; работа выполнена также в рамках темы 2.3684.2011 Томского государственного университета.

группы G назовем t -длинной и будем обозначать $k_t(G)$. В случае, если в группе G существует t -независимый кортеж длины k для всех $k \in \mathbb{N}$, полагаем $k_t(G) = \infty$.

Определение 2 [6]. Пусть G – группа без кручения и $k \in \mathbb{N}$. Группу G назовем k -вполне транзитивной, если для любых двух кортежей $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ элементов группы G , удовлетворяющих условиям:

- (1) $\chi(x_i) \leq \chi(y_i)$ для любого $i = \overline{1, k}$;
- (2) кортеж X является t -независимым,

следует существование эндоморфизма θ группы G со свойством $\theta(x_i) = y_i$ ($i = \overline{1, k}$).

При $k = 1$ получаем понятие вполне транзитивности. Ясно также, что при $k > k_t(G)$ группа G является k -вполне транзитивной по определению. В частности, при $k > 1$ всякая однородная группа (в том числе любая делимая группа без кручения и группа без кручения ранга 1) является k -вполне транзитивной.

Везде далее в тексте под словом «группа» будем подразумевать абелеву группу без кручения.

Заметим, что условие t -независимости исключает возможность равенства элементов кортежа нулю.

В [6] показано, что в определении 2 условие t -независимости кортежа X нельзя заменить условием линейной независимости. Однако для k -вполне транзитивных групп имеет место следующая связь:

Теорема 3. Пусть $k \geq 2$ и G – k -вполне транзитивная группа. Тогда всякий t -независимый кортеж длины k является линейно независимым.

Доказательство. Пусть группа G – k -вполне транзитивна для некоторого $k \geq 2$ и кортеж $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ – t -независим. Предположим, что кортеж X линейно зависим. Тогда существуют целые m_1, m_2, \dots, m_k , не все равные нулю, такие, что $m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_k x_k = 0$ (*). Пусть $m_j \neq 0$ ($1 \leq j \leq k$). Рассмотрим кортеж $Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$, где $y_i = x_i$ при $i \neq j$ и $y_j = 2x_j$. Ясно, что $\chi(x_i) \leq \chi(y_i)$ ($i = \overline{1, k}$). Тогда, в силу k -вполне транзитивности группы G , существует $\theta \in E(G)$, такой, что $\theta(x_i) = y_i$ ($i = \overline{1, k}$). Подействуем эндоморфизмом θ на обе части равенства (*).

Получим $\theta(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_k x_k) = \sum_{i=1}^k m_i y_i = \sum_{i \neq j} m_i x_i + 2m_j x_j = 0$. Перепишем

данное равенство в следующем виде: $(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_k x_k) + m_j x_j = 0$ (**).

Учитывая равенство (*), получаем, что $x_j = 0$, что противоречит t -независимости кортежа X . Таким образом, кортеж X линейно независим. ■

Следствие 4. Группа без кручения G конечного ранга не является k -вполне транзитивной для всех k , удовлетворяющих неравенству $r(G) < k \leq k_t(G)$.

Доказательство. Для группы конечного ранга длина линейно независимого кортежа не превосходит $r(G)$. Для k -вполне транзитивной группы, в силу теоремы 2, всякий t -независимый кортеж является линейно независимым. Следовательно, при $r(G) < k \leq k_t(G)$ в группе G не существует t -независимого кортежа, который бы являлся линейно независимым, то есть группа G в таком случае не является k -вполне транзитивной. ■

Теорема 5. Группа G k -вполне транзитивна для некоторого $k > 1$ тогда и только тогда, когда k -вполне транзитивна ее редуцированная часть.

Доказательство. Необходимость очевидна, поскольку прямое слагаемое k -вполне транзитивной группы само k -вполне транзитивно [7].

Достаточность. Пусть $k > 1$ и $G = R \oplus D$, где R – редуцированная часть группы G , D – делимая часть. Пусть также группа R – k -вполне транзитивна. Рассмотрим кортежи $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$, удовлетворяющие условиям определения 2. Имеем $x_i = r_i + d_i$; $y_i = r'_i + d'_i$, где $r_i, r'_i \in R$; $d_i, d'_i \in D$ ($i = \overline{1, k}$). Понятно, что $\chi(x_i) = \chi(r_i)$ и $\chi(y_i) = \chi(r'_i)$. Таким образом, условия определения 2 выполнены для кортежей $X_R = (r_1, r_2, \dots, r_k)$, $Y_R = (r'_1, r'_2, \dots, r'_k)$, а значит, в силу k -вполне транзитивности группы R , существует $\varphi \in E(R)$, такое, что $\varphi(r_i) = r'_i$ ($i = \overline{1, k}$). Рассмотрим подгруппу H группы R , порожденную элементами r_1, r_2, \dots, r_k . Поскольку кортеж X_R – t -независим, то по теореме 2 он линейно независим. Тогда $H = \langle r_1 \rangle \oplus \langle r_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle r_k \rangle$. В силу того, что H – свободная абелева группа, всякое отображение α множества X_R в любую абелеву группу A продолжается до гомоморфизма $\psi: H \rightarrow A$ [8, теорема 14.2]. Значит, отображение $\alpha: X_R \rightarrow D$, где $\alpha(r_i) = d'_i$ ($i = \overline{1, k}$), продолжается до гомоморфизма $\psi: H \rightarrow D$, т.е. для любого элемента $h \in H$, $h = m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_k r_k$, получаем $\psi(h) = m_1 d'_1 + m_2 d'_2 + \dots + m_k d'_k$.

Поскольку группа D инъективная, гомоморфизм ψ может быть продолжен до гомоморфизма σ группы R в группу D [8, с. 119].

Итак, существует гомоморфизм $\sigma \in \text{Hom}(R; D)$, такой, что $\sigma(r_i) = d'_i$. Рассмотрим эндоморфизм θ группы G , действующий по правилу $\theta(r + d) = \varphi(r) + \sigma(r)$, где $r \in R$, $d \in D$. Тогда получим, что $\theta(x_i) = \theta(r_i + d_i) = \varphi(r_i) + \sigma(r_i) = r'_i + d'_i = y_i$.

Следовательно, G также k -вполне транзитивная группа. ■

Учитывая аналогичный результат для вполне транзитивных групп [9], далее будем рассматривать только редуцированные группы.

Рассмотрим k -вполне транзитивные однородно разложимые группы. Напомним, что группа G называется однородной, если все элементы группы G имеют один и тот же тип [10]. Группа G называется однородно разложимой, если ее можно представить в виде прямой суммы однородных групп [10].

Сгруппировав однородные компоненты одного и того же типа, для однородно разложимой группы получим каноническое разложение $G = \bigoplus_{t \in T} G_t$, где T – некоторое множество типов, G_t – однородная группа типа t . Обозначим для всякого $T_1 \subset T$ $G_{T_1} = \bigoplus_{t \in T_1} G_t \subset G$. Тогда, в частности, $G_T = G$; $G_{\{t\}} = G_t$. Также, для всякого элемента $g \in G$ однородно разложимой группы обозначим $I_T(g) = \{t \in T; \pi_t(g) \neq 0\}$, где π_t – проекция на прямое слагаемое G_t .

Пусть $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ – множество всех простых чисел, упорядоченных по возрастанию. Для произвольной группы без кручения G обозначим множество $\pi(G) = \{p_i \in P; p_i G \neq G\}$.

Тип $t = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n, \dots)$ назовем p_i -делимым для некоторого простого $p_i \in P$, если соответствующая координата типа t $\chi_i = \infty$. Тип t делимый, если он p_i -делимый для всех $p_i \in P$.

Напомним, если $t_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$, $t_2 = (\beta_1, \dots, \beta_n, \dots)$, то $t_1 \cdot t_2 = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n, \dots)$, где $\chi_i = \alpha_i + \beta_i$ и бесконечность плюс нечто есть бесконечность [10].

Определение 6 [4]. Будем говорить, что однородно разложимая группа $G = \bigoplus_{i \in T} G_i$ удовлетворяет условию контрастности для типов, если для всяких двух типов $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$ и любого простого числа p , такого, что $pG_{t_1} \neq G_{t_1}$, имеет место $pG_{t_2} = G_{t_2}$.

Теорема 7 [4]. Однородно разложимая группа $G = \bigoplus_{i \in T} G_i$ вполне транзитивна тогда и только тогда, когда каждая однородная компонента ее канонического разложения вполне транзитивна и G удовлетворяет условию контрастности для типов.

Предложение 8. Однородно разложимая редуцированная группа $G = \bigoplus_{i \in T} G_i$ удовлетворяет условию контрастности для типов тогда и только тогда, когда для любых различных типов $t_1, t_2 \in T$ тип $t_1 \cdot t_2$ – делимый.

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим произвольные различные типы $t_1, t_2 \in T$. Рассмотрим множества $\pi(G_{t_1}) = \{p_i \in P; p_i G_{t_1} \neq G_{t_1}\}$; $\pi(G_{t_2}) = \{p_i \in P; p_i G_{t_2} \neq G_{t_2}\}$. Поскольку группа G редуцированная, множества $\pi(G_{t_1}), \pi(G_{t_2})$ не пусты. Из выполнения условия контрастности для типов следует, что $p_i G_{t_2} = G_{t_2}; p_i G_{t_1} = G_{t_1}$ для всех $p_i \in \pi(G_{t_j})$ ($j=1,2$). Таким образом, если $t_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$, $t_2 = (\beta_1, \dots, \beta_n, \dots)$, то для всех $p_i \in \pi(G_{t_1})$ $\beta_i = \infty$ и для всех $p_i \in \pi(G_{t_2})$ $\alpha_i = \infty$. Тогда $t_1 \cdot t_2 = (\infty, \infty, \dots, \infty, \dots)$, то есть $t_1 \cdot t_2$ – делимый тип.

Достаточность. Пусть $t_1, t_2 \in T$, $t_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$, $t_2 = (\beta_1, \dots, \beta_n, \dots)$. По условию $t_1 \cdot t_2 = (\infty, \infty, \dots, \infty, \dots)$. Рассмотрим непустые множества $\pi(G_{t_1}) = \{p_i \in P; p_i G_{t_1} \neq G_{t_1}\}$; $\pi(G_{t_2}) = \{p_i \in P; p_i G_{t_2} \neq G_{t_2}\}$. Если $p_i \in \pi(G_{t_1})$, то $\alpha_i \neq \infty$, а значит, $\beta_i = \infty$, и наоборот, если $p_i \in \pi(G_{t_2})$, то $\beta_i \neq \infty$ и $\alpha_i = \infty$. Другими словами, $p_i G_{t_2} = G_{t_2}; p_i G_{t_1} = G_{t_1}$. ■

Семейством Шпернера множества E [11] называется семейство подмножеств F множества E , в котором ни один элемент не является подмножеством другого. Другими словами, если $X, Y \in F$, то $X \not\subset Y$ и $Y \not\subset X$.

Теорема Шпернера [11]. Для любого семейства Шпернера F подмножеств конечного множества, состоящего из n элементов, справедливо $|F| \leq C_n^m$, где

$m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, причем верхняя оценка для $|F|$ достижима.

Предложение 9. Пусть $G = \bigoplus_{t \in T} G_t$ – однородно разложимая редуцированная группа. Если G удовлетворяет условию контрастности для типов, то для любых подмножеств $T_1, T_2 \subset T$, образующих семейство Шпернера множества T , типы $\inf_{t \in T_1} t$ и $\inf_{t \in T_2} t$ несравнимы.

Доказательство. Пусть $T_1, T_2 \subset T$ такие, что $T_1 \not\subset T_2$ и $T_2 \not\subset T_1$. Выберем $t_1 \in T_1 \setminus T_2$ и $t_2 \in T_2 \setminus T_1$. При этом, поскольку G – редуцированная группа, множества $\pi(G_{t_1})$ и $\pi(G_{t_2})$ не пусты. Пусть $p_{i_1} \in \pi(G_{t_1}), p_{i_2} \in \pi(G_{t_2})$. Тогда из выполнения условия контрастности для типов следует, что для всех $t \in T, t \neq t_j, p_{i_j} \notin \pi(G_t), j = 1, 2$.

Отметим также, что $\pi(G_{T_j}) = \bigcup_{t \in T_j} \pi(G_t)$. Получаем, что $p_{i_1} \in \pi(G_{t_1}) \subset \pi(G_{T_1}), p_{i_1} \notin \pi(G_{T_2})$ и $p_{i_2} \in \pi(G_{t_2}) \subset \pi(G_{T_2}), p_{i_2} \notin \pi(G_{T_1})$.

Если теперь обозначить $t_{T_1} = \inf_{t \in T_1} t = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$ и $t_{T_2} = \inf_{t \in T_2} t = (\beta_1, \dots, \beta_n, \dots)$, заключаем, что $\alpha_{i_1} \neq \infty, \beta_{i_1} = \infty$ и $\beta_{i_2} \neq \infty, \alpha_{i_2} = \infty$. То есть типы $\inf_{t \in T_1} t$ и $\inf_{t \in T_2} t$ несрав-

нимы. ■

Предложение 10. Пусть $G = \bigoplus_{t \in T} G_t$ – однородно разложимая редуцированная группа. Если G удовлетворяет условию контрастности для типов, то $k_t(G) = C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ при $|T| = n$ и $k_t(G) = \infty$ при $|T| \geq \aleph_0$.

Доказательство. Заметим, что для t -независимости кортежа $X = (x_1, \dots, x_k)$ необходимо, чтобы множества $I_T(x_i)$ образовывали семейство Шпернера. Действительно, если для некоторых x_i, x_j выполнено $I_T(x_i) \subset I_T(x_j)$, то $t(x_i) \geq t(x_j)$.

По теореме Шпернера, максимальная мощность семейства Шпернера в случае $|T| = n$ равна $k = C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. То есть, если $|T| = n$, то во множестве T существует семейство Шпернера из k элементов. Пусть $\{T_i; i = \overline{1, k}\}$ такое множество. Рассмотрим кортеж $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, где $I_T(x_i) = T_i (i = \overline{1, k})$. Из предложения 9 следует, что кортеж X – t -независим. Из теоремы Шпернера следует также, что семейства Шпернера большей мощности в группе G не существует, следовательно, не существует t -независимого кортежа, состоящего более чем из k элементов.

Если же $|T| \geq \aleph_0$, то для всякого $k \in \mathbb{N}$ в качестве t -независимого кортежа можно взять кортеж $X = (g_{t_1}, g_{t_2}, \dots, g_{t_k})$, где $g_{t_j} \in G_{t_j} (j = \overline{1, k})$. ■

Замечание 11. Учитывая, что $n \leq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ для любого $n \geq 1$, получаем, что для однородно разложимой группы $G = \bigoplus_{t \in T} G_t$ справедлива оценка $k_t(G) \geq |T|$, если T конечно.

Замечание 12. Как следствие из предложения 10, для вполне разложимой группы ранга n получаем верхнюю оценку t -длины $k_t(G) \leq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Замечание 13. В предложениях 9 и 10 группы удовлетворяют условию контрастности для типов, но не обязаны быть вполне транзитивными.

Следует отметить, что во вполне транзитивной однородно разложимой группе, в силу выполнения условия контрастности для типов, каждое однородное слагаемое G_i является вполне характеристической подгруппой.

Предложение 14. Если однородно разложимая группа $G = \bigoplus_{i \in T} G_i$ вполне транзитивна, то для любых элементов $a, b \in G$ из $\chi(a) \leq \chi(b)$ следует $I_T(b) \subset I_T(a)$.

Доказательство. Пусть $a, b \in G$ и $\chi(a) \leq \chi(b)$. Из вполне транзитивности группы G следует существование $\theta \in E(G)$, такого, что $\theta(a) = b$.

Получаем $b = \theta(a) = \theta(\sum_{i \in I_T(a)} a_i) = \sum_{i \in I_T(a)} \theta(a_i) \in \bigoplus_{i \in I_T(a)} G_i$, то есть $I_T(b) \subset I_T(a)$. ■

Теорема 15. Пусть $G = \bigoplus_{i \in T} G_i$ – однородно разложимая группа, причем $|T| > 2$. Если G вполне транзитивна, то G не является k -вполне транзитивной для всех $1 < k \leq k_t(G)$.

Доказательство. Пусть $|T| \geq \aleph_0$ и $k > 1$. По предложению 10 $k_t(G) = \infty$. Рассмотрим кортежи $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ и $Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$, где $x_i = g_i + g_{t_{i+1}}$, $y_1 = g_{t_2}$, $y_2 = 2g_{t_2}$, $y_j = x_j$, $g_i \in G_{t_i}$ ($i = \overline{1, k}$; $j = \overline{3, k}$). Поскольку группа G вполне транзитивна, G удовлетворяет условию контрастности для типов. Тогда из предложения 9 следует, что кортеж X – t -независим. Ясно также, что условие (1) определения 2 выполнено. Предположим, что G – k -вполне транзитивна. Тогда существует $\theta \in E(G)$, такой, что $\theta(x_i) = y_i$ ($i = \overline{1, k}$). Рассмотрим подробнее эти равенства. Имеем $\theta(x_1) = \theta(g_{t_1} + g_{t_2}) = \theta g_{t_1} + \theta g_{t_2} = y_1 = g_{t_2}$ и $\theta(x_2) = \theta(g_{t_2} + g_{t_3}) = \theta g_{t_2} + \theta g_{t_3} = y_2 = 2g_{t_2}$. Поскольку каждая однородная компонента G_i является вполне характеристической подгруппой группы G , из приведенных равенств следует, что $\theta g_{t_2} = g_{t_2}$ и $\theta g_{t_2} = 2g_{t_2}$. Приходим к противоречию.

Пусть теперь $|T| = n$. Из предложения 10 следует, что $k_t(G) = C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Если $n < k \leq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, то во всяком t -независимом кортеже (a_1, \dots, a_k) найдутся два элемента $a_i, a_j \in G$, такие, что $I_T(a_i) \cap I_T(a_j) \neq \emptyset$. Зафиксируем такой кортеж $A = (a_1, a_2, \dots, a_k)$, где $a_i \in G$ ($i = \overline{1, k}$).

Пусть $\tilde{i} \in I_T(a_i) \cap I_T(a_j)$, $a_i = g_{\tilde{i}} + \bar{a}_i$, $a_j = h_{\tilde{i}} + \bar{a}_j$, где $g_{\tilde{i}}, h_{\tilde{i}} \in G_{\tilde{i}}$, $\tilde{i} \notin (I_T(\bar{a}_i) \cup I_T(\bar{a}_j))$. Построим кортежи $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ следующим образом.

Полагаем $y_m = x_m = a_m$ при $m \neq i, m \neq j$; $x_i = g_i + \bar{a}_i, x_j = g_i + \bar{a}_j, y_i = g_i, y_j = 2g_i$, где $g_i \in G_i$. Из построения следует, что кортежи удовлетворяют условиям определения 2. Предположим, что G – k -вполне транзитивная группа. Тогда существует $\theta \in E(G)$, такой, что $\theta(x_i) = y_i (i = \overline{1, k})$. Получаем, что $\theta(x_i) = \theta g_i + \theta(\bar{a}_i) = y_i = g_i$ и $\theta(x_j) = \theta g_i + \theta(\bar{a}_j) = y_j = 2g_i$. Но тогда $\theta g_i = g_i$ из первого равенства и $\theta g_i = 2g_i$ из второго. Приходим к противоречию.

Осталось рассмотреть случай $k \leq n$. Рассмотрим кортежи $X = (x_1, x_2, \dots, x_k), Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$, где $x_i = g_i + g_{t_{i+1}}, x_k = g_{t_k} + g_{t_1}, y_1 = g_{t_2}, y_2 = 2g_{t_2}, y_j = x_j, g_i \in G_{t_i}, g_{t_k} \in G_{t_k} (i = \overline{1, k-1}; j = \overline{3, k})$. X, Y удовлетворяют условию (1) определения 2, кортеж X является t -независимым по предложению 9. Предполагая, что G – k -вполне транзитивна, получаем, что существует $\theta \in E(G)$, такой, что $\theta(x_i) = y_i (i = \overline{1, k})$. Из первых двух равенств, аналогично случаю $|T| \geq \aleph_0$, приходим к противоречию. ■

Теорема 16. Однородно разложимая группа $G = \bigoplus_{t \in T} G_t$ является k -вполне транзитивной для всех $k \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда G удовлетворяет одному из двух условий:

- (I) G – однородная вполне транзитивная группа;
- (II) $G = G_{t_1} \oplus G_{t_2}$, где G_{t_1}, G_{t_2} – вполне транзитивные группы и $t_1 \cdot t_2$ – делимый тип.

Доказательство. Необходимость. Пусть $G = \bigoplus_{t \in T} G_t$ k -вполне транзитивна для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда, в частности, G вполне транзитивна и 2-вполне транзитивна. Из теоремы 15 и 2-вполне транзитивности группы G следует, что $|T| \leq 2$. Если $|T| = 1$, получаем случай (I). Пусть $|T| = 2$, то есть $G = G_{t_1} \oplus G_{t_2}$. Тогда каждая однородная компонента G_{t_1}, G_{t_2} вполне транзитивна и из вполне транзитивности группы G и предложения 8 следует, что $t_1 \cdot t_2$ – делимый тип.

Достаточность. В случае (I) получаем, что группа G вполне транзитивна и $k_t(G) = 1$, то есть G k -вполне транзитивна для всех $k > 1$.

Пусть $G = G_{t_1} \oplus G_{t_2}$, причем G_{t_1}, G_{t_2} – вполне транзитивные группы и $t_1 \cdot t_2$ – делимый тип. Из предложения 8 следует, что G удовлетворяет условию контрастности для типов, то есть G – вполне транзитивная группа. Ясно также, что $k_t(G) = 2$, то есть G – k -вполне транзитивна для всех $k > 2$.

Докажем, что G – 2-вполне транзитивна. Рассмотрим кортежи $X = (x_1, x_2); y = (y_1, y_2)$, удовлетворяющие условиям определения 2. Поскольку типы $t(x_1)$ и $t(x_2)$ несравнимы, то, не умаляя общности, можно считать, что $t(x_1) = t_1$ и $t(x_2) = t_2$. Из предложения 14 получаем также, что $t(y_1) = t_1$ и $t(y_2) = t_2$. Таким образом, $x_i, y_i \in G_{t_i}$ и $\chi(x_i) \leq \chi(y_i) (i = 1, 2)$.

Поскольку группы G_i вполне транзитивны ($i=1,2$), существуют $\theta_i \in E(G_i)$, такие, что $\theta_i(x_i) = y_i$ ($i=1,2$). Рассмотрим эндоморфизм $\theta \in E(G)$, $\theta = \theta_1\pi_{t_1} + \theta_2\pi_{t_2}$, где π_{t_i} – проекция на прямое слагаемое G_{t_i} . Получаем тогда: $\theta(x_i) = \theta_i\pi_{t_i}x_i = \theta_ix_i = y_i$ ($i=1,2$). Таким образом, искомым эндоморфизм найден, то есть G – 2-вполне транзитивная группа. ■

Напомним определение однородно сепарабельной группы. Абелева группа G без кручения называется однородно сепарабельной [4], если существует такое семейство \mathcal{C} однородных прямых слагаемых этой группы, что каждое конечное множество элементов группы G можно вложить в прямое слагаемое этой группы, являющееся прямой суммой некоторых групп семейства \mathcal{C} . Заметим, что однородно сепарабельными группами являются, в частности, вполне разложимые группы без кручения, сепарабельные группы без кручения, однородно разложимые группы.

Учитывая, что однородно сепарабельная вполне транзитивная группа является однородно разложимой [4], получаем

Теорема 17. Однородно сепарабельная группа G – k -вполне транзитивна для всех $k \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда G – однородная вполне транзитивная группа или G представима в виде $G = G_{t_1} \oplus G_{t_2}$, где G_{t_1}, G_{t_2} – однородные вполне транзитивные группы различных типов t_1, t_2 , причем $t_1 \cdot t_2$ – делимый тип.

Учитывая, что однородная сепарабельная группа является вполне транзитивной [4], для сепарабельных групп получаем такой результат:

Теорема 18. Сепарабельная группа G – k -вполне транзитивна для всех $k \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда G – однородная группа или G представима в виде прямой суммы двух однородных групп различных типов t_1, t_2 , причем $t_1 \cdot t_2$ – делимый тип.

Для вполне разложимых групп критерий k -вполне транзитивности для всех $k \in \mathbb{N}$ можно представить в следующем виде:

Теорема 19. Пусть G – вполне разложимая группа и $G = \bigoplus_{t \in T} G_t$ – ее каноническое разложение. Эквивалентны следующие утверждения:

Группа G k -вполне транзитивна для всех $k \in \mathbb{N}$;

G – однородная группа или $G = G_{t_1} \oplus G_{t_2}$, причем $t_1 \cdot t_2$ – делимый тип;

G удовлетворяет условию контрастности для типов и $k_t(G) \leq 2$;

G удовлетворяет условию контрастности для типов и $|T| \leq 2$;

G удовлетворяет условию контрастности для типов и для любых элементов $a, b \in G$ с несравнимыми типами справедливо $I_T(a) \cap I_T(b) = \emptyset$.

Доказательство. Эквивалентность условий I и II следует из теоремы 16.

Из предложения 8 также следует эквивалентность условий II и IV.

Покажем эквивалентность условий III и IV. Пусть G удовлетворяет условию контрастности для типов и $|T| \leq 2$. Если $|T| = 1$, по предложению 10 получаем, что

$k_t(G) = C_1^{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} = C_1^0 = 1$. Если же $|T| = 2$, то $k_t(G) = C_2^1 = 2$. В обоих случаях получаем, что $k_t(G) \leq 2$.

Обратно, пусть $k_t(G) \leq 2$. Из замечания 11 следует, что $2 \geq k_t(G) \geq |T|$, то есть $|T| \leq 2$.

Осталось показать эквивалентность условий I и V.

$I \Rightarrow V$. Пусть G – k -вполне транзитивная группа для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда из вполне транзитивности группы G следует выполнение условия контрастности для типов.

Пусть $a, b \in G$ и тип $t(a)$ несравним с типом $t(b)$. Предположим, существует $t \in I_T(a) \cap I_T(b)$. Тогда имеют место разложения $a = a_t + \bar{a}$; $b = b_t + \bar{b}$, где $a_t, b_t \in G_t$ и $t \notin I_T(\bar{a}) \cup I_T(\bar{b})$. Рассмотрим кортежи следующего вида: $X = (x_j + \bar{a}; y_j + \bar{b})$; $Y = (x_j; 2y_j)$, где $x_j, y_j \in A_j \subset G_t, r(A_j) = 1$.

Поскольку $t(x_j) = t(y_j) = t(A_j) = t(G_t) = t(a_t) = t(b_t)$, получаем, что тип $t(x_j + \bar{a})$ несравним с типом $t(y_j + \bar{b})$. Таким образом, кортежи X, Y удовлетворяют условию определения 2. Так как G является, в том числе, 2-вполне транзитивной, существует $\theta \in E(G)$, такое, что $\theta(x_j + \bar{a}) = x_j$ и $\theta(y_j + \bar{b}) = 2y_j$ (*).

Поскольку $x_j, y_j \in A_j$, найдутся $m, n \in \mathbb{Z}$, такие, что $mx_j = ny_j$ (**).

Из вполне транзитивности группы G следует, что каждая однородная компонента канонического разложения G_t является вполне характеристической. Тогда из равенства (*) следует, что $\theta(x_j) = x_j$ и $\theta(y_j) = 2y_j$. Учитывая (**), получаем $mx_j = \theta(mx_j) = \theta(ny_j) = 2ny_j$, что противоречит (**). Таким образом, выполнение второго условия пункта V также доказано.

$V \Rightarrow I$. Пусть условия пункта V выполнены. Тогда получаем, что G является вполне транзитивной. Осталось показать k -вполне транзитивность группы G при $k > 1$.

Пусть $k \geq 2$ и кортежи $X = (x_1, \dots, x_k)$; $Y = (y_1, \dots, y_k)$ удовлетворяют условиям определения 2. Из t -независимости элементов кортежа X и пункта V теоремы следует, что при $i \neq j$ $I_T(x_i) \cap I_T(x_j) = \emptyset$. В силу того, что $\chi(x_i) \leq \chi(y_i)$, группа G вполне транзитивна, из предложения 11 следует, что $I_T(y_i) \subset I_T(x_i)$. Тогда группу G можно представить следующим образом: $G = \bigoplus_{i=1}^k \tilde{G}_i \oplus \left(\bigoplus_{t \in \bar{T}} G_t \right)$, где

$\tilde{G}_i = \bigoplus_{t \in I_T(x_i)} G_t$, $\bar{T} = T \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k I_T(x_i) \right)$. Группы \tilde{G}_i также вполне транзитивны, поэтому существуют $\theta_i \in E(\tilde{G}_i)$, такие, что $\theta_i(x_i) = y_i$ ($i = \overline{1, k}$). Рассмотрим эндоморфизм

$\theta \in E(G)$, действующий по правилу: для всякого элемента $g \in G$ полагаем $\theta(g) = \theta\left(\sum_{j \in I(g)} g_j\right) = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{t \in I_T(g) \cap I_T(x_i)} \theta_i(g_t)\right)$. Тогда очевидно, что $\theta(x_i) = \theta_i(x_i) = y_i$ ($i = \overline{1, k}$). Таким образом, $G - k$ -вполне транзитивная группа. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kaplansky I.* Infinite Abelian Groups. Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1954.
2. *Крылов П.А.* О вполне характеристических подгруппах абелевых групп без кручения // Сб. аспирантских работ по матем. Томск, 1973. С. 15–20.
3. *Гриншпон С.Я., Мисяков В.М.* О вполне транзитивных абелевых группах // Абелевы группы и модули. – Томск, 1986. – С. 12–27.
4. *Гриншпон С.Я.* Вполне транзитивные однородно сепарабельные группы // Матем. заметки. 1997. № 62. С. 471–474.
5. *Carroll D.* Multiple transitivity in abelian groups // Arch. Math. 1994. V. 63. P. 9–16.
6. *Рогозинский М.И.* О k -вполне транзитивности вполне разложимых абелевых групп без кручения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 4 (20). С. 25–35.
7. *Рогозинский М.И.* k -вполне транзитивные абелевы группы без кручения // Современные проблемы математики и механики: материалы II Всерос. молод. науч. конф. Томск, 2011. С. 41–44.
8. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1.
9. *Гриншпон С.Я.* Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность // Фундамент. и прикл. матем. 2002. Т. 8. № 2. С. 407–473.
10. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2.
11. *Engel K.* Sperner Theory. Camb. Univ. Press, 1997.
12. *Добрусин Ю.Б.* О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1986. Вып. 4. С. 36–53.
13. *Крылов П.А.* Сильно однородные абелевы группы без кручения // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24. № 2. С. 77–84.
14. *Крылов П.А.* Вполне транзитивные абелевы группы без кручения // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 5. С. 549–560.
15. *Крылов П.А., Чехлов А.Р.* Абелевы группы без кручения с большим числом эндоморфизмов // Тр. ИММ УрО РАН. 2001. Т. 7. № 2. С. 194–207.
16. *Чехлов А.Р.* О разложимых вполне транзитивных группах без кручения // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 3. С. 714–719.
17. *Чехлов А.Р.* Об одном классе эндотранзитивных групп // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 6. С. 944–949.

Статья поступила 02.04.2013 г.

Grinshpon S. Y., Rogozinsky M. I. k -FULL TRANSITIVITY OF HOMOGENEOUSLY DECOMPOSABLE GROUPS. In this article we introduce the concept of k -full transitivity for torsion free abelian groups. A complete description of k -fully transitive separable and homogeneously decomposable groups, as well as of k -fully transitive completely decomposable groups is presented.

Keywords: k -full transitivity, homogeneously decomposable group, separable group, endomorphism

GRINSHPON Samuil Yakovlevich (Tomsk State University)

E-mail: Grinshpon@math.tsu.ru

ROGOZINSKY Mikhail Ivanovich (Tomsk State University)

E-mail: Rogozinsky_mikhail@mail.ru

УДК 511.17

В.М. Зюзьков

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ $FIBONACCI(n) \bmod n$

Исследуется поведение последовательности $Fibonacci(n) \bmod n$. Рассматриваются некоторые подпоследовательности: n пробегает множество простых чисел и случаи, когда $n = q \times p$, где p пробегает множество простых чисел, а q – некоторое фиксированное натуральное число. Проводятся компьютерные исследования с помощью системы Mathematica, высказываются гипотезы, которые затем доказываются.

Ключевые слова: последовательность чисел Фибоначчи, остатки от деления, сравнения, система Mathematica.

Пусть $F(n)$ обозначает n -е число Фибоначчи. Последовательность $F(n) \bmod n$ (остаток от деления $F(n)$ на n) показывает замечательно сложное поведение. На рис. 1 изображен график первых двухсот чисел этой последовательности.

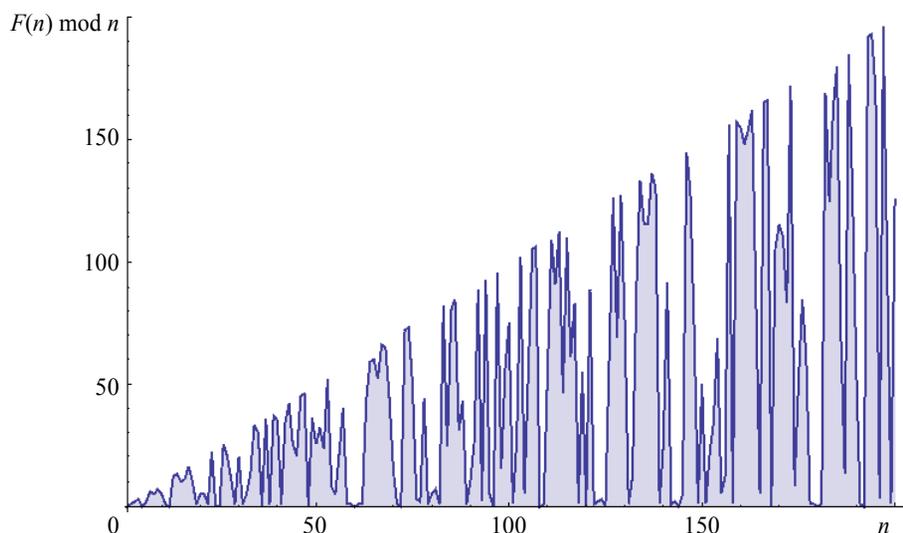


Рис. 1. График первых двухсот чисел последовательности $F(n) \bmod n$

Стивен Волфрам [1] полагает, что возможно провести полный анализ поведения этой последовательности, например представив значение $F(n) \bmod n$ в терминах стандартных теоретико-числовых функций от n , описать ее поведение простой примитивной рекурсией.

Последовательность $F(n) \bmod n$ представлена в on-line-энциклопедии Слоана последовательностью целых чисел [2], но там отсутствует анализ ее поведения. Автор исследует подпоследовательности вида $F(q \times p) \bmod q \times p$, где q – фиксированное натуральное число, а p пробегает простые числа. С помощью системы Mathematica вычисляются начальные отрезки подпоследовательностей, высказыв-

ваются гипотезы, проводятся эксперименты для проверки. Доказаны достаточные условия на q , при которых значения последовательности $F(q \times p) \bmod q \times p$ лежат только на двух прямых. В частности, первые 13 значений q суть 1, 2, 5, 10, 12, 24, 25, 36, 48, 50, 60, 72, 96.

Когда в последовательности $F(n) \bmod n$ встречаются нули?

Перечислим известные факты.

1. Числа $F(5^k) \bmod 5^k$ равны нулю для натурального k [3].
2. Числа $F(4 \times 3^k) \bmod 4 \times 3^k$ равны нулю для любого положительного целого k [4].

Но не только для $n = 5^k$ или $n = 4 \times 3^k$ числа $F(n) \bmod n$ равны 0. Были рассмотрены первые 250 тысяч чисел Фибоначчи. Отметим, что

$$F(250\,000) = 363561170109395618264261641757984 \lll 52\,180 \text{ цифр} \ggg \\ 785699110243516470957309231046875.$$

Пусть R обозначает множество $\{F(n) \mid n \leq 250\,000, F(n) \bmod n = 0\}$. Оказывается, это множество состоит из 1406 чисел. Чисел вида $F(5^k)$ только восемь, $n = 1, 5, 25, 125, 625, 3125, 15625, 78125$. За исключением этих восьми чисел и числа $F(5^2 \times 3001)$ все остальные числа в R имеют вид $F(12k)$. Чисел вида $F(4 \times 3^k)$ только десять, $n = 12, 36, 108, 324, 972, 2916, 8748, 26244, 78732, 236196$. Три числа $F(24)$, $F(36)$ и $F(60)$ из R имеют вид $F(12p)$, где p – простое число. Остальные числа из R имеют вид $F(12k)$, где k – составное число. Но обратное неверно. Среди первых 250 000 чисел Фибоначчи имеется 17094 числа, которые не принадлежат R , хотя номера их имеют вид $12k$ и k – составное. Первые три таких числа $F(12 \times 21)$, $F(12 \times 22)$ и $F(12 \times 26)$.

Подпоследовательность $F(p) \bmod p$, p – простое

Рассмотрим числа Фибоначчи с номерами, которые являются простыми числами. Отложим на оси *абсцисс* первые 200 простых чисел $P(n)$ ($n = 1, 2, \dots, 200$), а на оси *ординат* соответствующие значения $F(P(n)) \bmod P(n)$. График полученных точек $(P(n), F(P(n)) \bmod P(n))$ изображен на рис. 2.

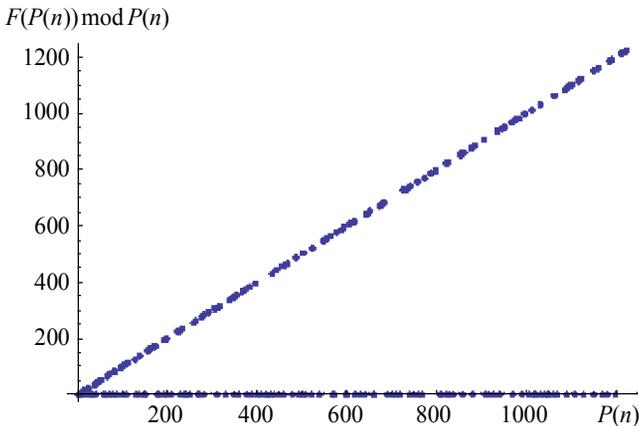


Рис. 2. График последовательности $P(n) \rightarrow F(P(n)) \bmod P(n)$

Изучение графика приводит к предположению, что $F(p) \bmod p$ может быть равно только 1 или $p - 1$. Более детальный анализ с помощью системы Mathematica приводит к теореме.

Теорема 1.

a) Если простое p имеет вид $5t \pm 1$, то $F(p) \bmod p = 1$.

b) Если простое p имеет вид $5t \pm 2$, то $F(p) \bmod p = p - 1$.

Для доказательства теоремы нам потребуется лемма.

Лемма 1 [5, с. 53–54].

a) Если простое p имеет вид $5t \pm 1$, то p делит $5^{(p-1)/2} - 1$.

b) Если простое p имеет вид $5t \pm 2$, то p делит $5^{(p-1)/2} + 1$.

Доказательство теоремы 1. Если $p = 2$, то $F(p) = F(2) = 1 \equiv -1 \pmod{2}$. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что p нечетно.

По формуле Бине имеем

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^p - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^p \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^p (C_p^k ((\sqrt{5})^k - (-1)^k (\sqrt{5})^k)) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{2^p} \sum_{\substack{k=1, \\ k \text{ нечетно}}}^p (2C_p^k ((\sqrt{5})^k)) = \\ &= \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{\substack{k=1, \\ k \text{ нечетно}}}^p (C_p^k ((\sqrt{5})^{k-1})) = \\ &= \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{\substack{k=1, \\ k \text{ нечетно}}}^p C_p^k 5^{(k-1)/2} = \\ &= \frac{1}{2^{p-1}} (C_p^1 + C_p^3 5 + C_p^5 5^2 + \dots + C_p^{p-2} 5^{(p-3)/2} + C_p^p 5^{(p-1)/2}). \end{aligned}$$

Получаем

$$2^{p-1} F(n) = C_p^1 + C_p^3 5 + C_p^5 5^2 + \dots + C_p^{p-2} 5^{(p-3)/2} + C_p^p 5^{(p-1)/2}.$$

Так как

$$C_p^k = \frac{p!}{k(p-k)!}$$

и, если $0 < k < p$, то p в числителе C_p^k не сокращается. Поэтому все биномиальные коэффициенты в правой части, за исключением последнего, делятся на p , а $C_p^p = 1$. Отсюда имеем $2^{p-1} F(p) \equiv 5^{(p-1)/2} \pmod{p}$. По малой теореме Ферма $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Поэтому, используя лемму 1, получаем утверждение теоремы. ■

Подпоследовательности $F(q \times p) \bmod q \times p$, p – простое

Будем изучать подпоследовательности $F(q \times p) \bmod q \times p$, где q – фиксированное натуральное число, а p пробегает простые числа. Меняя q , имеем разное поведение подпоследовательностей. На рис. 3 – 8 видим типичные ситуации для некоторых небольших q . На оси абсцисс размещаем числа $q \times P(n)$ ($P(n)$ – n -е простое число), а на оси ординат соответствующие значения $F(P(n)) \bmod P(n)$.

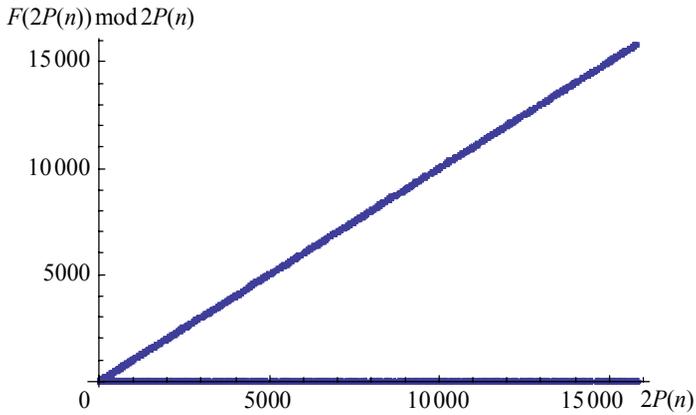


Рис. 3. График последовательности
 $2P(n) \rightarrow F(2P(n)) \bmod 2P(n)$

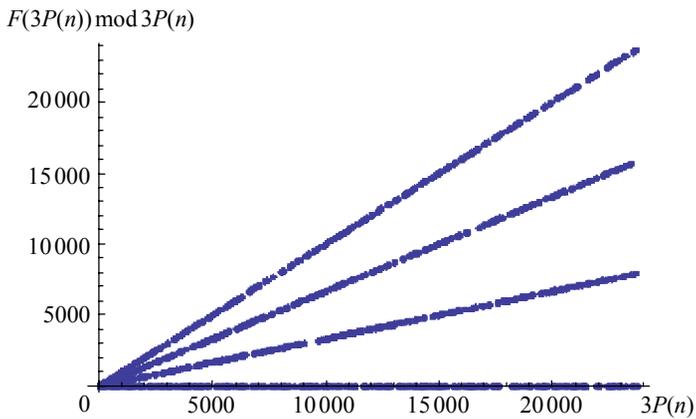


Рис. 4. График последовательности
 $3P(n) \rightarrow F(3P(n)) \bmod 3P(n)$

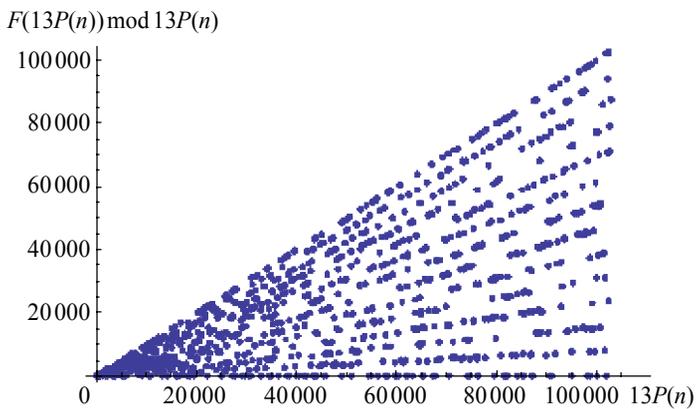


Рис. 5. График последовательности
 $13P(n) \rightarrow F(13P(n)) \bmod 13P(n)$

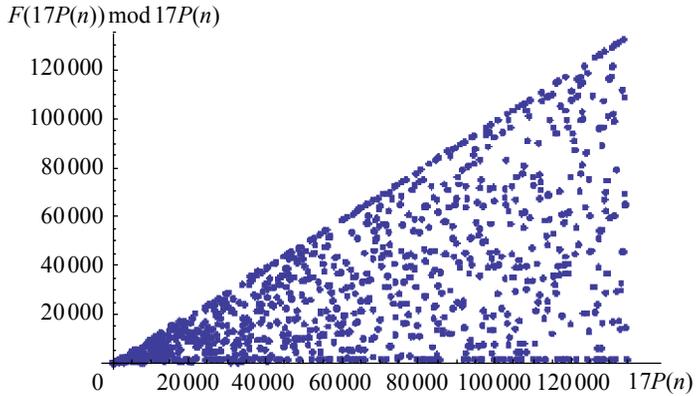


Рис. 6. График последовательности $17P(n) \rightarrow F(17P(n)) \bmod 17P(n)$

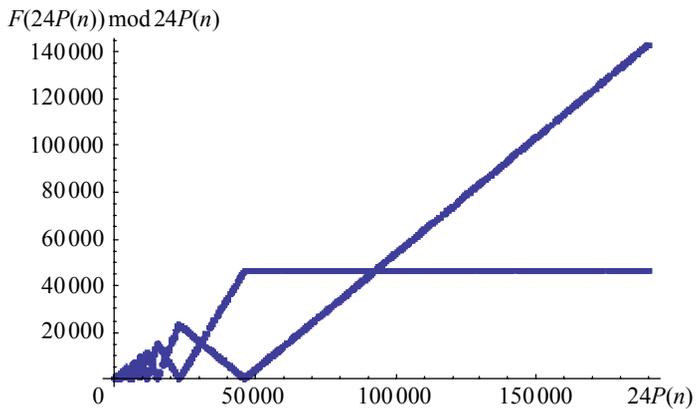


Рис. 7. График последовательности $24P(n) \rightarrow F(24P(n)) \bmod 24P(n)$

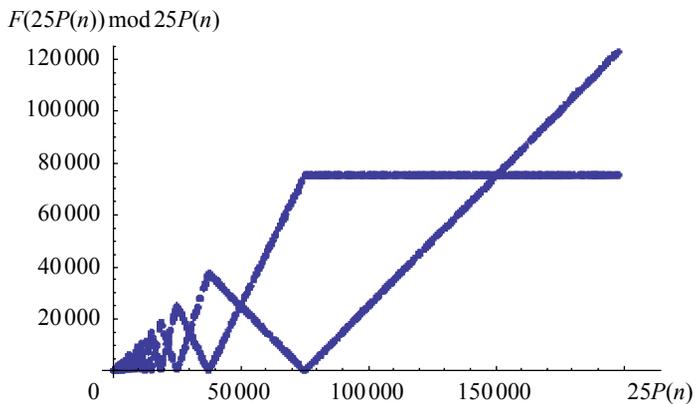


Рис. 8. График последовательности $25P(n) \rightarrow F(25P(n)) \bmod 25P(n)$

На рис. 3, 7 и 8 значения $(q \times p, F(q \times p) \bmod q \times p)$ находятся на двух прямых, начиная с некоторого $q \times p_0$. Такие случаи изучены. Для $n = 3p$ и $n = 4p$ высказаны только гипотезы без доказательств.

Ситуации, в которых поведение подпоследовательности $F(q \times p) \bmod q \times p$ описывается двумя прямыми, первоначально изучались по отдельности для разных значений q . Затем полученные результаты были обобщены. Мы же сейчас начнем с доказательства общих результатов, а потом приведем следствия.

Теорема 2. Пусть q – такое натуральное число, что выполнено условие

$$\forall p > \max(5, F(q)) \Rightarrow F(q \times p) \equiv \pm F(q) \pmod{q}. \quad (1)$$

(Сравнение в (1) выполнено одновременно как для положительных, так и для отрицательных значений $F(q)$.)

Тогда

a) Если простое p имеет вид $5t \pm 1$, то $F(q \times p) \bmod q \times p = F(q)$.

b) Если простое p имеет вид $5t \pm 2$, то $F(q \times p) \bmod q \times p = q \times p - F(q)$.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется две леммы.

Лемма 2 (теорема Десмонда). Пусть p – простое число. Тогда для любого натурального n имеем

$$F(p \times n) \equiv F(n) F(p) \pmod{p}.$$

Оригинал изложен в [6]. Доступное доказательство см. в [3].

Лемма 3. Если сравнение $a \equiv b$ имеет место по нескольким разным модулям, то оно имеет место и по модулю, равному наименьшему общему кратному этих модулей.

Доказательство. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $a \equiv b \pmod{n}$, то $a - b$ делится на m и n и значит, что $a - b$ делится на наименьшее общее кратное m и n .

Доказательство теоремы 2. Теорема Десмонда дает $F(q \times p) \equiv F(q) F(p) \pmod{p}$. Поэтому по теореме 1:

a1) Если простое p имеет вид $5t \pm 1$, то $F(q \times p) \equiv F(q) \pmod{p}$.

b1) Если простое p имеет вид $5t \pm 2$, то $F(q \times p) \equiv -F(q) \pmod{p}$.

Если $p > \max(5, F(q))$, то по условию (1) имеем

a2) Если простое p имеет вид $5t \pm 1$, то $F(q \times p) \equiv F(q) \pmod{q}$.

b2) Если простое p имеет вид $5t \pm 2$, то $F(q \times p) \equiv -F(q) \pmod{q}$.

Так как p – простое и $p > q$, то наименьшее общее кратное p и q равно $q \times p$. Поэтому по лемме 3 имеем

a3) Если простое p имеет вид $5t \pm 1$, то $F(q \times p) \equiv F(q) \pmod{q \times p}$.

b3) Если простое p имеет вид $5t \pm 2$, то $F(q \times p) \equiv -F(q) \pmod{q \times p}$.

Следовательно, для любого $p > \max(5, F(q))$ выполнено утверждение теоремы. ■

Чтобы получить следствие из теоремы, нам необходима следующая лемма.

Лемма 4. [5] Если $n > 2$, то $F(m)$ делится на $F(n)$ тогда и только тогда, когда m делится на n .

Следствие 1. Пусть $F(q) \bmod q = 0$. Тогда для каждого $p > \max(5, F(q))$ имеем

a) Если простое p имеет вид $5t \pm 1$, то $F(q \times p) \bmod q \times p = F(q)$.

b) Если простое p имеет вид $5t \pm 2$, то $F(q \times p) \bmod q \times p = q \times p - F(q)$.

Доказательство. Так как q делит $\pm F(q)$ и, по лемме 4, $F(q)$ делит $F(q \times p)$, то $F(q \times p) \equiv \pm F(q) \pmod{q}$. Получили условие (1). ■

Как мы знаем из введения, среди первых 250 000 значений q условие следствия 1 выполнено для 1406 значений q . Приведем несколько первых пар таких значений $(q, F(q))$; вторая компонента пары ограничивает снизу начальное значение p , начиная с которого поведение последовательности $F(q \times p) \bmod q \times p$ описывается двумя прямыми.

Первые значения q из следствия 1

| q | $F(q)$ |
|-----|-------------------------|
| 5 | 5 |
| 12 | 144 |
| 24 | 46368 |
| 25 | 75025 |
| 36 | 14930352 |
| 48 | 4807526976 |
| 60 | 1548008755920 |
| 72 | 498454011879264 |
| 96 | 51680708854858323072 |
| 108 | 16641027750620563662096 |

Следствие 2. Пусть $q = 2t$, причем t не делится на 3 и $t -$ делитель $F(q)$. Тогда для каждого $p > \max(5, F(q))$ имеем

a) Если простое p имеет вид $5t \pm 1$, то $F(q \times p) \bmod q \times p = F(q)$.

b) Если простое p имеет вид $5t \pm 2$, то $F(q \times p) \bmod q \times p = q \times p - F(q)$.

Доказательство. Покажем, что $F(q)$ нечетно. Действительно, если $2 = F(3)$ делит $F(2t)$, то, по лемме 4, имеем 3 – делитель t , что невозможно. Следовательно, $F(q) \equiv \pm t \pmod q$. Так как $p -$ простое и $p > q$, то pq не делится на 3. По лемме 4, $F(qp)$ нечетно, но $F(qp)$ делится на $F(q)$. Отсюда следует, что $F(qp)$ делится на t . Поэтому получаем $F(qp) \equiv \pm t \pmod q$. Так как $F(q) \equiv \pm t \pmod q$ и $F(qp) \equiv \pm t \pmod q$, то $F(q \times p) \equiv \pm F(q) \pmod q$. Получили условие (1). ■

Первые шесть значений q , для которых выполнено условие следствия 2, есть 2, 10, 50, 110, 250 и 550.

Предположения без доказательств

Теорема 2 вместе со следствиями дает достаточные условия того, когда поведение подпоследовательностей $F(q \times p) \bmod q \times p$ описывается двумя прямыми. В более сложных ситуациях (например, рис. 4 – рис. 6) удалось сформулировать только гипотезы, и то только в двух простейших случаях.

Рис. 9 показывает поведение последовательности $F(4p) \bmod 4p$.

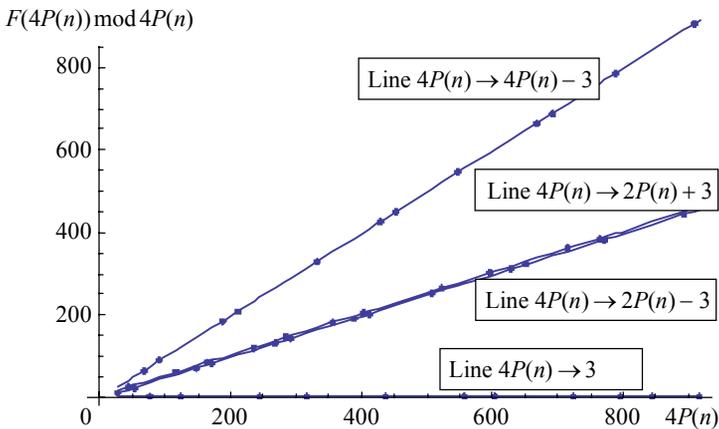


Рис. 9. График последовательности $4P(n) \rightarrow F(4P(n)) \bmod 4P(n)$

То, что точки $(4p, F(4p) \bmod 4p)$ последовательности $F(4p) \bmod 4p$ располагаются на четырех прямых обнаружено с помощью системы Mathematica. И с помощью Mathematica были высказаны гипотезы (проверены для первой тысячи простых чисел).

Возможно, для всех простых чисел справедливы следующие утверждения:

Гипотеза 1.

Если $p \equiv 1$ или $p \equiv 19$ по модулю 15, то $F(4p) \bmod 4p = 3$.

Если $p \equiv 7$ или $p \equiv 13$ по модулю 15, то $F(4p) \bmod 4p = 2p - 3$.

Если $p \equiv 2$ или $p \equiv 8$ по модулю 15, то $F(4p) \bmod 4p = 4p - 3$.

Если $p \equiv 11$ или $p \equiv 14$ по модулю 15, то $F(4p) \bmod 4p = 2p + 3$.

Гипотеза 2.

Если $p \equiv 1$ или $p \equiv 19$ по модулю 30, то $F(4p) \bmod 4p = 3$.

Если $p \equiv 7$ или $p \equiv 13$ по модулю 30, то $F(4p) \bmod 4p = 2p - 3$.

Если $p \equiv 17$ или $p \equiv 23$ по модулю 30, то $F(4p) \bmod 4p = 4p - 3$.

Если $p \equiv 11$ или $p \equiv 29$ по модулю 30, то $F(4p) \bmod 4p = 2p + 3$.

Поиск подходящего модуля m осуществлялся среди тех m , у которых значение функции Эйлера $\phi(m)$ равно 4 или 8. Для $m \leq 10\,000$ только два значения 15 и 30 оказались подходящими.

Изучалось также поведение последовательности $F(3p) \bmod 3p$ (см. рис. 10).

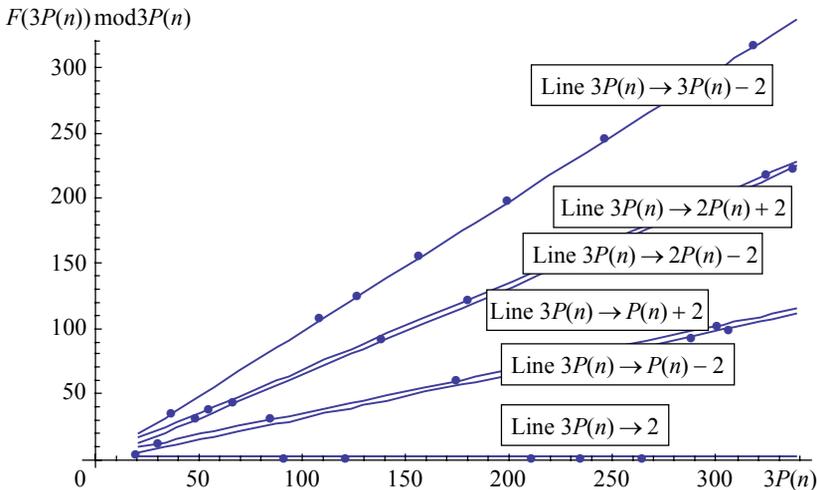


Рис. 10. График последовательности $3P(n) \rightarrow F(3P(n)) \bmod 3P(n)$

То, что точки $(3p, F(3p) \bmod 3p)$ последовательности $F(3p) \bmod 3p$ располагаются на шести прямых, обнаружено с помощью системы Mathematica (проверено для первой тысячи простых чисел).

Попытки сделать и в этом случае похожие предположения, как и в случае $q = 4$, оказались безуспешны. Поскольку прямых шесть, то подходящий модуль m отыскивался среди тех m , для которых функция Эйлера $\phi(m)$ была бы кратна 6, точнее, $\phi(m)$ должно быть равно 6, 12, 18 или 24. Были просмотрены все $m \leq 10\,000$, но подходящий модуль m не найден.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wolfram S.* A New Kind of Science. Wolfram Media, 2002. 1197 p.
2. *Sloan's On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, <http://oeis.org/>
3. *Koshy T.* Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. John Wiley & Sons, Inc, 2001.
4. *Kramer J. and V.E. Hoggatt, Jr.* Special cases of Fibonacci periodicity // The Fibonacci Quarterly. 1972. 10:5 (Nov.). P. 519–522.
5. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1978. 144 с.
6. *Desmond J.E.* Problem B-182 // The Fibonacci Quarterly. 1970. 20:1 (Feb.). P. 96.

Статья поступила 11.03.2013 г.

Zyuz'kov V.M. FIBONACCI(N) MODULO N SEQUENCE. We study the behavior of the Fibonacci (n) mod n sequence and pay attention to some subsequences: n runs through the set of prime numbers and the cases with $n = qp$, where p runs through the set of prime numbers and q is a fixed natural number. The behavior of the sequence is investigated using the Mathematica system. Some hypotheses are formulated and proved.

Keywords: Fibonacci sequence, remainders, congruence relation, Mathematica.

ZYUZ'KOV Valentin Mikhailovich (Tomsk State University)

E-mail: vmz@math.tsu.ru

УДК 512.541

Е.В. Кайгородов

ХОПФОВЫ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫЕ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ¹

Изучается свойство хопфовости в таком известном классе абелевых групп, как вполне разложимые группы. Построен пример нехопфовой вполне разложимой группы без кручения.

Ключевые слова: абелева группа, хопфова группа, вполне разложимая группа, однородная группа, группа без кручения.

Данная работа продолжает начатое автором ранее (см. [1, 2]) исследование хопфовых абелевых групп. В [1] это изучение проводилось в классах делимых групп и прямых сумм циклических групп. Там же приведены общие свойства хопфовых абелевых групп, в частности связанные с прямыми разложениями. На основе описания делимых групп исследование хопфовости произвольных абелевых групп было сведено к исследованию хопфовости редуцированных групп. В [2] получено полное описание хопфовых алгебраически компактных групп. В той же статье исследовались хопфовы SP-группы: установлено, что хопфовость SP-группы эквивалентна хопфовости ее примарных компонент.

Центральным результатом настоящей статьи является теорема 1, представляющая одно из условий хопфовости вполне разложимой группы без кручения. В заключение приводится пример нехопфовой вполне разложимой группы без кручения.

Все обозначения и терминология в работе стандартны и взяты из [3, 4]. Далее в тексте под словом «группа» будет пониматься аддитивно записанная абелева группа.

Теорема 1. Пусть A – вполне разложимая группа без кручения, причем все ее однородные компоненты имеют конечный ранг, а множество типов прямых слагаемых ранга 1 группы A удовлетворяют условию минимальности. Тогда A – хопфова группа.

Доказательство. Запишем каноническое прямое разложение $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где

A_i – однородные компоненты группы A . Согласно условию теоремы, множество типов $\Omega(A) = \{t(A_i) \mid i \in I\}$ удовлетворяет условию минимальности. Для любого $k \in I$ можно записать $A = A_k \oplus B_k$, где $B_k = \bigoplus_{i \neq k} A_i$.

Предположим, напротив, что группа A нехопфова. Зафиксируем некоторый эпиморфизм φ группы A , не являющийся автоморфизмом, на себя. Докажем, что для любого индекса $k \in I$ и любого отличного от нуля элемента $a_k \in A_k$ верно, что $\varphi(a_k) \notin B_k$, т. е. что $\varphi(a_k)$ имеет ненулевую координату в A_k (в частности, $\varphi(a_k) \neq 0$).

¹ Исследование выполнено при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, соглашение 14.В37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями» и частично в рамках темы 2.3684.2011 Томского государственного университета.

Пусть сначала индекс $k \in I$ таков, что тип $t(A_k)$ минимален в множестве типов $\Omega(A)$. Допустим, что нашелся элемент $a_k \in A_k$ со свойствами: $\varphi(a_k) \neq 0$ и $\varphi(a_k) \in B_k$. Напомним, что для каждого $i \in I$ имеет место прямое разложение $A = A_i \oplus B_i$. Поскольку тип $t(A_k)$ минимален среди типов $t(A_i)$, то $\text{Hom}(B_k, A_k) = 0$. Пусть $\pi_k : A \rightarrow A_k$ – проекция относительно прямого разложения $A = A_k \oplus B_k$. Тогда $A_k \subseteq \pi_k \varphi A_k$ (или, что все равно, $A_k \subseteq \pi_k \varphi|_{A_k} A_k$), учитывая, что φ – эпиморфизм. Из $a_k \in \text{Ker } \pi_k \varphi$ заключаем, что $r(\pi_k \varphi A_k) = r(A_k / \text{Ker } \pi_k \varphi) < r(A_k)$. Но это неравенство противоречит включению $A_k \subseteq \pi_k \varphi A_k$.

Хорошо известно, что множество типов однородных компонент вполне разложимой группы без кручения является дистрибутивной решеткой [3, §85]. Мы знаем также, что в частично упорядоченном множестве условия минимальности и индуктивности эквивалентны [5, §5], поэтому дальнейшее доказательство проведем по индукции. Именно, предположим теперь, что k – такой индекс, что тип $t(A_k)$ не является минимальным в множестве типов $\Omega(A)$ и для всех l , таких, что $t(A_l) < t(A_k)$, утверждение доказано.

Прежде покажем следующее. Пусть a_k – некоторый ненулевой элемент однородной компоненты A_k . Если b – такой элемент группы A , что $\varphi(b) = a_k$, то его можно представить в виде $b = b_k + y$, где $b_k \in A_k$, $y \in B_k$ и $\varphi(y) \in B_k$. Заметим, что $b_k \neq 0$. Предположим противное. Относительно прямого разложения $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ запишем $b = b_1 + \dots + b_l + b_k + c_1 + \dots + c_l$. Здесь b_1, \dots, b_l – такие элементы, что $\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_l)$ имеют ненулевую координату в A_k . В силу предположения такие элементы обязательно существуют. Элементы c_1, \dots, c_l , если они есть, таковы, что $\varphi(c_1), \dots, \varphi(c_l)$ имеют нулевую координату в A_k , т. е. образы этих элементов при эпиморфизме φ содержатся в B_k .

Запишем прямое разложение $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_l \oplus A_k \oplus A'_1 \oplus \dots \oplus A'_t \oplus B$, где A_j и A'_n для всех $j = 1, \dots, l$ и $n = 1, \dots, t$ суть подходящие прямые слагаемые A_i из разложения $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, B – дополнительное слагаемое. Понятно, что для всех j верны неравенства $t(b_j) < t(a_k)$. По предположению индукции, элементы $\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_l)$ имеют ненулевые координаты в A_1, \dots, A_l соответственно. Пусть для определенности тип $t(b_1)$ минимален среди типов $t(b_1), \dots, t(b_l)$. Итак, $\varphi(b_1)$ имеет ненулевую координату в A_1 . Ясно, что среди элементов c_1, \dots, c_l существует хотя бы один такой, что его образ при эпиморфизме φ имеет ненулевую координату в A_1 . Пусть c_1 есть этот элемент. Тогда $t(c_1) < t(b_1) < t(a_k)$. Согласно индуктивному предположению, $\varphi(c_1)$ имеет ненулевую координату в A'_1 . Значит, среди элементов $b_1, \dots, b_l, b_k, c_1, \dots, c_l$ найдется хотя бы один такой, что его образ при эпиморфизме φ имеет ненулевую координату в A'_1 . Обозначим этот

элемент через x . Тогда $t(x) < t(c_1)$. Учтя минимальность типа $t(b_1)$ и то, что $t(c_1) < t(a_k)$, получаем, что x – есть один из элементов c_2, \dots, c_t . Пусть для простоты $x = c_2$. Итак, $t(c_2) < t(c_1) < t(a_k)$. Отсюда заключаем, что $\varphi(c_2)$ имеет ненулевую координату в A_2 . Далее рассуждаем аналогично для элементов c_2, \dots, c_t и, ввиду конечности их числа, приходим к противоречию. Так что $b_1 = \dots = b_t = 0$, и потому $b = b_k + c_1 + \dots + c_t = b_k + y$. Вспоминая, что элементы $\varphi(c_1), \dots, \varphi(c_t)$ имеют нулевую координату в A_k , получаем $\varphi(y) \in B_k$.

Вернемся к доказательству нашего утверждения. Допустим, что нашелся элемент $a_k \in A_k$, для которого $\varphi(a_k) \neq 0$ и $\varphi(a_k) \in B_k$. Выберем в группе A элемент b со свойством $\varphi(b) = a_k$. По доказанному $b = b_k + y$, где $b_k \in A_k$, $y \in B_k$ и $\varphi(y) \in B_k$ (как уже было замечено, $b_k \neq 0$).

Применяя лемму 86.8 [3], получим прямое разложение $A_k = \langle a_k \rangle_* \oplus C$ для некоторой группы C . Запишем элемент b_k относительно этого разложения: $b_k = a' + c_k$. При этом $c_k \neq 0$. Действительно, если $c_k = 0$, то $a_k = \varphi(b) = \varphi(b_k) + \varphi(y) = \varphi(a') + \varphi(y)$. Но $a' \in \langle a_k \rangle_*$, а $\varphi(a_k) \in B_k$, поэтому и $\varphi(a') \in B_k$. Отсюда $a_k \in B_k$, что невозможно. Далее, $\varphi(b_k) = \varphi(b) - \varphi(y) \in \langle a_k \rangle_* \oplus B_k$ и $\varphi(c_k) = \varphi(b_k) - \varphi(a') \in \langle a_k \rangle_* \oplus B_k$.

Теперь запишем прямое разложение $A_k = \langle a_k \rangle_* \oplus \langle c_k \rangle_* \oplus E$ для какой-то группы E . Выполним затем аналогичный шаг. Именно, существует элемент $d \in A$ со свойством $\varphi(d) = c_k$. Тогда $d = d_k + z$, где $d_k \in A_k$, $d_k \neq 0$, $\varphi(z) \in B_k$. Запишем $d_k = a'' + c'' + e_k$, где $a'' \in \langle a_k \rangle_*$, $c'' \in \langle c_k \rangle_*$, $e_k \in E$. Здесь снова $e_k \neq 0$, поскольку из $e_k = 0$ получаем $c_k = \varphi(d) = \varphi(d_k) + \varphi(z) = \varphi(a'') + \varphi(c'') + \varphi(z)$, поэтому $c_k \in \langle a_k \rangle_* \oplus B_k$. Но это невозможно. Следовательно, имеет место прямое разложение $A_k = \langle a_k \rangle_* \oplus \langle c_k \rangle_* \oplus \langle e_k \rangle_* \oplus G$ для некоторой группы G , причем $\varphi(e_k) \in \langle a_k \rangle_* \oplus \langle c_k \rangle_* \oplus B_k$.

Рассуждая далее аналогично, будем получать прямые разложения однородной компоненты A_k со сколь угодно большим числом прямых слагаемых ранга 1. Но этого не может быть в силу конечности ранга группы A_k . Получили противоречие. Итак, мы доказали, что для любого $k \in I$ и любого ненулевого $a_k \in A_k$ будет $\varphi(a_k) \notin B_k$.

Выберем теперь в группе A такой ненулевой элемент a , что $\varphi(a) = 0$. Запишем $a = a_1 + \dots + a_n$, где $a_i \in A_i$, причем $\varphi(a_i) \neq 0$ для каждого i . Пусть для определенности тип $t(a_1)$ минимален среди типов $t(a_1), \dots, t(a_n)$. Утверждаем, что $\varphi(a_2) \in B_1, \dots, \varphi(a_n) \in B_1$. Если, например, $\varphi(a_2) \notin B_1$, то $\varphi(a_2)$ имеет ненулевую координату w в A_1 . Следовательно, $t(a_2) \leq t(w) = t(a_1)$. Строгое неравенство невозможно на основании минимальности $t(a_1)$. Имеем $t(a_2) = \dots = t(a_n) = t(a_1)$, откуда $\varphi(a_2) \in B_1, \dots, \varphi(a_n) \in B_1$. Ясно, что тогда $\varphi(a_1) \in B_1$. Получили, что $a_1 \in A_1$,

а $\varphi(a_1) \in B_1$. Но такая ситуация невозможна, как установлено выше, поэтому наше предположение о нехопфовости группы A неверно. Теорема доказана.

Опираясь на доказанную теорему, нетрудно понять, что существуют разнообразные нехопфовы вполне разложимые группы без кручения. Полезно построить примеры таких групп. Сформулируем сначала один вспомогательный вопрос и дадим на него ответ. Пусть A, B, C – группы без кручения ранга 1, причем $t(B) < t(A)$ и $t(C) < t(A)$. Выясним, когда существует эпиморфизм $B \oplus C \rightarrow A$.

Так как $t(B) < t(A)$ и $t(C) < t(A)$, то группы B и C можно считать подгруппами в A . В таком случае существование эпиморфизма $B \oplus C \rightarrow A$ равносильно выполнению равенства $t(B+C) = t(A)$. Действительно, пусть $\varphi: B \oplus C \rightarrow A$ – некоторый эпиморфизм. Тогда $\varphi(B \oplus C) = \varphi(B) + \varphi(C) = A$. Ясно, что ограничения $\varphi|_B: B \rightarrow A$, $\varphi|_C: C \rightarrow A$ суть мономорфизмы. Следовательно, $\varphi(B) \cong B$ и $\varphi(C) \cong C$. Если мы считаем B и C подгруппами в A , то группы $\varphi(B)$ и B квазиравны, аналогично квазиравны группы $\varphi(C)$ и C . Тогда квазиравны группы $B+C$ и A . Следовательно, $t(B+C) = t(A)$.

Обратно, предположим, что $t(B+C) = t(A)$. Тогда группы $B+C$ и A квазиравны. Более точно, $B+C = nA$ для некоторого натурального числа n . Теперь несложно построить эпиморфизм $B \oplus C \rightarrow A$. Пусть $\varphi: B \oplus C \rightarrow B+C$ – сумма некоторых изоморфизмов $B \cong B$ и $C \cong C$. Затем возьмем изоморфизм $\psi: nA \rightarrow A$, $\psi: na \mapsto a$. Композиция $\psi\varphi$ будет эпиморфизмом $B \oplus C \rightarrow A$.

Итак, существование эпиморфизма $B \oplus C \rightarrow A$ равносильно равенству $t(B+C) = t(A)$, если считать B и C подгруппами в A .

Следующий простой факт можно вывести из теоремы 1.4 [6], содержащей описание факторгрупп группы без кручения ранга 1.

Лемма 2 [6, § 1, упр. 1.6]. Если B и C – подгруппы группы без кручения A ранга 1, то $t(B+C) = \sup\{t(B), t(C)\}$.

Эта лемма вместе с предыдущими рассуждениями приводит к такому результату.

Следствие 3. Пусть A, B, C – группы без кручения ранга 1, причем $t(B) < t(A)$ и $t(C) < t(A)$. Тогда существование эпиморфизма $B \oplus C \rightarrow A$ равносильно справедливости равенства $\sup\{t(B), t(C)\} = t(A)$.

Отметим, что лемму 2 и следствие 3 можно распространить на любое конечное множество подгрупп группы без кручения ранга 1 [6, § 1, упражнение 1.6].

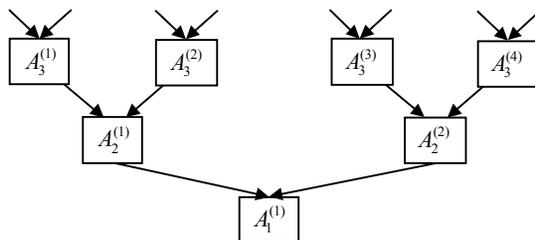
С помощью следствия 3 теперь можно легко строить нехопфовы вполне разложимые группы без кручения, все однородные компоненты которых имеют конечный ранг. Именно, можно выбрать группы $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, A_2^{(2)}$ без кручения ранга 1 так, что существует эпиморфизм $A_2^{(1)} \oplus A_2^{(2)} \rightarrow A_1^{(1)}$. Затем выбираем группы $A_3^{(1)}$ и $A_3^{(2)}$, $A_3^{(3)}$ и $A_3^{(4)}$, для которых имеются эпиморфизмы $A_3^{(1)} \oplus A_3^{(2)} \rightarrow A_2^{(1)}$, $A_3^{(3)} \oplus A_3^{(4)} \rightarrow A_2^{(2)}$. Далее повторяем аналогичные построения для каждой из групп $A_3^{(1)}, A_3^{(2)}, A_3^{(3)}, A_3^{(4)}$ и т. д.

Пусть A обозначает прямую сумму

$$A_1^{(1)} \oplus (A_2^{(1)} \oplus A_2^{(2)}) \oplus (A_3^{(1)} \oplus A_3^{(2)} \oplus A_3^{(3)} \oplus A_3^{(4)}) \oplus \dots$$

всех построенных указанным способом групп $A_i^{(j)}$, $i, j \in \mathbb{N}$. Отображение, переводящее группу $A_1^{(1)}$ в ноль, совпадающее на $A_2^{(1)} \oplus A_2^{(2)}$ с каким-то эпиморфизмом $A_2^{(1)} \oplus A_2^{(2)} \rightarrow A_1^{(1)}$, на $A_3^{(1)} \oplus A_3^{(2)}$ с каким-то эпиморфизмом $A_3^{(1)} \oplus A_3^{(2)} \rightarrow A_2^{(1)}$ и т. д., будет эпиморфизмом, но не автоморфизмом группы A . Поэтому A – нехопфова группа.

Группу A можно изобразить в виде дерева:



Положив, в частности, $t(A_1^{(1)}) = [(1, 1, 1, 1, \dots)]$, $t(A_2^{(1)}) = [(1, 0, 1, 0, \dots)]$, $t(A_2^{(2)}) = [(0, 1, 0, 1, \dots)]$ и т. д., получим конкретный пример нехопфовой вполне разложимой группы без кручения.

Очевидно, что существуют и более сложно устроенные нехопфовы вполне разложимые группы. В вершинах соответствующих деревьев, изображающих такие группы, могут находиться прямые суммы каких-то групп ранга 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кайгородов Е.В. Хопфовы абелевы группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 2 (18). С. 5–12.
2. Кайгородов Е.В. О двух классах хопфовых абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 2 (22). С. 22–33.
3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы: в 2 т. М.: Мир, 1977. Т. 2. 417 с.
4. Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2006. 512 с.
5. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973. 400 с.
6. Arnold David M. Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings. Lecture Notes in Mathematics. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1982.

Статья поступила 07.06.2013 г.

Kaygorodov E.V. HOPFIAN COMPLETELY DECOMPOSABLE TORSION-FREE GROUPS. The paper is devoted to the study of the property of Hopficity in a well-known class of Abelian groups – completely decomposable groups. An example of a non-Hopfian completely decomposable torsion-free group is presented.

Keywords: Abelian group, Hopfian group, completely decomposable group, homogeneous group, torsion-free group.

KAYGORODOV Evgeniy Vladimirovich (Tomsk State University)

E-mail: gazetaintegral@gmail.com

УДК 512.1; 517.53; 519.6

Ю.А. Несмеев**РАЗВИТИЕ ОДНОГО ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ
АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ 4-й СТЕПЕНИ**

Выводятся связи между корнями уравнения и корнями его резольвенты. Предлагаются утверждения, устанавливающие без решения уравнения принадлежность его корней к множеству действительных чисел или к множеству комплексных чисел с ненулевыми мнимыми частями. Выводятся формулы для вычисления компонент корней уравнения.

Ключевые слова: *уравнение, решение, таблица.*

Публикации по исследованиям в области разработки современных технологий во многих случаях (например, в [1–3]) содержат алгебраические уравнения 4-й степени с коэффициентами, зависящими от параметров и принимающими действительные значения. В них происходит учёт зависимости корней этих уравнений от параметров и ставится вопрос, равносильный вопросу об условиях на параметры, при которых корни принадлежат множеству действительных чисел или множеству комплексных чисел с ненулевыми мнимыми частями. Пути учёта, если уравнения не являются биквадратными, служат следующие способы: решение Декарта – Эйлера [4, с. 48]; решение Феррари [4, с. 48] (имеет наибольшее число применений); способ, предложенный В. А. Подвысоцким [5]. Однако выведенные для учёта зависимости не доводятся до равенств, в левых частях которых находятся корни, а в правых – зависящие от параметров выражения. Основная причина сложившегося положения – отсутствие таких равенств в справочной литературе для уравнения 4-й степени с буквенными коэффициентами. Поэтому в данной работе такие равенства выводятся. Также выводятся связи между корнями уравнения и корнями его резольвенты, и на их основе предлагаются утверждения, устанавливающие без вычисления корней их принадлежность к множеству действительных чисел или множеству комплексных чисел с ненулевыми мнимыми частями. За основу вывода взяты аналитические зависимости из работы [6], развивающей известный аналитический способ [7, с. 27].

Изложенный в [7] способ и решение Феррари с точностью до обозначений используют одно и то же уравнение 4-й степени и одну и ту же резольвенту, отличаясь друг от друга видами пар вспомогательных квадратных уравнений. С другой стороны, использование на практике решения Феррари сопровождается преобразованием вспомогательных квадратных уравнений к виду, применяемому в [7]. Поэтому [6] является и развитием метода Феррари. В [6] были предложены такие три величины, значения которых позволяют без подбора каких-либо коэффициентов строить ту пару вспомогательных квадратных уравнений, объединение корней которых даёт все корни уравнения 4-й степени. Притом в общем случае коэффициентами квадратных уравнений могут быть комплексные числа с ненулевыми мнимыми частями. Использование этих квадратных уравнений позволяет в общем случае находить корни уравнения 4-й степени быстрее, чем вышеупомянутые

способы. Однако в литературе отсутствует выражение компонент корней этих квадратных уравнений через коэффициенты уравнения 4-й степени. В данной работе этот пробел восполняется в рамках развития подхода, осуществлённого в [6].

В целях вычисления корней уравнения 4-й степени в [6] предложены таблицы, в одной из которых содержатся формулы по расчёту корней кубического уравнения, а в другой – пары вспомогательных квадратных уравнений. В данной работе они приводятся после устранения в них избыточных данных. Табл. 1, содержащая пары квадратных уравнений, рассчитана на уравнение

$$z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0 \quad (1)$$

и использует действительный корень кубического уравнения

$$u^3 - a_2u^2 + (a_1a_3 - 4a_0)u - (a_1^2 + a_0a_3^2 - 4a_0a_2) = 0. \quad (2)$$

Ниже корень имеет обозначение u_1 . Уравнение (2) является резольвентой. В этой таблице используются также величины d_1 и d_2 , вычисляемые по формулам

$$d_1 = a_3^2/4 + u_1 - a_2; \quad (3.1)$$

$$d_2 = (u_1/2)^2 - a_0. \quad (3.2)$$

Содержащиеся в ней квадратные уравнения позволяют для вычисления корней уравнения (1) использовать любой действительный корень уравнения (2). На практике, однако, проще использовать такой корень уравнения (2), который даёт неотрицательные значения величинам (3). Его существование вытекает из теорем, предлагаемых ниже и использующих лемму. В ней корни уравнений (1) и (2) имеют соответственно обозначения z_1, z_2, z_3, z_4 и y_1, y_2, y_3 .

Лемма. Корни уравнения 4-й степени и резольвенты связаны соотношениями

$$y_1 = z_1z_2 + z_3z_4,$$

$$y_2 = z_1z_3 + z_2z_4, \quad (*)$$

$$y_3 = z_1z_4 + z_2z_3.$$

Доказательство. Величины $-(y_1 + y_2 + y_3)$, $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3$, $-y_1y_2y_3$ при использовании зависимостей (*) и теоремы Виета для уравнения (1) приводят к соотношениям

$$-(y_1 + y_2 + y_3) = -a_2,$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = a_1a_3 - 4a_0,$$

$$-y_1y_2y_3 = -(a_1^2 + a_0a_3^2 - 4a_0a_2). \quad (**)$$

Равенство правых частей соотношений (**) соответствующим коэффициентам уравнения (2) приводит на основании теоремы Виета для уравнения (2) к выводу о справедливости формул (*).

Теорема 1. Если все корни уравнения (1) являются действительными числами, то любой корень уравнения (2) имеет следующие свойства: он является действительным числом; для него величины (3) принимают неотрицательные значения.

Доказательство. Пусть действительные числа x_1, x_2, x_3, x_4 служат корнями уравнения (1). Тогда y_1, y_2, y_3 , согласно лемме, являются суммами произведений действительных чисел и потому сами являются действительными числами. При этом величина $4d_2$ для $u_1 = y_1$, $u_1 = y_2$, $u_1 = y_3$ имеет соответственно неотрицательные значения $(x_1x_2 - x_3x_4)^2$, $(x_1x_3 - x_2x_4)^2$, $(x_1x_4 - x_2x_3)^2$. Поэтому для каждого из корней y_1, y_2, y_3 величина d_2 принимает неотрицательное значение. Этим свойством

обладает и величина d_1 , так как величины d_1 и d_2 не могут принимать значения различных знаков [6].

Теорема 2. Если все корни уравнения (1) являются комплексными числами с ненулевыми мнимыми частями, то все корни уравнения (2) являются действительными числами. Для наибольшего из них величины (3) принимают неотрицательные значения.

Доказательство. Пусть комплексные числа $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$, $\gamma + i\delta$ и $\gamma - i\delta$ с ненулевыми мнимыми частями служат корнями уравнения (1). Тогда, согласно лемме, $y_1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$, $y_2 = 2\alpha\gamma - 2\beta\delta$, $y_3 = 2\alpha\gamma + 2\beta\delta$. Следовательно, y_1, y_2, y_3 являются действительными числами. Притом величина $4d_1$ для $u_1 = y_1$ преобразуется в величину $(2\alpha - 2\gamma)^2$, принимающую неотрицательные значения. Поэтому для $u_1 = y_1$ неотрицательные значения принимают величины d_1 и d_2 . Сложение очевидных неравенств из пар $\alpha^2 + \gamma^2 \geq 2\alpha\gamma$, $\beta^2 + \delta^2 \geq -2\beta\delta$ и $\alpha^2 + \gamma^2 \geq 2\alpha\gamma$, $\beta^2 + \delta^2 \geq 2\beta\delta$ приводит к неравенствам $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \geq 2\alpha\gamma - 2\beta\delta$ и $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \geq 2\alpha\gamma + 2\beta\delta$, говорящих о том, что y_1 является наибольшим среди корней уравнения (2).

Теорема 3. Если уравнение (1) имеет два неравных между собой действительных корня и комплексные корни с ненулевыми действительными частями, то уравнение (2) имеет лишь один действительный корень и для этого корня величины (3) принимают неотрицательные значения. Если уравнение (1) имеет два равных между собой действительных корня и комплексные корни с ненулевыми мнимыми частями, то уравнение (2) обладает следующими свойствами: оно имеет три действительных корня, два из которых равны между собой; для его наибольшего корня величины (3) принимают неотрицательные значения.

Доказательство. Пусть корнями z_1, z_2 служат действительные числа x_1 и x_2 , а корнями z_3, z_4 являются комплексные числа $\alpha + i\beta$ и $\alpha - i\beta$ с ненулевыми мнимыми частями. Тогда, согласно лемме, справедливы равенства $y_1 = x_1x_2 + \alpha^2 + \beta^2$, $y_2 = (x_1 + x_2)\alpha + i(x_1 - x_2)\beta$, $y_3 = (x_1 + x_2)\alpha - i(x_1 - x_2)\beta$. Следовательно, y_1 является действительным числом. Притом величина $4d_1$ для $u_1 = y_1$ преобразуется в неотрицательную величину $(x_1 + x_2 - 2\alpha)^2$. Следовательно, для $u_1 = y_1$ неотрицательные значения принимают и величины d_1 и d_2 . Корни y_2, y_3 являются при $x_1 = x_2$ действительными числами, а при $x_1 \neq x_2$ — комплексными числами с ненулевыми мнимыми частями. Если $x_1 = x_2$, то $y_1 = x_1^2 + \alpha^2 + \beta^2$, $y_2 = 2x_1\alpha$, $y_3 = y_2$ и, следовательно, y_1, y_2, y_3 принимают действительные значения. Кроме того, если $x_1 = x_2$, то справедливы неравенства $y_1 > y_2$ и $y_1 > y_3$, вытекающие из неравенства $x_1^2 + \alpha^2 + \beta^2 > 2x_1\alpha$, являющегося следствием справедливого неравенства $(x_1 - \alpha)^2 + \beta^2 > 0$.

Из теорем вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. Если все корни уравнения (2) являются действительными числами, то для наибольшего из них величины (3) принимают неотрицательные значения. Если лишь один корень уравнения (2) является действительным числом, то для него величины (3) принимают неотрицательные значения.

Следствие 2. Если уравнение (2) имеет лишь один действительный корень, то уравнение (1) имеет два неравных между собой действительных корня и два комплексных корня с ненулевыми мнимыми частями.

Следствие 3. Если все корни уравнения (2) являются действительными числами, то или уравнение (1) имеет лишь действительные корни, или уравнение (1) имеет лишь комплексные корни с ненулевыми мнимыми частями, или уравнение

(1) имеет два равных между собой действительных корня и два комплексных корня с ненулевыми мнимыми частями.

Следствие 1 непосредственно вытекает из теорем 1–3 и приводит к выводу о существовании действительного корня уравнения (2), дающего неотрицательные значения величин (3). Доказательство следствий 2 и 3 методом от противного приводит к противоречиям с их условиями. Поэтому следствия 2 и 3 справедливы. Хотя следствие 1 позволяет избегать в расчётах случая отрицательных значений величин (3), приводимая ниже табл. 1, содержащая квадратные уравнения, рассчитана и на этот случай.

Таблица 1

Пары квадратных уравнений

| Случаи и их варианты | | Пара квадратных уравнений |
|----------------------|---|--|
| 1 | $d_1 > 0, d_2 > 0, a_3 u_1 - 2a_1 > 0; d_1 = 0, d_2 > 0;$ $d_2 = 0, d_1 > 0; d_1 = 0, d_2 = 0$ | $v^2 + (a_3/2 + d_1 ^{1/2})v + u_1/2 + d_2 ^{1/2} = 0$ $v^2 + (a_3/2 - d_1 ^{1/2})v + u_1/2 - d_2 ^{1/2} = 0$ |
| 2 | $d_1 > 0, d_2 > 0, a_3 u_1 - 2a_1 < 0$ | $v^2 + (a_3/2 + d_1 ^{1/2})v + u_1/2 - d_2 ^{1/2} = 0$ $v^2 + (a_3/2 - d_1 ^{1/2})v + u_1/2 + d_2 ^{1/2} = 0$ |
| 3 | $d_1 < 0, d_2 < 0, a_3 u_1 - 2a_1 < 0; d_1 = 0, d_2 < 0;$ $d_2 = 0, d_1 < 0; d_1 = 0, d_2 = 0$ | $v^2 + (a_3/2 + i d_1 ^{1/2})v + u_1/2 + i d_2 ^{1/2} = 0$ $v^2 + (a_3/2 - i d_1 ^{1/2})v + u_1/2 - i d_2 ^{1/2} = 0$ |
| 4 | $d_1 < 0, d_2 < 0, a_3 u_1 - 2a_1 > 0$ | $v^2 + (a_3/2 + i d_1 ^{1/2})v + u_1/2 - i d_2 ^{1/2} = 0$ $v^2 + (a_3/2 - i d_1 ^{1/2})v + u_1/2 + i d_2 ^{1/2} = 0$ |

(Величины $|d_1|^{1/2}$ и $|d_2|^{1/2}$ – арифметические корни.)

Табл. 2 по решению кубического уравнения рассчитана на уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \quad (4)$$

В ней величины p и q выражаются через коэффициенты уравнения (4) с помощью соотношений

$$p = 9^{-1} a^{-2} (3ac - b^2); \quad (5.1)$$

$$q = 27^{-1} a^{-3} b^3 - 6^{-1} a^{-2} bc + 2^{-1} a^{-1} d. \quad (5.2)$$

Таблица 2

Аналитическое выражение корней кубического уравнения

| Случаи | | r | s | φ | Корни |
|--------|---------------------|-----|-----|-----------|---|
| 1 | $p = 0,$ $q = 0$ | | | | $x_1 = -3^{-1} ba^{-1}$ $x_2 = -3^{-1} ba^{-1}$ $x_3 = -3^{-1} ba^{-1}$ |
| 2 | $p = 0,$ $q > 0$ | | | | $x_1 = -\exp(3^{-1} \ln(2q)) - 3^{-1} ba^{-1}$ $x_2 = \{2^{-1} \exp(3^{-1} \ln(2q)) - 3^{-1} ba^{-1}\} +$ $+ i \{3^{1/2} 2^{-1} \exp(3^{-1} \ln(2q))\}$ $x_3 = \{2^{-1} \exp(3^{-1} \ln(2q)) - 3^{-1} ba^{-1}\} -$ $- i \{3^{1/2} 2^{-1} \exp(3^{-1} \ln(2q))\}$ |
| 3 | $p = 0,$ $q < 0$ | | | | $x_1 = \exp(3^{-1} \ln(2q)) - 3^{-1} ba^{-1}$ $x_2 = \{-2^{-1} \exp(3^{-1} \ln(2q)) - 3^{-1} ba^{-1}\} +$ $+ i \{3^{1/2} 2^{-1} \exp(3^{-1} \ln(2q))\}$ $x_3 = \{-2^{-1} \exp(3^{-1} \ln(2q)) - 3^{-1} ba^{-1}\} -$ $- i \{3^{1/2} 2^{-1} \exp(3^{-1} \ln(2q))\}$ |

Окончание табл. 2

| Случаи | r | s | φ | Корни |
|--|--|---------|---------------------------|--|
| 4 $p > 0,$ $q = 0$ | | | | $x_1 = -3^{-1}ba^{-1}$ $x_2 = -3^{-1}ba^{-1} + i(3p)^{1/2}$ $x_3 = -3^{-1}ba^{-1} - i(3p)^{1/2}$ |
| 5 $p < 0,$ $q = 0$ | | | | $x_1 = -3^{-1}ba^{-1}$ $x_2 = (3 p)^{1/2} - 3^{-1}ba^{-1}$ $x_3 = -(3 p)^{1/2} - 3^{-1}ba^{-1}$ |
| 6 $q \neq 0,$ $p < 0,$ $q^2 + p^3 \leq 0$ | $r = p ^{1/2},$ если $q > 0;$ $r = - p ^{1/2},$ если $q < 0$ | q/r^3 | $\arctg[(1-s^2)^{1/2}/s]$ | $x_1 = -2r\cos(\varphi/3) - 3^{-1}ba^{-1}$ $x_2 = 2r\cos(\pi/3 - \varphi/3) - 3^{-1}ba^{-1}$ $x_3 = 2r\cos(\pi/3 + \varphi/3) - 3^{-1}ba^{-1}$ |
| 7 $q \neq 0,$ $p < 0,$ $q^2 + p^3 > 0$ | $r = p ^{1/2},$ если $q > 0;$ $r = - p ^{1/2},$ если $q < 0$ | q/r^3 | $\ln[s+(s^2-1)^{1/2}]$ | $x_1 = -2rch(\varphi/3) - 3^{-1}ba^{-1}$ $x_2 = rch(\varphi/3) - 3^{-1}ba^{-1} + i3^{1/2}rsh(\varphi/3)$ $x_3 = rch(\varphi/3) - 3^{-1}ba^{-1} - i3^{1/2}rsh(\varphi/3)$ |
| 8 $q \neq 0,$ $p > 0$ | $r = p ^{1/2},$ если $q > 0;$ $r = - p ^{1/2},$ если $q < 0$ | q/r^3 | $\ln[s+(s^2+1)^{1/2}]$ | $x_1 = -2rsh(\varphi/3) - 3^{-1}ba^{-1}$ $x_2 = rsh(\varphi/3) - 3^{-1}ba^{-1} + i3^{1/2}rch(\varphi/3)$ $x_3 = rsh(\varphi/3) - 3^{-1}ba^{-1} - i3^{1/2}rch(\varphi/3)$ |

Зависимости, приведенные в табл. 2, позволяют с помощью следствий 2 и 3 доказать следующие теоремы, устанавливающие по значениям коэффициентов резольвенты принадлежность корней уравнения к множеству действительных чисел или к множеству комплексных чисел с ненулевыми мнимыми частями.

Теорема 4. Корнями уравнения (1) являются или только действительные числа, или только комплексные числа с ненулевыми мнимыми частями, или два равных между собой действительных числа и два комплексных числа с ненулевыми мнимыми частями в каждом из следующих случаев значений величин p и q для уравнения (2): 1) $p = 0, q = 0$; 2) $p = 0, q = 2^{-1}$; 3) $p = 0, q = -2^{-1}$; 4) $p < 0, q = 0$; 5) $q \neq 0, p < 0, q^2 + p^3 \leq 0$; 6) $q \neq 0, p < 0, q^2 + p^3 > 0, \varphi = 0$.

Доказательство. Если выполняется какое-либо из перечисленных условий, то все корни уравнения (2) являются действительными числами. Поэтому применимо следствие 3, приводящее к утверждению теоремы.

Теорема 5. Корнями уравнения (1) являются два неравных между собой действительных числа и два комплексных числа с ненулевыми мнимыми частями в каждом из следующих случаев значений величин p и q для уравнения (2): 1) $p = 0, q > 0, q \neq 2^{-1}$; 2) $p = 0, q < 0, q \neq -2^{-1}$; 3) $p > 0, q = 0$; 4) $q \neq 0, p < 0, q^2 + p^3 > 0, \varphi \neq 0$; 5) $q \neq 0, p > 0$.

Доказательство. Если выполняется какое-либо из перечисленных условий, то уравнение (2) имеет лишь один действительный корень. Поэтому применимо следствие 2, приводящее к утверждению теоремы.

Формулы из табл. 2 позволяют сначала найти действительный корень u_1 уравнения (2), а затем, используя квадратные уравнения из табл. 1, и все корни уравнения (1). О решении квадратных уравнений из табл. 1 речь пойдет ниже.

Каждое квадратное уравнение из табл. 1 представимо в виде равенства

$$v^2 + (a_3/2 + p_1k_{1re} + ip_1k_{1im})v + (v_1/2 + p_2k_{2re} + ip_2k_{2im}) = 0. \quad (6)$$

Если, согласно табл. 1, уравнение (1) относится к случаю 1, то для верхнего квадратного уравнения $p_1 = 1, p_2 = 1, k_{1re} = |d_1|^{1/2}, k_{1im} = 0, k_{2re} = |d_2|^{1/2}, k_{2im} = 0$, а для нижнего квадратного уравнения $p_1 = -1, p_2 = -1, k_{1re} = |d_1|^{1/2}, k_{1im} = 0, k_{2re} = |d_2|^{1/2}$,

$k_{2im} = 0$. Если уравнение (1) относится к случаю 2, то для верхнего квадратного уравнения $p_1 = 1, p_2 = -1, k_{1re} = |d_1|^{1/2}, k_{1im} = 0, k_{2re} = |d_2|^{1/2}, k_{2im} = 0$, а для нижнего квадратного уравнения $p_1 = -1, p_2 = 1, k_{1re} = |d_1|^{1/2}, k_{1im} = 0, k_{2re} = |d_2|^{1/2}, k_{2im} = 0$. Если уравнение (1) относится к случаю 3, то для верхнего квадратного уравнения $p_1 = 1, p_2 = 1, k_{1re} = 0, k_{1im} = |d_1|^{1/2}, k_{2re} = 0, k_{2im} = |d_2|^{1/2}$, а для нижнего квадратного уравнения $p_1 = -1, p_2 = -1, k_{1re} = 0, k_{1im} = |d_1|^{1/2}, k_{2re} = 0, k_{2im} = |d_2|^{1/2}$. Если уравнение (1) относится к случаю 4, то для верхнего квадратного уравнения $p_1 = 1, p_2 = -1, k_{1re} = 0, k_{1im} = |d_1|^{1/2}, k_{2re} = 0, k_{2im} = |d_2|^{1/2}$, а для нижнего квадратного уравнения $p_1 = -1, p_2 = 1, k_{1re} = 0, k_{1im} = |d_1|^{1/2}, k_{2re} = 0, k_{2im} = |d_2|^{1/2}$.

Решением уравнения (6) является двузначная функция z , определяемая в поле комплексных чисел равенством

$$z = -(a_3/2 + p_1 k_{1re} + i p_1 k_{1im})/2 + \{(a_3/2 + p_1 k_{1re})^2/4 - (p_1 k_{1im})^2/4 - (y_1/2 + p_2 k_{2re}) + i[(a_3/2 + p_1 k_{1re})(p_1 k_{1im})/2 - p_2 k_{2im}]\}^{1/2}. \quad (7)$$

Далее действительная и мнимая части подкоренного выражения из соотношения (7) имеют обозначения s_{re} и s_{im} . Для s_{re} и s_{im} справедливы равенства

$$s_{re} = (a_3/2 + p_1 k_{1re})^2/4 - (p_1 k_{1im})^2/4 - (y_1/2 + p_2 k_{2re}); \quad (8)$$

$$s_{im} = (a_3/2 + p_1 k_{1re})(p_1 k_{1im})/2 - p_2 k_{2im}. \quad (9)$$

Ниже компоненты функции z применительно к верхним уравнениям из табл. 1 имеют обозначения z_{1re}, z_{1im} (для одного корня) и z_{2re}, z_{2im} (для другого), а применительно к нижним уравнениям из табл. 2 – z_{3re}, z_{3im} (для одного корня) и z_{4re}, z_{4im} (для другого). Применение формулы извлечения квадратного корня в поле комплексных чисел [4, с. 26] из величины $s_{re} + i s_{im}$ приводит к тем формулам для вычисления компонент корней уравнения, которые приведены в табл. 3 – 6. Случаи, к которым относятся эти таблицы, представлены с помощью операций в алгебре высказываний. Высказывания заключены в скобки. Имеющие дробные степени величины являются арифметическими корнями.

Таблица 3

Формулы для компонент корней уравнения 4-й степени

$$[(d_1 > 0) \wedge (d_2 > 0) \wedge (a_3 u_1 - 2a_1 > 0)] \vee [(d_1 = 0) \wedge (d_2 > 0)] \vee [(d_2 = 0) \wedge (d_1 > 0)] \vee [(d_1 = 0) \wedge (d_2 = 0)]$$

| | | |
|--|--|--|
| Формула для s_{re} : $s_{re} = (a_3/2 + d_1^{1/2})^2/4 - (u_1/2 + d_2^{1/2})$. | Формулы для компонент корней z_1 и z_2 | |
| Условие на s_{re} | | |
| $s_{re} > 0$ | | |
| $s_{re} < 0$ | $z_{1re} = -(a_3/2 + d_1^{1/2})/2 + s_{re}^{1/2}, z_{1im} = 0$ $z_{2re} = -(a_3/2 + d_1^{1/2})/2 - s_{re}^{1/2}, z_{2im} = 0$ | |
| $s_{re} = 0$ | $z_{1re} = -(a_3/2 + d_1^{1/2})/2, z_{1im} = s_{re} ^{1/2}$ $z_{2re} = -(a_3/2 + d_1^{1/2})/2, z_{2im} = - s_{re} ^{1/2}$ | |
| Формула для s_{re} : $s_{re} = (a_3/2 - d_1^{1/2})^2/4 - (u_1/2 - d_2^{1/2})$. | Формулы для компонент корней z_3 и z_4 | |
| Условие на s_{re} | | |
| $s_{re} > 0$ | | |
| $s_{re} < 0$ | | $z_{3re} = -(a_3/2 - d_1^{1/2})/2 + s_{re}^{1/2}, z_{3im} = 0$ $z_{4re} = -(a_3/2 - d_1^{1/2})/2 - s_{re}^{1/2}, z_{4im} = 0$ |
| $s_{re} = 0$ | | $z_{3re} = -(a_3/2 - d_1^{1/2})/2, z_{3im} = s_{re} ^{1/2}$ $z_{4re} = -(a_3/2 - d_1^{1/2})/2, z_{4im} = - s_{re} ^{1/2}$ |

Таблица 4

**Формулы для компонент корней уравнения 4-й степени
($d_1 > 0$) \wedge ($d_2 > 0$) \wedge ($a_3 u_1 - 2a_1 < 0$)**

| | |
|--|--|
| Формула для s_{re} : $s_{re} = (a_3/2 + d_1^{1/2})^2/4 - (u_1/2 - d_2^{1/2})$. | Формулы для компонент корней z_1 и z_2 |
| Условие на s_{re} | |
| $s_{re} > 0$ | $z_{1re} = -(a_3/2 + d_1^{1/2})/2 + s_{re}^{1/2}$ $z_{1im} = 0$ $z_{2re} = -(a_3/2 + d_1^{1/2})/2 - s_{re}^{1/2}$ $z_{2im} = 0$ |
| $s_{re} < 0$ | $z_{1re} = -(a_3/2 + d_1^{1/2})/2$ $z_{1im} = s_{re} ^{1/2}$ $z_{2re} = -(a_3/2 + d_1^{1/2})/2$ $z_{2im} = - s_{re} ^{1/2}$ |
| $s_{re} = 0$ | $z_{1re} = -(a_3/2 + d_1^{1/2})/2$ $z_{1im} = 0$ $z_{2re} = -(a_3/2 + d_1^{1/2})/2$ $z_{2im} = 0$ |
| Формула для s_{re} : $s_{re} = (a_3/2 - d_1^{1/2})^2/4 - (u_1/2 + d_2^{1/2})$. | Формулы для компонент корней z_3 и z_4 |
| Условие на s_{re} | |
| $s_{re} > 0$ | $z_{3re} = -(a_3/2 - d_1^{1/2})/2 + s_{re}^{1/2}$ $z_{3im} = 0$ $z_{4re} = -(a_3/2 - d_1^{1/2})/2 - s_{re}^{1/2}$ $z_{4im} = 0$ |
| $s_{re} < 0$ | $z_{3re} = -(a_3/2 - d_1^{1/2})/2$ $z_{3im} = s_{re} ^{1/2}$ $z_{4re} = -(a_3/2 - d_1^{1/2})/2$ $z_{4im} = - s_{re} ^{1/2}$ |
| $s_{re} = 0$ | $z_{3re} = -(a_3/2 - d_1^{1/2})/2$ $z_{3im} = 0$ $z_{4re} = -(a_3/2 - d_1^{1/2})/2$ $z_{4im} = 0$ |

Таблица 5

**Формулы для компонент корней уравнения 4-й степени
[$(d_1 < 0) \wedge (d_2 < 0) \wedge (a_3 u_1 - 2a_1 < 0)$] \vee [$(d_1 = 0) \wedge (d_2 < 0)$] \vee [$(d_2 = 0) \wedge (d_1 < 0)$]**

| | |
|--|--|
| Формулы для s_{re} и s_{im} : $s_{re} = (a_3)^2/16 - d_1 /4 - y_1/2$, $s_{im} = a_3 d_1 ^{1/2}/4 - d_2 ^{1/2}$. | Формулы для компонент корней z_1 и z_2 |
| Условия на s_{re} и s_{im} | |
| $s_{re} > 0$ | $z_{1re} = -a_3/4 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \cos(\arctg(s_{im}/s_{re})/2)$ $z_{1im} = - d_1 ^{1/2}/2 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \sin(\arctg(s_{im}/s_{re})/2)$ $z_{2re} = -a_3/4 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \cos(\arctg(s_{im}/s_{re})/2 + \pi)$ $z_{2im} = - d_1 ^{1/2}/2 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \sin(\arctg(s_{im}/s_{re})/2 + \pi)$ |
| $s_{re} < 0$ | $z_{1re} = -a_3/4 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \cos((\arctg(s_{im}/s_{re}) + \pi)/2)$ $z_{1im} = - d_1 ^{1/2}/2 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \sin((\arctg(s_{im}/s_{re}) + \pi)/2)$ $z_{2re} = -a_3/4 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \cos((\arctg(s_{im}/s_{re}) + \pi)/2 + \pi)$ $z_{2im} = - d_1 ^{1/2}/2 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \sin((\arctg(s_{im}/s_{re}) + \pi)/2 + \pi)$ |
| $s_{re} = 0, s_{im} > 0$ | $z_{1re} = -a_3/4 + s_{im}^{1/2}/2$ $z_{1im} = - d_1 ^{1/2}/2 + s_{im}^{1/2}/2$ $z_{2re} = -a_3/4 - s_{im}^{1/2}/2$ $z_{2im} = - d_1 ^{1/2}/2 - s_{im}^{1/2}/2$ |
| $s_{re} = 0, s_{im} < 0$ | $z_{1re} = -a_3/4 + s_{im} ^{1/2}/2$ $z_{1im} = - d_1 ^{1/2}/2 - s_{im} ^{1/2}/2$ $z_{2re} = -a_3/4 - s_{im} ^{1/2}/2$ $z_{2im} = - d_1 ^{1/2}/2 + s_{im} ^{1/2}/2$ |
| $s_{re} = 0, s_{im} = 0$ | $z_{1re} = -a_3/4$ $z_{1im} = - d_1 ^{1/2}/2$ $z_{2re} = -a_3/4$ $z_{2im} = - d_1 ^{1/2}/2$ |
| Формулы для s_{re} и s_{im} : $s_{re} = (a_3)^2/16 - d_1 /4 - y_1/2$, $s_{im} = -a_3 d_1 ^{1/2}/4 + d_2 ^{1/2}$. | Формулы для компонент корней z_3 и z_4 |
| Условия на s_{re} и s_{im} | |
| $s_{re} > 0$ | $z_{3re} = -a_3/4 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \cos(\arctg(s_{im}/s_{re})/2)$ $z_{3im} = d_1 ^{1/2}/2 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \sin(\arctg(s_{im}/s_{re})/2)$ $z_{4re} = -a_3/4 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \cos(\arctg(s_{im}/s_{re})/2 + \pi)$ $z_{4im} = d_1 ^{1/2}/2 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \sin(\arctg(s_{im}/s_{re})/2 + \pi)$ |

Окончание табл. 5

| | |
|--------------------------|---|
| $s_{re} < 0$ | $z_{3re} = -a_3/4 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \cos(\arctg(s_{im}/s_{re}) + \pi)/2$ $z_{3im} = d_1 ^{1/2}/2 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \sin(\arctg(s_{im}/s_{re}) + \pi)/2$ $z_{4re} = -a_3/4 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \cos(\arctg(s_{im}/s_{re}) + \pi)/2 + \pi$ $z_{4im} = d_1 ^{1/2}/2 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \sin(\arctg(s_{im}/s_{re}) + \pi)/2 + \pi$ |
| $s_{re} = 0, s_{im} > 0$ | $z_{3re} = -a_3/4 + s_{im}^{1/2}/2$ $z_{3im} = d_1 ^{1/2}/2 + s_{im}^{1/2}/2$ $z_{4re} = -a_3/4 - s_{im}^{1/2}/2$ $z_{4im} = d_1 ^{1/2}/2 - s_{im}^{1/2}/2$ |
| $s_{re} = 0, s_{im} < 0$ | $z_{3re} = -a_3/4 + s_{im} ^{1/2}/2$ $z_{3im} = d_1 ^{1/2}/2 - s_{im} ^{1/2}/2$ $z_{4re} = -a_3/4 - s_{im} ^{1/2}/2$ $z_{4im} = d_1 ^{1/2}/2 + s_{im} ^{1/2}/2$ |
| $s_{re} = 0, s_{im} = 0$ | $z_{3re} = -a_3/4$ $z_{3im} = d_1 ^{1/2}/2$ $z_{4re} = -a_3/4$ $z_{4im} = d_1 ^{1/2}/2$ |

Таблица 6

Формулы для компонент корней уравнения 4-й степени

$$(d_1 < 0) \wedge (d_2 < 0) \wedge (a_3 u_1 - 2a_1 > 0)$$

| | |
|--|---|
| Формулы для s_{re} и s_{im} : $s_{re} = a_3^2/16 - d_1 /4 - y_1/2$ $s_{im} = a_3 d_1 ^{1/2}/4 + d_2 ^{1/2}$ | Формулы для компонент корней z_1 и z_2 |
| Условия на s_{re} и s_{im} | |
| $s_{re} > 0$ | $z_{1re} = -a_3/4 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \cos(\arctg(s_{im}/s_{re})/2)$ $z_{1im} = - d_1 ^{1/2}/2 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \sin(\arctg(s_{im}/s_{re})/2)$ $z_{2re} = -a_3/4 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \cos(\arctg(s_{im}/s_{re})/2 + \pi)$ $z_{2im} = - d_1 ^{1/2}/2 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \sin(\arctg(s_{im}/s_{re})/2 + \pi)$ |
| $s_{re} < 0$ | $z_{1re} = -a_3/4 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \cos((\arctg(s_{im}/s_{re}) + \pi)/2)$ $z_{1im} = - d_1 ^{1/2}/2 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \sin((\arctg(s_{im}/s_{re}) + \pi)/2)$ $z_{2re} = -a_3/4 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \cos((\arctg(s_{im}/s_{re}) + \pi)/2 + \pi)$ $z_{2im} = - d_1 ^{1/2}/2 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \sin((\arctg(s_{im}/s_{re}) + \pi)/2 + \pi)$ |
| $s_{re} = 0, s_{im} > 0$ | $z_{1re} = -a_3/4 + s_{im}^{1/2}/2$ $z_{1im} = - d_1 ^{1/2}/2 + s_{im}^{1/2}/2$ $z_{2re} = -a_3/4 - s_{im}^{1/2}/2$ $z_{2im} = - d_1 ^{1/2}/2 - s_{im}^{1/2}/2$ |
| $s_{re} = 0, s_{im} < 0$ | $z_{1re} = -a_3/4 + s_{im} ^{1/2}/2$ $z_{1im} = - d_1 ^{1/2}/2 - s_{im} ^{1/2}/2$ $z_{2re} = -a_3/4 - s_{im} ^{1/2}/2$ $z_{2im} = -p_1 k_{1im}^{1/2} + s_{im} ^{1/2}/2$ |
| $s_{re} = 0, s_{im} = 0$ | $z_{1re} = -a_3/4$ $z_{1im} = - d_1 ^{1/2}/2$ $z_{2re} = -a_3/4$ $z_{2im} = - d_1 ^{1/2}/2$ |
| Формулы для s_{re} и s_{im} : $s_{re} = a_3^2/16 - d_1 /4 - y_1/2$, $s_{im} = -a_3 d_1 ^{1/2}/4 - d_2 ^{1/2}$ | Формулы для компонент корней z_3 и z_4 |
| Условия на s_{re} и s_{im} | |
| $s_{re} > 0$ | $z_{3re} = -a_3/4 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \cos(\arctg(s_{im}/s_{re})/2)$ $z_{3im} = d_1 ^{1/2}/2 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \sin(\arctg(s_{im}/s_{re})/2)$ $z_{4re} = -a_3/4 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \cos(\arctg(s_{im}/s_{re})/2 + \pi)$ $z_{4im} = d_1 ^{1/2}/2 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \sin(\arctg(s_{im}/s_{re})/2 + \pi)$ |
| $s_{re} < 0$ | $z_{3re} = -a_3/4 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \cos((\arctg(s_{im}/s_{re}) + \pi)/2)$ $z_{3im} = d_1 ^{1/2}/2 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \sin((\arctg(s_{im}/s_{re}) + \pi)/2)$ $z_{4re} = -a_3/4 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \cos((\arctg(s_{im}/s_{re}) + \pi)/2 + \pi)$ $z_{4im} = d_1 ^{1/2}/2 + (s_{re}^2 + s_{im}^2)^{1/4} \sin((\arctg(s_{im}/s_{re}) + \pi)/2 + \pi)$ |
| $s_{re} = 0, s_{im} > 0$ | $z_{3re} = -a_3/4 + s_{im}^{1/2}/2$ $z_{3im} = d_1 ^{1/2}/2 + s_{im}^{1/2}/2$ $z_{4re} = -a_3/4 - s_{im}^{1/2}/2$ $z_{4im} = d_1 ^{1/2}/2 - s_{im}^{1/2}/2$ |
| $s_{re} = 0, s_{im} < 0$ | $z_{3re} = -a_3/4 + s_{im} ^{1/2}/2$ $z_{3im} = d_1 ^{1/2}/2 - s_{im} ^{1/2}/2$ $z_{4re} = -a_3/4 - s_{im} ^{1/2}/2$ $z_{4im} = d_1 ^{1/2}/2 + s_{im} ^{1/2}/2$ |
| $s_{re} = 0, s_{im} = 0$ | $z_{3re} = -a_3/4$ $z_{3im} = d_1 ^{1/2}/2$ $z_{4re} = -a_3/4$ $z_{4im} = d_1 ^{1/2}/2$ |

Пример. Используя табл. 1 – 6, вычислить корни уравнения [3]

$$52,82x^4 + 108,39x^3 + 88,17x^2 + 270,99x + 211,29 = 0.$$

Решение. 1) Определяются значения коэффициентов a_3, a_2, a_1, a_0 в результате приведения заданного уравнения к виду (1):

$$a_3 = 2,05206; a_2 = 1,66925; a_1 = 5,13044; a_0 = 4,00019.$$

2) Находятся значения коэффициентов $a, b, c,$ и d по формулам $a = 1, b = -a_2, c = a_1a_3 - 4a_0, d = -a_1^2 - a_0a_3^2 + 4a_0a_2$:

$$a = 1; b = -1,66925; c = -5,47276; d = -16,45677.$$

3) По формулам (5) находятся значения величин $p, q,$ и $q^2 + p^3$:

$$p = -2,13385; q = -9,92323; q^2 + p^3 = 88,75426.$$

4) Констатируется, что выполняются условия $p < 0$ и $q^2 + p^3 > 0$.

5) Делается вывод: при решении вспомогательного кубического уравнения следует выбрать строку 7 табл. 2.

6) Используется строка 7 табл. 2. Последовательно получают следующие результаты:

$$r = -1,46077; s = 3,18351; \varphi = 1,82550; u_1 = 4,03574.$$

7) Определяются значения величин $d_1, d_2, a_3u_1 - 2a_1$:

$$d_1 = 3,41923; d_2 = 0,07161; a_3u_1 - 2a_1 = -1,97929.$$

8) Так как выполняются неравенства $d_1 > 0, d_2 > 0$ и $a_3u_1 - 2a_1 < 0$, то согласно табл. 1, делается вывод: для вычисления компонент корней исходного уравнения следует выбрать табл. 4.

9) Начинает использоваться табл. 4. Для вычисления корней z_1 и z_2 определяется значение величины s_{re} по формуле

$$s_{re} = (a_3/2 + d_1^{1/2})^2/4 - (u_1/2 - d_2^{1/2}):$$

0,31635. Формулы (из табл.4), соответствующие этому значению, приводят к корням $z_1 = -0,87513$ и $z_2 = -2,00002$.

10) Для вычисления корней z_3 и z_4 определяется значение величины s_{re} по формуле

$$s_{re} = (a_3/2 - d_1^{1/2})^2/4 - (u_1/2 + d_2^{1/2}):$$

-2,11610. Формулы (из табл. 4), соответствующие этому значению, приводят к корням $z_3 = 0,41154 + i1,45468$ и $z_4 = 0,41154 - i1,45468$.

Замечание. После вычисления значения величины φ на шестом шаге можно было на основании теоремы 5 сделать вывод о том, что уравнение имеет два неравных между собой действительных корня и два комплексных корня с ненулевыми мнимыми частями.

Аналитические зависимости в табл. 1 – 6 позволяют с помощью величин, содержащих d_1 и d_2 и $a_3u_1 - 2a_1$, сформулировать утверждения, устанавливающие без решения уравнения принадлежность его корней к множеству действительных чисел или множеству комплексных чисел с ненулевыми мнимыми частями. Примером такого утверждения служит следующая теорема.

Теорема 6. Все корни уравнения (1) являются действительными числами, если истинно одно из определяемых ниже высказываний A, B :

$$A = \{[(d_1 > 0) \wedge (d_2 > 0) \wedge (a_3u_1 - 2a_1 > 0)] \vee [(d_1 = 0) \wedge (d_2 > 0)] \vee [(d_2 = 0) \wedge (d_1 > 0)] \vee [(d_1 = 0) \wedge (d_2 = 0)]\} \wedge [(a_3/2 + d_1^{1/2})^2/4 - (u_1/2 + d_2^{1/2}) \geq 0] \wedge \vee [(a_3/2 - d_1^{1/2})^2/4 - (u_1/2 - d_2^{1/2}) \geq 0],$$

$$B = [(d_1 > 0) \wedge (d_2 > 0) \wedge (a_3 u_1 - 2a_1 < 0)] \wedge [(a_3/2 + d_1^{1/2})^2/4 - (u_1/2 - d_2^{1/2}) \geq 0] \wedge \\ \wedge [(a_3/2 - d_1^{1/2})^2/4 - (u_1/2 + d_2^{1/2}) \geq 0].$$

Справедливость теоремы 6 вытекает из формул табл. 3 и 4.

Автор работы благодарит инженера Э.Г. Гаузера из Азербайджанской республики за сообщение автору данной работы о закономерностях, проявляющихся при использовании метода Феррари на практике. В данной работе эти закономерности нашли теоретическое обоснование и сформулированы в виде следствия 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Букин А.Д. Кинематическая реконструкция двухчастичных событий. Новосибирск: ИЯФ СО РАН-42, 2006. 22 с.
2. Фёдорова Н.А. Решение плоской задачи упругой среды, армированной тремя семействами волокон // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10. Спец. выпуск. С. 90–99.
3. Фёдорова Н.А. Решение плоской задачи для металлокompозита, армированного семейством криволинейных волокон // Математическое моделирование и краевые задачи. 2007. Ч. 1. С. 258–261.
4. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.
5. Подвысоцкий В. Общий аналитический метод решения алгебраических уравнений 4-й степени. <http://www.n-t.org/tp/ns/oam/htm>.
6. Несмеев Ю.А. Об одном подходе к решению алгебраических уравнений 3-й и 4-й степеней // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 1(13). С. 26–30.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.

Статья поступила 06.07.2012 г.

Nesmeev Yu. A. THE DEVELOPMENT OF AN APPROACH FOR THE SOLUTION OF THE FOURTH DEGREE ALGEBRAIC EQUATION. Connections between roots of an equation and its resolvent are deduced. Statements establishing the membership of roots to the set of real numbers or to the set of complex numbers with nonzero imaginary parts without solving the equation are proposed. Formulas for calculating the components of equation roots are deduced.

Keywords: equation, solution, table.

NESMEEV Yuri Alekseevich (Magnitogorsk State Technical University)
E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

УДК 514.752

Н.М. Онищук

**ЭКСТРЕМАЛИ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО КРУЧЕНИЯ
НЕГОЛОНОМНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ**

В трёхмерном евклидовом пространстве рассматривается 2-мерное гладкое неголономное распределение. Основное внимание уделено изучению геодезического кручения кривых распределения, в частности – экстремалей геодезического кручения. В исследованиях используется метод внешних форм Картана [1].

Ключевые слова: *неголономная геометрия, распределение, уравнение Пфаффа, векторное поле.*

Двумерное распределение в E_3 – это гладкое отображение Δ , сопоставляющее $\forall M \in E_3$ (или области $G \subset E_3$) плоскость π , проходящую через M [2, с. 683]. По распределению Δ однозначно определяется уравнение Пфаффа. Распределение называется неголономным, если соответствующее ему уравнение Пфаффа не вполне интегрируемо. Его интегральные кривые, проходящие через точку M , касаются в этой точке плоскости π и называются кривыми распределения. Пара (M, π) называется плоским элементом; плоскость π – плоскостью распределения в точке M ; прямая l , проходящая через M ортогонально π , – нормалью распределения в точке M . Множество всех плоских элементов (график распределения) представляет собой трёхмерное многообразие, что позволяет использовать метод внешних форм Картана.

1. Предварительные сведения

К каждому элементу (M, π) присоединим ортонормированный репер (M, \bar{e}_i) , где \bar{e}_3 – единичный вектор нормали распределения в точке M . Деривационные формулы репера запишем в виде

$$\begin{aligned} d\bar{r} &= \omega^i \bar{e}_i, \\ d\bar{e}_i &= \omega_j^i \bar{e}_j, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где \bar{r} – радиус-вектор точки M ,

$$\begin{aligned} \omega_i^j &= -\omega_j^i, \quad d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j \\ &(i, j, k = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Формы Пфаффа ω_3^i, ω^j – главные формы [1, с.288]. Из них ω^i – базисные формы, поэтому

$$\omega_3^i = A_j^i \omega^j. \tag{1.2}$$

По матрице (A_j^i) определяем линейный оператор A , для которого $A(d\bar{r}) = d\bar{e}_3$.

Уравнение Пфаффа, соответствующее распределению Δ , – это уравнение

$$\omega^3 = 0. \quad (1.3)$$

Плоскость π относительно выбранного репера имеет уравнение $x^3 = 0$.

Сужение оператора A на плоскость π обозначим A^* .

Собственные значения оператора A^ , взятые с противоположными знаками, являются главными кривизнами 2-го рода, а его собственные векторы определяют главные направления 2-го рода. Произведение главных кривизн 2-го рода – это полная кривизна второго рода, а их полусумма – средняя кривизна. Кривая распределения, в каждой точке которой касательный вектор имеет одно из главных направлений 2-го рода, называется линией кривизны 2-го рода. Она характеризуется тем, что вдоль неё нормали распределения описывают торс [3, с. 49].*

Введём обозначения: $k_1^{(2)}, k_2^{(2)}$ – главные кривизны 2-го рода, $K_2 = k_1^{(2)}k_2^{(2)}$ – полная кривизна 2-го рода, $H = \frac{k_1^{(2)} + k_2^{(2)}}{2}$ – средняя кривизна. Инвариант $H^2 - K_2$ называют (по аналогии с теорией поверхностей) эйлеровой разностью. От него зависит, какими будут главные кривизны 2-го рода. А именно: 1) если $H^2 - K_2 > 0$, то $k_1^{(2)}, k_2^{(2)}$ – вещественные различные числа; 2) если $H^2 - K_2 < 0$, то $k_1^{(2)}, k_2^{(2)}$ – комплексные числа; 3) $H^2 - K_2 = 0$, то $k_1^{(2)} = k_2^{(2)}$. Соответственно через точку M в случае 1) проходят две линии кривизны 2-го рода; в случае 2) через M не проходят действительные линии кривизны 2-го рода; в случае 3) через M проходит только одна линия кривизны 2-го рода. Линейный оператор A^* для неголономного распределения не симметричен, и потому его можно представить в виде $A^* = B^* + B$, где B^* – симметричный оператор, а B – кососимметричный оператор с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{A_2^1 - A_1^2}{2} \\ \frac{A_1^2 - A_2^1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\frac{A_2^1 - A_1^2}{2} = \rho$. Распределение Δ голономно тогда и только тогда, когда $\rho = 0$. Поэтому ρ называется *скаляром неголономности* [4, с. 63].

Собственные значения оператора B^ , взятые с противоположными знаками, являются главными кривизнами 1-го рода, а его собственные векторы определяют главные направления 1-го рода. Произведение главных кривизн 1-го рода называется полной кривизной 1-го рода. Кривая распределения, в каждой точке которой касательная направлена по одному из главных направлений 1-го рода, называется линией кривизны 1-го рода.*

Обозначим: $k_1^{(1)}, k_2^{(1)}$ – главные кривизны 1-го рода, K_1 – полная кривизна 1-го рода. Для них имеем

$$H = \frac{k_1^{(1)} + k_2^{(1)}}{2} = \frac{k_1^{(2)} + k_2^{(2)}}{2}; \quad K_1 = k_1^{(1)}k_2^{(1)}; \quad K_2 = K_1 + \frac{\rho^2}{4}. \quad (1.4)$$

Так как оператор B^* симметричен, то главные кривизны 1-го рода – вещественные числа. Если $k_1^{(1)} \neq k_2^{(1)}$, то в точке M существуют два ортогональных главных направления 1-го рода. Если же $k_1^{(1)} = k_2^{(1)}$, то в такой точке всякое направление будет главным направлением 1-го рода.

Элементы A_3^1, A_3^2 матрицы основного оператора A определяют вектор кривизны линии тока нормалей распределения Δ .

2. Основные инварианты линии неголономного распределения

Пусть $\vec{r} = \vec{r}(s)$ – кривая распределения Δ , параметризованная дугой. Введём обозначения:

$$\vec{I}_3 = \vec{e}_3, \quad \vec{I}_1 = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad \vec{I}_2 = [\vec{I}_3, \vec{I}_1].$$

Так как $\vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{I}_3$ – единичные взаимно ортогональные векторы, то

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{ds} &= \vec{I}_1, \\ \frac{d\vec{I}_1}{ds} &= k_g \vec{I}_2 + k_n \vec{I}_3, \\ \frac{d\vec{I}_2}{ds} &= -k_g \vec{I}_1 + \kappa_g \vec{I}_3, \\ \frac{d\vec{I}_3}{ds} &= -k_n \vec{I}_1 - \kappa_g \vec{I}_2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Величины k_n, k_g, κ_g – инварианты линии распределения. Они носят названия: k_n – нормальная кривизна кривой (проекция вектора кривизны кривой на нормаль распределения); k_g – геодезическая кривизна кривой распределения (проекция вектора кривизны кривой на плоскость π); κ_g – геодезическое кручение кривой распределения. Геометрическая характеристика геодезическому кручению будет дана ниже.

Теорема 1. *Только для линии кривизны 2-го рода в каждой её точке геодезическое кручение κ_g равно нулю.*

Доказательство. Как было отмечено выше, линия кривизны 2-го рода характеризуется тем, что вдоль неё нормали распределения образуют торс, то есть для неё $\left(\frac{d\vec{r}}{ds}, \vec{I}_3, \frac{d\vec{I}_3}{ds} \right) = 0$. Отсюда получаем $(\vec{I}_1, \vec{I}_3, -\kappa_g \vec{I}_2) = \kappa_g = 0$. ■

Найдём выражение кривизны и кручения для произвольной линии распределения через инварианты k_n, k_g, κ_g . Из (2.1) для вектора кривизны кривой имеем $k\vec{n} = k_g \vec{I}_2 + k_n \vec{I}_3$, где k – кривизна кривой. Отсюда следует

$$k = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}. \tag{2.2}$$

Вычислим кручение κ кривой распределения. Используя (2.1), находим

$$\kappa = \frac{1}{k_n^2 + k_g^2} \left(k_g \frac{dk_n}{ds} - k_n \frac{dk_g}{ds} \right) + \kappa_g. \quad (2.3)$$

Определение 1. *Линия распределения, для которой геодезическая кривизна равна нулю, называется геодезической прямой линией.*

Через каждую точку M в каждом направлении в плоскости π проходит одна и только одна геодезическая прямая линия распределения [5, с. 26]. Из формулы (2.3) следует: геодезическое кручение кривой распределения в точке M – это кручение геодезической прямой, имеющей с данной кривой в этой точке общую касательную.

Заметим также, что кривизна геодезической прямой линии совпадает с её нормальной кривизной (см. (2.2)), а кручение – равно её геодезическому кручению (см. (2.3)).

Определение 2. *Линия распределения, для которой в каждой её точке нормальная кривизна равна нулю, называется асимптотической линией [4, с. 62].*

Из (2.2) и (2.3) следует: в каждой точке асимптотической линии её кривизна совпадает с геодезической кривизной, а кручение – с геодезическим кручением.

3. Выражение нормальной кривизны и геодезического кручения кривой распределения через главные кривизны 1-го рода

Так как главные направления 1-го рода – это направления собственных векторов $\bar{\xi}(\xi^1, \xi^2, 0)$ симметричного оператора B^* , то они находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} (A_1^1 - \lambda)\xi^1 + \frac{A_2^1 + A_1^2}{2}\xi^2 &= 0, \\ \frac{A_2^1 + A_1^2}{2}\xi^1 + (A_2^2 - \lambda)\xi^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Направим векторы \bar{e}_1, \bar{e}_2 по главным направлениям 1-го рода. Тогда

$$\lambda_1 = A_1^1 = -k_1^{(1)}, \quad \lambda_2 = A_2^2 = -k_2^{(1)}, \quad A_2^1 = \frac{\rho}{2}, \quad A_1^2 = -\frac{\rho}{2}.$$

После этого формулы (1.2) примут вид

$$\begin{aligned} \omega_3^1 &= -k_1^{(1)}\omega^1 + \frac{\rho}{2}\omega^2 + a\omega^3, \\ \omega_3^2 &= -\frac{\rho}{2}\omega^1 - k_2^{(1)}\omega^2 + b\omega^3, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $a = A_3^1, b = A_3^2$; вектор $a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2$ – это вектор кривизны линии тока векторного поля нормалей распределения.

Итак, в точке M имеем канонический репер $(M; \bar{e}_i)$, отнесённый к линиям кривизны 1-го рода, и репер (M, \bar{I}_i) для произвольной линии $\bar{r} = \bar{r}(s)$ распределения.

Выразим векторы \bar{I}_i через \bar{e}_i . Пусть α – угол между \bar{I}_1 и \bar{e}_1 , тогда

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{e}_1 \cos \alpha + \bar{e}_2 \sin \alpha, \\ \bar{I}_2 &= -\bar{e}_1 \sin \alpha + \bar{e}_2 \cos \alpha, \\ \bar{I}_3 &= \bar{e}_3. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Кривая распределения Δ – это интегральная кривая уравнения Пфаффа $\omega^3 = 0$, поэтому для неё

$$d\bar{r} = \omega^1 \bar{e}_1 + \omega^2 \bar{e}_2. \quad (3.4)$$

Так как $d\bar{r} = \bar{I}_1 ds$, то

$$d\bar{r} = \bar{e}_1 \cos \alpha + \bar{e}_2 \sin \alpha. \quad (3.5)$$

И следовательно, $\omega^1 = \cos \alpha ds$, $\omega^2 = \sin \alpha ds$. Используя формулы (2.1), (1.1), (3.2), (3.3), получаем

$$k_n = k_1^{(1)} \cos^2 \alpha + k_2^{(1)} \sin^2 \alpha; \quad (3.6)$$

$$\kappa_g = \frac{\rho}{2} + \frac{1}{2} (k_2^{(1)} - k_1^{(1)}) \sin 2\alpha. \quad (3.7)$$

Исследуя k_n как функцию угла α на экстремум, приходим к следующему выводу:

Главные кривизны 1-го рода в точке M – это экстремальные значения нормальных кривизн распределения в этой точке. Направление касательной к кривой, имеющей в данной точке экстремальное значение нормальной кривизны, есть главное направление 1-го рода. Линия распределения, в каждой точке которой касательная направлена по главному направлению 1-го рода, является линией кривизны 1-го рода.

При $k_1^{(1)} \neq k_2^{(1)}$ через точку проходят точно две взаимно ортогональные линии кривизны 1-го рода. В выбранном нами каноническом репере линии кривизны 1-го рода определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \omega^1 \omega^2 &= 0, \\ \omega^3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

При $k_1^{(1)} = k_2^{(1)}$ из (3.6) следует $k_n = k_1^{(1)} = k_2^{(1)}$. В этом случае через точку M в каждом направлении плоскости π проходит линия кривизны 1-го рода, все эти линии имеют одинаковую нормальную кривизну.

Теорема 2. *Для линий кривизны 1-го рода и только для них геодезическое кручение равно половине скаляра неголономности.*

Доказательство. При $k_1^{(1)} \neq k_2^{(2)}$ для линий кривизны 1-го рода имеем $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. Тогда из формулы (3.7) для обеих линий кривизны 1-го рода получаем $\kappa_g = \frac{\rho}{2}$. Если же $k_1^{(1)} = k_2^{(1)}$, то также для каждой линии кривизны 1-го рода $\kappa_g = \frac{\rho}{2}$. ■

4. Экстремали геодезического кручения

Исследуем геодезическое кручение на экстремум. Из (3.7) получаем $\kappa'_g = (k_2^{(1)} - k_1^{(1)}) \cos(2\alpha)$. Возможны два случая: 1) $k_2^{(1)} \neq k_1^{(1)}$, 2) $k_2^{(1)} = k_1^{(1)}$.

Рассмотрим первый случай.

- 1) Пусть $k_2^{(1)} > k_1^{(1)}$. Тогда $\kappa'_g = 0$ при $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ и при $\alpha_2 = -\frac{\pi}{4}$. Находим производную 2-го порядка $\kappa''_g = -2(k_2^{(1)} - k_1^{(1)}) \sin(2\alpha)$. Отсюда видим, что $\kappa''_g\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$, $\kappa''_g\left(-\frac{\pi}{4}\right) > 0$. То есть при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ функция κ_g имеет максимум, а при $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ — минимум.

Итак, экстремальные значения геодезического кручения имеют кривые, касательные к которым делят пополам углы между линиями кривизны 1-го рода.

Минимальное и максимальное значения геодезического кручения следующие:

$$\kappa_{g \min} = \frac{\rho}{2} - \frac{1}{2}(k_2^{(1)} - k_1^{(1)}); \quad \kappa_{g \max} = \frac{\rho}{2} + (k_2^{(1)} - k_1^{(1)}). \quad (4.1)$$

Отсюда получаем

$$\kappa_{g \max} + \kappa_{g \min} = \rho; \quad (4.2)$$

$$\kappa_{g \max} \times \kappa_{g \min} = -(H^2 - K_2). \quad (4.3)$$

Из (4.2) и (4.3) следует: *сумма экстремальных значений геодезического кручения равна скаляру неголономности, а произведение — эйлеровой разности, взятой с противоположным знаком.*

- 2) Пусть в точке M $k_2^{(1)} = k_1^{(1)}$, тогда из (3.7) следует, что в этой точке геодезическое кручение для всех кривых распределения одинаково и равно половине скаляра неголономности.

Определение 3. *Линия распределения называется экстремалью геодезического кручения, если в каждой её точке геодезическое кручение равно одному из его экстремальных значений [5, с. 66; 4, с. 69].*

Из вышесказанного вытекает: *в неомбилической точке ($k_2^{(1)} \neq k_1^{(1)}$) экстремали геодезического кручения взаимно ортогональны и делят пополам углы между линиями кривизны 1-го рода.*

В выбранном нами каноническом репере уравнения экстремалей геодезического кручения имеют вид

$$\begin{aligned} (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 &= 0, \\ \omega^3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

При этом для кривых

$$\begin{aligned} \omega^1 - \omega^2 &= 0, \\ \omega^3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

геодезическое кручение κ_g имеет максимальное значение, а для кривых

$$\begin{aligned}\omega^1 + \omega^2 &= 0, \\ \omega^3 &= 0\end{aligned}\tag{4.6}$$

– минимальное значение.

Предложение 1. Если через точку M проходит только одна линия кривизны 2-го рода, то она будет одной из экстремалей геодезического кручения с нулевым геодезическим кручением. Геодезическое кручение второй экстремали будет равно скаляру неголономности.

Справедливость утверждения следует из формул (4.2) и (4.3). ■

Теорема 3. Существует единственное (с точностью до положения в пространстве) распределение Δ с постоянным скаляром неголономности и прямыми линиями тока нормалей, для которого через каждую точку M проходит одна и только одна линия кривизны 2-го рода.

Доказательство. Так как через точку M проходит лишь одна линия кривизны 2-го рода, то $H^2 - K_2 = 0$. Тогда из (4.3) следует $\kappa_{g \max} \cdot \kappa_{g \min} = 0$. Пусть $\kappa_{g \min} = 0$, тогда кривая (4.6) будет линией кривизны 2-го рода, совпадающей с одной из экстремалей геодезического кручения. Для второй экстремали геодезического кручения имеем $\kappa_{g \max} = \rho = \text{const}$. Из (4.1) получаем $k_2^{(1)} = \rho + k_1^{(1)}$. А так как $a = b = 0$, то формулы (3.2) принимают вид

$$\begin{aligned}\omega_3^1 &= -k_1^{(1)}\omega^1 + \frac{\rho}{2}\omega^2, \\ \omega_3^2 &= -\frac{\rho}{2}\omega^1 - (k_1^{(1)} + \rho)\omega^2.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Дифференцируем внешним образом (4.7) и затем применяем лемму Картана.

В результате получим $k_1^{(1)} = -\frac{\rho}{2}$, $k_2^{(1)} = \frac{\rho}{2}$, а

$$\omega_1^2 = 0, d(\omega^1 + \omega^2) = 0, \omega_3^1 = \frac{\rho}{2}(\omega^1 + \omega^2), \omega_3^2 = -\omega_3^1.\tag{4.8}$$

Так как $d(\omega^1 + \omega^2) = 0$, то можно положить

$$\omega^1 + \omega^2 = du.\tag{4.9}$$

Система уравнений

$$\begin{aligned}d\bar{r} &= \omega^1\bar{e}_1 + \omega^2\bar{e}_2 + \omega^3\bar{e}_3, \\ d\bar{e}_1 &= -\frac{\rho}{2}du\bar{e}_3, \\ d\bar{e}_2 &= \frac{\rho}{2}du\bar{e}_3, \\ d\bar{e}_3 &= \frac{\rho}{2}du\bar{e}_1 - \frac{\rho}{2}du\bar{e}_2\end{aligned}\tag{4.10}$$

становится вполне интегрируемой и при $\rho = \text{const}$ имеет единственное решение.

Проинтегрируем систему (4.10). Пусть $\omega^1 - \omega^2 = dv + t_1 du$, $\omega^3 = dw + t_2 du$. Ис-

пользуя формулы (4.8), (4.9) и (4.10), находим $t_1 = \rho w$, $t_2 = -\frac{\rho v}{2}$. И тогда

$$d\vec{r} = \frac{1}{2}[(\rho w + 1)du + dv]\vec{e}_1 + \frac{1}{2}[(1 - \rho w)du - dv]\vec{e}_2 + (dw - \frac{\rho v}{2}du)\vec{e}_3, \quad (4.11)$$

Из (4.10) и (4.11) получаем

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2}}\right) \vec{e}_1 + \sin\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2}}\right) \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \right], \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\cos\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2}}\right) \vec{e}_1 - \sin\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2}}\right) \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \right], \\ \vec{e}_3 &= \sin\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2}}\right) \vec{e}_1 - \cos\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2}}\right) \vec{e}_2, \\ \vec{r} &= \left[\sin\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2}}\right) w + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2}}\right) v \right] \vec{e}_1 + \\ &+ \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2}}\right) v - \cos\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2}}\right) w \right] \vec{e}_2 + \frac{u}{\sqrt{2}} \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Векторы $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ образуют постоянный ортонормированный базис. Координаты точки $M(x, y, z)$ относительно неподвижной декартовой системы координат с базисом $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ определяются формулами

$$\begin{aligned} x &= w \sin(\rho z) + \frac{v}{\sqrt{2}} \cos(\rho z), \\ y &= \frac{v}{\sqrt{2}} \sin(\rho z) - w \cos(\rho z), \\ z &= \frac{u}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Из (4.12) и (4.13) видим, что существует единственное векторное поле нормалей

$$\vec{e}_3 = \sin(\rho z) \vec{e}_1 - \cos(\rho z) \vec{e}_2$$

распределения, удовлетворяющего условиям теоремы. А следовательно, уравнение Пфаффа для такого распределения имеет вид

$$\sin(\rho z) dx - \cos(\rho z) dy = 0. \quad (4.14) \blacksquare$$

Уравнение вида (4.14) было получено при рассмотрении неголономных цилиндров 2-го рода в работе [6, с. 52]. Сопоставляя утверждение доказанной здесь теоремы и теоремы 6 работы [6], приходим к следующему выводу. *Если через каждую точку M гладкого двумерного распределения с постоянным скаляром неголономности и прямыми линиями тока нормалей проходит одна и только одна линия кривизны 2-го рода (она является одной из экстремалей геодезического кручения), то такое распределение является минимальным неголономным цилиндром 2-го рода с постоянным скаляром неголономности.*

5. Линейчатые поверхности, описываемые нормальными распределениями вдоль экстремалей геодезического кручения

Заметим, что экстремали геодезического кручения в каноническом репере, отнесённом к линиям кривизны 1-го рода, имеют уравнения

$$\begin{aligned} (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 &= 0, \\ \omega^3 &= 0. \end{aligned}$$

Предложение 2. В общем случае ($\kappa_{g \max} \neq \kappa_{g \min}$, $\kappa_{g \max} \neq 0$, $\kappa_{g \min} \neq 0$) линейчатые поверхности, описываемые нормальными распределения вдоль экстремалей геодезического кручения, являются косыми линейчатыми поверхностями.

Доказательство. Пусть L_1 – линейчатая поверхность, описываемая нормальными распределения вдоль экстремали геодезического кручения

$$\omega^1 = \omega^2, \omega^3 = 0. \quad (5.1)$$

Для неё $(d\vec{r}, \vec{e}_3, d\vec{e}_3) = 2\kappa_{g \max} \omega^2 \neq 0$. То есть линейчатая поверхность L_1 представляет собой косую линейчатую поверхность. Аналогично доказывается, что линейчатая поверхность L_2 , состоящая из нормалей распределения в точках второй экстремали геодезического кручения $\omega^1 + \omega^2 = 0$, $\omega^3 = 0$, является косой линейчатой поверхностью. ■

Найдём горловые линии линейчатых поверхностей L_1 и L_2 . Воспользуемся формулой

$$\vec{R} = \vec{r} - \frac{(d\vec{r}, d\vec{e}_3)}{(d\vec{e}_3, d\vec{e}_3)} \vec{e}_3,$$

а также формулами (3.2), (4.1) и уравнениями экстремалей геодезического кручения. В результате получим, что горловые линии линейчатых поверхностей L_1 и L_2 определяются соответственно уравнениями

$$\vec{R} = \vec{r} + \frac{H}{H^2 + \kappa_{g \max}^2} \vec{e}_3 \quad (5.2)$$

и

$$\vec{R} = \vec{r} + \frac{H}{H^2 + \kappa_{g \min}^2} \vec{e}_3. \quad (5.3)$$

Заметим, что при $H \neq 0$ горловые линии линейчатых поверхностей L_1 и L_2 не совпадают с экстремалами геодезического кручения.

Предложение 3. Горловые линии линейчатых поверхностей L_1 и L_2 совпадают с экстремалами геодезического кручения тогда и только тогда, когда эти экстремали совпадают с асимптотическими линиями.

Доказательство. Находим уравнения асимптотических линий. Для них $(d^2\vec{r}, \vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$. Отсюда, используя формулы (3.2), получаем

$$k_1^{(1)}(\omega^1)^2 + k_2^{(1)}(\omega^2)^2 = 0, \quad (5.4)$$

$$\omega^3 = 0.$$

Сравнивая уравнения (5.4) с уравнениями (4.4), определяющими экстремали геодезического кручения, заключаем, что они совпадают лишь при $H = 0$. Но в этом (и только в этом случае) горловые линии (5.2) и (5.3) линейчатых поверхностей L_1 и L_2 являются экстремалами геодезического кручения. ■

Предложение 4. Если средняя кривизна H неголономного распределения равна нулю, то асимптотические плоскости линейчатых поверхностей L_1 и L_2 ортогональны. При этом асимптотическая плоскость линейчатой поверхности L_1

совпадает с касательной плоскостью линейчатой поверхности L_2 в точке M и, наоборот, асимптотическая плоскость линейчатой поверхности L_2 совпадает с касательной плоскостью линейчатой поверхности L_1 в точке M .

Доказательство. Находим касательную плоскость к L_1 в произвольной точке прямой $\vec{R} = \vec{r} + t\vec{e}_3$. При $\omega^1 = \omega^2, \omega^3 = 0$ получаем

$$\left(\vec{R} - \vec{r}, \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + t \left(\left(\frac{\rho}{2} - k_1^{(1)} \right) \vec{e}_1 - \left(\frac{\rho}{2} + k_2^{(1)} \right) \vec{e}_2 \right) \right) = 0.$$

Это уравнение в координатах относительно канонического репера имеет вид

$$\left[1 - t \left(k_2^{(1)} + \frac{\rho}{2} \right) \right] x^1 - \left[1 + t \left(-k_1^{(1)} + \frac{\rho}{2} \right) \right] x^2 = 0. \quad (5.5)$$

В точке M ($t = 0$) касательной плоскостью к L_1 будет плоскость

$$x^1 - x^2 = 0. \quad (5.6)$$

При $t \neq 0$ имеем

$$\left[\frac{1}{t} - \left(k_2^{(1)} + \frac{\rho}{2} \right) \right] x^1 - \left[\frac{1}{t} + \left(\frac{\rho}{2} - k_1^{(1)} \right) \right] x^2 = 0. \quad (5.7)$$

Отсюда видим, что при $t \rightarrow \infty$ предельное положение плоскости (5.7) (то есть асимптотическая плоскость линейчатой поверхности L_1) есть плоскость

$$\left(k_2^{(1)} + \frac{\rho}{2} \right) x^1 + \left(\frac{\rho}{2} - k_1^{(1)} \right) x^2 = 0. \quad (5.8)$$

Касательная плоскость к L_2 в точке M – это плоскость

$$x^1 + x^2 = 0. \quad (5.9)$$

А асимптотическая плоскость для L_2 – это плоскость

$$\left(\frac{\rho}{2} - k_2^{(1)} \right) x^1 - \left(\frac{\rho}{2} + k_1^{(1)} \right) x^2 = 0. \quad (5.10)$$

Из уравнений (5.6), (5.8), (5.9) и (5.10) легко видеть, что касательная плоскость поверхности L_1 в точке M совпадает с асимптотической плоскостью поверхности L_2 , а касательная плоскость поверхности L_2 в точке M совпадает с асимптотической плоскостью поверхности L_1 тогда и только тогда, когда $H = \frac{k_1^{(1)} + k_2^{(1)}}{2} = 0$.

При этом асимптотические плоскости линейчатых поверхностей L_1 и L_2 ортогональны. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
3. Синцов Д.М. Работы по неголономной геометрии. Киев: Вища школа, 1972.
4. Слухаев В.В. Геометрия векторных полей. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982.
5. Аминов Ю.А. Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990.

6. *Онищук Н.М., Цоколова О.В.* Минимальные неголономные торсы 2-го рода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 3(7). С. 42–55.

Статья поступила 10.03.2013 г.

Onishchuk N.M. EXTREMAL CURVES OF GEODESIC TORSION ON A NONHOLONOMIC DISTRIBUTION. Nonholonomic 2-dimensional smooth distributions in the 3-dimensional Euclidean space are considered. Main attention is paid to studying geodesic torsion of invariant curves of the distribution.

Keywords: nonholonomic geometry, distribution of planes, Pfaffian equation, vector field.

ONISHUK Nadezhda Maksimovna (Tomsk State University)

E-mail: onichuk.nadezhda@yandex.ru

УДК 512.541

А.В. Царев

***T*-КОЛЬЦА И ФАКТОРНО ДЕЛИМЫЕ ГРУППЫ РАНГА 1¹**

Показано, что классы факторно делимых групп ранга 1 и бесконечных *T*-колец совпадают.

Ключевые слова: *E*-кольцо, *T*-кольцо, факторно делимая группа.

В теории абелевых групп без кручения важную роль играют так называемые *E*-кольца (ассоциативные кольца с единицей, канонически изоморфные кольцам эндоморфизмов своих аддитивных групп). В 1977 году Р. Боушел и Ф. Шульц рассмотрели и описали *E*-кольца специального вида, которые они назвали *T*-кольцами. При изучении самомалых групп конечного ранга А.А. Фомин и У. Уиклесс в 1998 году обобщили понятие факторно делимой группы на класс смешанных групп. Полное описание факторно делимых групп ранга 1 было получено О.И. Давыдовой в 2007 году. Замечено, что класс бесконечных *T*-колец и класс факторно делимых групп ранга 1 совпадают. Доказательству данного факта и посвящена данная заметка.

Под «группой» в работе подразумевается абелева группа, записанная аддитивно, под «кольцом» – ассоциативное кольцо (не обязательно с единицей); \mathbf{Z} , \mathbf{Q} и \mathbf{J}_p – обозначения колец целых, рациональных и целых p -адических чисел соответственно или их аддитивных групп, \mathbf{Z}_m – кольцо классов вычетов по модулю m , P – множество всех простых чисел, \mathbf{N} – множество натуральных чисел. Если S – подмножество K -модуля M , то через $\langle S \rangle$ и $\langle S \rangle_K$ будем обозначать соответственно подгруппу и подмодуль, порожденные множеством S , а через $\langle S \rangle^*$ – сервантную оболочку множества S , состоящую из всех таких $r \in M$, что $nr \in \langle S \rangle$ при некотором натуральном n . Заметим, что $\langle S \rangle^*$ содержит все элементы из M , имеющие конечные порядки. Элементы a_1, a_2, \dots, a_n группы A будем называть линейно независимыми (над \mathbf{Z}), если равенство $m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n = 0$ влечет $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 0$. Бесконечное множество называется линейно независимым, если линейно независимо любое его конечное подмножество. Рангом группы A называется мощность максимального линейно независимого подмножества в A (обозначается $r(A)$). p -рангом группы A называется размерность \mathbf{Z}_p -пространства A/pA (обозначается $r_p(A)$). Рангом (p -рангом) кольца или модуля будем называть ранг (p -ранг) его аддитивной группы. Через $t(A)$ и $t_p(A)$ будем обозначать соответственно периодическую и p -примарную часть группы A . Кольцо и группу эндоморфизмов группы A будем обозначать $E(A)$ и $\text{End } A$ соответственно. Если K – кольцо, то через K^+ будем обозначать его аддитивную группу. Групповая терминология, применяемая к кольцам, относится к их аддитивным группам.

Другие используемые в работе понятия и обозначения можно найти в [1].

¹ Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы. Государственный контракт №14.В37.21.0363.

1. E-кольца и T-кольца

Определение 1.1. Кольцо K называется *E-кольцом*, если $\text{End } K^+ = \text{End}_K K^+$. Аддитивные группы *E*-колец называются *E-группами*.

Рассмотрим некоторые свойства *E*-колец:

а) K является *E-кольцом* тогда и только тогда, когда всякий эндоморфизм φ аддитивной группы кольца K совпадает с умножением справа кольца K на элемент $\varphi(1)$.

Действительно, если K – *E-кольцо* и $\varphi \in \text{End } K^+$, то $\varphi(r) = \varphi(r \cdot 1) = r\varphi(1)$. Обратно, если $\varphi(r) = r\varphi(1)$, то $\varphi(rs) = (rs)\varphi(1) = r(s\varphi(1)) = r\varphi(s)$.

б) *E-кольцо* K -коммутативно.

Пусть $x \in K$ и L_x – эндоморфизм левого умножения на x ($L_x(y) = xy$), а R_x – эндоморфизм правого умножения на x ($R_x(y) = yx$). Из п. а) следует, что $L_x = R_{L_x(1)} = R_x$. Это влечет $xy = L_x(y) = R_x(y) = yx$.

Предложение 1.1 [2]. Следующие утверждения равносильны:

1. K – *E-кольцо*;
2. Если $\varphi \in E(K^+)$ и $\varphi(1) = 0$, то $\varphi = 0$;
3. Кольцо $E(K^+)$ коммутативно.

Р. Боушел и Ф. Шульц в [3] ввели близкое к *E*-кольцам понятие *T*-кольца.

Определение 1.2. Кольцо K называется *T-кольцом*, если умножение $t: K \otimes K \rightarrow K$, где $t(a \otimes b) = ab$, является изоморфизмом.

Теорема 1.2 [3]. Следующие утверждения равносильны:

1. K – *T-кольцо*;
2. Отображение $d: K \rightarrow K \otimes K$, действующее по закону $d(a) = 1 \otimes a$, является изоморфизмом, обратным к t ;
3. K – *E-кольцо* и $K \otimes K = K \otimes_K K$;
4. $a \otimes b = b \otimes a$ для любых $a, b \in K$.

Теорема 1.3 [3]. Следующие утверждения равносильны:

1. K – *T-кольцо*;
2. $K/t(K)$ изоморфно подкольцу поля \mathbf{Q} , и если $t_p(K) \neq 0$, то $t_p(K)$ – циклическая группа и $K/t(K)$ делится на p .

Примерами *T*-колец служат подкольца (с единицей) поля \mathbf{Q} и кольца классов вычетов. Кольцо целых p -адических чисел \mathbf{J}_p является *E-кольцом*, но не является *T-кольцом* (так как $r(\mathbf{J}_p) > 1$).

Пусть K – *T-кольцо*, тогда, учитывая п. 2 теоремы 1.3 и изоморфизм

$$K/pK \cong [K/\bigoplus_{q \neq p} t_q(K)]/[pK/\bigoplus_{q \neq p} t_q(K)],$$

получаем, что $r_p(K) \leq 1$ для любого простого p .

Лемма 1.4. Пусть A – редуцированная группа, все p -ранги которой конечны, тогда ее первая ульмовская подгруппа – нулевая.

Доказательство. Рассмотрим первую ульмовскую подгруппу A^1 группы A , $A^1 = \bigcap_{m \in \mathbf{N}} mA$, и построим ее нулевой ульмовский фактор $A_0 = A/A^1$. Так как все p -ранги группы A конечны, то и все p -ранги группы A_0 конечны. Следовательно, $t_p(A_0)$ – конечная группа для всякого простого p . Пусть p^n – верхняя грань порядков элементов группы $t_p(A_0)$. Элемент $a \in A^1$ имеет бесконечную p -высоту в группе A , следовательно, уравнение $p^{n+1}y = a$ имеет решение $y = y_0$ в группе A . Тогда $p^{n+1}(y_0 + A^1) = a + A^1 = 0$ и $y_0 + A^1 \in t_p(A_0)$, а значит, $p^n y_0 \in A^1$. Таким образом, уравнение $px = a$ имеет решение $x = p^n y_0$ в группе A^1 , т.е. A^1 – p -делимая группа. В силу произвольности выбора простого числа p получаем, что A^1 – делимая группа, т.е. $A^1 = 0$.

Пусть $\chi = (m_p)$ – произвольная характеристика (т.е. последовательность целых неотрицательных чисел и символов ∞ , занумерованная простыми индексами). Рассмотрим кольцо $\mathbf{Z}_\chi = \prod_{p \in P} K_p$, где $K_p = \mathbf{Z}_p^{m_p}$ – кольцо классов вычетов по модулю p^{m_p} при $m_p < \infty$ и $K_p = \mathbf{J}_p$ – кольцо целых p -адических чисел при $m_p = \infty$.

Следствие 1.5. *Всякое редуцированное T -кольцо плотно и сервантно вкладывается в некоторое кольцо \mathbf{Z}_χ .*

Доказательство. Так как все p -ранги T -кольца K не превосходят 1, то его \mathbf{Z} -адическое пополнение K^\wedge изоморфно некоторому кольцу \mathbf{Z}_χ . Тогда, учитывая лемму 1.4, получаем, что кольцо K плотно и сервантно вкладывается в кольцо $K^\wedge \cong \mathbf{Z}_\chi$.

2. Факторно делимые группы ранга 1

При работе с аддитивными группами колец важную роль играют факторно делимые группы. В случае групп без кручения факторно делимые группы были введены Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом [4] еще в 1961 году. Более общее определение (затрагивающее и смешанные группы) было дано А.А. Фоминым и У. Уиклессом в [5].

Определение 2.1. Группа A называется *факторно делимой*, если она не содержит периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что A/F – периодическая делимая группа.

Базисом факторно делимой группы A будем называть всякий базис свободной группы F .

Факторно делимым группам ранга 1 посвящена статья О.И. Давыдовой [6]. Рассмотрим некоторые основные результаты этой работы.

Определение 2.2. Для элемента a из группы A и простого числа p определим m_p как наименьшее целое неотрицательное число, такое, что элемент $p^{m_p}a$ делится на любую степень p в группе A . Если такого числа не существует, полагаем $m_p = \infty$. Характеристика $(m_{p_1}, m_{p_2}, \dots, m_{p_n}, \dots)$ называется *кохарактеристикой* элемента a в группе A и обозначается $\text{cochar}(a)$.

Предложение 2.1 [6]. *Если x – базисный элемент факторно делимой группы A ранга 1, то $\text{cochar}(x) \geq \text{cochar}(a)$ для любого $a \in A$. В частности, кохарактеристики двух различных базисных элементов в группе A совпадают.*

Определение 2.3. *Кохарактеристикой факторно делимой группы A ранга 1 называется кохарактеристика любого ее базисного элемента (обозначается $\text{cochar}(A)$).*

Рассмотрим кольцо $\mathbf{Z}_\chi = \prod_{p \in P} K_p$. Если тип $[\chi]$ отличен от нулевого, то определим кольцо $R^\chi = \langle 1 \rangle_* \subset \mathbf{Z}_\chi$. Если $[\chi] = 0$, то определим кольцо $R^\chi = \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Z}_\chi$.

Теорема 2.2 [6]. *Если A – факторно делимая группа ранга 1 кохарактеристики χ , то A изоморфна аддитивной группе кольца R^χ , а ее кольцо эндоморфизмов $E(A)$ изоморфно кольцу R^χ .*

Теорема 2.3. *Всякое кольцо R^χ является T -кольцом. Любое бесконечное T -кольцо изоморфно некоторому кольцу R^χ .*

Доказательство. Справедливость первого утверждения вытекает из теоремы 1.3 и построения колец R^χ .

Пусть K – произвольное бесконечное T -кольцо и пусть $K^\wedge \cong \mathbf{Z}_\chi$. Нетрудно видеть, что если K^+ не является редуцированной группой, то $K \cong \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Z}_m = R^\chi$ (см, например, [2]). Поэтому далее будем считать, что K^+ – редуцированная группа, т.е. K – подкольцо кольца \mathbf{Z}_χ . Рассмотрим факторгруппу $K^+/\langle 1 \rangle$, которая в силу

теоремы 1.3 является периодической. Покажем, что $K^+/\langle 1 \rangle$ – делимая группа. Возьмем элемент $a = (\alpha_p) \in K^+$, где $\alpha_p \in K_p$. Для каждого простого числа $q \neq p$ элемент α_p делится на q . Если $0 \leq m_p < \infty$, то $\alpha_p = a_0 + a_1p + \dots + a_{m_p-1}p^{m_p-1}$, и тогда $\alpha_p - a_01_p$ делится на p , где 1_p – единица кольца $\mathbf{Z}_p^{m_p}$. Аналогично, если $m_p = \infty$, то $\alpha_p = a_0 + a_1p + \dots + a_p p^s + \dots \in \mathbf{J}_p$ и тогда $\alpha_p - a_01_p$ делится на p , где 1_p – единица кольца \mathbf{J}_p . В обоих случаях получаем, что $a = pb + a_01$, причем, поскольку K^+ – плотная сервантная подгруппа в \mathbf{Z}_χ , то $b \in K$. Следовательно, $a + \langle 1 \rangle$ делится на любое простое число p в группе K^+ , то есть $K^+/\langle 1 \rangle$ – делимая группа.

Так как $K \subset \prod_{p \in P} K_p$, то K не содержит делимых периодических подгрупп. Следовательно, K^+ является факторно делимой группой ранга 1. Кроме того, очевидно, что $\text{cochar}(K^+) = \text{cochar}(1) = \chi$. Тогда из теоремы 2.2 вытекает, что $K \cong R^\chi$.

Отметим в заключение, что конечные *T*-кольца – это в точности кольца классов вычетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. М.: Мир, 1974, 1977.
2. Schultz P. The endomorphism ring of the additive group of a ring // J. Austral. Math. Soc. 1973. V. 15. P. 60–69.
3. Bowshell R.A., Schultz P. Unital rings whose additive endomorphisms commute // Math. Ann. 1977. V. 228. No. 3. P. 197–214.
4. Beaumont R., Pierce R. Torsion free rings // Ill. J. Math. 1961. V. 5. P. 61–98.
5. Fomin A.A., Wickless W. Quotient divisible abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. P. 45–52.
6. Давыдова О.И. Факторно делимые абелевы группы ранга 1 // Фунд. и прикл. матем. 2007. Т. 13. № 3. С. 25–33.

Статья поступила 14.05.2013 г.

Tsarev A.V. *T*-RINGS AND QUOTIENT DIVISIBLE GROUPS OF RANK 1. We prove that the class of quotient divisible groups of rank 1 coincides with the class of infinite *T*-rings.

Key words: *E*-ring, *T*-ring, quotient divisible group.

TSAREV Andrey Valer'evich (Moscow State Pedagogical University)

E-mail: an-tsarev@yandex.ru

УДК 512.541

А.Р. Чехлов, Мл.В. Агафонцева

ОБ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ КВАДРАТАМИ КОММУТАТОРОВ ЭНДОМОРФИЗМОВ¹

Описаны делимые группы, вполне разложимые, векторные и сепарабельные группы без кручения, квадраты коммутаторов эндоморфизмов которых центральны в кольце эндоморфизмов этих групп.

Ключевые слова: *кольцо эндоморфизмов, коммутатор эндоморфизмов, E-коммутант.*

Все группы в статье предполагаются абелевыми. Пусть A – группа. Тогда $E(A)$ обозначает кольцо ее эндоморфизмов, $r(A)$ – ранг, A_p – ее p -компоненту, а $t(A)$ – периодическую часть. Если A – однородная группа без кручения, то $t(A)$ – ее тип. Если $f: A \rightarrow B$ – гомоморфизм, то $f|_H$ – ограничение f на $H \subseteq A$. Если B, G – группы и X – непустое подмножество B , то через $\text{Hom}(B, G)X$ обозначим подгруппу в G , порожденную всеми подмножествами fX , где $f \in \text{Hom}(B, G)$. Через 1_A обозначим тождественный автоморфизм группы A , \mathbf{Z} – аддитивную группу целых чисел, \mathbf{Q} – аддитивную группу всех рациональных чисел. Z_p^∞ – квазициклическую p -группу.

Напомним, что если R – кольцо и $a, b \in R$, то элемент $[a, b] = ab - ba$ называется *коммутатором* элементов a и b .

Статья посвящена изучению абелевых групп, кольца эндоморфизмов которых удовлетворяют тождеству $[[x, y]^2, z] = 0$. Обозначим класс таких групп через ZBL_2 . Исследованию тождеств в алгебре посвящена обширная литература, см., напр., [1–7]. Не претендуя на полноту, отметим также статьи [8–17]. В [8] помимо прочего доказано, что некоммутативная алгебра с делением, удовлетворяющая тождеству $[[x, y]^2, z] = 0$, четырехмерна над своим центром.

В [18, 19] изучался класс BL_2 групп A , таких, что $[\alpha, \beta]^2 = 0$ для любых $\alpha, \beta \in E(A)$; а в [20] изучались E -нильпотентные группы степени ≤ 2 – такие группы A , кольца эндоморфизмов которых удовлетворяют тождеству $[[x, y], z] = 0$. Как это следует из [19, лемма 1], группы из класса BL_2 не содержат прямых слагаемых вида $B \oplus C$, где $B \cong C$, а у E -нильпотентных групп кольца эндоморфизмов нормальны [20, предложение 1.2]. Поэтому класс ZBL_2 -групп шире классов BL_2 -групп и E -нильпотентных групп степени ≤ 2 (см. далее теоремы 5, 7, 8). В [21–29] изучались группы из класса BL_n для произвольного натурального n и другие (E -разрешимые, E -энгелевы, проективно разрешимые) близкие классы групп. В [30] исследовались центрально инвариантные подгруппы (т.е. подгруппы, инвариантные относительно центра группы) и коммутаторно инвариантные

¹ Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, № 14. В 37.21.0354 и частично в рамках темы 2.3684.2011 Томского государственного университета.

подгруппы (т.е. такие подгруппы H группы A , что $[\alpha, \beta]H \subseteq H$ для любых $\alpha, \beta \in E(A)$). В [31–34] изучались проективно инвариантные подгруппы, т.е. такие подгруппы H группы A , что $\pi H \subseteq H$ для любой проекции π группы A . Вопросы продолжения автоморфизмов подмодулей изучались в [35]. Близкие классы групп исследовались в [36, 37].

Подгруппу $A' = \langle [\varphi, \psi]A \mid \varphi, \psi \in E(A) \rangle$ назовем *E-коммутантом* группы A . Ясно, что кольцо $E(A)$ коммутативно в точности тогда, когда $A' = 0$. Некоторые свойства и описание E-коммутанта ряда классов групп получены в [18 – 29].

Прямые слагаемые групп из класса ZBL_2 также принадлежат этому классу. Поэтому в следующих трех леммах приводятся общие свойства прямых слагаемых групп из класса ZBL_2 .

Лемма 1. Пусть $A = B \oplus C$, где $B, C \neq 0$. Тогда если $A \in ZBL_2$, то $B, C \in ZBL_2$, $[\varphi, \psi](\text{Hom}(B, C)B) = 0$, $\alpha(B') = 0$ и $[\mu, \nu](\text{Hom}(C, B)C) = 0$, $\lambda(C') = 0$ для любых $\varphi, \psi \in E(C)$, $\alpha \in \text{Hom}(B, C)$ и $\mu, \nu \in E(B)$, $\lambda \in \text{Hom}(C, B)$.

Доказательство. Пусть $\pi: A \rightarrow B$, $\theta: A \rightarrow C$ – проекции, $\varphi, \psi \in E(C)$, $\lambda \in \text{Hom}(C, B)$, а $\gamma \in \text{Hom}(B, C)$.

Продолжим φ, ψ до эндоморфизмов группы A , полагая $\varphi|_B = \gamma$, $\psi|_B = 0$. Тогда для $b \in B$ имеем

$$[\varphi, \psi]b = \varphi\psi b - \psi\varphi b = -\psi\varphi b = -\psi\gamma b \text{ и } [\varphi, \psi]^2 b = -([\varphi, \psi]\psi\gamma)b.$$

Оставив действие φ прежним, а действие ψ на B определив как действие тождественного автоморфизма, получим

$$[\varphi, \psi]b = \varphi\psi b - \psi\varphi b = \gamma b - \psi\gamma b \text{ и } [\varphi, \psi]^2 b = ([\varphi, \psi]\gamma)b - ([\varphi, \psi]\psi\gamma)b.$$

Откуда ввиду того, что $[[\varphi, \psi]^2, \pi]b = [\varphi, \psi]^2 b$, приравняв к 0 полученные выше выражения для квадратов коммутаторов, имеем $([\varphi, \psi]\psi\gamma)b = 0$ и $([\varphi, \psi]\gamma)b - ([\varphi, \psi]\psi\gamma)b = 0$. Следовательно, $([\varphi, \psi]\gamma)b = 0$ и, значит, $[\varphi, \psi](\text{Hom}(B, C)B) = 0$ в силу произвольности $\gamma \in \text{Hom}(B, C)$ и $b \in B$.

Определим $\bar{\varphi}, \bar{\psi} \in E(A)$, полагая $\bar{\varphi}|_C = \varphi + \lambda$, $\bar{\varphi}|_B = 1_B$, $\bar{\psi}|_C = \psi$, $\bar{\psi}|_B = 0$. Тогда для $c \in C$ имеем $[\bar{\varphi}, \bar{\psi}]c = (\bar{\varphi}\bar{\psi})c - (\bar{\psi}\bar{\varphi})c = [\varphi, \psi]c + (\lambda\psi)c$. Так как $[\bar{\varphi}, \bar{\psi}]|_B = 0$, то $[\bar{\varphi}, \bar{\psi}]^2 c = [\varphi, \psi]^2 c + (\lambda\psi[\varphi, \psi])c$. Далее $[\pi, [\bar{\varphi}, \bar{\psi}]^2]c = (\pi[\varphi, \psi]^2)c = (\lambda\psi[\varphi, \psi])c = 0$. Определим теперь $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ следующим образом: $\bar{\varphi}|_C = \varphi + \lambda$, $\bar{\varphi}|_B = 0$, $\bar{\psi}|_C = \psi$, $\bar{\psi}|_B = 1_B$. Тогда

$$\begin{aligned} [\bar{\varphi}, \bar{\psi}]c &= (\bar{\varphi}\bar{\psi})c - (\bar{\psi}\bar{\varphi})c = (\varphi\psi)c + (\lambda\psi)c - \bar{\psi}(\varphi c + \lambda c) = \\ &= (\varphi\psi)c + (\lambda\psi)c - (\psi\varphi)c - \lambda c = [\varphi, \psi]c + (\lambda\psi)c - \lambda c. \end{aligned}$$

А так как и здесь $[\bar{\varphi}, \bar{\psi}]|_B = 0$, то

$$[\bar{\varphi}, \bar{\psi}]^2 c = [\varphi, \psi]^2 c + (\lambda\psi[\varphi, \psi])c - (\lambda[\varphi, \psi])c$$

и $[\pi, [\bar{\varphi}, \bar{\psi}]^2]c = (\lambda\psi[\varphi, \psi])c - (\lambda[\varphi, \psi])c = 0$,

откуда из доказанного выше равенства $(\lambda\psi[\varphi, \psi])c = 0$ получаем $(\lambda[\varphi, \psi])c = 0$. Следовательно, $\lambda(C') = 0$. Ввиду симметричности прямых слагаемых B и C лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $A = B \oplus C \oplus N$. Тогда если $A \in ZBL_2$, то $\beta(\text{Hom}(B, C)B) = 0$ для каждого $\beta \in \text{Hom}(C, N)$.

Доказательство. Пусть $\gamma \in \text{Hom}(B, C)$. Определим $f \in E(A)$ следующим образом: $f|B = \gamma, f|C = \beta$ и $f|N = 0$. Если теперь $b \in B$, а $\pi: A \rightarrow C$ – проекция, то

$$[\pi, f]b = (\pi f)b - (f\pi)b = \gamma b, [\pi, f]^2 b = ([\pi, f]\gamma)b = (\pi f\gamma)b - (f\pi\gamma)b = -\beta\gamma b.$$

Имеем $[[\pi, f]^2, \pi]b = -(\pi[\pi, f]^2)b = \beta\gamma b = 0$. Откуда следует, что $\beta(\text{Hom}(B, C)B) = 0$.

Лемма 3. Пусть $A = B \oplus C$, где $\text{Hom}(B, C) \neq 0$ и каждый ненулевой гомоморфизм из $\text{Hom}(B, C)$ является мономорфизмом, а B, C – такие группы, что их ненулевые эндоморфизмы также являются мономорфизмами. Тогда если $A \in \text{ZBL}_2$, то кольца $E(B)$ и $E(C)$ коммутативны.

Доказательство. Согласно лемме 1, $\alpha(B') = 0$ для каждого $0 \neq \alpha \in \text{Hom}(B, C)$, а поскольку все такие α являются мономорфизмами, то $B' = 0$, т.е. кольцо $E(B)$ коммутативно. Далее, по той же лемме $\text{Hom}(B, C)B \subseteq \ker[\varphi, \psi]$ для всех $\varphi, \psi \in E(C)$. А так как по условию $\text{Hom}(B, C)B \neq 0$, то $[\varphi, \psi] = 0$. Это означает коммутативность $E(C)$.

Лемма 4. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ ($A = \prod_{i \in I} A_i$), где подгруппы A_i вполне характеристичны в A . Тогда $A \in \text{ZBL}_2$ в том и только в том случае, когда все $A_i \in \text{ZBL}_2$.

Доказательство. Очевидно.

Теорема 5. Пусть D – ненулевая делимая группа. Тогда $D \in \text{ZBL}_2$ в том и только в том случае, когда выполняется одно из следующих условий:

- 1) $D \cong \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q}$ или $D \cong \mathbf{Q}$;
- 2) $D \cong \mathbf{Q} \oplus \left(\bigoplus_{p \in \Pi} Z_{p^\infty} \right)$, где Π – некоторое непустое множество простых чисел;
- 3) $D \cong \bigoplus_{p \in \Pi} \left(\bigoplus_{m_p} Z_{p^\infty} \right)$, где Π – некоторое непустое множество простых чисел, а

$m_p = 1$ или $m_p = 2$ для каждого $p \in \Pi$.

Доказательство. Делимая группа без кручения имеет вид $\bigoplus_m \mathbf{Q}$, где m – неко-

торое кардинальное число. Поэтому необходимость п. 1) следует из леммы 2. Для $D \cong \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q}$ кольцо $E(D)$ изоморфно кольцу матриц $M(2, \mathbf{Q})$ над полем \mathbf{Q} . Такое кольцо удовлетворяет условию $[[x, y]^2, z] = 0$, что доказывает п. 1) теоремы.

Если периодическая часть $t(D)$ группы D отлична от 0, то $D = D_0 \oplus t(D)$, где (если $D_0 \neq 0$) $D_0 \cong \bigoplus_m \mathbf{Q}$ для некоторого кардинального числа m . $\text{Hom}(\mathbf{Q}, Z_{p^\infty}) \neq 0$

для каждого простого числа p . Поэтому если $D \in \text{ZBL}_2$ и $D_0 \neq 0$, то из леммы 2 следует, что $D_0 \cong \mathbf{Q}$, а $D_p \cong Z_{p^\infty}$ для каждого простого p с условием $D_p \neq 0$.

Далее, подгруппа $t(D)$ вполне инвариантна в D и для группы D , указанной в п. 2), кольца $E(D_0)$ и $E(t(D))$ коммутативны. Для такой группы D квадрат коммутатора любых ее эндоморфизмов равен 0, поэтому такая группа D принадлежит классу ZBL_2 .

Каждая ненулевая p -компонента D_p делимой группы D изоморфна группе $\bigoplus_{m_p} Z_{p^\infty}$ для некоторого кардинального числа m_p . Из леммы 2 следует, что $m_p = 1$

или $m_p = 2$. Если группа D периодична, то $D = \bigoplus_{p \in \Pi} D_p$ для некоторого множества

Π простых чисел, каждая подгруппа D_p вполне инвариантна в D , если $m_p = 1$, то кольцо $E(D_p)$ коммутативно, если же $m_p = 2$, то $D_p \cong Z_{p^\infty} \oplus Z_{p^\infty}$ и кольцо $E(D_p)$

изоморфно кольцу матриц $M(2, \hat{Z}_p)$, где \hat{Z}_p – кольцо целых p -адических чисел

[38, § 43, пример 3], такое кольцо удовлетворяет тождеству $[[x, y]^2, z] = 0$, что доказывает п. 3) теоремы.

Теорема 6. Если $0 \neq D$ – делимая часть группы A , $A = B \oplus D$ и $0 \neq B$ – группа без кручения, то $A \in \text{ZBL}_2$ в том и только в том случае, когда $E(B)$, $E(D)$ – коммутативные кольца.

Доказательство. Необходимость. Имеем $\text{Hom}(B, D) \neq 0$ и $\text{Hom}(Q, Z_{p^\infty}) \neq 0$ для каждого простого числа p . Поэтому из леммы 2 следует, что $D \cong Q$ или D – периодическая группа, каждая ненулевая p -компонента которой изоморфна группе Z_{p^∞} , кольцо эндоморфизмов $E(D)$ такой группы D коммутативно. Так как для каждого $0 \neq b \in B$ существует гомоморфизм $\varphi: B \rightarrow D$ со свойством $\varphi b \neq 0$, то из леммы 1 следует, что $B' = 0$, т.е. кольцо $E(B)$ коммутативно. Достаточность вытекает из того, что прямое слагаемое D вполне инвариантно в A и так как кольца $E(B)$ и $E(D)$ коммутативны, то квадрат любого коммутатора эндоморфизмов группы A равен 0.

Теорема 7. Пусть A – вполне разложимая группа без кручения, не являющаяся делимой, $A = B \oplus D$, где D – делимая часть группы A . Тогда $A \in \text{ZBL}_2$ в том и только в том случае, когда:

1) если $D \neq 0$, то $D \cong Q$, а B – прямая сумма групп ранга 1 с попарно несравнимыми типами;

2) если $D = 0$, то $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где типы прямых слагаемых ранга 1 групп A_i и A_j не сравнимы при $i \neq j$, причем либо $r(A_i) = 1$, либо $A_i = B_i \oplus C_i$, где $r(B_i) = 1$, а группа C_i изоморфна группе B_i или является прямой суммой групп ранга 1 с попарно несравнимыми типами, каждый из которых больше, чем тип $t(B_i)$.

Доказательство. Необходимость следует из леммы 2, поскольку для прямого слагаемого $N_1 \oplus N_2 \oplus N_3$ группы A , где $r(N_i) = 1$, невозможно условие $t(N_1) \leq t(N_2) \leq t(N_3)$. Достаточность в п. 1) следует из того, что D – вполне инвариантная подгруппа в A , а $E(B)$, $E(D)$ – коммутативные кольца. В п. 2) $A \in \text{ZBL}_2$ как прямая сумма вполне инвариантных подгрупп из ZBL_2 .

Теорема 8. Пусть A – сепарабельная (векторная) группа без кручения, $A = B \oplus D$, где D – делимая часть группы A . Тогда $A \in \text{ZBL}_2$ в том и только в том случае, когда:

1) если $D \neq 0$, то $D \cong Q$, а B – прямая сумма (прямое произведение) групп ранга 1 с попарно несравнимыми типами;

2) если $D = 0$, то $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ ($A = \prod_{i \in I} A_i$), типы прямых слагаемых ранга 1 групп A_i и A_j не сравнимы при различных i и j , причем либо $r(A_i) = 1$, либо $A_i = B_i \oplus C_i$, $r(B_i) = 1$, а группа C_i изоморфна группе B_i или является сепарабельной (векторной) группой, типы прямых слагаемых ранга 1 которой попарно не сравнимы и каждый из них больше, чем тип $t(B_i)$.

Доказательство. Если $\Omega(A)$ – множество типов всех прямых слагаемых ранга 1 сепарабельной группы A , то $\Omega(A)$ можно разбить на классы эквивалентности $\Omega(A) = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, где типы $s, t \in \Omega(A)$ считаются эквивалентными, если существуют $t_1, \dots, t_n \in \Omega(A)$, такие, что типы t_i и t_{i+1} сравнимы для всех $i = 0, \dots, n$ (здесь $t_0 = s, t_{n+1} = t$). В этом случае $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, $\Omega(A_i) = \Omega_i$ и подгруппы A_i вполне инвариантны в A , т.е. типы из $\Omega(A_i)$ и $\Omega(A_j)$ не сравнимы при $i \neq j$ [39, § 19, упр. 7].

Из этого, в частности, следует, что сепарабельные группы без кручения типа прямых слагаемых ранга 1 которых попарно несравнимы, являются вполне разложимыми группами. Для векторных групп можно использовать лемму: если η – ненулевой гомоморфизм векторной группы $V = \prod_{i \in I} R_i$ в векторную группу $W = \prod_{j \in J} S_j$ (R_i и S_j – группы ранга 1), то $t(R_i) \leq t(S_j)$ для некоторых $i \in I$ и $j \in J$ [38, лемма 96.1]. С учетом этих фактов оставшиеся утверждения доказываются аналогично теореме 7. В [40] исследовались слабо транзитивные Е-энгелевы группы без кручения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адян С.И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
2. Бахтурин Ю.А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.
3. Кострикин А.И. Вокруг Бернсайда. М.: Наука, 1986.
4. Бахтурин Ю.А., Ольшанский А.Ю. Тождества // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фунд. направления. Т. 18. М.: ВИНТИ АН СССР. 1987. С. 117–240.
5. Размыслов Ю.П. Тождества алгебр и их представлений. М.: Наука, 1989.
6. Rowen L.H. Polynomial Identities in Ring Theory. New York: Acad. Press, 1980.
7. Drensky V. Free Algebras and PI-Algebras. Springer, 2000.
8. Hall M. Projective planes // Trans. Amer. Math. Soc. 1943. V. 54. P. 229–277.
9. Kaplansky I. Rings with polynomial identity // Bull. Amer. Math. Soc. 1948. V. 54. P. 575–580.
10. Мальцев А.И. Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями // Мат. сб. 1950. Т. 26. С. 19–23.
11. Ширинов А.И. О кольцах с тождественными соотношениями // Мат. сб. 1957. Т. 43. № 2. С. 277–283.
12. Ольшанский А.Ю. О проблеме конечного базиса тождеств в группах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. № 2. С. 376–384.
13. Braun A. The nilpotency of the radical in a finitely generated PI-rings // J. Algebra. 1984. V. 89. P. 375–396.
14. Шеврин Л.Н., Волков М.В. Тождества полугрупп // Изв. вузов. Математика. 1985. № 11. С. 3–47.
15. Белов А.Я. Ассоциативных PI-алгебр, совпадающих со своим коммутантом, не существует // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44. № 6. С. 1239–1254.
16. Бейдар К.И., Михалев А.В., Чеботарь М.А. Функциональные тождества в кольцах и их приложения // УМН. 2004. Т. 59. № 3. С. 3–30.
17. Адян С.И. Проблема Бернсайда и связанные с ней вопросы // УМН. 2010. Т. 65. № 5. С. 5–60.
18. Чехлов А.Р. Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. 2009. Т. 48. № 4. С. 520–539.
19. Чехлов А.Р. О скобке Ли эндоморфизмов абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 78–84.
20. Чехлов А.Р. Е-нильпотентные и Е-разрешимые абелевы группы класса 2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 1(9). С. 59–71.
21. Чехлов А.Р. Некоторые примеры Е-разрешимых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 3(11). С. 69–76.
22. Чехлов А.Р. Е-разрешимые модули // Фундамент. и прикл. матем. 2010. Т. 16. № 7. С. 221–236.
23. Чехлов А.Р. О скобке Ли эндоморфизмов абелевых групп, 2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 1(13). С. 55–60.
24. Чехлов А.Р. Е-энгелевы абелевы группы ступени 2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 1(17). С. 54–60.

25. Чехлов А.Р. О некоторых классах нильгрупп // Матем. заметки. 2012. Т. 91. № 2. С. 297–304.
26. Чехлов А.Р. Об абелевых группах, близких к E-разрешимым // Фундамент. и прикл. матем. 2011/2012. Т. 17. № 8. С. 183–219.
27. Чехлов А.Р. О проективном коммутанте абелевых групп // Сиб. матем. журн. 2012. Т. 53. № 2. С. 451–464.
28. Чехлов А.Р. Об абелевых группах с нильпотентными коммутаторами эндоморфизмов // Изв. вузов. Математика. 2012. № 10. С. 60–73.
29. Чехлов А.Р. О проективно разрешимых абелевых группах // Сиб. матем. журн. 2012. Т. 53. № 5. С. 1157–1165.
30. Чехлов А.Р. О свойствах центрально и коммутаторно инвариантных подгрупп абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 85–99.
31. Чехлов А.Р. Свойства подгрупп абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2008. № 1(2). С. 76–82.
32. Чехлов А.Р. О подгруппах абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Фундамент. и прикл. матем. 2008. Т. 14. № 6. С. 211–218.
33. Чехлов А.Р. О проективно инвариантных подгруппах абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 1(5). С. 31–36.
34. Чехлов А.Р. Сепарабельные и векторные группы, проективно инвариантные подгруппы которых вполне инвариантны // Сиб. матем. журн. 2009. Т. 50. № 4. С. 942–953.
35. Туганбаев А.А. Автоморфизмы подмодулей и их продолжения // Дискр матем. 2013. Т. 25. № 1. С. 144–151.
36. Чехлов А.Р. Об одном классе эндотранзитивных групп // 2001. Матем. заметки. Т. 69. № 6. С. 944–949.
37. Danchev P.V. Weakly \aleph_1 -separable quasi-complete abelian p -groups are bounded // 2009. Владикавк. матем. журн. Т. 11. № 3. С. 8–9.
38. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1; 1977. Т. 2.
39. Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2007.
40. Чехлов А.Р. Слабо транзитивные E-энгелевы абелевы группы без кручения // Матем. заметки. 2013. Т. 94. № 4. С. 616–623.

Статья поступила 15.04.2013 г.

Chekhlov A.R., Agafontseva M.I.V. ON ABELIAN GROUPS WITH CENTRAL SQUARES OF COMMUTATORS OF ENDOMORPHISMS. We describe divisible, completely decomposable, vector, and separable torsion free groups for which the squares of commutators of their endomorphisms are central in endomorphism rings of these groups.

Keywords: endomorphism ring, commutator of endomorphisms, E-commutant.

CHEKHOV Andrey Rostislavovich (Tomsk State University)

E-mail: cheklov@math.tsu.ru

AGAFONTSEVA Mladena Vladimirovna (Tomsk State University)

E-mail: mladenka@mail.ru

МЕХАНИКА

УДК 531.554

В.И. Биматов, Н.В. Савкина

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-РАСЧЕТНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОСТРОГО КОНУСА

Рассмотрены приемы оценивания нелинейных аэродинамических характеристик острого конуса с использованием траекторных данных тел, свободно летящих в атмосферной среде. Для построения алгоритма расчета проведен анализ задачи как обратной для дифференциальных уравнений. Приведены результаты оценивания аэродинамических характеристик острого конуса при числах Маха $M = 2$.

Ключевые слова: траектория движения, аэродинамические характеристики, летательный аппарат.

Точность определения аэродинамических характеристик (АДХ) наиболее существенна при проектировании и разработке современных высокоточных летательных аппаратов (ЛА). Достичь высокой точности определения АДХ летательных аппаратов невозможно в рамках традиционных в аэродинамике ЛА методов, учитывающих только главные линейные составляющие аэродинамических сил и моментов, действующих на ЛА при их движении в атмосфере. Развитие численных методов дало существенный толчок в достижении высоких точностей расчета.

В определенном (узком) смысле целью решения аэродинамической задачи является получение зависимостей коэффициентов аэродинамических сил и моментов от формы ЛА и условий его обтекания потоком газа. Решение этой задачи осуществляется экспериментальными и теоретическими методами. Экспериментальные методы, в свою очередь, разделяются на исследования в аэродинамических трубах и на аэробаллистических установках [1].

За десятилетия накоплен большой опыт исследования АДХ по данным аэробаллистических испытаний, однако лишь к 80-м – 90-м годам для решения этой задачи стали применять методы теории построения нелинейных моделей [2–5]. Совсем неудовлетворительно обстоит дело с привлечением методов решения обратных задач, широко используемых в ядерной физике, тепломассообмене [6, 7]. Для задач оценивания АДХ летательных аппаратов, как будет показано ниже, такой подход является единственно возможным.

Стремительное развитие вычислительной техники в последнее десятилетие позволяет эффективно реализовать методы решения обратных задач и внедрять их в практику экспериментальных исследований. Одной из проблем динамики летательных аппаратов является эффективное оценивание аэродинамических характе-

ристик с учетом того, что их зависимость от параметров движения носит существенно нелинейный, а подчас и неоднозначный характер [8]. Создание надежных методик их расчета представляет интерес как в плане развития нестационарной сверхзвуковой аэродинамики, так и для решения ряда практических задач управления движением исследуемых тел.

Известные прямые методы измерения аэродинамических сил и моментов, реализуемые в аэродинамических трубах, сложны в реализации требуемых параметров подобия и требуют обоснования применимости принципа обращенного движения. Метод баллистических трасс реализует косвенный способ определения АДХ, заключающийся в решении обратной задачи для дифференциальных уравнений по результатам измерений кинематических параметров траектории на лабораторной баллистической установке. При этом надо учитывать, что решения уравнений движения не могут быть получены аналитически, а в распоряжении исследователя могут иметься только численные решения.

В настоящей работе анализируются численные подходы к реализации обратной задачи траекторной баллистики.

1. Постановка задачи

Будем использовать в дальнейшем неформальный подход к решению задачи оценивания АДХ, поэтому нас будет интересовать конкретный вид уравнений движения и форма представления составляющих аэродинамических сил и моментов.

Система уравнений, описывающая изменение параметров движения осесимметричного твердого тела по баллистической трассе с учетом особенностей баллистического эксперимента имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta \cos \Psi, \quad x(0) = x_0, \\ \frac{dy}{dt} &= V \sin \theta, \quad y(0) = y_0, \\ \frac{dz}{dt} &= -V \cos \theta \sin \Psi, \quad z(0) = z_0; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -K_1 V^2 C_X - g \sin \theta, \quad V(0) = V_0, \\ \frac{d\theta}{dt} &= K_1 V C_Y - g \cos \theta, \quad \theta(0) = \theta_0, \\ \frac{d\Psi}{dt} &= K_1 V C_Z / \cos \theta, \quad \Psi(0) = \Psi_0; \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_{Z1}}{dt} &= K_2 m_{Z1}, \quad \omega_{Z1}(0) = \omega_{Z10}, \\ \frac{d\omega_{Y1}}{dt} &= K_2 m_{Y1}, \quad \omega_{Y1}(0) = \omega_{Y10}; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_{Z1}, \quad \vartheta(0) = \vartheta_0, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega_{Y1}}{\cos \theta}, \quad \psi(0) = \psi_0; \quad (4)$$

$$\sin \vartheta = \sin \theta \cos \alpha \cos \beta + \cos \theta \sin \alpha,$$

$$\sin \psi = \sin \Psi \cos \beta + \cos \Psi \sin \beta \cos \theta. \quad (5)$$

Здесь $K_1 = \rho S / 2m, K_2 = \rho S l / 2J_{z1}$. Обозначения приведены в конце текста.

Аэродинамические коэффициенты $C_X, C_Y, C_Z, m_{Z1}, m_{Y1}$ будем считать функциями углов α, β, δ , угловых скоростей $\bar{\omega}_{Z1}, \bar{\omega}_{Y1}$, числа Маха M . Зависимостью от числа Рейнольдса на баллистических трассах небольшой протяженности можно пренебречь. Полиномиальное представление аэродинамических коэффициентов запишем в виде

$$C_X = C_{X0}(M) + C_{X2}(M)\delta^2 + C_{X4}(M)\delta^4 + \dots \quad (6)$$

$$C_Y = C_{Y1}(M)\alpha + C_{Y3}(M)\alpha^3 + \dots \quad (7)$$

$$C_Z = C_{Z1}(M)\beta + C_{Z3}(M)\beta^3 + \dots \quad (8)$$

$$m_Z = m_{Z1}(M)\alpha + m_{Z3}(M)\alpha^3 + m_Z^{\bar{\omega}}\bar{\omega}_Z; \quad (9)$$

$$m_Y = m_{Y1}(M)\beta + m_{Y3}(M)\beta^3 + m_Y^{\bar{\omega}}\bar{\omega}_Y. \quad (10)$$

Коэффициенты разложений (6) – (10) будем считать линейными функциями числа Маха, что вполне допустимо на баллистических трассах небольшой протяженности для начальных значений числа Маха $M_0 \geq 1,5$:

$$C_{X0}(M) = C_{X0}(M_0) + C_{X0}^M(M_0 - M). \quad (11)$$

2. Алгоритм расчета аэродинамических коэффициентов

Прежде чем приступить к обсуждению технологии расчета параметров $C_{Xi}^J, C_{Yi}^J, m_{Zi}^J$, сформулируем общий подход, учитывающий специфику задачи.

В векторной форме система уравнений (1) – (5) имеет вид

$$\dot{\bar{p}}(t) = \bar{f}(\bar{p}, \bar{c}, t), \quad \bar{p}(0) = \bar{p}_0, t \in [0, t_k]. \quad (12)$$

Здесь $\bar{p}(t) = \{x(t), Y(t), z(t), V(t), \theta(t), \Psi(t), \omega_Y(t), \omega_Z(t), \vartheta(t), \psi(t)\}$ – вектор решений системы (1) – (5), $\bar{c} = \{C_{X0}, C_{X0}^M, \dots, m_Z^{\bar{\omega}}, x_0, \dots, \psi_0\}$ – вектор неизвестных параметров (коэффициентов разложений АДХ и начальных условий). Исходной информацией для оценки неизвестных коэффициентов вектора \bar{c} является система измеренных в опыте дискретных значений кинематических параметров движения тела. При таких посылках математическая постановка задачи определения АДХ представляет собой задачу оценивания вектора \bar{c} коэффициентов их полиномиальных разложений по известным из эксперимента значениям параметров движения $\bar{p}(t)$ и является примером классической обратной задачи для дифференциальных уравнений [6].

Наиболее употребительные методы решения обратных задач по своей природе являются вариационными. Для задач вида (12) в качестве решения принимают вектор \bar{c} , доставляющий минимум одному из функционалов:

$$\rho(\bar{p}, \bar{f}(\bar{p}, \bar{c}, t)) = \min_{\bar{c}} \left\| \bar{p}(x) - \bar{f}(\bar{p}, \bar{c}, t) \right\|; \quad (13)$$

$$\rho(\bar{p}, \bar{g}(\bar{p}, \bar{c}, t)) = \min_{\bar{c}} \left\| \bar{p}(x) - (\bar{p}(\bar{x}_0) + \int_{\bar{x}_0}^x \bar{f}(\bar{p}, \bar{c}, t) dx) \right\|; \quad (14)$$

$$\rho(\bar{p}_H, \bar{p}_P) = \min_{\bar{c}, \bar{p}_0} \left\| \bar{p}_H(t) - \bar{p}_P(t) \right\|, \quad (15)$$

где \bar{p}_H – совокупность экспериментальных (измеренных) данных о векторе $\bar{p}(t)$, \bar{p}_P – рассчитанные значения параметров движения.

Основной задачей теперь является проблема выбора метрики фазового пространства уравнений (12) и численного алгоритма минимизации функционалов (13) – (15). Специфической особенностью экспериментов на баллистических установках является относительно малый объем измерительной информации о параметрах движения тела и практически отсутствие в связи с этим достоверных сведений о законе распределения ошибок измерений, что заставляет использовать достаточно простые метрики. Случайные ошибки измерений, определяемые совокупностью многих факторов, в соответствии с центральной предельной теоремой, можно считать подчиняющимися нормальному закону распределений [8]. Применение метода максимального правдоподобия к отысканию параметров \bar{c} в этих условиях приводит к вычислительной схеме метода наименьших квадратов. Вычислительные алгоритмы решения задачи будем строить для функционала (15).

Предлагаемая методика расчета аэродинамических характеристик основана на использовании системы дифференциальных уравнений пространственного или плоского движения твердого тела. Для поиска минимума функционала (15) используется вещественный генетический алгоритм [9, 10], позволяющий находить глобальный экстремум для мультимодальных функций. Этот метод сочетает в себе естественный отбор среди строчных структур с упорядоченным (хотя в чем-то и случайным) обменом информацией. Будучи вероятностным, генетический алгоритм тем не менее не является просто еще одним вариантом случайного поиска, поскольку при отборе новых точек с ожидаемыми более хорошими возможностями он эффективно использует предыдущую информацию. Для решения задач оптимизации в данной работе предлагается вещественный генетический алгоритм (ВГА), совмещающий в себе детерминистический и вероятностный подходы и основанный на механизмах природной селекции и генетики. Важной особенностью генетических алгоритмов является их робастность: они сходятся к глобальному оптимуму (что очень важно для задач, у которых целевая функция имеет несколько локальных экстремумов) и в отличие от классических градиентных методов оптимизации при их реализации не требуется сильных ограничений на гладкость целевой функции, и они позволяют находить оптимум даже для случая, когда целевая функция является разрывной. Данный алгоритм носит итерационный характер и имеет дело с обработкой популяций индивидуумов (или наборов испытаний), каждый из которых представляет потенциальное решение задачи и является вектором в пространстве поиска. Важным свойством генетического алгоритма является также его сравнительно легкая адаптация к параллельным компьютерам,

дающая возможность эффективного использования современных вычислительных ресурсов.

Остановимся более подробно на трех «генетических операторах» – селекции, скрещивании и мутации.

Селекция. В данной работе использовалась так называемая турнирная селекция. При этом последовательно берутся два соседних элемента текущей популяции (первый и второй, третий и четвертый и т.д.) и лучший из них помещается в промежуточную популяцию P' . После первого прохода (пока сформирована только половина промежуточной популяции) исходная популяция случайным образом перемешивается, и описанный процесс повторяется еще один раз. Здесь лучшие или худшие индивидуумы рассматриваются в смысле их упорядочивания согласно соответствующим значениям целевой функции.

Скрещивание. Наиболее простым является одноточечное скрещивание – каждая выбранная таким образом пара строк скрещивается следующим образом: случайным образом выбирается положение точки сечения (целое число k в промежутке от 1 и $l-1$, где l – длина строки). Затем, путем обмена всеми элементами между позициями $k+1$ и l включительно, рождаются две новые строки. Пусть $A = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ и $A' = (y'_1, y'_2, y'_3, y'_4)$ являются родителями, выбранными в процессе селекции. Тогда (считая, что случайно выбранная точка сечения находится после первого гена), они производят двух детей $B = (y_1, y'_2, y'_3, y'_4)$ и $B' = (y'_1, y_2, y_3, y_4)$. После этого дети замещают родителей в промежуточной популяции P' .

Мутация. Использовалась неоднородная мутация, определенная Михалеви-чем. Если ген y_i подвергается мутации, то его новое измененное значение y'_i выбирается внутри интервала $[\text{Min}_i, \text{Max}_i]$ следующим образом:

$$y'_i = y_i + s(M_i - y_i) \left(1 - \frac{g}{G}\right)^b,$$

где s – случайное число из интервала $[0, 1]$, g – номер поколения, G – максимальное число итераций, b – параметр уточнения, M_i случайным образом выбирается из множества $\{\text{Min}_i, \text{Max}_i\}$, где Min_i и Max_i – нижняя и верхняя границы возможного изменения значения переменной y_i . Такая адаптивная мутация позволяла соблюдать в процессе реализации ГА (эволюции) необходимый баланс между двумя разномасштабными изменениями (мутациями) генов, так как на первоначальных шагах алгоритма в основном преобладали крупномасштабные изменения (обеспечивающие широкую область поиска), в то время как на заключительном этапе (за счет уменьшения масштаба мутаций) происходило уточнение решения.

3. Целевая функция

Оценивание искомым параметров будем проводить, минимизируя целевую функцию (функционал) – взвешенную сумму квадратов отклонений измеренных значений кинематических параметров от вычисленных по принятой модели:

$$F(\bar{c}) = \sum_{i=1}^N (\bar{X}_{изм} - \bar{X}_{ip}) \bar{W} (\bar{X}_{изм} - \bar{X}_{ip}) + \xi \sum_{j=1}^{N1} (\bar{p})^2, \quad (16)$$

$\bar{X}_{ip} = \{X_{pi}, Y_{pi}, Z_{pi}, \Theta_{pi}, \Psi_{pi}\}$ – вектор рассчитанных значений параметров траектории, $\bar{X}_{изм} = \{X_{изм}, Y_{изм}, Z_{изм}, \Theta_{изм}, \Psi_{изм}\}$ – вектор измеренных в опыте значений параметров траектории, \bar{W} – диагональная матрица весов измерений с элемента-

ми вида $1/\sigma_{\bar{X}_i}^2$, где $\sigma_{\bar{X}_i}^2$ – среднеквадратические погрешности измерений, ξ – параметр регуляризации.

Поставленная задача оптимизации (минимизации функционала со случайными ошибками в исходных данных) является стохастической. Если в детерминированных задачах отыскания локального экстремума стохастические методы имеет смысл применять тогда, когда задача имеет очень большую размерность, то в задачах отыскания глобального экстремума стохастические методы не имеют альтернатив. Подходы поиска решения задачи, реализуемые у авторов [2,4,5], основаны на анализе локальных свойств изучаемой функции и приводят к нахождению лишь локального экстремума. Для отыскания глобального экстремума нужны принципиально другие методы – стохастические.

Минимизацию функционала (16) будем осуществлять методом прямого поиска с использованием вышеизложенного генетического алгоритма.

Статические характеристики и погрешности оценивания параметров АДХ будем исследовать методом имитационного моделирования, то есть проведем анализ динамического процесса с помощью статистических испытаний по следующему алгоритму. Проводим серию расчетов с различными значениями измеряемых параметров, лежащими в интервале $[\bar{X}_{\text{изм}} - \bar{\sigma}_{\text{изм}}, \bar{X}_{\text{изм}} + \bar{\sigma}_{\text{изм}}]$. Из полученной выборки значений коэффициентов АДХ определяем средние значения и выборочную дисперсию. По критерию Фишера находим доверительные интервалы оценки коэффициентов АДХ.

4. Оценка значимости параметров разложения аэродинамических характеристик и адекватности модели

Исходное число параметров разложений АДХ – компонент вектора \bar{c} – выбирается на основании априорных сведений об объекте и, может быть, из интуитивных соображений. Для проверки гипотезы о значимости рассчитанных параметров необходимо оценить доверительный интервал для рассматриваемого параметра и сопоставить его величину со значением параметра: если доверительный интервал включает нулевое значение параметра, параметр следует признать незначимым.

Наиболее общим приемом оценки доверительных интервалов для искомых параметров нелинейной модели является метод стохастического моделирования, для реализации которого применим технологию генетических алгоритмов.

Строго говоря, в случае нелинейных аэродинамических характеристик адекватность их описания не может быть установлена однозначно только на основе анализа траекторных данных без привлечения априорных физических сведений. Объясняется это тем, что, выбирая модель, исследователи, как правило, контролируют ее пригодность лишь по отклонению расчетной траектории от измеренных координат по тем или иным критериям [2, 4, 5]. Но поскольку параметры траектории являются функционалами от правых частей уравнений движения, вполне очевидно, что условиям выбранного критерия может удовлетворять множество параметров правых частей.

По этим причинам мы пришли к необходимости включить в функционал качества (16) дополнительное слагаемое – стабилизирующий функционал, – характеризующий гладкость параметров траектории.

5. Результаты оценивания аэродинамических характеристик

Изложенные в предыдущих пунктах приемы были применены при обработке траекторных данных, полученных на баллистической установке ФТИ РАН [11].

С учетом точности юстировки оптических систем, погрешности измерения времени, линейных координат и углов оцениваются величинами $\sigma_t = 0,6$ мкс, $\sigma_x = 0,4$ мм, $\sigma_y = 0,26$ мм, $\sigma_\theta = 0,3^\circ$.

Располагая этими оценками, авторы обработали траекторные данные острого конуса с углом при вершине $2\theta_K = 30^\circ$ с диаметром основания 30 мм, массой ≈ 45 г, квадратом поперечного радиуса инерции около 185 мм^2 , движущегося с начальной скоростью около 680 м/с ($M=2$). Эксперименты проводились в воздухе при нормальных условиях. Максимальное значение угла тангажа достигало 40° .

Аэродинамические характеристики были представлены в виде

$$\begin{aligned} C_X &= C_{X0} + C_{X2}\delta^2 + C_{X6}\delta^6, \\ C_Y &= C_{Y1}\alpha + C_{Y5}\alpha^5, \\ m_Z &= m_{Z1}\alpha + m_{Z3}\alpha^3 + m_{Z\bar{\omega}}\bar{\omega}_Z. \end{aligned}$$

Учитывая особенности баллистической трассы ФТИ РАН, в системе (1) – (4) оставим только уравнения плоского движения острого конуса, а уравнения (5) представим в виде $\alpha = \theta - \theta$.

На рис. 1 приведены зависимости коэффициента аэродинамического момента и оценки относительной погрешности, найденные по методике ФТИ РАН (кривая 1) и по методике данной работы (кривая 2) для групп из трех и четырех опытов. При обработке трех опытов ($\alpha > 28^\circ$) наблюдается слабая нелинейность статического момента по углу атаки. Относительная погрешность зависимости $C_m(\alpha)$ меняется слабо, оставаясь ниже 3%. «Завал» моментной характеристики проявляется лишь в четвертом эксперименте при $\alpha > 30^\circ$. Оценка погрешностей с использованием дисперсионных матриц (1) и методом ГА (2) дали близкие результаты.

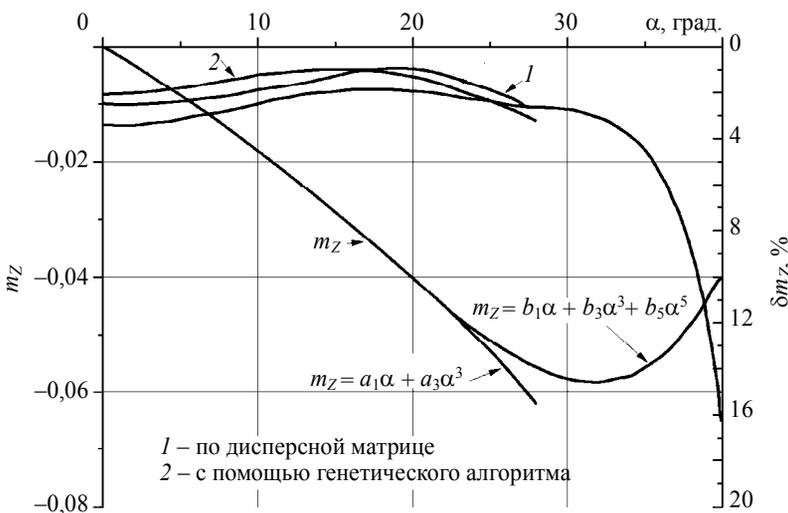


Рис. 1. Статический аэродинамический момент острого конуса

На рис. 2 даны зависимости коэффициента подъемной силы в трех и четырех опытах. Поскольку при $\alpha < 20^\circ$ подъемная сила линейна, для описания ее «завала» при $\alpha > 30^\circ$ более приемлемой оказалась пятая степень угла атаки по сравнению с третьей (она дала меньшие погрешности). Здесь, так же как и для момента, отмечается существенное возрастание погрешности к концу интервала α .

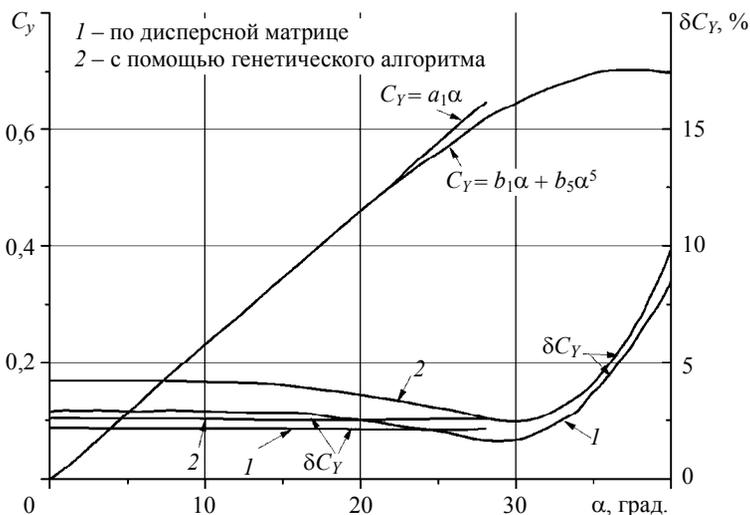


Рис. 2. Зависимость коэффициента подъемной силы

На рис. 3 показаны зависимости коэффициента сопротивления, также соответствующие двум группам опытов. Как и в случае подъемной силы, более удачной оказалась модель с «пропущенной» (четвертой) степенью угла атаки. Коэффициент сопротивления найден с наилучшей точностью и типичное для конца интервала возрастание погрешности здесь не выглядит катастрофическим (около 3 %).

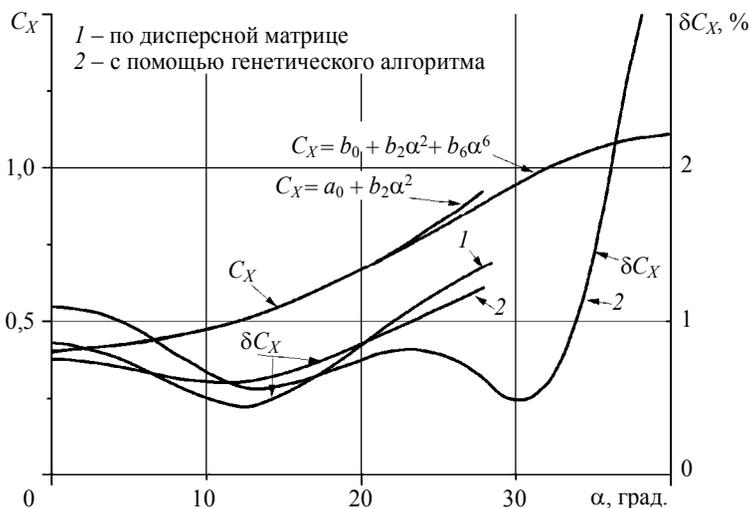


Рис. 3. Зависимость коэффициента сопротивления

Колебательный характер доверительного интервала наглядно иллюстрирует влияние корреляции найденных параметров разложения C_X .

Полученные оценки определения АДХ и их погрешности позволяют сделать вывод о высокой эффективности разработанного алгоритма расчета параметров нелинейной обратной задачи динамики.

Список основных обозначений в уравнениях движения

x, y, z – оси лабораторной системы координат,
 C_X, C_Y, C_Z – коэффициенты лобового сопротивления, подъемной и боковой силы,
 m_Z, m_Y – коэффициенты момента тангажа и рыскания,
 g – ускорение силы тяжести,
 ρ – плотность воздуха,
 m, l – масса и длина тела,
 S – площадь миделя тела,
 M – число Маха,
 t – время,
 V – модуль вектора скорости тела,
 θ, Ψ – угол наклона траектории и курсовой угол,
 Θ, ψ – угол тангажа и рыскания,
 α, β – угол атаки и скольжения.
 δ – пространственный угол атаки: $\cos \delta = \cos \alpha \cos \beta$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баллистические* установки и их применение в экспериментальных исследованиях / Н.А. Златин, А.П. Красильщиков, Г.И. Мишин, Н.Н. Попов; под ред. Н.А. Златина и Г.И. Мишина. М.: Наука, 1974. 344 с.
2. *Chapman G.T., Kirk D.B.* A Method for extracting aerodynamic coefficients from free-flight data // AIAA J. 1970. 8(4). P. 753–758.
3. *Биматов В.И.* Определение аэродинамических характеристик тел сложных форм по данным аэробаллистических испытаний // Материалы II Всесоюзной конференции по методам аэрофизических исследований. Ч. 2. Новосибирск, 1979. С. 179–181.
4. *Менде Н.П.* Об одном методе определения нелинейных аэродинамических сил и моментов // Физико-газодинамические баллистические исследования / под ред. Г.И. Мишина. Л.: Наука, 1980. С. 200–224.
5. *Костров А.В.* Движение асимметричных баллистических аппаратов. М.: Машиностроение, 1984. 272 с.
6. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
7. *Алифанов О.М.* Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1979.
8. *Рао С.Р.* Линейные статистические методы и их применение. М.: Наука, 1968.
9. *Казаков В.Ю., Пейгин С.В., Тимченко С.В.* Оптимизация траектории входа в атмосферу земли по интегральному тепловому потоку // ПМТФ. 2000. Т. 41. № 4. С. 112–121.
10. *Биматов В.И., Тимченко С.В.* Применение генетических алгоритмов к решению задач оптимизации в гиперзвуковой аэродинамике // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: материалы конф. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. С. 209–210.

11. Басаргин И.В., Дементьев И.М., Мишин Г.И. Полигон для аэродинамических исследований // Аэрофизические исследования сверхзвуковых течений / под ред. Ю.А. Дунаева. М.-Л.: Наука, 1967. С. 168–178.

Статья поступила 13.03.2013 г.

Bimatov V. I., Savkina N. V. EXPERIMENTAL AND COMPUTATIONAL METHOD OF DETERMINING NONLINEAR AERODYNAMIC CHARACTERISTICS OF A SHARP CONE. Nonlinear aerodynamic characteristics of a sharp cone are estimated using trajectory data for bodies freely flying in the atmospheric environment. To construct a calculation algorithm, the problem is analyzed as an inverse problem for differential equations. Results of the estimation of aerodynamic characteristics of a sharp cone at Mach numbers $M = 2$ are presented.

Keywords: motion trajectory, aerodynamic characteristics, airborne vehicle

BIMATOV Vladimir Ismagilovich (Tomsk State University)

E-mail: vbimatov@mail.ru

SAVKINA Nadezhda Valer'evna (Tomsk State University)

E-mail: pantera@ftf.tsu.ru

УДК 539.3

В.В. Каракулов, И.Ю. Смолин, В.А. Скрипняк**ЧИСЛЕННАЯ МЕТОДИКА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ
МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СТОХАСТИЧЕСКИХ КОМПОЗИТОВ
ПРИ УДАРНО-ВОЛНОВОМ НАГРУЖЕНИИ
С УЧЁТОМ ЭВОЛЮЦИИ СТРУКТУРЫ**

Разработана методика численного исследования механического поведения и прогнозирования эффективных механических свойств стохастических композиционных материалов в условиях высокоскоростного деформирования при ударно-волновом нагружении с учётом эволюции структуры композитов. По результатам моделирования механического поведения металлокерамического композита с алюминиевой матрицей и упрочняющими включениями из карбида бора при нагружении плоскими ударными волнами определены эффективные значения механических параметров материала.

Ключевые слова: *композиционные материалы, структура, эффективные свойства, ударно-волновое нагружение, численное моделирование.*

При моделировании высокоскоростной деформации элементов конструкций из композиционных материалов в условиях интенсивных динамических воздействий композиты часто рассматривают как однородные или квазиоднородные. Вместе с тем эти материалы представляют собой комплекс компонентов с различными физико-механическими свойствами. Компоненты, объединённые между собой по отчётливо выраженным внутренним контактными поверхностям (границам между компонентами), образуют структуру композитов. Структура и её эволюция в процессе высокоскоростной деформации может оказывать существенное влияние на механическое поведение и свойства композиционных материалов.

Механические свойства стохастических металлокерамических композитов изучались в условиях высокоскоростного деформирования в экспериментах с применением методики мерного стержня Гопкинсона [1 – 3] и при нагружении плоскими ударными волнами [1, 2, 4]. Результаты исследований показали, что механическое поведение металлокерамических композиционных материалов при динамических воздействиях качественно отличается от поведения их компонентов – керамики и металла матрицы. Результаты анализа структуры экспериментальных образцов после динамического нагружения свидетельствовали о том, что специфика механического поведения металлокерамических композитов обусловлена влиянием эволюции их структуры при высокоскоростном деформировании. Однако степень и характер этого влияния в настоящее время до конца не изучены, поэтому остается актуальной проблема исследования механического поведения и прогнозирования механических свойств стохастических композиционных материалов в условиях интенсивных динамических воздействий.

В связи с этим целью настоящей работы – создание методики численного моделирования механического поведения и прогнозирования эффективных механических свойств стохастических композиционных материалов в условиях высокоскоростного деформирования при ударно-волновом нагружении с учётом эволюции структуры композитов.

Моделирование механического поведения стохастического композиционного материала в условиях ударно-волнового нагружения. Способ определения эффективных параметров механического состояния

В работе моделировалось нагружение плоской ударной волной пластины из стохастического композиционного материала, состоящего из матрицы и упрочняющих включений. Для моделирования выбирался плоский прямоугольный фрагмент сечения пластины, расположенный вдоль направления распространения фронта ударной волны.

Механическое поведение композита в рассмотренных условиях нагружения описывалось посредством физико-математической модели двухфазной конденсированной структурно-неоднородной среды с явным описанием структуры [5–8].

В рамках применявшейся физико-математической модели структурно-неоднородная среда представлялась как совокупность взаимосвязанных элементов структуры: матрицы и включений. Включения имели произвольную форму и были хаотически распределены в матрице. Механическое взаимодействие между элементами структуры осуществлялось по внутренним контактным поверхностям – границам между матрицей и включениями. Внутри границ каждого структурного элемента среда рассматривалась как однородная и изотропная, при переходе через границы физико-механические свойства среды изменялись скачкообразно. Положение внутренних контактных поверхностей в моделируемой области среды определялось формой, размерами и взаимным расположением элементов структуры. Геометрические параметры моделируемой области и количество структурных элементов выбирались таким образом, чтобы обеспечить возможность определения эффективных значений параметров механического состояния среды (компонент вектора массовой скорости, тензора напряжений, тензора деформаций и др.) методом усреднения локальных расчетных значений. Моделируемая область двухфазной структурно-неоднородной среды с модельной структурой показана на рис. 1.

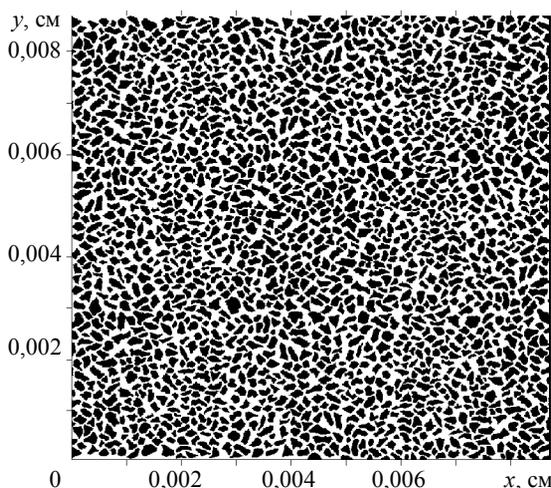


Рис. 1. Моделируемая область двухфазной структурно-неоднородной среды с модельной структурой стохастического композита, состоящего из матрицы (светлая область) и включений произвольной формы (тёмные области). Средний характерный размер включений – 5 мкм, объёмная концентрация – 50 %

Система уравнений математической модели механического поведения структурно-неоднородной среды при ударно-волновом нагружении состояла из уравнений законов сохранения импульса, массы и энергии, соотношений для определения компонента тензора скорости деформаций в локальных точках среды, уравнений состояния фаз, граничных условий на внешних поверхностях моделируемой области и на внутренних контактных поверхностях, начальных условий [5–8].

Численное решение системы уравнений модели позволяет определить поля локальных значений параметров механического состояния структурно-неоднородной среды и структурные изменения (локализацию деформации, образование блоков, разрушения элементов структуры) в процессе деформирования [5–9].

Усреднение локальных значений параметров механического состояния структурно-неоднородной среды в условиях нагружения плоской ударной волной в настоящей работе было предложено проводить в объёмах тонких плоских слоёв, расположенных перпендикулярно направлению распространения фронта ударной волны. Разбиение моделируемой области на слои показано на рис. 2.

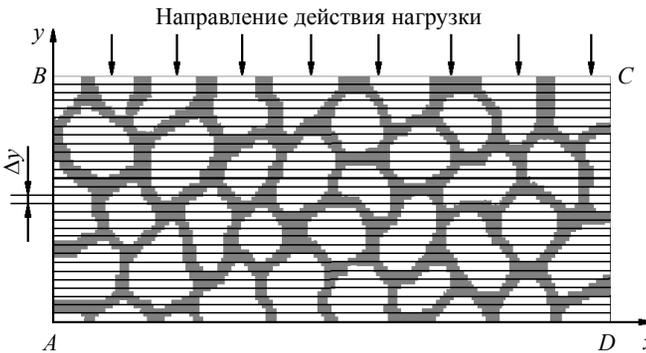


Рис. 2. Фрагмент моделируемой области структурно-неоднородной среды с разбиением на слои толщиной Δy . Расчётные локальные значения продольной компоненты массовой скорости U_y усреднялись в объёме каждого слоя

Эффективное значение продольной компоненты массовой скорости $\langle U_y \rangle$ определялось посредством усреднения локальных значений U_y по объёму слоя $\langle V \rangle$:

$$\langle U_y \rangle = \frac{1}{\langle V \rangle} \int_{\langle V \rangle} U_y d\langle V \rangle. \quad (1)$$

Эффективная скорость деформации слоя $\langle \dot{\epsilon}_{yy} \rangle$ определялась из следующего соотношения:

$$\langle \dot{\epsilon}_{yy} \rangle = \frac{\partial \langle U_y \rangle}{\partial y}. \quad (2)$$

Уравнение сохранения внутренней энергии слоя записывалось в следующем виде:

$$\langle \dot{E} \rangle = \langle \dot{E}_1 \rangle + \langle \dot{E}_2 \rangle, \quad \langle \dot{E}_1 \rangle = -\langle p \rangle \langle \dot{V} \rangle, \quad \langle \dot{E}_2 \rangle = \langle S_{yy} \rangle \langle \dot{\epsilon}_{yy} \rangle \langle V \rangle, \quad (3)$$

где $\langle p \rangle$ – эффективное давление в слое, $\langle S_{yy} \rangle$ – компонента девиатора тензора эффективных напряжений.

Значения $\langle E_1 \rangle$ и $\langle E_2 \rangle$ определялись суммированием локальных значений E_1 и E_2 по объёму слоя, значения $\langle p \rangle$ и $\langle S_{yy} \rangle$ находились из уравнений (3). Эффективное значение напряжения $\langle \sigma_{yy} \rangle$ определялось из соотношения

$$\langle \sigma_{yy} \rangle = -\langle p \rangle + \langle S_{yy} \rangle. \quad (4)$$

Предложенный способ усреднения позволяет определить эффективные значения параметров механического состояния моделируемой области структурно-неоднородной среды при нагружении плоскими ударными волнами.

Прогнозирование эффективных механических свойств стохастического металлокерамического композита Al – 50 об.% В₄C при ударно-волновом нагружении

Описанные в предыдущем разделе модель механического поведения стохастического композита в условиях ударно-волнового нагружения и способ определения эффективных параметров состояния применялись для прогнозирования эффективных механических свойств металлокерамического композита Al – 50 об.% В₄C при нагружении плоскими ударными волнами с амплитудами от 0,5 до 30 ГПа. Для описания механического поведения керамических включений из карбида бора В₄C применялась модель упруго-хрупкой повреждаемой среды Джонсона – Холмквиста, для металлической матрицы из алюминия – модель упруго-вязкопластической среды Джонсона – Кука.

На рис. 3 показаны пространственные распределения расчётных эффективных значений массовой скорости $\langle U_y \rangle$ и напряжения $\langle \sigma_{yy} \rangle$ в композите Al – 50 об.% В₄C при нагружении плоской ударной волной с амплитудой 2,05 ГПа, построенные для двух моментов времени.

На рисунке видно, что в композиционном материале Al – 50 об.% В₄C формируется двухволновая структура фронта волны нагрузки. На профилях отчётливо выделяется фронт упругой волны (упругий предвестник) и фронт пластической (ударной) волны, распространяющейся за упругим предвестником. Эти расчётные данные позволили определить значения эффективной амплитуды и скорости распространения упругого предвестника, а также значения эффективных скоростей распространения ударных волн.

Эффективная скорость распространения упругого предвестника, равная эффективной продольной скорости звука $\langle C_L \rangle$, вычислялась с использованием следующего соотношения:

$$\langle C_L \rangle = \frac{\langle \Delta Y_A \rangle}{\Delta t}, \quad (5)$$

где $\langle \Delta Y_A \rangle = \langle Y_A(t_2) \rangle - \langle Y_A(t_1) \rangle$ – расстояние, пройденное упругой волной за время $\Delta t = t_2 - t_1$. Для композита Al – 50 об.% В₄C значение $\langle C_L \rangle$ оказалось равным 0,883 см/мкс.

Эффективная скорость ударной волны $\langle D \rangle$ определялась как скорость распространения средней точки профиля пластического фронта из соотношения

$$\langle D \rangle = \frac{\langle \Delta Y_B \rangle}{\Delta t}, \quad (6)$$

где $\langle \Delta Y_B \rangle = \langle \Delta Y_A \rangle = \langle Y_B(t_2) \rangle - \langle Y_B(t_1) \rangle$ – расстояние, пройденное ударной волной за время $\Delta t = t_2 - t_1$.

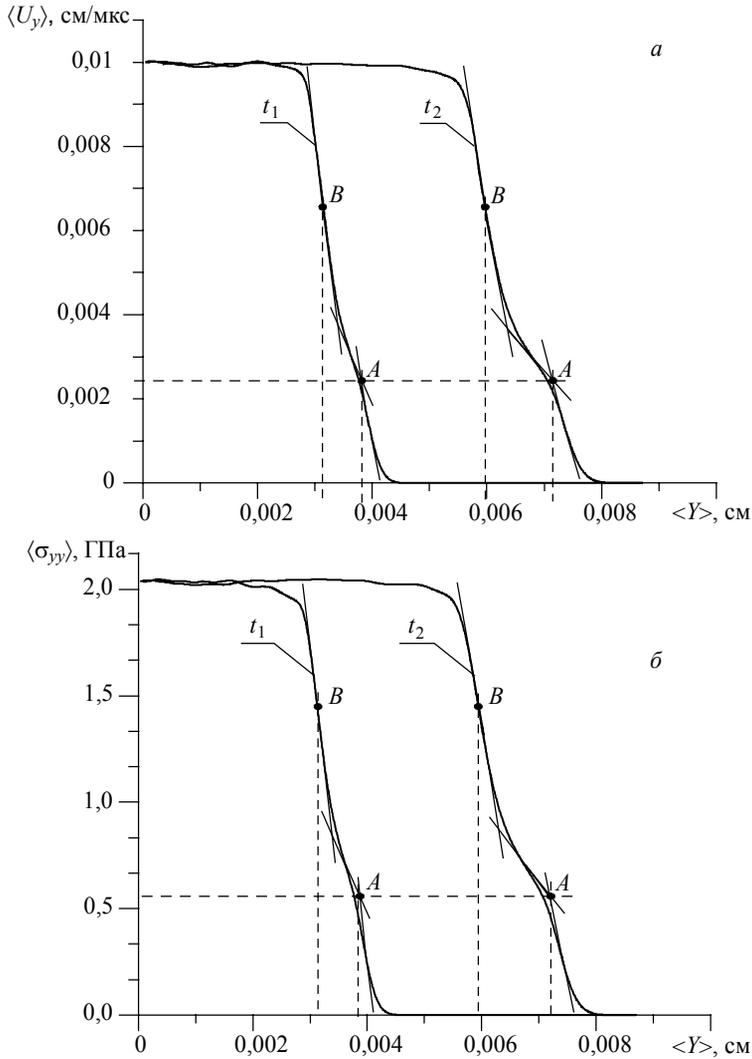


Рис. 3. Пространственные распределения: *а* – эффективной массовой скорости $\langle U_y \rangle$, *б* – эффективного напряжения $\langle \sigma_{yy} \rangle$ в стохастическом металлокерамическом композите Al – 50 об.% В₄С при нагружении плоской ударной волной с амплитудой 2,05 ГПа. Значения $\langle U_y \rangle$ и $\langle \sigma_{yy} \rangle$ определены для двух моментов времени $t_1 = 4,38 \cdot 10^{-3}$ мкс и $t_2 = 8,25 \cdot 10^{-3}$ мкс. Точка *A* соответствует верхней точке профиля упругой волны (упругого предвестника), точкой *B* обозначена средняя точка профиля фронта пластической (ударной) волны

Результаты моделирования распространения ударных волн с амплитудами от 0,5 до 30 ГПа в композите Al – 50 об.% В₄С были использованы для построения зависимости эффективной скорости ударной волны $\langle D \rangle$ от эффективной массовой скорости $\langle U_y \rangle$. Эта зависимость показана на рис. 4.

Полученная зависимость в рассмотренном диапазоне ударного сжатия имеет линейный характер $D = C_0 + \lambda U_y$, что хорошо согласуется с экспериментальными и теоретическими данными.

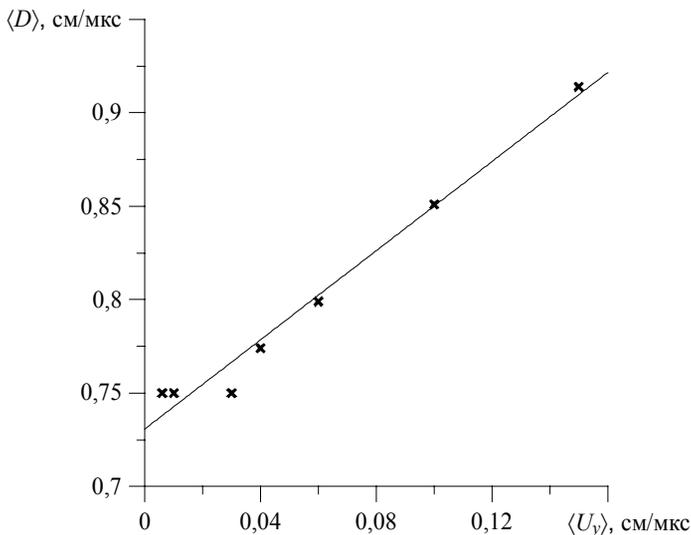


Рис. 4. Зависимость эффективной скорости ударной волны $\langle D \rangle$ от эффективной массовой скорости $\langle U_y \rangle$ в металлокерамическом композите Al – 50 об.% V₄C. Точками обозначены результаты расчётов, непрерывной линией – аппроксимационная зависимость $\langle D \rangle = 0,723 + 1,246 \langle U_y \rangle$.

Величина эффективной объемной скорости звука $\langle C_B \rangle$ принималась равной величине C_0 и для композита Al – 50 об.% V₄C составила 0,723 см/мкс.

Значения $\langle C_L \rangle$ и $\langle C_B \rangle$ были использованы для определения эффективной сдвиговой скорости звука $\langle C_s \rangle$ из соотношения

$$\langle C_s \rangle^2 = (3/4)(\langle C_L \rangle^2 - \langle C_B \rangle^2). \quad (7)$$

Для исследованного композита расчётная величина эффективной сдвиговой скорости звука $\langle C_s \rangle$ составила 0,432 см/мкс.

Полученное значение эффективной объемной скорости звука $\langle C_B \rangle$ использовалось для определения эффективного значения модуля объемного сжатия $\langle K \rangle$ при нормальных условиях. Эффективный модуль объёмного сжатия $\langle K \rangle$ вычислялся как

$$\langle K \rangle = \langle C_B \rangle^2 \langle \rho_0 \rangle, \quad (8)$$

где $\langle \rho_0 \rangle$ – эффективная массовая плотность композита при нормальных условиях, которая определялась по модели механической смеси.

Расчётная величина эффективного модуля объемного сжатия $\langle K \rangle$ для композита Al – 50 об.% V₄C составила 138,8 ГПа.

В работе проводилось сопоставление полученного в рамках предложенной методики эффективного значения модуля объемного сжатия $\langle K \rangle$ с оценками по хорошо известным и часто применяемым моделям Фойгта – Рейса, и Хашина – Штрикмана. Полученное по предложенной методике значение модуля $\langle K \rangle$ лежит внутри диапазона оценок по указанным моделям. Это свидетельствует о том, что в предельном случае (для нормальных условий) полученные по предложенной методике оценки модуля $\langle K \rangle$ имеют точность прогноза, сопоставимую с моделью Хашина – Штрикмана.

Для оценки эффективного модуля сдвига $\langle \mu \rangle$ использовалось вычисленное эффективное значение сдвиговой скорости звука $\langle C_s \rangle$. Эффективный модуль сдвига для нормальных условий вычислялся из следующего соотношения:

$$\langle \mu \rangle = \langle C_s \rangle^2 \langle \rho_0 \rangle. \quad (9)$$

Для композита Al – 50 об.% В₄C величина $\langle \mu \rangle$ составила 49,3 ГПа.

Расчетное значение модуля сдвига $\langle \mu \rangle$, полученное по предлагаемой методике для нормальных условий, так же как и значение модуля $\langle K \rangle$, сопоставлялось с теоретическими оценками по моделям Фойгта – Рейса и Хашина – Штрикмана. Сравнение показало, что полученное по предлагаемой методике значение модуля сдвига $\langle \mu \rangle$ при нормальных условиях коррелирует с оценками по модели Фойгта – Рейса.

Эффективные значения модулей сдвига $\langle \mu \rangle$ и объемного сжатия $\langle K \rangle$ были использованы для оценки эффективного значения модуля Юнга $\langle E \rangle$. Модуль Юнга вычислялся по соотношению

$$\langle E \rangle = \langle \mu \rangle (3\langle \lambda \rangle + 2\langle \mu \rangle) / (\langle \lambda \rangle + \langle \mu \rangle), \quad (10)$$

где $\langle \lambda \rangle = \langle K \rangle - (2/3)\langle \mu \rangle$.

Для композиционного материала Al – 50 об.% В₄C величина эффективного модуля Юнга $\langle E \rangle$ составила 132,3 ГПа. Сравнение этого значения с оценками по моделям Фойгта – Рейса и Хашина – Штрикмана показало, что полученная величина $\langle E \rangle$ лежит внутри диапазона оценок по модели Фойгта – Рейса.

Эффективное значение предела упругости на ударной адиабате Гюгонио $\langle \sigma_{HEL} \rangle$, равное амплитуде упругого предвестника, определялось непосредственно по профилям напряжения $\langle \sigma_{yy} \rangle$. Для исследованного композита это значение составило 0,54 ГПа.

Величина $\langle \sigma_{HEL} \rangle$ использовалась для определения динамического предела упругости $\langle \sigma_{SD} \rangle$ из следующего соотношения:

$$\langle \sigma_{SD} \rangle = ((1 - 2\langle \nu \rangle) / (1 - \langle \nu \rangle)) \langle \sigma_{HEL} \rangle, \quad (11)$$

где $\langle \nu \rangle = \langle \lambda \rangle / (2(\langle \lambda \rangle + \langle \mu \rangle))$.

Эффективное значение динамического предела упругости $\langle \sigma_{SD} \rangle$ для Al – 50 об.% В₄C составило 0,26 ГПа. Полученное значение $\langle \sigma_{SD} \rangle$ сравнимо со значением динамического предела упругости алюминиевой матрицы. Этот результат свидетельствует о том, что в композите с объёмным содержанием керамических включений 50 % развитие неупругих деформаций во фронте ударной волны обеспечивается за счёт пластического течения матрицы. Возможно, что при более высокой концентрации включений, когда толщина прослоек матрицы настолько мала, что её пластическая деформация уже не способна обеспечить релаксацию возрастающих напряжений, эффективное значение динамического предела упругости $\langle \sigma_{SD} \rangle$ возрастет.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе предложена численная методика прогнозирования эффективных механических свойств (скоростей звука, модулей упругости, динамического предела упругости) стохастических композиционных материалов в условиях ударно-волнового нагружения с учётом эволюции структуры композитов. Показано, что в предельном случае (для нормальных условий) точность прогноза эффективных значений модулей упругости сопоставима с точностью оценок по известным моделям Фойгта – Рейса и Хашина – Штрикмана. Пре-

имущество предложенной методики заключается в возможности оценки эффективных значений модулей упругости для заданных давлений и возможности получения теоретических оценок зависимостей эффективных значений модулей упругости от давления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Blumenthal W.R., Gray III G.T.* Structure-property characterization of shock loaded B₄C-AL // Proc. Int. Conf. Mech. Prop. Mater. at High Rates of Strain. Oxford. 1989. Int. Phys. Conf. Ser. 102. IOP Publ. LTd. 1989. P. 363 – 370.
2. *Gray III G.T., Hixson R.S., Johnson J.N.* Dynamic deformation and fracture response of Al 6061-T6 -50 vol.% Al₂O₃ continuous reinforced composite // Proc. Int. Conf. Shock Waves in Condensed matter. 1996. P. 547 – 550.
3. *Vaidya R.U., Song S.G., Zurek A.K., Gray III G.T.* The effect of structural defects in SiC particles on the static and dynamic mechanical response of a 15 volume percent SiC/6061-A1 matrix composite // Proc. Int. Conf. Shock Waves in Condensed Matter. 1996. P. 643 – 646.
4. *Dandekar D.P., Lopatin C.M.* Shock response of SiC/2014-T4 aluminium composite // Shock Waves in Condensed Matter / Ed. by Gupta Y.M. N.Y.; London: Plenum Press, 1985. P. 365–369.
5. *Скрипняк В.А., Каракулов В.В.* Numeric simulation of cermet's behaviour under shock loading // Shock Waves in Condensed Matter. St. Peterburg, 1994.
6. *Платова Т.М., Скрипняк В.А., Каракулов В.В.* Об особенностях распространения ударных волн в гетерогенных средах с прочностью // Вычислительные технологии. 1995. Т. 4. № 1. С. 200–210.
7. *Скрипняк В.А., Каракулов В.В.* Локализация деформации при высокоскоростном нагружении металлокерамических материалов // Физическая мезомеханика. 2004. Т. 7. Спец. вып. Ч. 1. С. 329–331.
8. *Скрипняк В.А., Каракулов В.В.* О распределении массовой скорости в плоских ударных волнах, распространяющихся в металлокерамических композитах // Вестник ТГУ. 2005. № 50. С. 7–15.
9. *Скрипняк В.А., Каракулов В.В.* Повреждаемость металлокерамических композитов в условиях ударно-волновых воздействий // Физика экстремальных состояний вещества – 2007: сб. трудов. Черногловка: Ин-т проблем химической физики РАН, 2007. С. 125–127.

Статья поступила 13.04.2013 г.

Karakulov V.V., Smolin I.Yu., Skripnyak V.A. NUMERICAL PROCEDURE OF FORECASTING EFFECTIVE MECHANICAL PROPERTIES OF STOCHASTIC COMPOSITES UNDER SHOCK-WAVE LOADING WITH ALLOWANCE FOR THE STRUCTURE EVOLUTION. A procedure for numerical study of the mechanical behaviour and predicting effective mechanical properties of stochastic composites in high-rate deformation under shock-wave loading is worked out with allowance for the evolution of the structure of composites. Using obtained simulation results of the mechanical behaviour under plane shock wave loading, the effective values of the mechanical parameters of the Al-50vol.% B₄C cermet composite are derived.

Keywords: composite materials, structure, effective properties, shock-wave loading, numerical modelling

KARAKULOV Valery Vladimirovich (Tomsk State University)

E-mail: valery@ftf.tsu.ru

SMOLIN Igor Yurievich (Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Tomsk State University)

E-mail: smolin@ispms.tsc.ru

SKRIPNYAK Vladimir Albertovich (Tomsk State University)

E-mail: skrp@ftf.tsu.ru

УДК 539.3

В.М. Пестренин, И.В. Пестренина, Л.В.Ландик**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ВБЛИЗИ ОСОБОЙ ТОЧКИ
СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ**

Для изучения напряженно-деформированного состояния в малых окрестностях особых точек составных конструкций предлагается итерационный численно-аналитический подход, основанный на минимизации невязок алгебраических равенств: граничных условий, условий для напряжений и деформаций на контактной поверхности и непосредственно в особой точке. Проводится исследование напряженно-деформированного состояния в окрестности особой точки составной пластинки в условиях плоской задачи.

Ключевые слова: *концентрация напряжений, особые точки, составные конструкции, контактные поверхности.*

В конструкциях, полученных соединением встык посредством пайки, сварки или склеивания и подвергаемых нагружению, возможно возникновение значительной концентрации напряжений в окрестности крайней (особой) точки линии (поверхности) соединения элементов, изготовленных из различных материалов. Концентрация напряжений способствует преждевременному разрушению конструкции, ограничивает предельные нагрузки, поэтому изучению особенностей распределения напряженного состояния вблизи рассматриваемой точки посвящено достаточно большое число публикаций. Теоретические исследования приводятся, например, в работах [1–8]. Так, в [1, 2] рассмотрена упругая задача для плоского составного клина в пространстве изображений по Меллину. На основе анализа корней соответствующего характеристического уравнения прогнозируется возможное поведение решения в окрестности особой точки. В работе [3] предложен аналогичный подход с использованием функции Эри, устанавливается возможность малонапряженного (конечного, несингулярного) состояния вблизи особой точки. В публикациях [4–6] рассматривается пространственная задача для составной конструкции. Анализ возможного поведения решения в малой окрестности точки, принадлежащей ребру (краю) поверхности скрепления различных тел, проводится с использованием корней характеристического уравнения, полученного методом разделения переменных для уравнений равновесия в перемещениях однородной упругой задачи. В работах [7–8] метод исследования напряженного состояния в окрестности края составной конструкции, основанный на изучении собственных значений, распространен на несжимаемые упругопластические тела со степенным упрочнением.

Экспериментальные исследования плоских составных конструкций методом фотоупругости описаны, например, в работах [3, 10–13]. Авторы изучают влияние формы линии стыка и формы образующей свободной поверхности на напряженное состояние конструкции вблизи особой точки. Показано, что оба эти фактора могут использоваться для снижения уровня концентрации напряжений.

Численное исследование распределения напряжений в окрестности особой точки составной конструкции проводится, как правило, методом конечных элементов [9–11]. В статьях [10, 11] рассмотрены плоские и пространственные зада-

чи. Авторы определяют такую форму образующей свободной поверхности вблизи особой точки, которая обеспечивает отсутствие корней в характеристическом уравнении, приведенном в [1,2], с реальной частью, обуславливающей сингулярное поведение решения. Авторами [9] решается оптимизационная задача – разыскивается форма образующей вблизи особой точки соединяемых цилиндрических образцов, обеспечивающая распределение нормальных осевых напряжений на поверхности контакта, близкое к равномерному.

Отметим, что существующие теоретические подходы к изучению напряженно-го состояния составных конструкций вблизи особых точек ограничиваются решением локальной задачи – изучением явлений, обусловленных нагрузкой, приложенной лишь на поверхностях, примыкающих к особой точке. При удалении от этой точки напряжения, порожденные рассматриваемой нагрузкой, должны затухать [1,2]. Такой подход ограничивает использование полученных результатов, так как не учитывает прочие нагрузки, приложенные к конструкции, способные повлиять на концентрацию напряжений в окрестности особой точки.

С другой стороны, применение для исследования напряженного состояния конструкций (включая окрестность особой точки) стандартных прикладных пакетов программ не всегда оказывается эффективным: в частности, получаемые с их использованием значения напряжений непосредственно в особой точке могут не согласовываться с решением, найденным из уравнений механики деформируемого тела.

В данной статье предлагается итерационный метод исследования напряженно-го состояния составных конструкций (в том числе и в окрестности особых точек), основанный на минимизации невязки алгебраических равенств, представляющих собой граничные условия и условия для напряжений и деформаций на контактной поверхности в окрестности особой точки и в самой точке.

1. Напряжения в вершине плоского клина

Прежде всего в декартовой ортонормированной системе координат строятся возможные алгебраические соотношения между напряжениями в вершине A плоского клина (рис. 1), составленного из двух однородных изотропных материалов. Считается, что такой клин является частью какой-либо нагруженной конструкции. Обычно задача о напряженном состоянии в окрестности вершины клина рассматривается в полярной системе координат r, φ с полюсом в точке A . В этом случае в полюсе нарушается однозначное соответствие между точками клина и координатами (в точке A $r=0$, а координата φ может быть любая), поэтому здесь не существует тензор напряжений как объект, инвариантный относительно преобразования координат. В декартовых координатах каких-либо ограничений на существование тензора напряжений в точке A не накладывается.

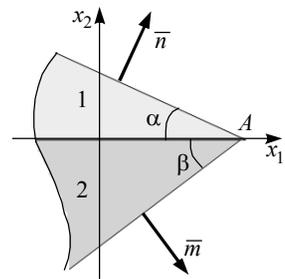


Рис. 1. Составной клин

Для простоты будем считать, что элементы клина соединены по прямой линии, принимаемой за ось x_1 системы координат x_1, x_2 .

Приято: образующие клина свободны от напряжений, \bar{n} и \bar{m} – нормали к образующим клина, углы при вершине составляющих клиньев – α, β . Область изменения α, β :

$$0 < \alpha < 2\pi, \quad 0 < \beta < 2\pi, \quad \alpha + \beta < 2\pi. \quad (1)$$

Напряженное состояние в вершине A клина удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \sigma_n = 0, \quad \tau_n = 0, \quad \sigma_m = 0, \quad \tau_m = 0, \\ \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = \sigma_{22}, \quad \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = \sigma_{12}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь σ_m, σ_n и τ_m, τ_n – нормальные и касательные напряжения на площадках, ориентируемых ортами \vec{m}, \vec{n} ; верхний индекс – номер элемента клина (рис.1). Линия соединения состоит из точек, принадлежащих обоим материалам, поэтому вдоль этой линии должно выполняться равенство относительных удлинений их линейных элементов. В системе координат x_1, x_2 это условие приобретает вид

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)}. \quad (3)$$

Шесть соотношений (2) в точке A клина приводятся к четырем линейным однородным уравнениям относительно искомых величин $\sigma_{11}^{(1)}, \sigma_{11}^{(2)}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha &= 0, \\ (\sigma_{11}^{(1)} - \sigma_{22}) \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= 0, \\ \sigma_{11}^{(2)} \sin^2 \beta - 2\sigma_{12} \sin \beta \cos \beta + \sigma_{22} \cos^2 \beta &= 0, \\ (\sigma_{11}^{(2)} - \sigma_{22}) \sin \beta \cos \beta - \sigma_{12} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Ненулевое решение системы (4) существует лишь в случае, если ее определитель

$$\Delta = \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)$$

обращается в нуль. Уравнение $\Delta = 0$ в области (1) изменения параметров α, β имеет решения

$$\alpha = \pi, \quad \beta = \pi, \quad \alpha + \beta = \pi. \quad (5)$$

Рассмотрим возможные случаи алгебраических зависимостей между напряжениями в особой точке A для линейно-упругих материалов 1 и 2 с модулями Юнга E_1, E_2 и коэффициентами Пуассона ν_1, ν_2 соответственно:

1) $\alpha \neq \pi, \quad \beta \neq \pi, \quad \alpha + \beta \neq \pi$.

Определитель системы уравнений (4) не обращается в нуль, поэтому

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0. \quad (6)$$

Решение (6), очевидно, не зависит от механических свойств скрепляемых материалов. Равенство (3) в рассматриваемом случае выполняется тождественно.

2) $\alpha = \pi, \quad \beta \neq \pi, \quad \alpha + \beta \neq \pi$.

Из уравнений (4) следует

$$\sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0.$$

С использованием равенства (3) убеждаемся, что и $\sigma_{11}^{(1)} = 0$.

3) $\alpha \neq \pi, \quad \beta = \pi, \quad \alpha + \beta \neq \pi$.

Аналогично предыдущему случаю получаем, что все напряжения в особой точке обращаются в нуль.

4) $\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = \pi$.

Напряжения $\sigma_{11}^{(1)}, \sigma_{11}^{(2)}$ и σ_{12} выразим через напряжение σ_{22} :

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{22} \operatorname{ctg}^2 \alpha, \quad \sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{22} \operatorname{ctg}^2 \beta, \quad \sigma_{12} = -\sigma_{22} \operatorname{ctg} \alpha = \sigma_{22} \operatorname{ctg} \beta. \quad (7)$$

Условие (3) с использованием равенств (7) приводится к виду

$$\left[\frac{1}{E_1} (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu_1) - \frac{1}{E_2} (\operatorname{ctg}^2 \beta - \nu_2) \right] \sigma_{22} = 0, \quad (8)$$

из которого следует, что напряжение σ_{22} (а вследствие (7) и все другие напряжения) обращаются в нуль в особой точке, если множитель в квадратных скобках не равен нулю. Если этот множитель обращается в нуль, напряжение σ_{22} может быть произвольным. То есть в этом случае на напряжения σ_{22} в точке A не накладываются какие-либо ограничения. Оно находится в результате решения краевой задачи для рассматриваемой конструкции. Введем угол ψ , определяемый равенствами $\alpha = \pi/2 + \psi$, $\beta = \pi/2 - \psi$. Условие возможного необращения σ_{22} в нуль в особой точке для плоскодеформированного и обобщенного плосконапряженного состояния соответственно принимает вид

$$\operatorname{tg}^2 \psi = \frac{E_1 \nu_2 (1 + \nu_2) - E_2 \nu_1 (1 + \nu_1)}{E_1 (1 - \nu_2^2) - E_2 (1 - \nu_1^2)}, \quad \operatorname{tg}^2 \psi = \frac{E_2 \nu_1 - E_1 \nu_2}{E_2 - E_1}. \quad (9)$$

Полученный результат представляется важным, так как позволяет управлять концентрацией напряжений вблизи особой точки. Для иллюстрации рассмотрим следующий пример. Пусть плоская составная конструкция (рис. 2) подвергается растяжению-сжатию в направлении оси x_2 напряжениями σ_0 , приложенными на торцах.

Система координат выбрана так, что ось x_1 составляет с линией скрепления $m-n$ угол ψ , рассчитанный для заданных материальных свойств по формулам (9). Решение данной задачи в стандартном пакете ANSYS показывает, что во всех точках конструкции реализуется однородное напряженное состояние, концентрация напряжений вблизи особой точки отсутствует.

При необходимости соединения элементов конструкции встык по линии, перпендикулярной оси нагружения ($\psi = 0$), отсутствие концентрации напряжений в окрестности особой точки, согласно условию (9), принимает вид (плосконапряженное состояние)

$$E_2 \nu_1 - E_1 \nu_2 = 0. \quad (10)$$

Если условие (10) не выполняется, то, как следует из (8), нормальное напряжение на линии соединения элементов в крайней точке обращается в нуль. Позже (см. п. 3) будет показано, что в этом случае в окрестности крайней точки появляется концентрация напряжений.

На рис. 3 приводятся примеры расчета составных конструкций, работающих на растяжение-сжатие в направлении вертикальной оси в условиях плоского на-

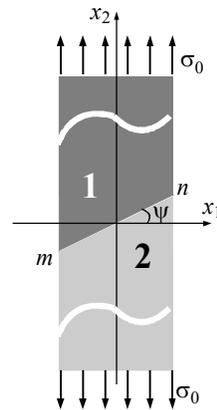


Рис. 2. Схема нагружения конструкции, полученной соединением двух элементов по линии $m-n$

пряженного состояния. При этом углы наклона линии скрепления к горизонтальной оси выбраны из условия (9). В таких конструкциях реализуется однородное напряженное состояние, а концентрация напряжений вблизи особых точек отсутствует.

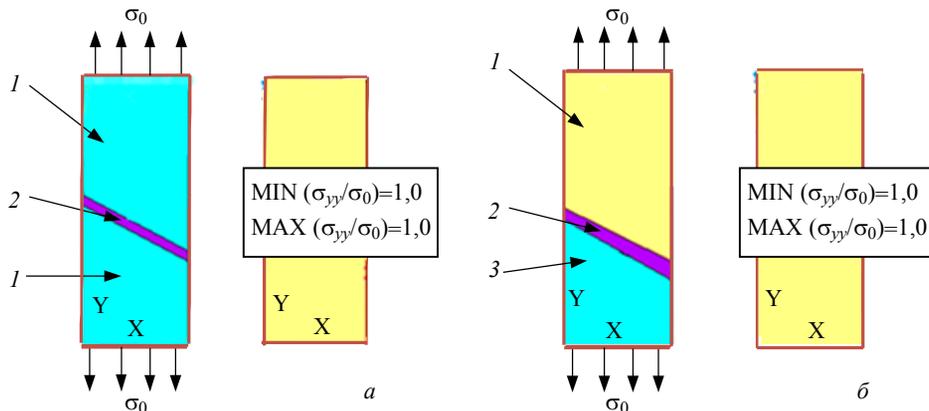


Рис. 3. Примеры составных конструкций, находящихся в однородном напряженном состоянии при растяжении-сжатии (расчетная схема и изолинии σ_{22}/σ_0 в ANSYS-решении)

На рис. 3 приведены: *а* – две пластинки чугуна (1), скрепленные с помощью стекла (2); *б* – пластинка из чугуна (1), скрепленная стеклом (2) с пластинкой стали (3). Механические свойства материалов и тангенсы углов наклона линий скрепления приведены в табл. 1, 2. Во втором случае (рис. 3, б) углы наклонов линий скрепления оказываются различными для каждой пары материалов.

Таблица 1

Механические характеристики скрепляемых материалов

| № п/п | Материал | Модуль Юнга, ГПа | Коэффициент Пуассона |
|-------|----------|------------------|----------------------|
| 1 | Чугун | 110 | 0,22 |
| 2 | Стекло | 70 | 0,25 |
| 3 | Сталь | 210 | 0,28 |

Таблица 2

Тангенсы углов наклона для плоского напряженного состояния (ПНС) и плоской деформации (ПДС) для скрепляемых пар материалов по формулам (9)

| ПНС | ПДС | Пара материалов |
|----------|----------|-----------------|
| 0,550000 | 0,653367 | чугун – стекло |
| 0,484768 | 0,553404 | стекло – сталь |
| 0,154000 | 0,172050 | чугун – сталь |

В случае, когда параметры состояния (напряжения и деформации) в окрестности особой точки претерпевают значительные градиенты, аналитические решения для полей напряжений становятся затруднительными, а численные, вследствие заложенной в них приближенности выполнения некоторых граничных условий, не обеспечивают достаточную точность вычислений. Так, в методе конечных

элементов (МКЭ), система разрешающих уравнений которого построена на функционале Лагранжа, заложено приближенное выполнение граничных условий в напряжениях, поэтому на поверхностях (линиях), примыкающих к особой точке, эти граничные условия, как правило, точно не выполняются. В то же время граничные условия в перемещениях выполняются всегда точно; эта особенность, а также установленные выше алгебраические соотношения, связывающие напряжения в особой точке, ниже используются для построения численного алгоритма последовательного уточнения решения в ее окрестности.

2. Метод численного анализа напряженного состояния в окрестности особой точки

Предлагаемый метод построения полей напряжений вблизи особой точки составной конструкции основан на применении для построения разрешающих уравнений МКЭ смешанного функционала, в котором независимо варьируются перемещения и деформации [14]. При этом деформации разыскиваются в классе непрерывных функций в областях непрерывности материальных параметров составной конструкции. Применение смешанного функционала позволяет выразить узловые напряжения через узловые перемещения без применения операции дифференцирования приближенного решения.

Основные этапы предлагаемого подхода состоят в следующем:

1. Вблизи особой точки устанавливаются алгебраические равенства, которым должно подчиняться напряженное состояние. Это граничные условия; условия непрерывности напряжений и кинематические условия на контактной поверхности; соотношения, связывающие напряжения непосредственно в особой точке, вытекающие из решения системы уравнений (4). Эти алгебраические равенства устанавливаются аналитически, поэтому точность их выполнения характеризует и точность применяемого вычислительного алгоритма.

2. На заданной конечно-элементной сетке строится решение (нулевое приближение) о распределении напряжений в рассматриваемой конструкции (включая окрестность особой точки) с заданными граничными условиями. Оно может не удовлетворять алгебраическим равенствам (п.1), образуется вектор невязок.

3. Уточнение решения реализуется в процедуре последовательной минимизации вектора невязок. С этой целью узлы конечно-элементной сетки, напряжения в которых входят в алгебраические равенства (п.1), объявляются основными. Напряжения в основных узлах выражаются через все узловые перемещения и подставляются в алгебраические равенства (п.1). Перемещения в основных узлах считаются неизвестными, остальным узловым перемещениям присваиваются значения, полученные ими в последней итерации. В результате алгебраические равенства становятся системой уравнений относительно основных перемещений.

4. Найденные основные перемещения принимаются за граничные условия в основных узлах при поиске следующего приближенного решения о напряженном состоянии конструкции в соответствии с п. 2. Этим способом граничные условия в напряжениях и условия непрерывности напряжений на линии контакта (п.1) преобразуются в граничные условия в перемещениях. Таким образом, уточнение решения проводится путем решения обратной задачи – поиска перемещений, обеспечивающих минимум вектора невязок. Далее процесс повторяется.

Предлагаемая итерационная процедура оказывается сходящейся. Зависимость решения от конечно-элементной сетки уменьшается с ее сгущением. Выход из

итерационного процесса осуществляется при достижении величиной невязки заданного значения или при стабилизации решения. Для оценки улучшения решения вводится параметр k (коэффициент улучшения решения), равный отношению среднеквадратического значения величины вектора невязок в нулевом приближении к соответствующему значению в итоговом решении.

3. Растяжение составной пластинки в условиях плоского напряженного состояния

Для примера рассматривается растяжение составной пластинки, изображенной на рис. 2, в случае, когда угол $\psi = 0$. Построим алгебраические равенства, которым должно подчиняться напряженное состояние вблизи особой точки:

а) на линии, свободной от напряжений, обращаются в нуль нормальные и касательные напряжения (кроме особой точки)

$$\sigma_{11}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{12}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{11}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{12}^{(2)} = 0; \quad (11)$$

б) на линии соединения различных материалов выполняются условия непрерывности напряжений (кроме особой точки)

$$\sigma_{22}^{(1)} - \sigma_{22}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{12}^{(1)} - \sigma_{12}^{(2)} = 0; \quad (12)$$

в) в особой точке выполняются граничные условия на свободной поверхности, условия непрерывности напряжений на линии соединения и ограничения, накладываемые на напряжения решением системы уравнений (4) и условием (3):

$$\sigma_{22}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{22}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{12}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{12}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{11}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{11}^{(2)} = 0. \quad (13)$$

Ниже на рис. 4–6 приводятся результаты вычислений напряженного состояния вблизи особой точки по описанной выше процедуре. На рис. 4. представлены результаты вычислений нормальных напряжений на линии соединения элементов конструкции (рис. 2, $\psi = 0$).

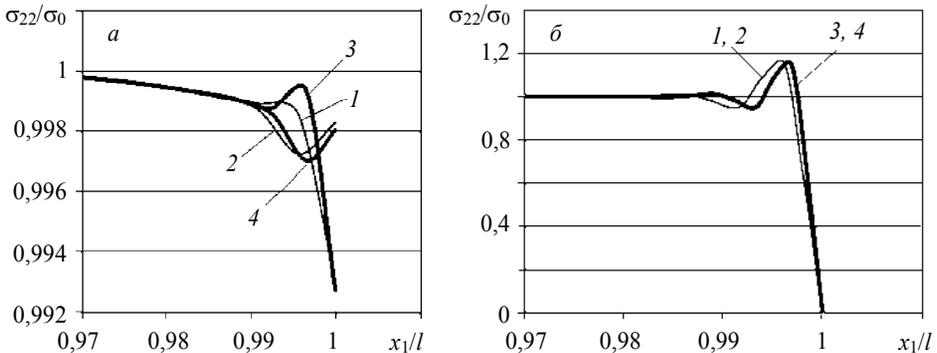


Рис. 4. Нормальные напряжения σ_{22} на линии соединения элементов конструкции:
а) нулевое приближение; б) решение, полученное методом итерации

Цифрами 1 и 2 отмечены напряжения $\sigma_{22}^{(1)}$ и $\sigma_{22}^{(2)}$ соответственно, вычисленные на конечно-элементной сетке со сгущением к особой точке с количеством узлов 2521, цифрами 3 и 4 – те же параметры на конечно-элементной сетке с

количеством узлов 3901. Во всех случаях использовался 8-узловой 4-угольный конечный элемент. Из рисунка видно, что в нулевом приближении (аналог ANSYS-решения) условие для напряжений на линии стыка в окрестности особой точки и в самой точке не выполняются. Измельчение конечно-элементной сетки не улучшает решение.

Использование метода итераций приводит к решению, в котором выполняются на линии стыка вблизи особой точки и равенство нормальных напряжений ($\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}$), и обращение этих напряжений в нуль непосредственно в точке. Коэффициенты улучшения решения в приведенных примерах оказались соответственно равными $k = 32,5$ и $k = 35,6$.

На рис. 5, а приводятся решения на тех же конечно-элементных сетках для параметра σ_{22} вблизи особой точки на линии, свободной от напряжений.

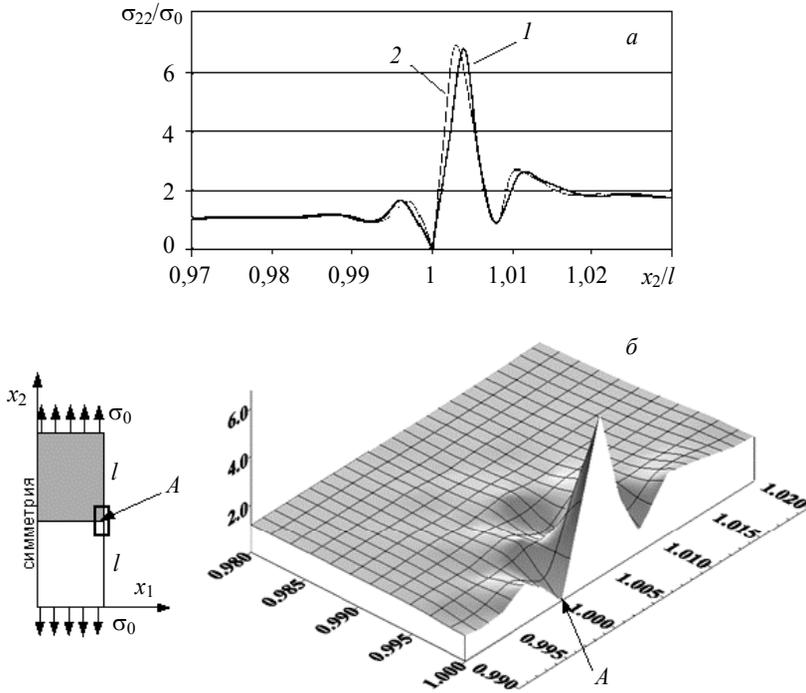


Рис. 5. Напряжения σ_{22}/σ_0 : а – на линии, свободной от напряжений в окрестности особой точки: 1 – для 2521 узлов разбивки; 2 – для 3901 узлов; б – поверхность напряжений в окрестности особой точки

Заметим, что с измельчением сетки экстремальные значения напряжений практически не изменяются (рис. 5, а). Своего максимального значения напряжение σ_{22} достигает вблизи особой точки на линии, свободной от напряжений, в более жестком элементе конструкции. На рис. 5, б видно, что область, в которой сказывается влияние особой точки, относительно мала, при этом изменения напряженного состояния в этой области весьма значительны.

Рис. 6 иллюстрирует зависимость коэффициентов концентрации напряжения σ_{22} от материальных параметров скрепляемых элементов. Графики изменения коэффициентов концентрации $\sigma_{22}^{\max}/\sigma_0$ приводятся в зависимости от коэффициента Пуассона ν_2 . При указанных материальных параметрах условие, отвечающее однородному напряженному состоянию конструкции (10), выполняется для всех трех кривых, представленных на рис. 6, а. Коэффициент концентрации в этом случае равен единице (точки *f*, *g*, *h*).

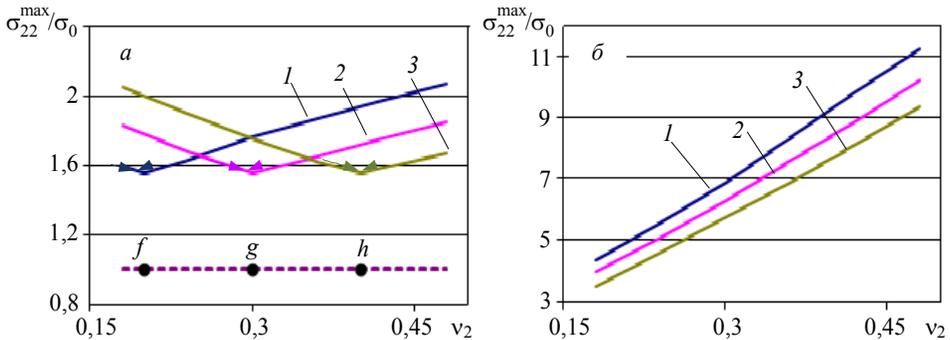


Рис. 6. Коэффициенты концентрации напряжения $\sigma_{22}^{\max}/\sigma_0$ в зависимости от материальных параметров скрепляемых элементов: *a* – $E_1/E_2=1$, *б* – $E_1/E_2=5$; 1 – $\nu_1=0,2$; 2 – $\nu_1=0,3$, 3 – $\nu_1=0,4$

В окрестности этих точек коэффициенты концентрации скачком изменяют свои значения от единицы до, примерно, величины 1,55 (расчетное значение). С удалением от точек *f*, *g*, *h* коэффициенты концентрации возрастают. В рассматриваемой области изменения коэффициентов Пуассона с ростом отношения E_1/E_2 концентрация напряжений увеличивается (рис. 6).

Заключение

Основные результаты проведенного исследования состоят в следующем.

- Предложен способ построения всех возможных алгебраических соотношений между компонентами напряжений в особых точках составных конструкций в условиях плоской задачи.

- Выявлены зависимости между материальными константами и геометрическими параметрами, при которых в составных конструкциях, подвергаемых растяжению-сжатию в условиях плоской задачи, реализуется однородное напряженное состояние.

- Предложен итерационный численно-аналитический метод исследования значительно изменяющихся полей напряжений в малых окрестностях особых точек составных конструкций. Данный подход позволяет оценить величину области, где параметры решения имеют высокие градиенты, изучить в ней закономерности поведения напряжений, вычислить коэффициенты их концентрации.

Вычисления выполнялись на суперкомпьютере Тесла-ПГУ НОЦ ПИРВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vogy D.B.* Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions // *Trans. ASME. Ser. E.* 1971. V. 38. No. 2. P. 87–96.
2. *Vogy D.B.* Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading // *J. Appl. Mechanics.* 1968. V. 35. P. 460–466, 1968.
3. *Чобанян К.С.* Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.
4. *Аксентян О.К.* Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // *Прикладная математика и механика.* 1967. № 1. С. 178–186.
5. *Аксентян О.К., Луцик О.Н.* Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного клина // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* 1978. № 5. С. 102–108.
6. *Аксентян О.К., Луцик О.Н.* Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины стыкового соединения // *Прикладная механика.* 1982. Т.18. № 7. С.66–73.
7. *Задоян М.А.* Об условиях малонапряженности составных плит // *Докл. РАН.* 1993. Т. 332. № 3. С. 319–321.
8. *Задоян М.А.* Прочность соединения составных плит // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* 2003. № 1. С. 111–122.
9. *Матвеевко В.П., Федоров А.Ю.* Оптимизация геометрии составных упругих тел как основа совершенствования методик испытаний на прочность клеевых соединений // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2011. Т. 4. № 4. С.63–70.
10. *Xu L.R., Kuai H., Sengupta S.* Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part I. A biologically inspired design // *Experimental Mechanics.* 2004. V. 44. No. 6. P. 608–615.
11. *Xu L.R., Kuai H., Sengupta S.* Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part II. An integrated numerical analysis // *Experimental Mechanics.* 2004. V. 44. No. 6. P. 616–621.
12. *Рябов И.А.* Безопасность механически неоднородных элементов конструкций нефтегазового комплекса: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Уфа: ГУП «ИПТЭР», 2009. 26 с.
13. *Геворкян Г.В., Задоян М.А., Саакян Г.Р., Саркисян С.М.* Экспериментальные исследования прочности составных плит при изгибе // *Прикладная механика и техническая физика.* 2000. Т. 41. № 4. С. 211–215.
14. *Пестренин В.М., Пестренина И.В.* Механика композитных материалов и элементов конструкций. Пермь: Изд. Перм. гос. ун-та, 2005. 364 с.

Статья поступила 13.03.2013 г.

Pestrenin V. M., Pestenina I. V., Landik L. V. THE STRESS STATE NEAR A SINGULAR POINT OF A FLAT COMPOSITE DESIGN. To study the stress-deformed state in small neighborhoods of singular points of compound designs, an iterative numerical-analytical approach based on minimizing residuals of algebraic equalities representing boundary conditions, conditions for stress and strains on the contact surface and directly in the singular point is proposed. The stress-strain state is studied in a vicinity of a singular point for a flat compound design.

Keywords: stress concentration, singular points, compound designs, contact surfaces.

PESTRENIN Valery Mihailovich (Perm State University)

E-mail: pestreninVM@mail.ru

PESTRENINA Irena Vladimirovna (Perm State University)

E-mail: IPestrenina@gmail.com

LANDIK Lidia Vladimirovna (Perm State University)

E-mail: LidiaLandik@gmail.com

УДК 629.78.001

Н.Н. Севастьянов

СОЗДАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩАЮЩИХ МОМЕНТОВ ДЛЯ РЕЖИМА «ПРОГНОЗ» СПУТНИКА СВЯЗИ «ЯМАЛ-200»

Рассмотрена природа и основные составляющие внешних возмущающих моментов, действующих на находящийся на орбите космический аппарат. Показано, что только натурные экспериментальные измерения позволяют получить точные данные по действующим внешним моментам.

Ключевые слова: *Спутник связи, геостационарная орбита, внешние возмущающие моменты, натурные экспериментальные измерения.*

1. Постановка вопроса

Достаточно хорошо известна природа внешних возмущающих моментов, действующих на находящийся на орбите космический аппарат [1]. Основными из них являются гравитационные моменты, моменты от магнитного поля Земли, от аэродинамического воздействия атмосферы и от давления солнечного излучения. Особенностью геостационарной орбиты является полное отсутствие влияния атмосферы и сильно уменьшенные по сравнению с низколетающими космическими аппаратами (КА) величины гравитационных и магнитных моментов. Проведем некоторые их оценки.

Гравитационный момент, действующий на КА с тензором инерции J_B , равен

$$N_{гр} = \frac{3\mu}{r^3} [\hat{r} \times (J_B \cdot \hat{r})], \quad \hat{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{1}$$

Моменты инерции КА «Ямал-200» в (кг·м³) и конструктивных (базис B) осях:

| КА | J_{xx} | J_{yy} | J_{zz} | J_{xy} | J_{yz} | J_{xz} |
|--------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| КА-201 | 6976,4 | 6837,4 | 1121,8 | -16,8 | -5,1 | 19,4 |
| КА-202 | 6719,5 | 6503,4 | 1014,9 | -5,7 | -17,7 | 17,0 |

- показывают, что точность совпадения конструктивных осей с осями главных моментов инерции – не хуже единиц угловых минут. Такого же порядка и точность ориентации конструктивных осей в орбитальной системе координат (ОСК); гравитационный момент лежит в горизонтальной плоскости и с учетом того, что $\mu/r^3 = (\omega^0)^2 = 0,528 \cdot 10^{-8}$, получаем для самой большой разности моментов инерции $(I_{xx} - I_{zz}), (I_{yy} - I_{zz})$ величину $\sim 2 \cdot 10^{-7}$ Н·м на каждую угловую минуту отклонения. Поскольку ориентация КА относительно ОСК не меняется (если не считать стабилизационных колебаний, действия от которых усредняются), то величина гравитационного момента должна быть постоянной и не превосходить $\sim 10^{-6}$ Н·м.

Магнитный момент определяется наличием токового контура ($A \cdot \text{виток} \cdot \text{м}^2 = A \cdot \text{м}^2$), определяющего M – дипольный момент КА, который взаимодействует с магнитным полем Земли, задаваемым вектором напряженности \mathcal{B} , равным на экваторе $3 \cdot 10^{-5}$ Тл и направленным нормально к плоскости экватора. Напряженность магнитного поля убывает с расстоянием как $1/r^3$; магнитный момент задается формулой

$$N_{\text{мг}} = M \times \mathcal{B} \quad [\text{Н} \cdot \text{м}]. \quad (2)$$

Контур в $1 A \cdot \text{м}^2$ получит момент $1,4 \cdot 10^{-7}$ Н·м. С целью исключения действия магнитных моментов предпринимаются определенные правила прокладки силовых токовых цепей. Можно видеть, что возмущающий магнитный момент мал и постоянен в связанных осях КА.

Момент солнечного давления. Общая формула для этого момента

$$N_C = \mathbf{r} \times \mathbf{f}, \quad (3)$$

где \mathbf{r} – радиус вектор, идущий от центра масс к центру оптического давления; \mathbf{f} – сила светового давления равная $\mathbf{f} = (1 + K)pA_{\perp}$, K – коэффициент отражения конструкции КА, $0 < K < 1$, A_{\perp} – площадь поверхности КА, нормальной к направлению на Солнце; $p = I_C/c$, $I_C = 1538 \text{ Вт/м}^2$ – энергия излучения Солнца на расстоянии до Земли и $c = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ – скорость света.

Размер солнечных батарей КА составляет 35 кв. м, к примеру, для $K = 0,5$, $r = 0,1 \text{ м}$ этот момент будет равен $N_C = 3,4 \cdot 10^{-5}$ Н·м. Очевидно, что именно этот момент является превалирующим, и, кроме того, он изменяется в связи с изменением положения Солнца в ОСК. Так, возьмем расстояние от центра оптического давления до центра инерции величиной 0,1 м, очевидно, что оно также меняется во времени, но на Земле определить эту величину достаточно трудно. Тем не менее поскольку положение Солнца в ОСК, в которой стабилизируется КА, задается двумя углами: углом суточного вращения ОСК и углом отклонения от плоскости орбиты вследствие годового движения Земли, можно сделать определенные суждения о виде функциональной зависимости рассматриваемого момента по времени. Можно предположить, что суточные кривые моментной зависимости должны повторяться, однако при годовом движении Солнца должны быть некоторые особенности. Во-первых, это наличие теней – затмений Солнца – при прохождении плоскости экватора длительностью от 0 до 1 ч 10 мин, и, во-вторых, анализ зависимости момента от угла отклонения Солнца от плоскости q_1, q_2 ОСК. Если принять в качестве основной составляющей момент от плоскостей солнечных батарей, ориентируемых на Солнце, то влияния этих углов отклонения быть не должно. Аналитический учет компоненты момента от корпуса КА весьма затруднителен, тем более, что в любом случае нужно экспериментальное подтверждение выполненным расчетам.

Тем самым, аналитический обзор показывает, что существует только одна возможность получить точные данные по действующим внешним моментам

$$M_d = N_{\text{гр}} + N_{\text{мг}} + N_C, \quad (4)$$

а именно – натурные экспериментальные измерения.

2. Получение экспериментальных данных о внешнем моменте КА «Ямал-200»

Значения действующих на космический аппарат внешних моментов для спутника связи, находящегося на геостационарной орбите, оказалось возможным получить по результатам обработки телеметрических данных о работе системы ориентации этих спутников на участках их штатного функционирования. Созданный для спутников этой серии новый центр управления полетом [2] позволяет структурировать и запоминать на сервере полный поток телеметрической информации о параметрах всех процессов, имевших место на каждом космическом аппарате во все время его функционирования. Благодаря этому была получена возможность провести обработку информации о длительном (два года) периоде функционирования системы ориентации. На протяжении всего этого периода поддерживалась точная ориентация КА в ОСК (погрешности не более 15 угловых минут) и была доступна для обработки информация об угловых скоростях КА и о скоростях вращения инерционных маховиков. Общая идея построения алгоритма оценки внешних моментов состояла в следующем:

- производилась оценка угловых скоростей вращения инерционных маховиков; используя обозначения статьи [3] и формулы из нее (21), возможно получить оценку кинетического момента маховиков

$$\hat{H}_B = \sum_{i=1}^3 I_i \hat{\omega}_i, \quad \hat{H}_{Bi} = I_i \hat{\omega}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Здесь $\hat{\omega}_i, \omega_i$ – векторные и скалярные величины скоростей вращения маховиков; I_i – моменты инерции маховиков (известные величины);

Оценка полного кинетического момента КА

$$\hat{G}_B = J_{BB} \cdot \hat{\omega}_B + \hat{H}_B, \quad \hat{G}_{Bi} = J_{Bi} \hat{\omega}_{Bi} + I_i \hat{\omega}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6)$$

в векторном и скалярном видах, значения тензора инерции КА приведены выше и справедлива вторая (скалярная) часть формулы (5). Компоненты вектора внешних моментов после этого могут быть вычислены (построены) согласно уравнениям движения (22) из [3]:

$$\begin{aligned} M_{d1} &= \hat{G}_{B1} + \hat{\omega}_{B2} \hat{G}_{B3} - \hat{\omega}_{B3} \hat{G}_{B2}, \\ M_{d2} &= \hat{G}_{B2} + \hat{\omega}_{B3} \hat{G}_{B1} - \hat{\omega}_{B1} \hat{G}_{B3}, \\ M_{d3} &= \hat{G}_{B3} + \hat{\omega}_{B1} \hat{G}_{B2} - \hat{\omega}_{B2} \hat{G}_{B1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Чтобы реализовать описанный подход к оцениванию суммарного возмущающего момента, необходимо располагать методом восстановления фактического движения КА по телеметрической информации. Ниже используется метод, основанный на аппроксимации вращательного движения спутника сплайнами.

Для уменьшения случайных ошибок при определении значений угловой скорости спутника использовался процесс сглаживания (аппроксимации функции), основанный на применении метода наименьших квадратов. Аппроксимация выполнялась покомпонентно с использованием решения следующей задачи. Пусть для моментов времени t_m ($m = 0, 1, \dots, M$), $t_m < t_{m+1}$, известны приближенные значения $x_m \approx f(t_m)$ некоторой гладкой функции $f(t)$. Требуется восстановить эту функцию на отрезке $t_0 \leq t \leq t_M$.

Отыскание $f(t)$ в предположении, что эта функция дважды непрерывно дифференцируема, сводится к решению вариационной задачи

$$\int_{t_0}^{t_M} [\ddot{f}(t)]^2 dt \rightarrow \min, \quad \sum_{m=0}^M [x_m - f(t_m)]^2 \leq S. \quad (8)$$

Здесь S – заданное положительное число. Решением задачи (8) является кубический сплайн.

Предполагалось, что измеренные значения угловой скорости имеют одинаковую точность и функция $\hat{\omega}_{Bi}(t_m)$ на участке измерений может быть достаточно хорошо приближена многочленом третьей степени. В результате по наблюдаемым значениям функции в точках измерений методом наименьших квадратов построен многочлен третьей степени, аппроксимирующий функцию $\hat{\omega}_{Bi}(t_m)$, и за значения этой функции принимались значения $\hat{\omega}'_{Bi}(t_m)$ полученного многочлена в точках t_m . Вычисление выполнялось по четырем точкам с использованием следующего выражения:

$$\hat{\omega}'_{Bi}(t_m) = \frac{1}{35}(-3\hat{\omega}_{Bi}(t_{m-2}) + 12\hat{\omega}_{Bi}(t_{m-1}) + 17\hat{\omega}_{Bi}(t_m) + 12\hat{\omega}_{Bi}(t_{m+1}) - 3\hat{\omega}_{Bi}(t_{m+2})). \quad (9)$$

Такое определение угловой скорости спутника позволило уменьшить влияние ошибок измерений при последующей аппроксимации функции $\hat{\omega}'_{Bi}(t_m)$, которая выполнялась для получения значений угловой скорости в требуемые моменты времени.

Аналогичный метод использовался при вычислении значений кинетических моментов маховиков \hat{H}'_{Bi} по информации о скоростях их вращения, получаемых по сигналам прохождения ротора каждого маховика четырех точек за один оборот. При фильтрации угловых скоростей маховиков нужно учитывать стабилизационные колебания в контуре управления, так что интервал осреднения выбирался с учетом этого обстоятельства.

На рис. 1 – 3 в качестве примера представлены обработанные таким образом данные по поведению компонент кинетического момента \hat{G}'_{Bi} ($i = 1, 2, 3 - x, y, z$) для спутника «Ямал-201». Можно видеть, что поведение составляющих кинетического момента системы хорошо иллюстрируют теорему сохранения кинетического момента: проекции кинетического момента на оси связанной системы координат, достаточно точно ориентируемой в равномерно вращающейся орбитальной системе координат, близки к гармоническим функциям по 1 и 2 каналам.

Выделенные из этих экспериментальных зависимостей величины внешних моментов согласно соотношениям (7) представлены на рис. 4 – 6, где приведены покомпонентные зависимости поведения по времени моментов, действующих на космический аппарат.

Можно видеть, что прослеживается регулярность поведения этих зависимостей по времени, соответствующая регулярному движению Солнца относительно орбитальной и соответственно связанной системы координат.

Высокую точность оценок внешних возмущающих моментов подтверждает близость измеренных значений кинетического момента спутника (серые маркеры на рис. 1 – 3) и расчётных значений, полученных путём решения системы уравне-

ний (7) относительно значений суммарного кинетического момента G с использованием в расчётах оценок возмущающих моментов.

На рис. 7 – 9 показаны такие зависимости на интервале один год.

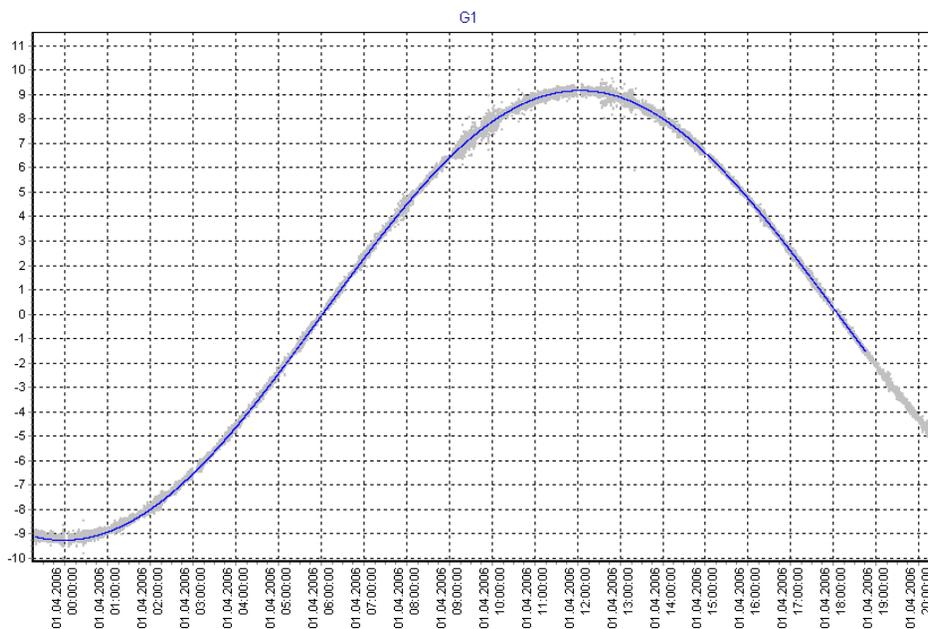


Рис. 1. Суточное изменение кинетического момента (канал крена)

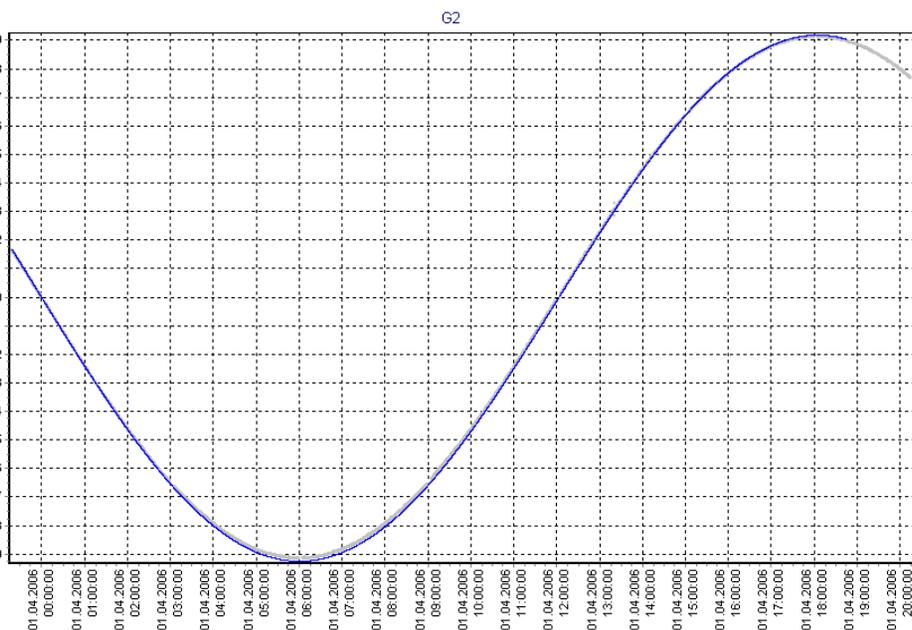


Рис. 2. Суточное изменение кинетического момента (канал рысканья)

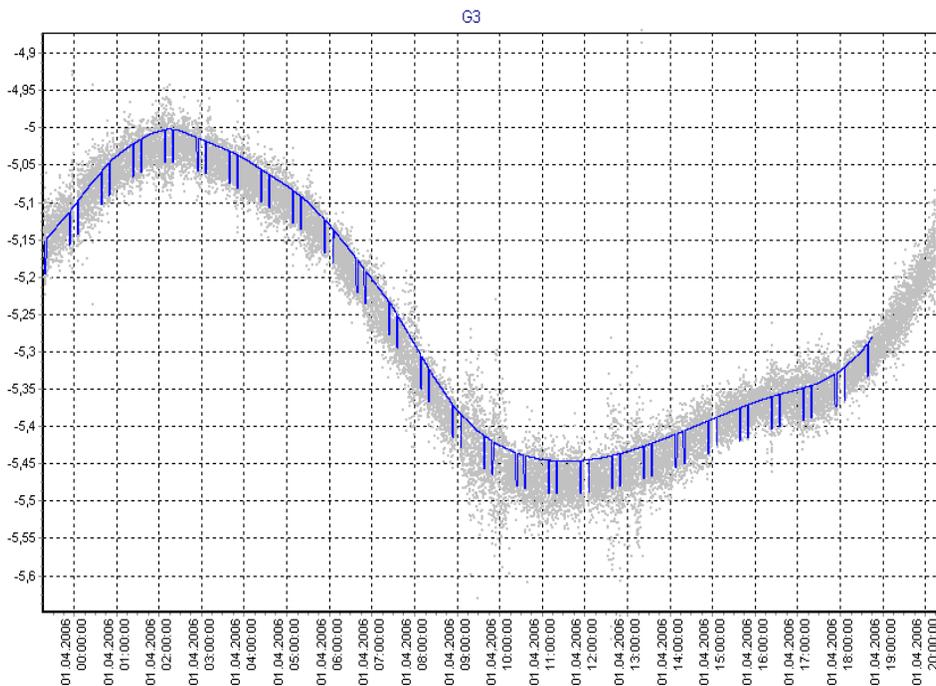
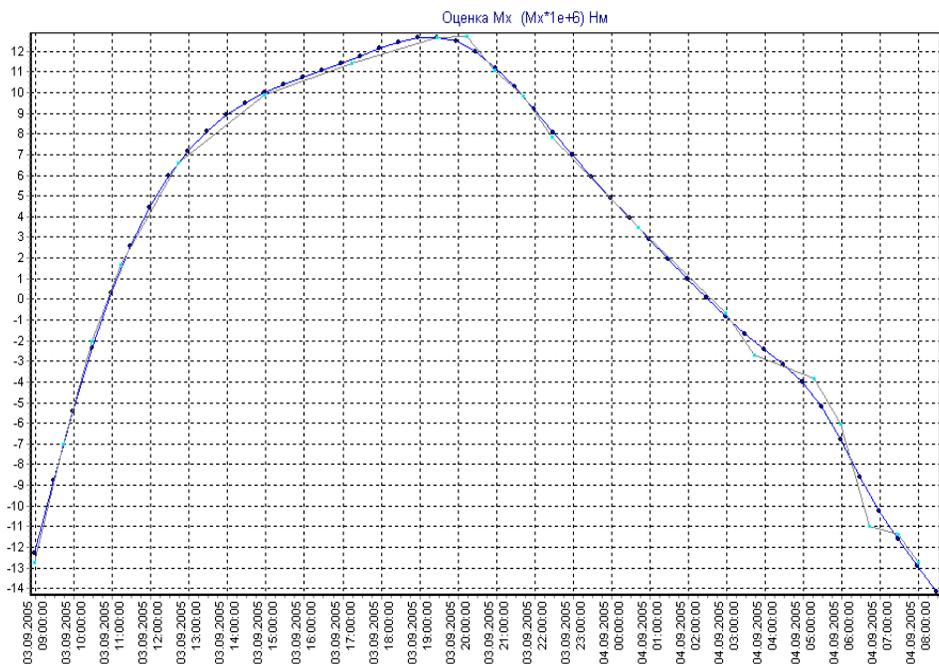


Рис. 3. Суточное изменение кинетического момента (канал тангажа)

Рис. 4. Суммарный возмущающий момент, действующий на КА «Ямал-200» № 1.
Канал крена, интервал измерений – сутки

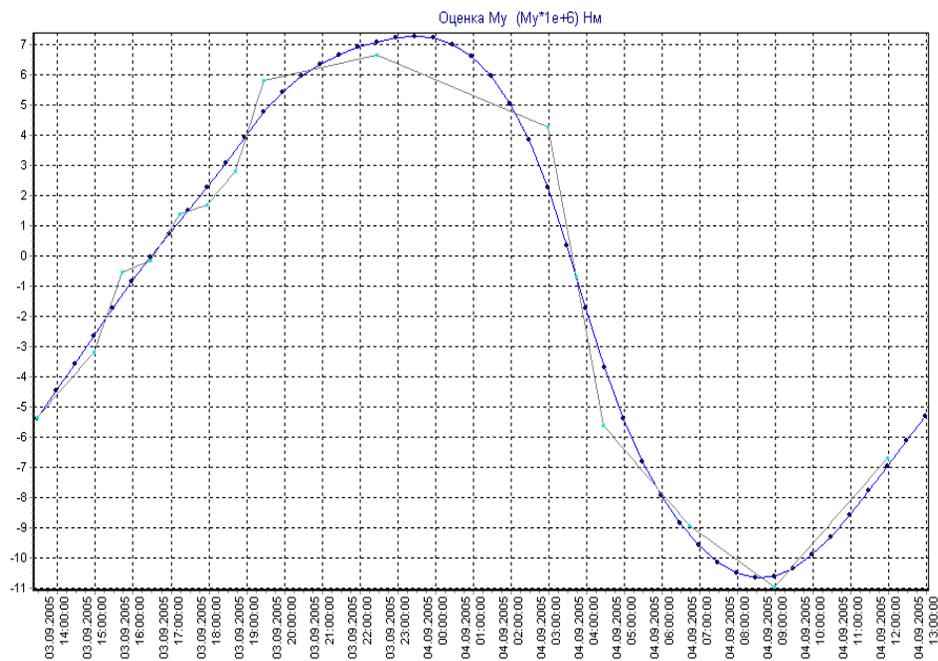


Рис. 5. Суммарный возмущающий момент, действующий на КА «Ямал-200» № 1. Канал рысканья, интервал измерения – сутки

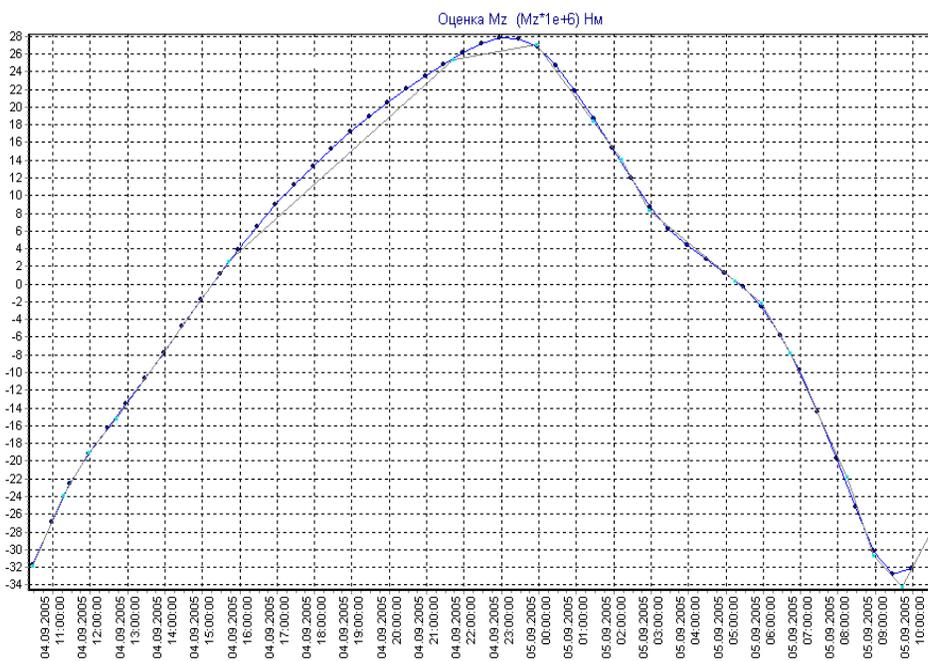


Рис. 6. Суммарный возмущающий момент, действующий на КА «Ямал-200» № 1. Канал тангажа, интервал измерений – сутки

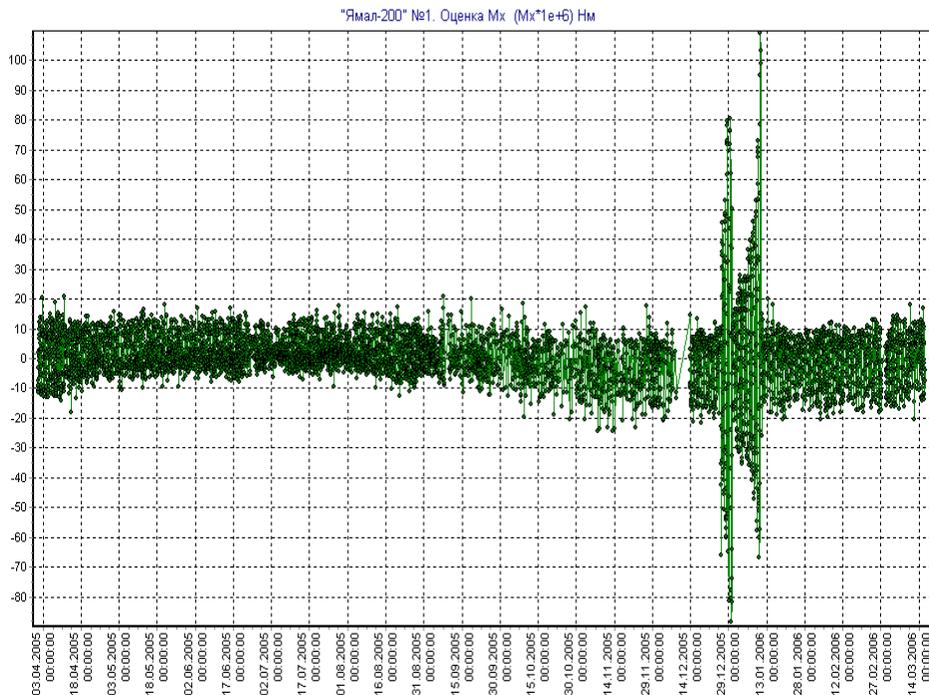


Рис. 7

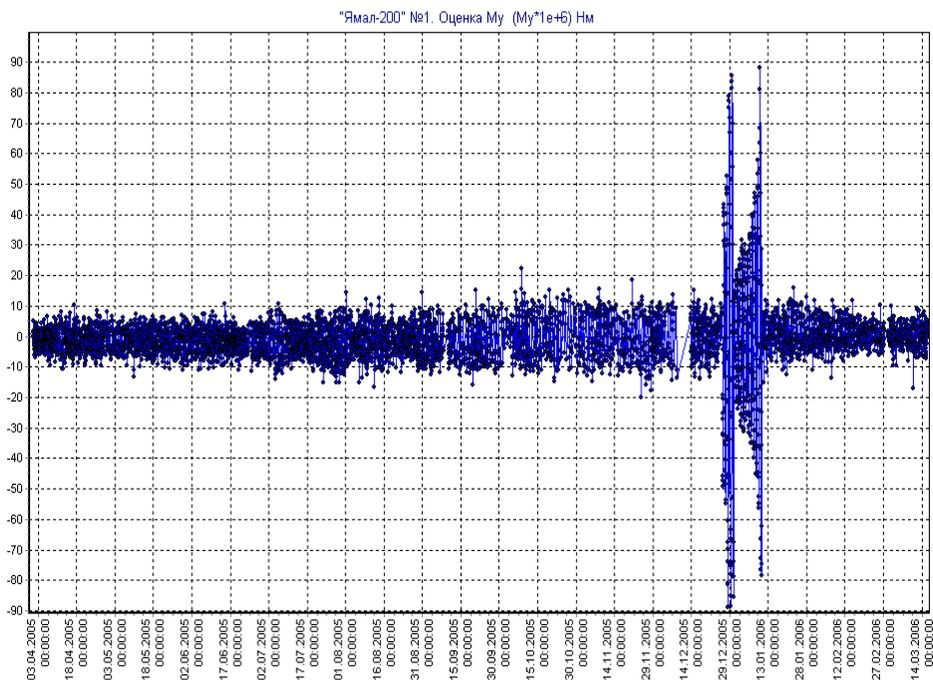


Рис. 8

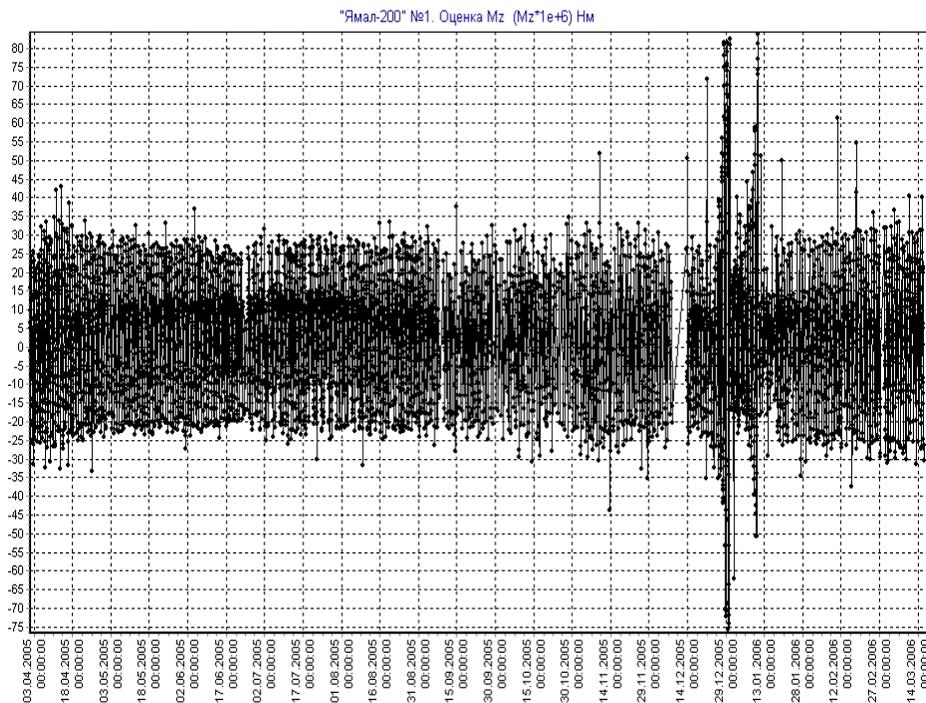


Рис. 9

Анализ полученных в результате обработки данных показал, что основными причинами вариации внешних моментов являются суточные его изменения, как и ожидалось в аналитическом исследовании. Сравнение измерений, выполненное на трехлетнем интервале (2004 – 2006 годы), показало достаточно хорошую повторяемость суточных изменений внешнего момента, тем не менее сезонные (годовые) его изменения также необходимо было оценить.

Нужно заметить, что на представленных данных есть аномально высокие возмущения на границе 2005 – 2006 годов, не повторившиеся на следующих годах, связанные, видимо, с солнечным излучением.

Анализ этих данных показал, что хотя сезонные изменения имеют место, величина и скорость этих изменений позволяют ввести достаточно простую их аппроксимацию.

Кроме того, необходимо учитывать тот факт, что в периоды времени, близкие к весеннему и осеннему равноденствиям, появляются теневые участки орбиты, на которых внешние моменты изменяются и это нужно учитывать в математической модели.

3. Внедрение модели действующих моментов в бортовое программное обеспечение режима «прогноз»

Анализ полученных экспериментальных данных по внешним возмущающим моментам показал, что достаточно точным их представлением может служить табличное их задание в виде постоянных величин на определенном интервале времени. По результатам расчетов моментов за 3 года были сформированы табли-

цы возмущающих моментов, которые описывают изменение компонент момента в течение года с шагом 30 минут (табл. 1 иллюстрирует такое изменение в марте месяце). Был выбран интервал времени в полчаса, на котором внешний момент принимался постоянным.

Таблица 1

КА «Ямал-200» № 1

| M_x (Нм) | | M_y (Нм) | | M_z (Нм) | |
|------------|------------------------------------|------------|------------------------------------|------------|------------------------------------|
| 0:59:09 | -2.34590058686274·10 ⁻⁶ | 0:59:09 | 3.19350757338138·10 ⁻⁶ | 0:59:09 | 1.06392140379532·10 ⁻⁵ |
| 1:29:09 | -4.16967332770144·10 ⁻⁶ | 1:29:09 | 3.51510955924068·10 ⁻⁶ | 1:29:09 | 5.91524035402144·10 ⁻⁶ |
| 1:59:09 | -6.08148725971383·10 ⁻⁶ | 1:59:09 | 3.62839272766736·10 ⁻⁶ | 1:59:09 | 1.97664756389053·10 ⁻⁶ |
| 2:29:09 | -7.79449936083288·10 ⁻⁶ | 2:29:09 | 3.54713054942499·10 ⁻⁶ | 2:29:09 | -1.17585631124855·10 ⁻⁶ |
| 2:59:09 | -9.27920755835184·10 ⁻⁶ | 2:59:09 | 3.33753842539316·10 ⁻⁶ | 2:59:09 | -3.76910397818434·10 ⁻⁶ |
| 3:29:09 | -1.05846642919321·10 ⁻⁵ | 3:29:09 | 3.07641529225083·10 ⁻⁶ | 3:29:09 | -6.07114866658602·10 ⁻⁶ |
| 3:59:09 | -1.16934803901124·10 ⁻⁵ | 3:59:09 | 2.83877165019093·10 ⁻⁶ | 3:59:09 | -8.36441033723945·10 ⁻⁶ |
| 4:29:09 | -1.23471016290890·10 ⁻⁵ | 4:29:09 | 2.690700565558294·10 ⁻⁶ | 4:29:09 | -1.09820247087903·10 ⁻⁵ |
| 4:59:09 | -1.26381656328098·10 ⁻⁵ | 4:59:09 | 2.65498280116853·10 ⁻⁶ | 4:59:09 | -1.40495822105069·10 ⁻⁵ |
| 5:29:09 | -1.29491320699835·10 ⁻⁵ | 5:29:09 | 2.69353341419746·10 ⁻⁶ | 5:29:09 | -1.74354596222443·10 ⁻⁵ |
| 5:59:09 | -1.32491616355497·10 ⁻⁵ | 5:59:09 | 2.74413836562402·10 ⁻⁶ | 5:59:09 | -2.07792554048565·10 ⁻⁵ |
| 6:29:09 | -1.34056162303746·10 ⁻⁵ | 6:29:09 | 2.74043077589416·10 ⁻⁶ | 6:29:09 | -2.36745736404243·10 ⁻⁵ |
| 6:59:09 | -1.32838728117880·10 ⁻⁵ | 6:59:09 | 2.62816818818481·10 ⁻⁶ | 6:59:09 | -2.56719950579887·10 ⁻⁵ |
| 7:29:09 | -1.27423746946181·10 ⁻⁵ | 7:29:09 | 2.40412742047909·10 ⁻⁶ | 7:29:09 | -2.61695456425209·10 ⁻⁵ |
| 7:59:09 | -1.17412440740278·10 ⁻⁵ | 7:59:09 | 2.11519892638714·10 ⁻⁶ | 7:59:09 | -2.49905807901813·10 ⁻⁵ |
| 8:29:09 | -1.04388602261808·10 ⁻⁵ | 8:29:09 | 1.82539400568527·10 ⁻⁶ | 8:29:09 | -2.26202443302498·10 ⁻⁵ |
| 8:59:09 | -8.98345182565423·10 ⁻⁶ | 8:59:09 | 1.53890252924221·10 ⁻⁶ | 8:59:09 | -1.9333699626052·10 ⁻⁵ |
| 9:29:09 | -7.50440541789356·10 ⁻⁶ | 9:29:09 | 1.24482579416021·10 ⁻⁶ | 9:29:09 | -1.53216468684134·10 ⁻⁵ |
| 9:59:09 | -6.10717083576433·10 ⁻⁶ | 9:59:09 | 9.30657212129550·10 ⁻⁷ | 9:59:09 | -1.09121330983690·10 ⁻⁵ |
| 10:29:09 | -4.81019213464524·10 ⁻⁶ | 10:29:09 | 5.77996132939688·10 ⁻⁷ | 10:29:09 | -6.95164798580219·10 ⁻⁶ |
| 10:59:09 | -3.59606912347959·10 ⁻⁶ | 10:59:09 | 1.77410387009288·10 ⁻⁷ | 10:59:09 | -4.02973978125100·10 ⁻⁶ |
| 11:29:09 | -2.16723491935164·10 ⁻⁶ | 11:29:09 | -2.71346017962017·10 ⁻⁷ | 11:29:09 | -1.93079704472502·10 ⁻⁶ |
| 11:59:09 | -2.80340535947495·10 ⁻⁷ | 11:59:09 | -7.68875535423250·10 ⁻⁷ | 11:59:09 | -2.35003631729414·10 ⁻⁷ |
| 12:29:09 | 1.91725650298287·10 ⁻⁶ | 12:29:09 | -1.31132974683075·10 ⁻⁶ | 12:29:09 | 1.39414188089627·10 ⁻⁶ |
| 12:59:09 | 3.91853423297936·10 ⁻⁶ | 12:59:09 | -1.88516269794861·10 ⁻⁶ | 12:59:09 | 3.13266539583555·10 ⁻⁶ |
| 13:29:09 | 5.18596662153281·10 ⁻⁶ | 13:29:09 | -2.45391614907004·10 ⁻⁶ | 13:29:09 | 4.91382731633138·10 ⁻⁶ |
| 13:59:09 | 5.79005302763499·10 ⁻⁶ | 13:59:09 | -2.93242385518640·10 ⁻⁶ | 13:59:09 | 6.13628746778388·10 ⁻⁶ |
| 14:29:09 | 6.37996351033612·10 ⁻⁶ | 14:29:09 | -3.22755110453962·10 ⁻⁶ | 14:29:09 | 6.14592755340617·10 ⁻⁶ |
| 14:59:09 | 7.04641386427361·10 ⁻⁶ | 14:59:09 | -3.36900292796532·10 ⁻⁶ | 14:59:09 | 5.29951916226987·10 ⁻⁶ |
| 15:29:09 | 7.73500304281715·10 ⁻⁶ | 15:29:09 | -3.41632874036154·10 ⁻⁶ | 15:29:09 | 4.19547356891890·10 ⁻⁶ |
| 15:59:09 | 8.37466228317082·10 ⁻⁶ | 15:59:09 | -3.39373306405551·10 ⁻⁶ | 15:59:09 | 3.47287588096255·10 ⁻⁶ |
| 16:29:09 | 8.83753139126534·10 ⁻⁶ | 16:29:09 | -3.43167208041160·10 ⁻⁶ | 16:29:09 | 3.91086027112148·10 ⁻⁶ |
| 16:59:09 | 9.14392760591569·10 ⁻⁶ | 16:59:09 | -3.43905257862015·10 ⁻⁶ | 16:59:09 | 5.90024806746166·10 ⁻⁶ |
| 17:29:09 | 9.44650798710640·10 ⁻⁶ | 17:29:09 | -3.42544449343409·10 ⁻⁶ | 17:29:09 | 9.29535127651703·10 ⁻⁶ |
| 17:59:09 | 9.76835174552686·10 ⁻⁶ | 17:59:09 | -3.39373306405551·10 ⁻⁶ | 17:59:09 | 1.36620345396431·10 ⁻⁵ |
| 18:29:09 | 1.00975185926402·10 ⁻⁵ | 18:29:09 | -3.35262929171031·10 ⁻⁶ | 18:29:09 | 1.85148222258311·10 ⁻⁵ |
| 18:59:09 | 9.81649303321793·10 ⁻⁶ | 18:59:09 | -3.22172697472599·10 ⁻⁶ | 18:59:09 | 2.36286146925611·10 ⁻⁵ |
| 19:29:09 | 9.39182828656182·10 ⁻⁶ | 19:29:09 | -3.11016332131791·10 ⁻⁶ | 19:29:09 | 2.78823074405824·10 ⁻⁵ |
| 19:59:09 | 8.74434270372166·10 ⁻⁶ | 19:59:09 | -2.99564713621724·10 ⁻⁶ | 19:59:09 | 3.02802877991046·10 ⁻⁵ |
| 20:29:09 | 7.87479866234943·10 ⁻⁶ | 20:29:09 | -2.80641293938765·10 ⁻⁶ | 20:29:09 | 3.02032685077087·10 ⁻⁵ |
| 20:59:09 | 6.90990839138591·10 ⁻⁶ | 20:59:09 | -2.48414513600020·10 ⁻⁶ | 20:59:09 | 2.83357783784354·10 ⁻⁵ |
| 21:29:09 | 5.98456476261238·10 ⁻⁶ | 21:29:09 | -1.97584167307599·10 ⁻⁶ | 21:29:09 | 2.56567470329884·10 ⁻⁵ |
| 21:59:09 | 5.14215519198579·10 ⁻⁶ | 21:59:09 | -1.26748448168853·10 ⁻⁶ | 21:59:09 | 2.29923044596782·10 ⁻⁵ |
| 22:29:09 | 4.06459806854379·10 ⁻⁶ | 22:29:09 | -5.01805563485325·10 ⁻⁷ | 22:29:09 | 2.05402835631515·10 ⁻⁵ |
| 22:59:09 | 2.69332286758949·10 ⁻⁶ | 22:59:09 | 1.68894878743683·10 ⁻⁷ | 22:59:09 | 1.82887469499308·10 ⁻⁵ |
| 23:29:09 | 1.42326448201955·10 ⁻⁶ | 23:29:09 | 6.85666334169653·10 ⁻⁷ | 23:29:09 | 1.62521947464103·10 ⁻⁵ |
| 23:59:09 | 3.74965782316967·10 ⁻⁷ | 23:59:09 | 1.08161134610087·10 ⁻⁶ | 23:59:09 | 1.43579776120330·10 ⁻⁵ |
| 0:29:09 | -5.14399632579725·10 ⁻⁶ | 0:29:09 | 1.41463640662694·10 ⁻⁶ | 0:29:09 | 1.25156983079285·10 ⁻⁵ |

Такая таблица записывается в память бортовой ЦВМ, и бортовая программа использует табличные данные, сменяемые через заданные интервалы времени, для формирования виртуальной модели возмущения.

Для того чтобы учесть сезонные изменения, используется 9 таких таблиц, переход от одной к последующей также привязан к времени (годовому). Таблицы были составлены для каждого аппарата «Ямал-201» и «Ямал-202», начало временных интервалов отсчитывалось от точки начала года: 01.01.2004 г., 01.01.2005 г., 01.01.2006 г. и т.д.

Моменты в тени формировались аналогичным образом. Значения моментов для КА «Ямал-201», к примеру, оказались постоянными: $M_d = (0,0000008; -0,0000035; 0,000005)$ Н·м. В бортовом программном обеспечении выполняется расчет навигационных данных для формирования углового положения ОСК, кроме того, рассчитывается факт захождения и выхода КА из тени Земли. По этому признаку осуществляется переход от одной схемы формирования момента к другой.

Стандартное отклонение полученных оценок имеет порядок $10^{-8} \dots 10^{-9}$ Н·м. Описанный метод позволил получить достаточно точные результаты, избежав при этом необходимости делать сложные расчёты, используя аналитические выражения, содержащие величины, точные значения которых неизвестны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бранец В.Н., Севастьянов Н.Н., Федулов Р.В. Лекции по теории систем ориентации, управления движением и навигации космических аппаратов: учеб. пособие. Томск: ТГУ, 2013. 308 с.
2. Севастьянов Н.Н. Разработка концепции, обобщение опыта создания и практики управления космическими аппаратами связи нового поколения (на примере спутниковой системы связи «Ямал»): дис. ... канд. техн. наук / ОАО «Газком», РКК «Энергия им. С.П. Королева. МВТУ им. Баумана. 2007. 158 с.
3. Севастьянов Н.Н. Концепция построения системы ориентации и управления движением спутника связи «Ямал». Штатная схема функционирования // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 2 (22). С. 85–96.

Статья поступила 30.05.2013 г.

Sevast'yanov N.N. Creation of A mathematical model of external disturbing moments for the "forecast" regime Of the Yamal 200 communication satellite. The nature and basic components of external disturbing moments acting on the orbiting spacecraft are considered. It is shown that only a full-scale experimental measurements provide accurate data on the acting external moments.

Keywords: Communications satellite, geostationary orbit, external disturbance moments, full-scale experimental measurements.

Sevastyanov Nikolay Nikolaevich (Tomsk State University)

E-mail: sevastyanov@gascom.ru

УДК 539.3: 666.9-16; 621.9

В.В. Скрипняк, Д.В. Лобанов, В.А. Скрипняк, А.С. Янюшкин**МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ПЛАСТИНЕ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА (WC – Co) ПРИ АЛМАЗНОМ ЗАТАЧИВАНИИ¹**

Предложена методика моделирования формирующегося при шлифовании алмазным кругом напряженно-деформированного состояния в пластине из композиционного материала (WC – Co). Показано, что с повышением производительности шлифования в объеме пластины из твердого сплава ВК6 на глубине более одного миллиметра под обрабатываемой поверхностью могут образовываться повреждения. Результаты численных исследований коррелируют с экспериментальными данными, полученными ранее для комбинированной электроалмазной обработки.

Ключевые слова: численное моделирование, повреждаемость, квазихрупкие материалы, керамические композиты, твердые сплавы, шлифование, электроалмазная обработка.

При затачивании режущего инструмента большое значение имеет качество формирующейся режущей кромки, а также обеспечение минимальной поврежденности материала инструмента в ее близи [1–4]. Существенным фактором, влияющим на износостойкость инструмента, является уровень остаточных напряжений в приповерхностных слоях режущей кромки [5–7]. Качественно сформированные геометрические параметры и шероховатость поверхности на лезвии инструмента оказывают значительное влияние на процесс резания, износ режущего инструмента во время работы и качество обработанных поверхностей изделий.

Проблема затачивания инструмента из современных композиционных материалов приобрела особую актуальность в связи с расширяющимся применением для изготовления инструмента материалов высокой твердости с квазихрупким и хрупким характером разрушения.

В данной работе методом численного моделирования исследуется процесс формирования повреждений вблизи поверхности шлифования режущей кромки и его влияние на напряженно-деформированное состояние в пластине режущего инструмента при его затачивании.

Модель режущего элемента

Современные режущие элементы фрезерного инструмента для обработки композиционных неметаллических материалов имеют сложную трехмерную геометрическую конфигурацию.

В проведенных ранее исследованиях [2–4] было показано, что разрушение материала режущих элементов при затачивании, как правило, происходит вдоль ре-

¹ Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации: соглашения 14.В37.21.0441 и 14.132.21.1700, грант РФФИ № 12-01-00805, государственное задание на выполнение НИР в ТГУ и проект АБЦП № 2.1.2/10295, выполняемый в БрГУ.

жущей кромки на расстояниях, не превышающих 0,25–0,3 мм. Для моделирования процесса затачивания режущего элемента из твердого композиционного материала на основе WC – Co рассмотрим схему обработки и действующие при этом динамические составляющие процесса (рис. 1).

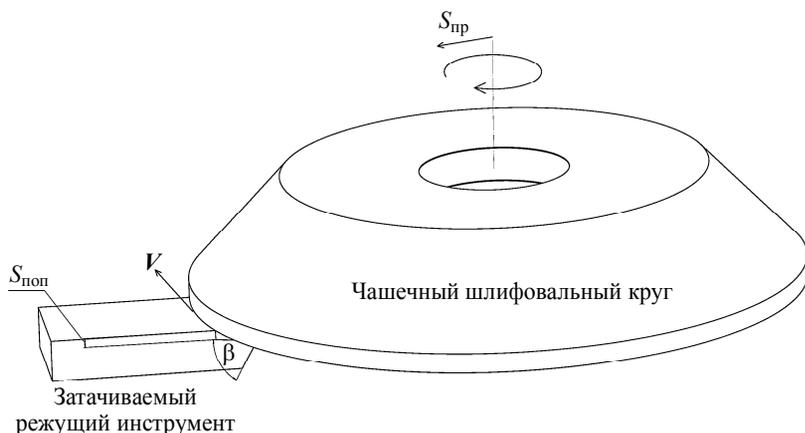


Рис. 1. Схема затачивания режущего элемента

Затачиваемый режущий элемент, имеющий форму клина с углом заострения β , закреплен неподвижно в специальном крепежном приспособлении. Шлифовальный круг (в данном случае чашечный конический) вращается вокруг своей оси и обеспечивает постоянную линейную скорость V (м/с) в зоне шлифования. Кроме того, шлифовальный круг поступательно движется в сторону затачиваемого режущего элемента с постоянной скоростью, равной величине продольной подачи $S_{пр}$ (м/мин). В процессе затачивания с поверхности режущего элемента снимается слой материала, равный величине поперечной подачи $S_{поп}$ (мм / дв. ход).

В результате воздействия абразивного инструмента на обрабатываемую заготовку в зоне резания возникают усилия, которые могут быть измерены в натуральных экспериментах с высокой точностью [2]. Данные об усилиях при алмазном шлифовании композиционных материалов WC – Co могут быть использованы для определения напряженно-деформированного состояния в рассматриваемых элементах режущего инструмента. Линейные скорости смещения поверхностного слоя материала непосредственно в месте контакта затачиваемого режущего элемента с шлифовальным кругом зависят от радиальных размеров круга. Производительность шлифования существенно зависит от рабочего диаметра круга и скорости сдвига в месте обработки.

Материал режущего элемента будем считать однородным, сплошным и изотропным. Его разрушение носит квазихрупкий характер и связано с накоплением повреждений структуры материала при относительно небольших неупругих деформациях. Технологические силы, действующие на режущий элемент со стороны абразивного инструмента, распределены равномерно по передней поверхности вдоль режущей кромки затачиваемого инструмента. Режущая кромка является абсолютно острой (радиус закругления равен нулю), и внешние силы распределены равномерно по ширине реза, а тыльная поверхность не нагружена.

Выберем в качестве объекта исследования клинообразную пластину из композиционного материала на основе WC – Co определенной ширины и длины с углом при вершине, варьирующимся в пределах $\beta = 50\text{--}60^\circ$.

Форма и условные размеры модели обрабатываемой пластины представлены на рис. 2.

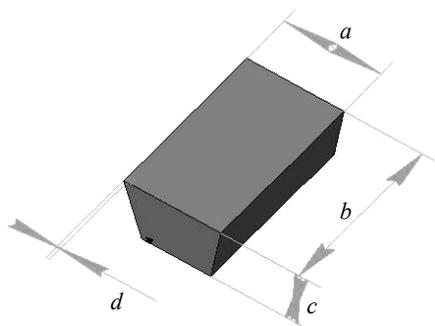


Рис. 2. Условные размеры обрабатываемой пластины

Длина пластины b может варьироваться в пределах от 3 до 21 мм в зависимости от назначения режущего элемента. Ширина пластины a зависит от конструктивных особенностей режущей части инструмента и определяет ресурс и эксплуатационные характеристики инструмента. Наибольший интерес при формировании режущего элемента инструмента представляет небольшой участок поверхности вдоль режущей кромки, где, как правило, происходит интенсивный контакт стружки с передней поверхностью инструмента в процессе резания материалов. К этому участку поверхности предъявляются повышенные требования по качеству обработки при подготовке инструмента. Ширина этого участка d от режущей кромки в глубину по поверхности достигает 1 мм. Толщина пластины c изменяется в пределах от 3 до 12 мм и влияет на ресурс инструмента и предельные нагрузки.

Модель процесса деформации и повреждения элемента реза при шлифовании

Для исследования формирования напряженно-деформированного состояния в зоне затачивания пластины из сплава высокой твердости была использована вычислительная модель, разработанная в рамках методов механики повреждаемых сред. В 3D-постановке моделировались процессы деформации и повреждения объемной области, показанной на рис. 2, со следующими размерами: $c = 3$ мм, $a = 21$ мм, $b = 12$ мм, $\beta = 50^\circ$.

Физико-математическая модель механического поведения повреждаемой среды включала уравнения сохранения массы, импульса и энергии, записанные в рамках лагранжевого подхода континуальной механики. Для описания кинетического процесса развития повреждений в композиционном материале WC – Co использована модифицированная модель Джонсона – Холмквиста [8, 9].

Определяющее уравнение в повреждаемой среде имеет вид

$$\sigma_{ij} = (1 - D)(-p\delta_{ij} + S_{ij}), \quad (1)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора эффективного напряжения; D – параметр поврежденности среды; δ_{ij} – символ Кронекера; p , S_{ij} – давление и девиатор тензора напряжения в конденсированной фазе поврежденной среды.

Параметр поврежденности среды D вычислялся путем суммирования приращений на дискретных интервалах времени, соответствующих шагу интегрирования:

$$D = \sum_{k=1} [\Delta \varepsilon_{\text{eq}}^p]_k / \varepsilon_f, \quad (2)$$

где $\Delta D_k = [\Delta \varepsilon_{\text{eq}}^p]_k / \varepsilon_f$ – приращение параметра поврежденности за шаг по времени Δt_k ; $\varepsilon_{\text{eq}}^p$ – интенсивность неупругой деформации; ε_f – предельная деформация в момент макроскопического разрушения.

Уравнения состояния для конденсированной фазы сплава ВК6 (WC – wt 5,7 % Со) использовано в полиномиальной форме Ми – Грюнайзена [9]:

$$P = A_1 \xi + A_2 \xi^2 + A_3 \xi^3 + (B_0 + B_1 \xi) \rho_0 E_T \quad \text{при } \xi = [(\rho / \rho_0) - 1] > 0 \text{ (сжатие)}, \quad (3)$$

$$P = T_1 \xi + T_2 \xi^2 + B_0 \rho_0 E_T, \quad \text{при } \xi < 0 \text{ (растяжение)},$$

где P – давление; $A_1, A_2, A_3, B_0, B_1, T_1, T_2$ – постоянные материала; ρ, ρ_0 – текущая и начальная массовые плотности соответственно; E_T – тепловая составляющая удельной внутренней энергии.

Для сплава ВК6 принималось допущение о совпадении модулей объемного сжатия $T_1 = A_1$ при сжатии и растяжении.

Параметры B_0 и B_1 определяют изменение параметра Грюнайзена Γ от степени сжатия: $\Gamma = B_0 / (1 + \xi)$, $B_1 = 0$.

Девиатор напряжений определяется из решения уравнения

$$\frac{dS_{ij}}{dt} = 2\mu(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\dot{\varepsilon}_{kk}), \quad (4)$$

где μ – модуль сдвига; $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – компоненты тензора скорости деформации; dS_{ij}/dt – производная Яуманна для компонент тензора девиатора напряжения в конденсированной фазе материальной частицы.

В качестве критерия пластичности использовано условие Мизеса

$$\sigma_{\text{eq}} \leq \sigma_S, \quad (5)$$

$$\text{где } \sigma_{\text{eq}} = [(3/2)S_{ij}S_{ij}]^{1/2}.$$

Сопrotивление сдвигу композиционного материала WC – wt 5,7 % Со в диапазоне скоростей деформации от 10^{-3} до 10^3 c^{-1} описывалось соотношением

$$\sigma_S = [A + B\varepsilon_p^n][1 - \frac{T - T_r}{T_m - T_r}]^m, \quad (6)$$

где A, B, n, m – постоянные материала; T_r, T_m – комнатная температура и температура плавления по шкале Кельвина соответственно;

$$\varepsilon_p = \int_0^t (\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij})^{1/2} dt. \quad (7)$$

Для определения численных значений коэффициентов модели были использованы экспериментальные данные о механических характеристиках композиционного материала WC – Co с различной концентрацией кобальтовой связки [10–13]. Анализ экспериментальных данных о деформации композитов WC – Co свидетельствует о том, что в широком диапазоне скоростей деформации зависимость прочности от давления практически отсутствует. При этом степень деформации до разрушения при сжатии у композита ВК6 составляет $\epsilon_f \sim 4\text{--}5\%$. Критерий локального разрушения материальной частицы модельной среды имеет вид $D = 1$.

Для описания механического поведения твердого композиционного материала ВК6 были использованы следующие значения параметров модели:

$$A_1 = 3,62 \cdot 10^8 \text{ кПа}, A_2 = 6,94 \cdot 10^8 \text{ кПа}, A_3 = 0, B_0 = 1, B_1 = 0,$$

$$T_1 = 3,62 \cdot 10^8 \text{ кПа}, T_2 = 0, T_r = 300 \text{ К}, T_m = 1768 \text{ К}, \mu = 2,8 \cdot 10^8 \text{ кПа},$$

$$A = 3 \cdot 10^6 \text{ кПа}, B = 89 \cdot 10^6 \text{ кПа}, n = 0,65, m = 1, \epsilon_f = 0,04.$$

Начальные условия в объемной области были заданы в предположении об отсутствии в начальный момент внутренних напряжений и равномерном распределении температуры.

Граничные условия показаны на рис. 3. Условия закрепления пластины показаны на рис. 3, а. Жесткое закрепление задано на нижней и торцевой поверхностях. На части верхней поверхности, вне зоны шлифования, заданы условия свободной поверхности. На боковых поверхностях заданы граничные условия, соот-

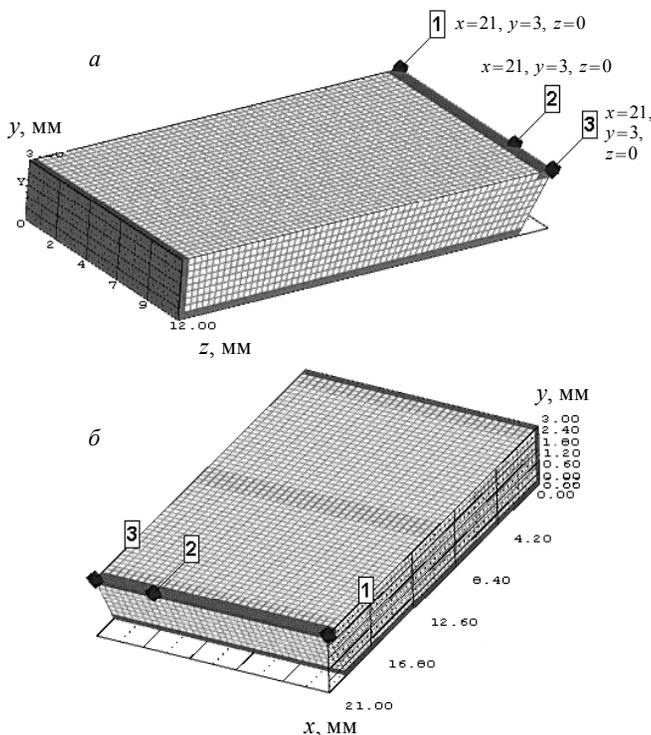
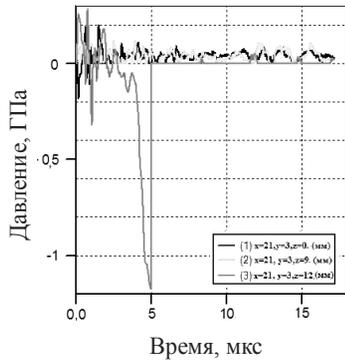
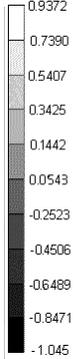


Рис. 3. Расчетная модель обрабатываемой пластины

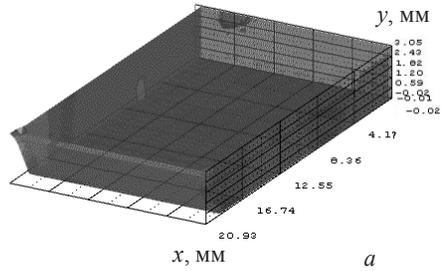
$F = 10 \text{ Н}, V = 33 \text{ м/с}, T = 430 \text{ }^\circ\text{С}$



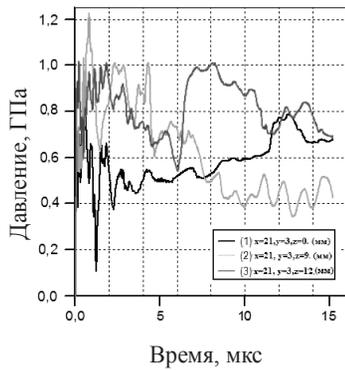
Давление, ГПа



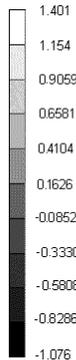
$V = 33 \text{ м/с}, T = 430 \text{ }^\circ\text{С}$



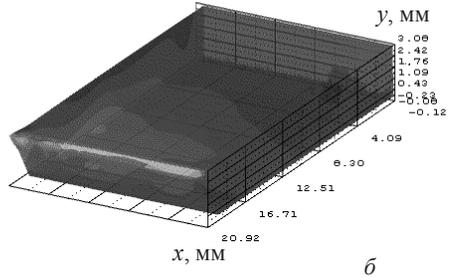
$F = 100 \text{ Н}, V = 33 \text{ м/с}, T = 430 \text{ }^\circ\text{С}$



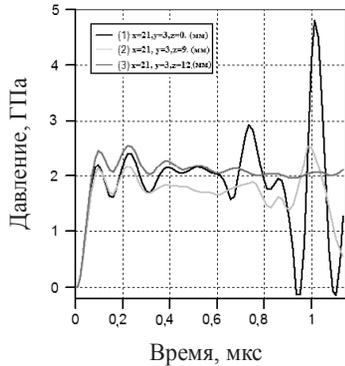
Давление, ГПа



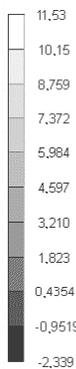
$V = 33 \text{ м/с}, T = 430 \text{ }^\circ\text{С}$



$F = 300 \text{ Н}, V = 33 \text{ м/с}, T = 430 \text{ }^\circ\text{С}$



Давление, ГПа



$V = 33 \text{ м/с}, T = 430 \text{ }^\circ\text{С}$

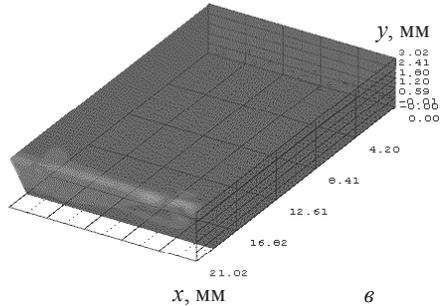


Рис. 4. Расчетные значения давления

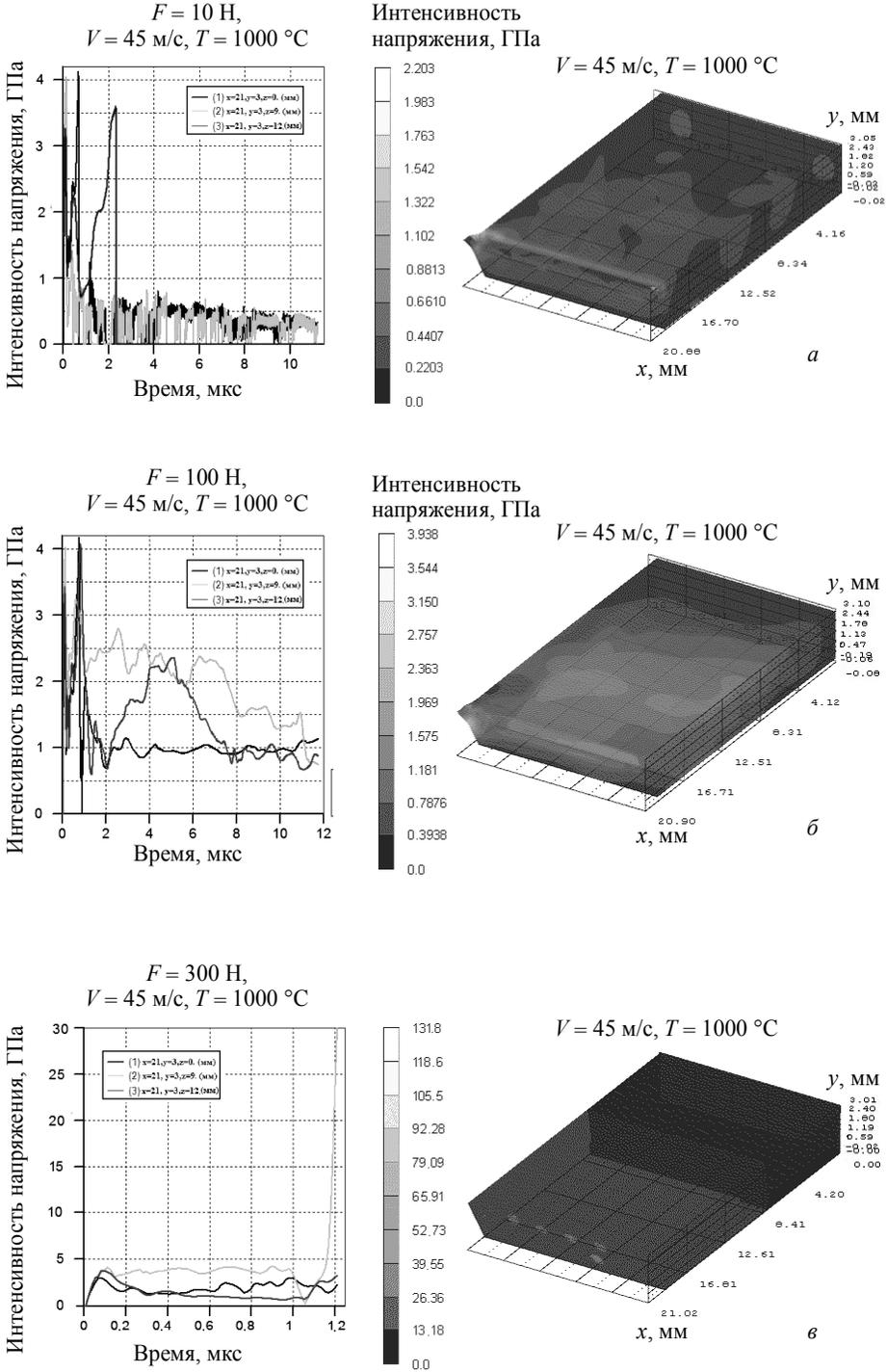


Рис. 5. Расчетные значения интенсивности сдвиговых напряжений

На рис. 6, а и б показано квазистационарное поле параметра поврежденности, формирующееся при скорости сдвига $V = 45$ м/с, $T = 1273$ К и прижимающих усилиях 10 и 100 Н. При прижимающих усилиях 300 Н в пластине происходит интенсивное развитие повреждений на глубине свыше 1мм (рис. 6, в)).

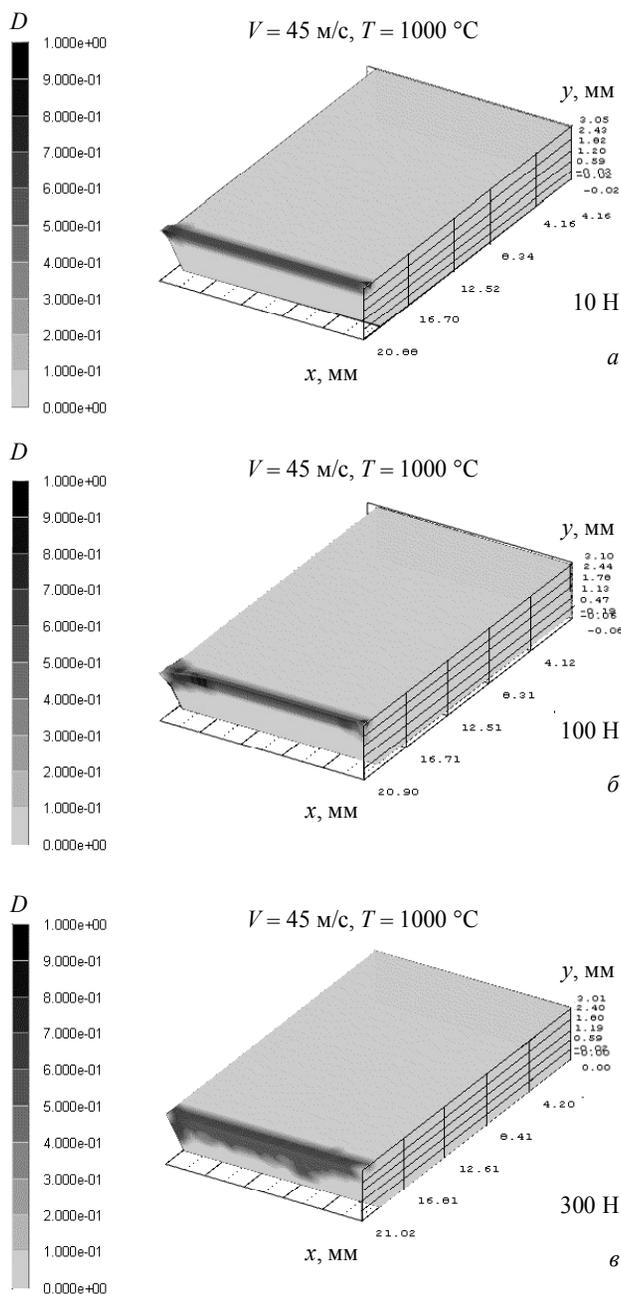


Рис. 6. Расчетные значения параметра поврежденности

При величине прижимающих усилий до 100 Н повреждения материала режущей кромки под поверхностью шлифования не наблюдается. С увеличением усилия более 100 Н и скоростях, превышающих 33 м/с, наблюдается разрушение режущей кромки с вырывами отдельных блоков твердого сплава на протяжении всей длины лезвия. Непосредственно под поверхностью контактной зоны, в объеме затачиваемой пластины формируется область поврежденного материала. Опасными, с точки зрения интенсивного развития микроповреждений в приповерхностных слоях и зонах, находящихся вблизи области обработки, являются режимы шлифования со следующими комбинациями скорости шлифования – прижимающего усилия: 15 м/с – 300 Н, 33 м/с – 100 Н, 33 м/с – 300 Н, 45 м/с – 300 Н. Стоит также отметить, что режимы, при которых в процессе обработки на затачиваемой кромке наблюдались зоны отрицательного давления, являются неблагоприятными с точки зрения качества обработанной поверхности (15 м/с – 10 Н, 33 м/с – 10 Н).

Результаты моделирования процесса шлифования пластины из сплава ВК6 при линейной скорости ~ 45 м/с и прижимающем усилии 300 Н свидетельствуют о возможности образования повреждений в объеме пластины на глубине свыше 1 мм под обрабатываемой поверхностью.

С увеличением времени процесса низкоскоростного шлифования может возрастать температура в зоне обработки. При температурах, превышающих ~ 900 К, увеличивается пластичность кобальтовой связки и самого композита WC – Co [10–12].

Анализ полученных данных о распределении параметра поврежденности в обрабатываемой пластине свидетельствует о том, что при температуре 1273 К критические условия для возникновения микроповреждений в приповерхностных слоях возникают при более низких силах резания, чем при температуре 703 К.

Результаты моделирования процессов деформации и повреждения композита WC – Co при шлифовании согласуются с результатами экспериментальных исследований сил резания при различных методах алмазного шлифования твердого сплава [2]. Было установлено, что традиционное алмазное затачивание композита WC – Co без применения электрических процессов осуществляется при усилиях до 200 Н. Алмазное затачивание с непрерывной электрохимической правкой поверхности алмазного круга может быть реализовано при усилиях до 80 Н, а электрохимическое алмазное затачивание – при усилиях ~ 55 Н.

Комбинированный метод, сочетающий электрохимическое алмазное затачивание с одновременной непрерывной электрохимической правкой поверхности алмазного круга, обеспечивает шлифование при усилиях ~ 30 Н.

Результаты моделирования свидетельствуют о том, что уменьшение прижимающих усилий в диапазоне от 100 до 10 Н способствует уменьшению поврежденности композита WC – Co в зоне режущей кромки. Полученные результаты обосновывают возможность повышения качества заточки твердосплавных режущих элементов с применением комбинированных методов электроалмазного шлифования.

Заключение

Предложена физико-математическая модель процессов деформации, повреждения и разрушения квазихрупких инструментальных композиционных материалов высокой твердости при шлифовании алмазным кругом, позволяющая прово-

дить оценку повреждений и напряженно-деформированного состояния при заданных режимах шлифования.

С использованием модели проведено исследование процессов деформации пластин из композита марки ВК6 со специфической конфигурацией при алмазном шлифовании с линейной скоростью сдвига от 15 до 45 м/с, прижимающих усилиях 10, 100 и 300 Н и температурах от 703 до 1273 К.

Показано, что для затачивания алмазным абразивным кругом режущих элементов из композиционных инструментальных материалов группы ВК (WC – Co), имеющих специфические геометрию и габаритные размеры, присущие для инструмента, обрабатывающего композиционные неметаллические материалы, рекомендуется добиваться линейных скоростей на контактирующих поверхностях в пределах от 33 до 45 м/с.

Для достижения удовлетворительного качества подготовленных режущих поверхностей и лезвия инструмента из исследованных твердых сплавов необходимо использовать условия обработки, гарантирующие усилия шлифования, не превышающие 100 Н.

Модель может быть адаптирована и для других марок квазихрупких высокопрочных инструментальных материалов. Таким образом, появляется возможность оценить напряженно-деформированное состояние при различных сочетаниях абразивного инструмента и обрабатываемых композиционных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Malkin S., Hwang T.W.* Grinding Mechanisms for Ceramics. // CIR. Annals – Manufacturing Technology. 1996. V. 45. P. 569–580.
2. *Янюшкин А.С., Шоркин В.С.* Контактные процессы при электроалмазном шлифовании. М.: Машиностроение-1, 2004. 230 с.
3. *Лобанов Д.В., Янюшкин А.С.* Подготовка режущего инструмента для обработки композиционных материалов. Братск: Брат. ун-т, 2011. 192 с.
4. *Лобанов Д.В., Янюшкин А.С.* Технология инструментального обеспечения производства изделий из композиционных неметаллических материалов. Старый Оскол: ТНТ, 2012. 296 с.
5. *Doman D., Warkentin A., Bauer R.* Finite element modeling approaches in grinding // Int. J. Machine Tools and Manufacture. 2009. V. 49. P. 109–116.
6. *Aurich J., Kirsch B.* Kinematic simulation of high-performance grinding for analysis of chip parameters of single grains // CIRP J. Manufacturing Science and Technology. 2012. V. 5. P. 164–174.
7. *Hamdi H., Zahouani H., Bergheau J.* Residual stresses computation in grinding process // J. Materials Proc. Technology. 2004. V. 147. P. 277–285.
8. *Johnson G.R., Holmquist T.J.* An improved computational constitutive model for brittle materials // High Pressure Science and Technology – 1993. New York, 1994.
9. AUTODYN-TM Interactive non-linear dynamic analysis software theory manual. Horsam, UK: Century Dynamics Inc., 1998.
10. *Okamoto S., Nakazono Y., Otsuka K., Shimoitani Y., Takad J.* Mechanical properties of WC/Co cemented carbide with larger WC grain size // Materials Characterization. 2005. V. 55. P. 281–287.
11. *Milman Yu.V., Luyckx S., Northrop IT.* Influence of temperature, grain size and cobalt content on the hardness of WC – Co alloys // Int. J. Refract Met Hard Mater. 1999. V. 17. P. 39–44.
12. *Braiden P.M., Dawger R.W., Airey R.* Time- dependent strength parameters for tungsten carbides containing 6 or 16 % cobalt at room and elevated temperatures // Mech. Phys. Solids. 1977. V. 25. P. 257–268.

Статья поступила 13.05.2013 г.

Skripnyak V.V., Lobanov D.V., Skripnyak V.A., Yanyushkin A.S. MODELING OF THE STRESS-STRAIN STATE IN A PLATE OF A COMPOSITE MATERIAL (WC – Co) AT DIAMOND GRINDING. The aim of this paper is to model the deformation occurring in a plate of a composite material (WC – Co) during the grinding process. It is shown that, with an increase in the grinding rate, damages can appear in the volume of a plate of the BK6 hard alloy at a depth of more than 1 mm under the processed surface. The results of the numerical simulation correlate with the experimental data obtained earlier for combined electrodiamond processing.

Keywords: ceramic composites, hard alloys, damage, mechanical properties, grinding, computational model, electrodiamond processing, cutting tool.

SKRIPNYAK Vladimir Vladimirovich (Tomsk State University)

E-mail: skrp2012@yandex.ru ;

LOBANOV Dmitriy Vladimirovich (Bratsk State University)

E-mail: mf_nauka@brstu.ru

SKRIPNYAK Vladimir Albertovich (Tomsk State University)

E-mail: skrp2006@yandex.ru

YANYUSHKIN Alexandr Sergeevich (Bratsk State University)

E-mail: yanyushkin@brstu.ru

УДК 004.94 : 539.62

А.Ю. Смолин, Г.М. Анিকেева, Е.В. Шилько, С.Г. Псахье

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ НАНОСТРУКТУРНЫХ ПОКРЫТИЙ НА ТИТАНОВОЙ ПОДЛОЖКЕ ПРИ НАНОИНДЕНТИРОВАНИИ¹

Представлены результаты моделирования процесса наноиндентирования упрочняющих покрытий на титановой подложке методом подвижных клеточных автоматов в трехмерной постановке. Изложены особенности метода подвижных клеточных автоматов для описания упруго-пластического поведения материалов. Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными подтверждает адекватность предложенной модели.

Ключевые слова: наноиндентирование, моделирование, метод подвижных клеточных автоматов, наноструктурный титан, упрочняющие биосовместимые покрытия.

Эффективным способом повышения функциональных свойств материалов является нанесение на их поверхность специальных покрытий. Например, для имплантатов используются многокомпонентные биоактивные наноструктурные покрытия (МБНП) на основе тугоплавких соединений TiC (Ti,Ta)(C,N) с добавлением специальных элементов (Ca, Zr, Si, O, P), которые улучшают как трибологические, так и биоактивные свойства поверхности [1–4]. Следует отметить, что эти покрытия имеют наноструктурное состояние и малую толщину. Для изучения механических свойств покрытий и пленок в настоящее время в основном используется метод наноиндентирования [5–9]. Наноиндентирование – это процесс контролируемого внедрения сверхтвердого наконечника определенной формы (индентора) под действием нарастающей нагрузки в плоскую поверхность образца на глубину менее 100 нм, при этом в процессе нагружения постоянно измеряется сила P , действующая на индентор, и глубина его погружения в материал h [4]. На основе анализа измеряемой $P-h$ -диаграммы можно получать такие характеристики материала, как модуль упругости, упругое восстановление и нанотвердость. При таком анализе в основном используется методика Оливера – Фарра [6]. Однако, как показали, например, авторы работы [7], корректно определить модуль упругости и нанотвердость тонких покрытий и пленок по данным наноиндентирования с использованием стандартной методики Оливера – Фарра возможно только при условии совпадения этих характеристик у покрытия и подложки. Очевидно, что в большинстве практически важных приложений это условие не выполняется. Одним из способов решения этой проблемы может быть использование компьютерного моделирования, в рамках которого возможно получение достаточно точных зависимостей для индентирования покрытий на любых подложках.

¹ Работа выполнена в рамках государственного контракта № 16.523.12.3002 от 13.05.2011 по ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2012 гг.» и по скоординированному с Евросоюзом проекту ViNaT, Contract No. 295322, FP7-NMP-2011-EU-Russia, NMP.2011.1.4-5, а также проекта III.23.2.4. Программы фундаментальных исследований СО РАН на 2013–2016 гг.

Для моделирования механического поведения материала на макроскопическом уровне в рамках любого метода необходимо задавать такие параметры, как модули упругости, предел текучести, параметры деформационного упрочнения, предел прочности и т.д. Обычно эти параметры определяются из стандартных механических испытаний на сжатие-растяжение, изгиб, из измерения скорости распространения упругих волн и т.д. В этой связи следует отметить, что уникальные свойства МБНП обусловлены их сложной структурой, которая определяется технологическими параметрами их получения. Объемных материалов с такой структурой не существует. Следовательно, получить свойства материалов покрытий из обычных испытаний не представляется возможным. Существуют методики получения механических характеристик и даже диаграммы нагружения из данных по наноиндентированию, основанные на привлечении численных расчетов методом конечных элементов [8–12]. Однако эти методики разработаны для однородных материалов, а для случая систем «покрытие – подложка» таких методик пока не существует.

К настоящему времени опубликовано довольно много работ, посвященных численному моделированию процесса наноиндентирования. В зависимости от используемого метода они могут быть разделены на две группы. В работах первой группы используется метод конечных элементов и рассматривается поведение материала на макромасштабе. Авторы изучают особенности распределения напряжений в материале при различных значениях параметров системы, таких, как форма индентора, пластические свойства материала и т.д. [9–11]. Вторая группа работ посвящена применению метода молекулярной динамики (метод частиц) для изучения на микроуровне механизмов зарождения пластической деформации в непосредственной близости от вершины индентора [13–15].

В данной работе на основе метода частиц предложена численная модель, описывающая механическое поведение МБНП на титановой подложке на мезо- и макромасштабном уровнях. Основная цель состоит в разработке модели, которая позволит изучать процессы наноиндентирования и скретч-теста (царапания) такого рода покрытий. Для этого нужен метод, который позволил бы моделировать на различных масштабах как процесс упруго-пластического деформирования, так и разрушение твердых тел. Как известно, лучшими возможностями для моделирования разрушения, в том числе зарождения и роста трещин, фрагментации и перемешивания вещества, обладают методы частиц, берущие свое начало из метода молекулярной динамики. Следует подчеркнуть, что из всех методов частиц только метод подвижных клеточных автоматов (МСА) способен корректно описывать пластическую деформацию консолидированных тел [16–20], поэтому он и был выбран для построения модели. Отметим, что данная работа представляет собой лишь первый шаг, на котором разработанная модель применяется для изучения деформации покрытия и подложки при небольшой глубине проникновения, соответствующей наноиндентированию, и процессы разрушения не учитываются.

При разработке модели наноструктурного биосовместимого покрытия на титановой подложке, а также ее тестирования были использованы результаты натурных экспериментов, опубликованные в работах [1–4, 21, 22]. Так, геометрические характеристики модельной системы «покрытие – переходный слой – подложка» определялись по фотографии поперечного среза реального образца [21]. Исходя из того, что при малых нагрузках (до 250 мН) в экспериментах не наблюдается разрушение материала покрытия [21, 22], механическое поведение материалов и подложки, и покрытия описывалось в рамках упруго-пластического при-

ближения. Полученные по результатам наноиндентирования значения модуля Юнга и предела текучести учитывались при задании параметров модельных материалов.

Уруго-идеальнопластическое тело характеризуется следующими параметрами: плотность ρ , модуль сдвига G , модуль объемной упругости K и предел текучести σ_y . На основе данных, приведенных в [21, 22], значения указанных параметров для подложки составили $\rho = 4500 \text{ кг/м}^3$, $G = 41 \text{ ГПа}$, $K = 100 \text{ ГПа}$ и $\sigma_y = 2 \text{ ГПа}$, а для покрытия – $\rho = 4700 \text{ кг/м}^3$, $G = 76 \text{ ГПа}$, $K = 167 \text{ ГПа}$ и $\sigma_y = 15 \text{ ГПа}$.

В экспериментах по наноиндентированию обычно используются алмазные пирамиды Берковича. Модуль упругости алмаза (1141 ГПа) приблизительно в пять раз превышает модуль упругости для МБНП (200–250 ГПа). Поэтому в данных расчетах материал индентора принимался абсолютно жестким (недеформируемым).

Описание модели

Метод МСА [16–20] является новым эффективным численным методом, основанным на концепции дискретных элементов (частиц), которая существенно отличается от концепции численных методов классической механики сплошных сред. Следует отметить, что развитие дискретных методов началось с метода молекулярной динамики (MD), который был разработан для изучения материалов на атомном уровне. Однако возможности атомного описания на пространственных и временных масштабах, возмозе представляют интерес для инженерных приложений, существенно ограничены. Это побудило развитие MD-подобных методов для мезо- и макромасштабных уровней (методов частиц), в которых структурные элементы имеют конечный размер (в отличие от атомов, которые являются точечными массами) и взаимодействуют только с ближайшими соседями. Самым известным представителем этой группы методов является метод дискретных элементов (DEM) [23, 24]. DEM в настоящее время широко используется для изучения механического поведения гранулированных (сыпучих) и слабосвязанных сред, в частности реологических особенностей этих систем, их разрушения и перемешивания [25, 26]. В то же время, до недавнего времени применимость DEM для изучения механического поведения консолидированных тел была ограничена главным образом хрупкими пористыми материалами [24–27] в связи с недостаточным развитием математических моделей для вычисления сил взаимодействия дискретных элементов. В частности, большинство моделей дискретных элементов используют парные (двухчастичные) потенциалы (или силы) взаимодействия. Это упрощение приводит к ряду искусственных эффектов в поведении ансамбля частиц, таких, как анизотропия, навязанное упаковкой значение модуля сдвига и коэффициента Пуассона и т. д. [24, 27]. Среди проблем, возникающих вследствие этих искусственных эффектов, важно отметить неадекватность моделирования накопления необратимых деформаций (пластичности) материалов.

Последние исследования показали, что многие проблемы DEM, в том числе касающиеся описания консолидированных твердых тел на различных масштабах, могут быть решены с помощью многочастичности сил взаимодействия между элементами. В [20] описан обобщенный подход к построению многочастичных сил взаимодействия для дискретных элементов, который основан на идее, применяемой для записи межатомных потенциалов в методе погруженного атома [28].

Так, выражение для силы, действующей на дискретный элемент i , имеющий N_i соседей, может быть записано в виде

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^{N_i} \mathbf{F}_{ij}^{\text{pair}} + \mathbf{F}_i^{\Omega}.$$

Эта сила представлена в виде суперпозиции парных компонентов $\mathbf{F}_{ij}^{\text{pair}}$, зависящих от пространственного расположения автомата i по отношению к соседу j , и объемнозависящей компоненты \mathbf{F}_i^{Ω} , обусловленной коллективными эффектами окружения.

В рамках метода МСА предполагается, что любой материал состоит из определенного количества элементарных объектов конечного размера (автоматов), которые взаимодействуют друг с другом и могут перемещаться в пространстве, тем самым моделируя реальные процессы деформации. Движение автоматов описывается уравнениями Ньютона – Эйлера:

$$\begin{cases} m_i \frac{d^2 \mathbf{R}_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^{N_i} \mathbf{F}_{ij}^{\text{pair}} + \mathbf{F}_i^{\Omega}, \\ \hat{J}_i \frac{d^2 \boldsymbol{\theta}_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^{N_i} \mathbf{M}_{ij}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{R}_i, \boldsymbol{\theta}_i, m_i$ и \hat{J}_i – радиус-вектор, вектор вращения, масса и момент инерции i автомата соответственно, $\mathbf{F}_{ij}^{\text{pair}}$ – парная сила механического взаимодействия автоматов i и j , \mathbf{F}_i^{Ω} – объемнозависящая сила, действующая на автомат i и обусловленная взаимодействием его соседей с другими автоматами. В последнем уравнении $\mathbf{M}_{ij} = q_{ij}(\mathbf{n}_{ij} \times \mathbf{F}_{ij}^{\text{pair}}) + \mathbf{K}_{ij}$, здесь q_{ij} – расстояние от центра i -го автомата до точки его взаимодействия («контакта») с j -м автоматом, $\mathbf{n}_{ij} = (\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i)/r_{ij}$ – единичный вектор ориентации пары и r_{ij} – расстояние между центрами автоматов (рис. 1), \mathbf{K}_{ij} – крутящий момент, обусловленный относительным вращением автоматов в паре (см. ниже).

Отметим, что автоматы пары могут представлять собой части различных тел или одного консолидированного тела. Поэтому их взаимодействие не всегда является действительно контактным. По этой причине здесь и далее мы будем слово «контакт» брать в кавычки. Более того, как показано на рис. 1, a , размер автомата характеризуется одним параметром d_i , но это не означает, что форма автомата представляет собой шар. Реальная форма автомата определяется областью его «контактов» с соседями. Например, если использовать в качестве начальной ГЦК-упаковку, то автоматы будут иметь форму ромбического додекаэдра, а если кубическую, – то автоматы будут представлять собой кубики.

Для локально изотропных сред объемнозависящая компонента может быть записана через давление P_j в объеме соседнего автомата j следующим образом [16, 18]:

$$\mathbf{F}_i^{\Omega} = -A \sum_{j=1}^{N_i} P_j S_{ij} \mathbf{n}_{ij},$$

где S_{ij} – площадь контакта i -го автомата с j -м, а A – некий материальный параметр.

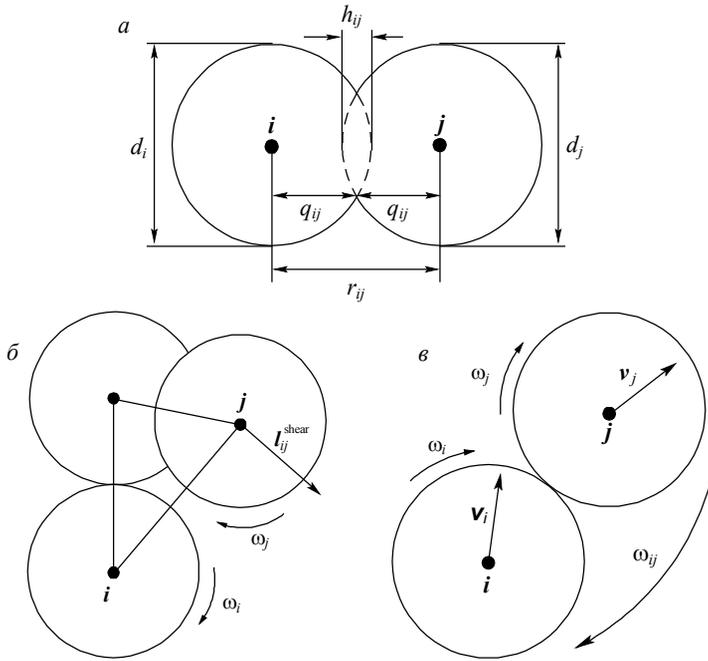


Рис. 1. Параметры пространственного отношения пары подвижных клеточных автоматов

С другой стороны, общая сила, действующая на автомат, может быть представлена в виде суммы нормальной F_{ij}^n и касательной (сдвиговой) F_{ij}^τ компонент:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_i &= \sum_{j=1}^{N_i} (\mathbf{F}_{ij}^{\text{pair}} - AP_i S_{ij} \mathbf{n}_{ij}) = \sum_{j=1}^{N_i} [(F_{ij}^{\text{pair},n}(h_{ij}) - AP_j S_{ij}) \mathbf{n}_{ij} + F_{ij}^{\text{pair},\tau} (l_{ij}^{\text{shear}}) \mathbf{t}_{ij}] = \\
 &= \sum_{j=1}^{N_i} (\mathbf{F}_{ij}^n + \mathbf{F}_{ij}^\tau),
 \end{aligned} \tag{2}$$

где $F_{ij}^{\text{pair},n}$ – нормальная, а $F_{ij}^{\text{pair},\tau}$ – касательная силы взаимодействия в паре, зависящие соответственно от межавтоматного перекрытия h_{ij} (рис. 1, а) и относительного тангенциального смещения l_{ij}^{shear} (рис. 1, б), рассчитанного с учетом вращения обоих автоматов [19, 20]. Отметим, что, несмотря на то, что последнее выражение в уравнении (2) формально соответствует обычной записи силы взаимодействия в методе дискретных элементов [23–27], оно принципиально отличается вследствие многочастичности центрального взаимодействия автоматов.

Используя процедуру осреднения для тензора напряжений в частице, изложенную в [20, 27], выражение для компонент усредненного тензора напряжений в центре автомате i принимает вид

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{V_i} \sum_{j=1}^{N_i} q_{ij} n_{ij,\alpha} F_{ij,\beta}, \tag{3}$$

где α и β обозначают оси X, Y, Z лабораторной системы координат, V_i – текущий объем автомата i , $n_{ij,\alpha}$ – α -компонента единичного вектора \mathbf{n}_{ij} и $F_{ij,\beta}$ – β -компонента полной силы, действующей в точке «контакта» между автоматами i и j .

Давление P_i , или, что то же самое, среднее напряжение $\bar{\sigma}_{\text{mean}}^i$, в объеме автомата может быть вычислено через компоненты тензора напряжений:

$$P_i = -\bar{\sigma}_{\text{mean}}^i = -\frac{\bar{\sigma}_{xx}^i + \bar{\sigma}_{yy}^i + \bar{\sigma}_{zz}^i}{3}. \quad (4)$$

Знание компонент тензора напряжений позволяет вычислять все его инварианты в объеме автомата, в частности интенсивность напряжений:

$$\bar{\sigma}_{\text{int}}^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\bar{\sigma}_{xx}^i - \bar{\sigma}_{yy}^i)^2 + (\bar{\sigma}_{yy}^i - \bar{\sigma}_{zz}^i)^2 + (\bar{\sigma}_{zz}^i - \bar{\sigma}_{xx}^i)^2 + 6[(\bar{\sigma}_{xy}^i)^2 + (\bar{\sigma}_{yz}^i)^2 + (\bar{\sigma}_{xz}^i)^2]}. \quad (5)$$

Из уравнений (1), (2) и (3) следует, что выражения для вычисления $F_{ij}^{\text{pair},n}$ и $F_{ij}^{\text{pair},\tau}$ определяют реологические свойства модельной среды.

В дальнейшем параметры взаимодействия подвижных клеточных автоматов для удобства рассматриваются в относительных (удельных) величинах. Так, центральное и тангенциальное взаимодействие автоматов i и j характеризуется соответствующими напряжениями η_{ij} и τ_{ij} :

$$\begin{cases} F_{ij}^n = \eta_{ij} S_{ij}, \\ F_{ij}^\tau = \tau_{ij} S_{ij}. \end{cases} \quad (6)$$

Отметим, что в большинстве работ, посвященных описанию и использованию метода МСА, уравнения и формулы метода записаны для двумерного случая. В данной работе используется трехмерная версия метода МСА, поэтому здесь напряжение сдвига τ_{ij} представляет собой вектор, лежащий в плоскости, нормальной к единичному вектору \mathbf{n}_{ij} .

Деформацию автомата i при его центральном взаимодействии с автоматом j можно характеризовать следующей безразмерной величиной (нормальной деформацией):

$$\xi_{ij} = \frac{q_{ij} - d_i / 2}{d_i / 2}. \quad (7)$$

В общем случае каждый автомат представляет собой различные материалы и перекрытие в паре некоторым образом перераспределяется между i -м и j -м автоматами:

$$\Delta h_{ij} = \Delta q_{ij} + \Delta q_{ji} = \Delta \xi_{ij} d_i / 2 + \Delta \xi_{ji} d_j / 2, \quad (8)$$

где символ Δ означает приращение величины за временной шаг Δt численного интегрирования уравнений движения (1). Правило перераспределения деформации в паре тесно связано с выражением для вычисления силы взаимодействия автоматов. Это выражение для центрального взаимодействия похоже на соотношения Гука для диагональных компонент тензора напряжений:

$$\Delta \eta_{ij} = 2G(\Delta \xi_{ij}) + (1 - 2G/K)P_i, \quad (9)$$

где K – модуль объемной упругости, G – модуль сдвига материала автомата i , P_i – давление автомата i , которое может быть вычислено с помощью формул (3) и (4) на предыдущем шаге по времени или по схеме предиктор – корректор.

Для определения параметра, характеризующего деформацию сдвига в паре автоматов $i - j$, воспользуемся формулой кинематики для свободного движения пары как абсолютно жесткого (недеформируемого) тела:

$$\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega}_{ij} \times \mathbf{r}_{ij}, \quad (10)$$

где $\mathbf{r}_{ij} = (\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i)$, \mathbf{v}_i – трансляционная скорость автомата i , $\boldsymbol{\omega}_{ij}$ – мгновенная скорость вращения пары как целого. Если мы умножим обе части уравнения (10) векторно слева на r_{ij} и пренебрежем вращением вокруг оси пары (т.е. пусть $\boldsymbol{\omega}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} = 0$, так как вращение вокруг оси пары не производит деформацию сдвига), то получим следующую формулу:

$$\boldsymbol{\omega}_{ij} = \frac{\mathbf{r}_{ij} \times (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)}{r_{ij}^2} = \frac{\mathbf{n}_{ij} \times (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)}{r_{ij}}. \quad (11)$$

Кроме такого вращения пары как целого (определяется разницей в поступательных скоростях автоматов) каждый из автоматов вращается со своей собственной вращательной скоростью $\boldsymbol{\omega}_i$ (рис. 1, в). Разница между этими вращениями обуславливает деформацию сдвига. Так, приращение деформации сдвига автоматов i и j за шаг Δt определится относительным тангенциальным смещением в точке «контакта» пары $\Delta l_{ij}^{\text{shear}}$, деленной на расстояние между автоматами

$$\Delta \gamma_{ij} + \Delta \gamma_{ji} = \frac{\Delta l_{ij}^{\text{shear}}}{r_{ij}} = \frac{(q_{ij}(\boldsymbol{\omega}_{ij} - \boldsymbol{\omega}_i) \times \mathbf{n}_{ij} + q_{ji}(\boldsymbol{\omega}_{ij} - \boldsymbol{\omega}_j) \times \mathbf{n}_{ij}) \Delta t}{r_{ij}}. \quad (12)$$

Выражение для вычисления силы тангенциального взаимодействия подвижных клеточных автоматов похоже на соотношения Гука для недиагональных компонент тензора напряжений:

$$\Delta \boldsymbol{\tau}_{ij} = 2G(\Delta \gamma_{ij}), \quad (13)$$

и является чистым парным.

Разные скорости вращения каждого из автоматов также приводят к деформации относительного «изгиба» и «кручения» (последнее присутствует только в 3D) в паре. Очевидно, что сопротивление относительному вращению в паре вызывает крутящий момент, величина которого пропорциональна разнице между поворотами автоматов:

$$\mathbf{K}_{ij} = -(G_i + G_j)(\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_i). \quad (14)$$

Формулы (1) – (4), (6) – (9), (11) – (14) описывают механическое поведение линейно-упругого тела в рамках метода МСА. Отметим, что соотношения (8), (9), (12) и (13) записаны в приращениях, т. е. в гипоупругой форме. В работе [29] показано, что эта модель дает результаты, соответствующие численному решению методом конечных разностей обычных уравнений механики сплошной среды для изотропной линейно-упругой среды. Это обстоятельство позволило использовать метод МСА совместно с численными методами механики сплошных сред в рамках единого дискретно-континуального подхода. В работе [19] показано, что

именно учет вращения автоматов совместно с многочастичностью центрального взаимодействия позволяет МСА адекватно описывать изотропный отклик материала на приложенную нагрузку.

Для описания упругопластического поведения в рамках метода МСА предлагается использовать теорию пластического течения, а именно модель идеальной пластичности с критерием Мизеса. Для этого к методу МСА [20] был адаптирован известный алгоритм Уилкинса [30, 31]. Этот алгоритм состоит в решении упругой задачи на каждом временном шаге и последующем «сбросе» компонент девиатора тензора напряжений $D_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} - 1/3 \sigma_{kk} \delta_{\alpha\beta}$ на поверхности текучести Мизеса в случае, когда интенсивность напряжений превышает заданную предельную величину (рис. 2):

$$D'_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta} \cdot M,$$

где $M = \sigma_{pl} / \sigma_{int}$, σ_{int} – интенсивность напряжений, σ_{pl} – радиус круга текучести Мизеса.

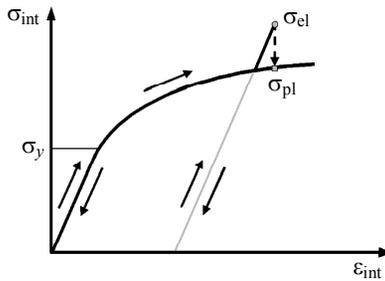


Рис. 2. Схема работы алгоритма Уилкинса

Этот алгоритм в применении к автомату i может быть записан в следующих обозначениях:

$$\begin{cases} (\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}^i)' = (\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}^i - \bar{\sigma}_{\text{mean}}^i) M_i + \bar{\sigma}_{\text{mean}}^i, \\ (\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^i)' = \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^i M_i, \end{cases} \quad (14)$$

где $\alpha, \beta = X, Y, Z$ и $\alpha \neq \beta$, $(\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^i)'$ – скорректированные компоненты осредненного тензора напряжений, $\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^i$ – компоненты тензора напряжений, которые получаются в результате решения упругой задачи на текущем временном шаге, $M_i = \sigma_{pl}^i / \bar{\sigma}_{int}^i$ – текущее значение коэффициента «сброса», σ_{pl}^i – текущее значение радиуса круга текучести Мизеса для автомата i .

Удельные величины нормальных и касательных сил взаимодействия корректируются с использованием текущего значения коэффициента M по аналогии с алгоритмом Уилкинса для компонент осредненного тензора напряжений (14):

$$\begin{cases} \eta'_{ij} = (\eta_{ij} - P_i) M_i + P_i, \\ \tau'_{ij} = \tau_{ij} M_i, \end{cases}$$

где η'_{ij} и τ'_{ij} представляют собой скорректированные значения удельных сил (на-

пряжений). Легко показать, что подстановка этих соотношений в выражения (2) и (3) автоматически обеспечивает корректировку компонент осредненного тензора напряжений в автомате к кругу текучести [20].

Таким образом, реологические свойства материала автомата i определяются заданием единой кривой упрочнения $\bar{\sigma}_{\text{int}}^i = \Phi(\bar{\epsilon}_{\text{int}}^i)$ (здесь $\bar{\epsilon}_{\text{int}}^i$ – интенсивность осредненного тензора деформаций, компоненты которого могут быть вычислены аналогично $\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^i$ [20, 27]), эта зависимость также называется функцией отклика автомата.

Для численного интегрирования уравнений движения (1) можно использовать схему Верле в скоростной форме, модифицированную введением предиктора для оценки $\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^i$ на текущем шаге времени.

Пару элементов можно рассматривать как виртуальный бистабильный автомат (у него существуют два состояния: связанная и несвязанная пара), что позволяет явно моделировать процессы разрушения в методе МСА. Заданием правил перехода пары из состояния связанной в состояние несвязанной формулируется критерий разрушения моделируемого материала, который, вообще говоря, определяется физическими механизмами деформации материала. Важным преимуществом описанного выше формализма является то, что в нем возможно непосредственное применение классических критериев (Губера – Мизеса – Генки, Друккера – Прагера, Кулона – Мора, Подгорски и т.д.), которые записаны в тензорной форме. Заметим, что переключение пары автоматов в несвязанное состояние может привести к изменению сил, действующих на элементы, в частности, они не будут сопротивляться удалению друг от друга.

Таким образом, метод МСА позволяет моделировать механическое поведение твердого тела на различных масштабах, в том числе пластическое и вязкоупругое деформирование, разрушение, фрагментацию и дальнейшее взаимодействие фрагментов как сыпучей (гранулированной) среды.

Тестовые расчеты

Моделируемая система «индентор – покрытие – подложка» представляет собой гетерогенную структуру, составленную из материалов с существенно различными механическими свойствами: сверхпрочный алмаз (индентор), прочное покрытие и пластичная подложка из титана. Поэтому вначале целесообразно провести тестовые расчеты по одноосному сжатию каждого из материалов, из которых состоит система. Эти расчеты позволяют определить параметры функции отклика подвижных клеточных автоматов, имитирующих свойства исследуемых материалов, а также представительный объем соответствующих модельных образцов.

Для проведения тестовых расчетов генерировались трехмерные кубические образцы с ГЦК-упаковкой автоматов, которые подвергались одноосному сжатию. Исходя из среднего размера зерна наноструктурного титана и МНБП размер автомата выбирался равным 10 нм. Нагружение имитировалось заданием единой скорости движения в вертикальном направлении всем автоматам верхнего слоя автоматов и фиксацией в вертикальном направлении автоматов нижнего слоя. При этом всем автоматам нижнего и верхнего слоя разрешалось движение в горизонтальной плоскости для того, чтобы напряженное состояние в образце было более однородным.

На основе расчетных данных был проведен анализ сходимости упругих и прочностных свойств образцов с увеличением их размеров. Для этого рассчитывались модули упругости на сжатие (наклон первого линейного участка диаграммы нагружения) и пределы текучести (максимальное значение диаграммы) для каждого из образцов. Относительное отклонение расчетных модулей упругости E_i всех образцов от модуля Юнга E в зависимости от размера основания кубических образцов h_i приведено на рис. 3, а. Относительное отклонение расчетных значений пределов текучести σ_i от заданного значения σ_y приведено на рис. 3, б. На основании представленных данных можно заключить, что представительными можно считать образцы с размером основания 200 нм (20 автоматов).

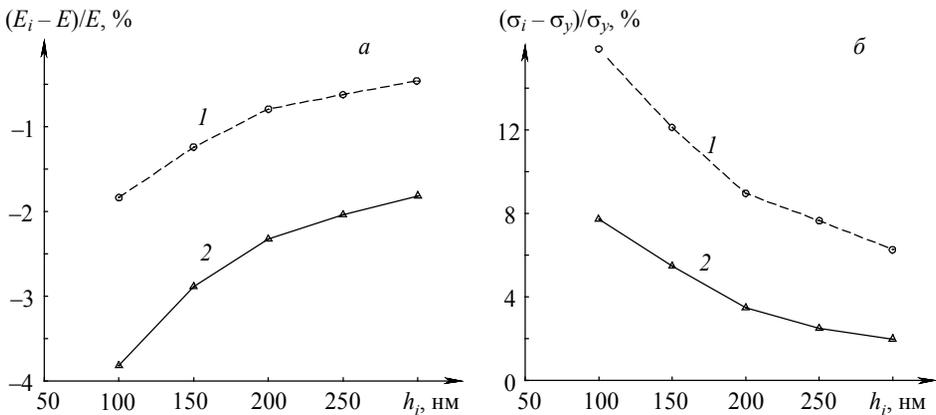


Рис. 3. Сходимость модуля упругости (а) и предела текучести (б) тестовых образцов титана (1) и МБНП (2)

Результаты расчетов и их обсуждение

После получения параметров функции отклика автоматов для материалов моделируемой системы была построена полная модель процесса индентирования. Эта модель состояла из образца исследуемого материала и индентора. Геометрически индентор Берковича представляет собой трехгранную пирамиду, в основании которой лежит правильный треугольник. Реальные размеры инденторов производителями оборудования не сообщаются, приводятся углы наклона граней относительно оси индентора и радиус скругления вершины. Угол между гранями пирамиды Берковича и ее осью составляет $65,3^\circ$. Скругление вершины в расчетах учитывалось усечением пирамиды так, чтобы сторона получающейся треугольной грани на вершине равнялась радиусу скругления (50 нм). Высота индентора в модели определялась максимальной глубиной вдавливания, известной из экспериментальных данных, и в различных расчетах варьировалась от 90 до 950 нм.

Моделировалось два вида образцов, каждый из которых имел форму параллелепипеда, их высота варьировалась от 700 до 2500 нм. Первый вид образцов состоял полностью из наноструктурного титана, а второй – из нескольких слоев, нижний из которых представлял собой подложку из титана, а верхний – МБНП-покрытие. Толщина такого покрытия составляет 350–2000 нм [1–4, 21, 22]. Между покрытием и титановой подложкой находится промежуточный слой толщиной

порядка 50 нм. В модели свойства промежуточного слоя задавались средним между значениями для покрытия и подложки.

Общий вид построенной модели представлен на рис. 4, *а* в виде ГЦК-упаковки сферических частиц. Процесс нагружения имитировался путем задания одинаковой скорости движения всем автоматам индентора. Для исключения динамических эффектов эта скорость плавно менялась от 0 до -1 м/с, после чего оставалась постоянной до заданного времени погружения. Затем скорость движения индентора плавно менялась на противоположную ($+1$ м/с), после чего индентор с постоянной скоростью двигался вверх. Для того чтобы предотвратить смещение нагружаемого материала как целого, нижний слой автоматов подложки задавался жестко закрепленным.

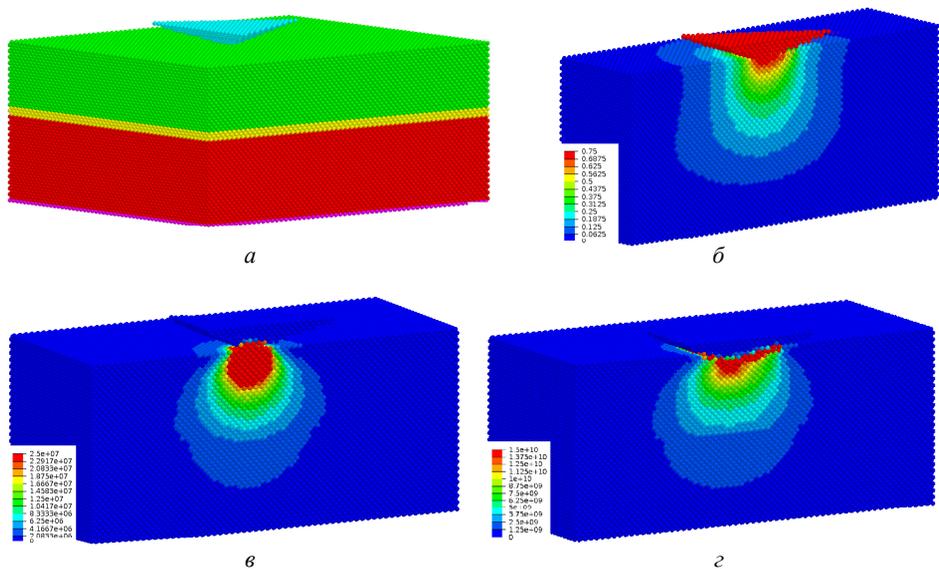


Рис. 4. Общий вид модели (*а*), распределение скоростей автоматов (*б*), абсолютные значения в м/с, а также интенсивности напряжений (Па) по сечению образца при его упругой (*в*) и пластической (*г*) деформации

Анализ поля скоростей в начале индентирования, когда материал деформируется упруго, показывает, что смещения в материале локализуются под индентором и направлены преимущественно вертикально, а не в боковых направлениях (рис. 4, *б*). Упругие напряжения также локализованы под индентором и распространяются в глубь материала (рис. 4, *в*). Полученные данные хорошо согласуются с экспериментальными, которые показывают, что результаты индентирования тонкого покрытия в значительной степени определяются свойствами подложки. Рис. 4, *г* показывает поле интенсивности напряжений при максимальной глубине проникновения, когда покрытие и подложка деформируются уже пластически. Видно, что максимальные напряжения находятся в непосредственной близости от индентора, однако из-за меньшего предела текучести у подложки она также деформируется пластически. Поля напряжений, представленные на рис. 4, *г*, находятся в хорошем качественном согласии с данными из литературы [33, 34].

Главной характеристикой процесса наноиндентирования является зависимость силы P , действующей на индентор, от глубины вдавливания h , так называемая $P-h$ -диаграмма. В случае малой глубины проникновения эта кривая в основном определяется свойствам покрытия. Чем больше глубина проникновения, тем большее влияние на кривую оказывают свойства подложки. Поэтому вначале проводилось моделирование погружения индентора в образец из титана, затем в образец с покрытием на небольшую глубину и в заключение – индентирование на значительные глубины проникновения в образец с покрытием.

На рис. 5 представлены расчетная и экспериментальная [21] $P-h$ -диаграммы индентирования титанового образца на глубину 650 нм. Их анализ позволяет сделать вывод об адекватности построенной модели для описания механического поведения материала подложки.

Для определения адекватности параметров модельного покрытия был сделан расчет с глубиной внедрения в образец с покрытием равной 60 нм [32]. Результаты этого расчета сравнивались с экспериментальными данными при максимальной нагрузке на индентор 2 мН [21, 22]. Сравнение показало хорошее качественное и количественное соответствие численного расчета эксперименту, что позволило сделать вывод об адекватности предложенной модели механического поведения наноструктурных биосовместимых покрытий.

Для изучения влияния подложки на $P-h$ -диаграмму моделировалось погружение на большую глубину. В связи с этим использовались образцы с общей высотой 2,5 и 5 мкм и размером автоматов 70 и 140 нм соответственно. Толщина покрытия составляла 1000 нм. $P-h$ -диаграммы, полученные в результате моделирования и эксперимента [21, 22], показаны на рис. 6. Видно очень хорошее качественное и количественное соответствие между численными и экспериментальными данными.

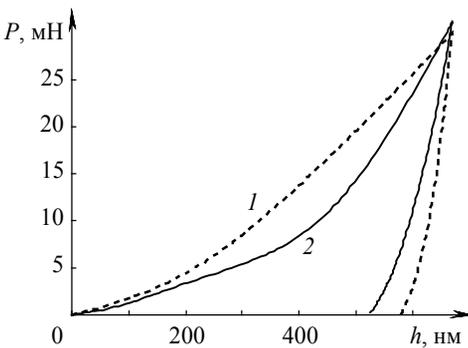


Рис. 5. Экспериментальная [21] (1) и расчетная (2) диаграммы индентирования титанового образца

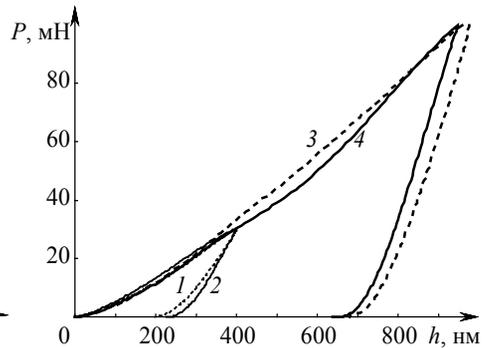


Рис. 6. Экспериментальные [21, 22] (1, 3) и расчетные (2, 4) диаграммы индентирования титанового образца с наноструктурным покрытием

Другой важной характеристикой процесса наноиндентирования является размер и форма отпечатка индентора на поверхности материала. На рис. 7 показано поперечное сечение модельного образца при проникновении индентора на глубину 950 нм (соответствующий эксперимент имеет нагрузку 100 мН). Видно, что на поверхности по контуру отпечатка индентора не образуется навалов (pile-up), что согласуется с данными, полученными в [21, 22] для больших нагрузок.

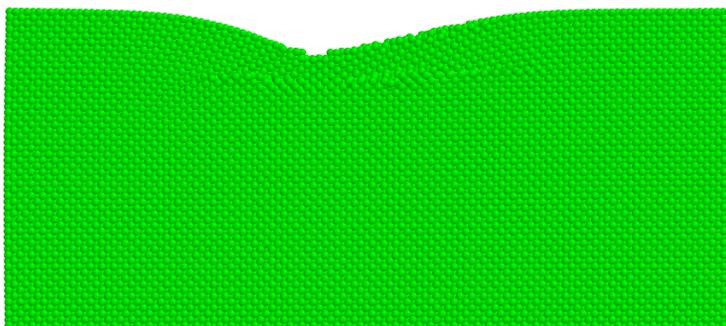


Рис. 7. Поперечное сечение модельного образца после индентирования

Заключение

Предложена модель для описания механического поведения биоактивных наноструктурных покрытий на титановой подложке методом подвижных клеточных автоматов в трехмерной постановке. На основе тестовых расчетов получены значения параметров модели. Проведено моделирование внедрения абсолютно жесткого индентора Берковича на различные глубины в образцы из титана и наноструктурного покрытия на титановой подложке. Согласие результатов расчетов с имеющимися экспериментальными данными свидетельствуют о том, что предложенная модель хорошо описывает особенности поведения таких систем. Дальнейшее развитие модели может включать в себя использование более сложных определяющих уравнений для подложки и покрытия, явный учет разрушения и внутренней структуры материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shtansky D.V., Kiryukhantsev-Korneev Ph.V., Bashkova I.A., et al.* Multicomponent nanostructured films for various tribological applications // *Int. J. Refractory Metals & Hard Materials*. 2010. 28. P. 32–39.
2. *Shtansky D.V., Gloushankova N.A., Bashkova I.A., et al.* Multifunctional biocompatible nanostructured coatings for load-bearing implants // *Surface and Coatings Technology*. 2006. 201. P. 4111–4118.
3. *Shtansky D.V., Levashov E.A., Gloushankova N.A., et al.* Structure and properties of CaO- and ZrO₂-doped TiC_xN_y coatings for biomedical applications // *Surface and Coatings Technology*. 2004. 182. P. 101–111.
4. *Левашов Е.А., Петржик М.И., Тюрина М.Я. и др.* Многослойные наноструктурные тепловыделяющие покрытия. Получение и аттестация механических и трибологических свойств // *Металлург*. 2010. № 9. С. 66–74.
5. *Головин И. Ю.* Наноиндентирование и его возможности. М.: Машиностроение. 2009. 316 с.
6. *Oliver W.C., Pharr G.M.* An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments // *J. Materials Research*. 1992. No. 7. P. 1564–1583.
7. *Шугуров А.Р., Панин А.В., Оскомов К.В.* Особенности определения механических характеристик тонких пленок методом наноиндентирования // *ФТТ*. 2008. Т. 5. Вып. 6. С. 1007–1012
8. *Venkatesh T.A., Van Vliet K.J., Giannakopoulos A.E., Suresh S.* Determination of elastoplastic properties by instrumented sharp indentation: guidelines for property extraction // *Scripta Materialia*. 2000. V. 42. No. 9. P. 833–839.

9. Dao M., Chollacoop N., Van Vliet K.J., et al. Computational modeling of the forward and reverse problems in instrumented sharp indentation // *Acta Materialia*. 2001. 49. P. 3899–3918.
10. Bucaille J.L., Stauss S., Felder E., Michler J. Determination of plastic properties of metals by instrumented indentation using different sharp indenters // *Acta Materialia*. 2003. V. 51. P. 1663–1678.
11. Ogasawara N., Chiba N., Chen X. Measuring the plastic properties of bulk materials by single indentation test // *Scripta Materialia*. 2006. V. 54. P. 65–70.
12. Sreeranganathan A., Gokhale A., Tamirisakandala S. Determination of local constitutive properties of titanium alloy matrix in boron-modified titanium alloys using spherical indentation // *Scripta Materialia*. 2008. V. 58. No. 2. P. 114–117.
13. Zimmerman J.A., Kelchner C.L., Klein P.A. et al. Surface step effects on nanoindentation // *Physical Review Letters*. 2001. V. 87. P. 165507–165511.
14. Saraev D., Miller R.E. Atomic-scale simulations of nanoindentation-induced plasticity in copper crystals with nanometer-sized nickel coatings // *Acta Materialia*. 2006. V. 54. P. 33–45.
15. Mei J., Li J., Ni Y., Wang H. Multiscale simulation of indentation, retraction and fracture processes of nanocontact // *Nanoscale Research Letters*. 2010. V. 5. P. 692–700.
16. Псахье С.Г., Остермайер Г.П., Дмитриев А.И. и др. Метод подвижных клеточных автоматов как новое направление дискретной вычислительной механики. I. Теоретическое описание // *Физическая мезомеханика*. 2000. Т. 3. № 2. С. 5–13.
17. Попов В.Л., Псахье С.Г. Теоретические основы моделирования упругопластических сред методом подвижных клеточных автоматов. I. Однородные среды // *Физическая мезомеханика*. 2001. Т. 4. № 1. С. 15–25.
18. Psakhie S.G., Horie Y., Ostermeyer G.-P., et al. Movable cellular automata method for simulating materials with mesostructure // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2001. No. 37. P. 311–334.
19. Смолин А.Ю., Роман Н.В., Добрынин С.А., Псахье С.Г. О вращательном движении в методе подвижных клеточных автоматов // *Физическая мезомеханика*. 2009. Т. 12. № 2. С. 17–22.
20. Psakhie S.G., Horie Y., Shilko E.V., et al. Development of discrete element approach to modeling heterogeneous elastic-plastic materials and media // *Int. J. Terraspace Science and Engineering*. 2011. V. 3. No. 1. P. 93–125.
21. Левашов Е.А., Петржиж М.И., Кирюханцев-Корнеев Ф.В. и др. Структура и механическое поведение при индентировании биосовместимых наноструктурированных титановых сплавов и покрытий // *Металлург*. 2012. № 5. С. 79–89.
22. Levashov E.A., Petrzhik M.I., Shtansky D.V., et al. Nanostructured titanium alloys and multicomponent bioactive films: Mechanical behavior at indentation // *Materials Science and Engineering: A*. 2013. V. 570. P. 51–62.
23. Cundall P.A. and Strack O.D.L. A discrete numerical model for granular assemblies // *Geotechnique*. 1979. V. 29. No. 1. P. 47–65.
24. Jing L. and Stephansson O. *Fundamentals of Discrete Element Method for Rock Engineering: Theory and Applications*. Oxford: Elsevier, 2007. 562 p.
25. Sibille L., Nicot F., Donze F.V., and Darve F. Material instability in granular assemblies from fundamentally different models // *Int. J. Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2007. V. 31. No. 3. P. 457–481.
26. Martin C.L. and Bouvard D. Study of the cold compaction of composite powders by the discrete element method // *Acta Materialia*. 2003. V. 51. No. 2. P. 373–386.
27. Potyondy D.O. and Cundall P.A. A bonded-particle model for rock // *Int. J. Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2004. V. 41. No. 8. P. 1329–1364.
28. Daw M.S., Foiles S.M., and Baskes M.I. The embedded-atom method: A review of theory and applications // *Materials Science Reports*. 1993. V. 9. No. 7–8. P. 251–310.
29. Псахье С.Г., Смолин А.Ю., Стефанов Ю.П. и др. Моделирование поведения сложных сред на основе комбинированного дискретно-континуального подхода // *Физическая мезомеханика*. 2003. Т. 6. № 6. С. 11–21.

30. *Wilkins M.L.* Computer Simulation of Dynamic Phenomena. Berlin: Springer-Verlag, 1999. 246 p.
31. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений / Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–263,
32. *Psakhie S.G., Smolin A.Yu., Shilko E.V., et al.* Modeling nanoindentation of TiCCaPON coating on Ti substrate using movable cellular automaton method // Computational Materials Science. 2013. (в печати, <http://dx.doi.org/10.1016/j.commatsci.2013.03.006>)
33. *Muliana A., Steward R., Haj-ali R.M., and Saxena A.* Artificial neural network and finite element modeling of nanoindentation tests // Metallurgical and Materials Transactions A. 2002. 33A. P. 1939–1948.
34. *Feng Z.-Q., Zei M., and Joli P.* An elasto-plastic contact model applied to nanoindentation // Computational Materials Science. 2007. V. 38. P. 807–813.

Статья поступила 13.03.2013 г.

Smolin A.Yu., Anikeeva G.M., Shilko E.V., Psakhie S.G. MODELING DEFORMATION OF NANOSTRUCTURED COATINGS ON A TITANIUM SUBSTRATE UNDER NANOINDENTATION. Results of modeling nanoindentation of hardened coating on a titanium substrate by movable cellular automaton method in the 3D formulation are presented. The peculiarities of the method for describing elastic-plastic behavior of the materials are described. Comparing of the modeling results with the experimental data confirms the proposed model validation.

Keywords: nanoindentation, modeling, movable cellular automaton method, nanostructured titanium, hardening biocompatible coatings.

SMOLIN Alexey Yurievich (Tomsk State University)

E-mail: asmolin@ispms.tsc.ru

ANIKEEVA Galina Maximovna (Tomsk State University)

E-mail: anikeeva@ispms.tsc.ru

SHIL'KO Evgenii Viktorovich (Tomsk State University)

E-mail: shilko@ispms.tsc.ru

PSAKH'E Sergey Grigorievich (Tomsk State University)

E-mail: sp@ispms.tsc.ru

УДК: 532.135+532.517.4+678.053.3

А.В. Шваб, А.А.Марценко, М.С. Марценко

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ ВЫСОКОКОНЦЕНТРИРОВАННОЙ ГРАНУЛИРОВАННОЙ СРЕДЫ В СМЕСИТЕЛЬНОМ БУНКЕРЕ¹

Проводится исследование динамики высококонцентрированной гранулированной хорошо сыпучей среды в вертикальном смесительном бункере. Для описания такого течения авторами предложена дифференциальная модель, основой которой являются положения механики сплошной среды с учетом реологических свойств зернистого материала и дополнительное уравнение переноса хаотической энергии пульсационного движения гранул. Достоверность предложенной модели устанавливается сопоставлением рассчитанного распределения осредненной скорости среды с опытными данными.

Ключевые слова: гидродинамика, скорость, гранулированная среда, условия скольжения, инерционный режим, напряжение, вихрь, функция тока.

В настоящее время в порошковой технологии нашли широкое применение аппараты дозирования, сушки, смешения и усреднения гранулированных сред, а также их транспортирование плотным слоем [1, 2]. Перспективным направлением дальнейшего совершенствования этих устройств является создание математических моделей, способных, адекватно опытным данным, объяснить и предсказать происходящие в них процессы [3, 4].

Анализ научной литературы по экспериментальным и теоретическим исследованиям показывает, что движение плотного слоя гранулированной среды условно разделяют на два режима: квазистатический, соответствующий малым скоростям сдвига, который описывается в рамках теории предельного равновесия, и инерционный, отвечающий большим скоростям сдвига [5]. При инерционном режиме движения внутренние напряжения в среде возникают вследствие переноса импульса гранулами аналогично тому, как это происходит при хаотическом движении молекул в жидкости или газе. Такое течение гранулированного материала отличает его от квазистатического режима и приводит к существенной зависимости внутренних напряжений от скорости сдвига. Описание этого режима течения основывается, как правило, на законах сохранения массы и импульса. Такой режим течения высококонцентрированной среды получил название «теории быстрых движений гранулированных сред».

Физическая и математическая постановка задачи

Рассматривается установившееся гравитационное течение высококонцентрированной гранулированной среды в вертикальном бункере с расположенными в нем горизонтальными тарелками для интенсивного перемешивания основного и ключевого компонентов смеси. Схема такого бункера изображена на рис. 1. На входе в канал сверху с постоянной скоростью подается несмешанная однородная

¹ Работа поддержана грантом РФФИ 13-08-00372 а.

по физическим свойствам гранулированная среда. В процессе ее движения по каналу происходит процесс ее усреднения за счет явлений конвекции и диффузии, которая появляется за счет хаотического пульсационного движения гранул в инерционном режиме течения.

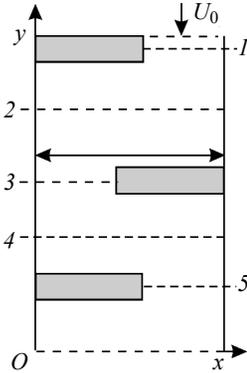


Рис. 1. Схема движения высококонцентрированной гранулированной среды в бункере

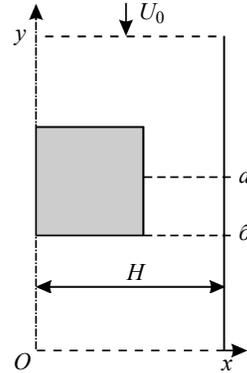


Рис. 2. Схема движения высококонцентрированной зернистой среды при сопоставлении расчетных и опытных данных [10]

Для описания динамики высококонцентрированной гранулированной среды в инерционном режиме течения воспользуемся системой уравнений, состоящей из уравнений переноса импульса и уравнения непрерывности. Путем осреднения этих уравнений по времени и с учетом представления корреляций пульсационных скоростей с помощью градиентной модели Буссинеска получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(B_0 + B) \frac{\partial U_x}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(B_0 + B) \frac{\partial U_x}{\partial y} \right] + \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \frac{\partial U_y}{\partial x}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_y}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(B_0 + B) \frac{\partial U_y}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(B_0 + B) \frac{\partial U_y}{\partial y} \right] + \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial y} \frac{\partial U_y}{\partial y}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Здесь B – модельный коэффициент кинематической вязкости, учитывающий дополнительный перенос импульса за счет пульсационного движения гранулированной среды и B_0 – постоянное значение вязкости для хорошо сыпучей зернистой среды, которое в общем случае может зависеть от напряжений в гранулированной среде.

Из опытных данных известно, также, что движение гранулированной среды в инерционном режиме напоминает турбулентное течение, обладающее пульсация-

ми скорости. Энергию этого стохастического движения [6] можно моделировать аналогично, как это осуществляется в теории турбулентности. Тогда уравнение для кинетической энергии стохастического движения E можно представить в виде уравнения переноса, которое имеет вид

$$\frac{\partial E}{\partial t} + U_x \frac{\partial E}{\partial x} + U_y \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(B_0 + B) \frac{\partial E}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(B_0 + B) \frac{\partial E}{\partial y} \right] + G - c_2 \frac{E^{3/2}}{L}; \quad (4)$$

$$B = c_1 \sqrt{EL}; \quad G = B \left[2 \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial U_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (5)$$

Здесь диссипация энергии стохастического движения гранулированной среды и определение модельного коэффициента вязкости B записываются с помощью формул Колмогорова – Прандтля. Перемещение гранул в пульсационном движении ограничено ввиду высокой концентрации гранулированной среды, что позволяет в первом приближении определить масштаб длины хаотического движения как величину постоянную ($L = \text{const}$).

В дальнейшем будем использовать безразмерную форму уравнений. Безразмерные переменные получим с использованием в качестве масштаба длины и скорости: соответственно расстояние H между стенками вертикального канала и среднюю вертикальную скорость U_0 на входе в бункер.

Систему уравнений (1) – (5) удобно преобразовать к эквивалентной системе уравнений в переменных вихрь – функция тока. Для этого введем определение вихря и функции тока по формулам

$$\Omega = \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}; \quad u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Подставляя в определение вихря значение скоростей u_x и u_y и учитывая, что рассматриваемая стационарная задача решается методом установления по времени, получим нестационарное уравнение Пуассона для определения функции тока в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \Omega. \quad (6)$$

После перекрестного дифференцирования уравнений (1) – (2), получим уравнение переноса вихря

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial u_x \Omega}{\partial x} + \frac{\partial u_y \Omega}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[(1+b) \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(1+b) \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right] + \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial^2 b}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + 4 \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

Уравнение переноса кинетической энергии пульсационного движения гранул представим в дивергентном и безразмерном виде:

$$\frac{\partial e}{\partial \tau} + \frac{\partial u_x e}{\partial x} + \frac{\partial u_y e}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[(1+b) \frac{\partial e}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(1+b) \frac{\partial e}{\partial y} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{b}{\text{Re}} \left[2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right] - c_2 \frac{e^{3/2}}{l}. \quad (8)$$

Безразмерное значение модельной вязкости определяется формулой

$$b = \frac{c_1}{\text{Re}} \sqrt{el}. \quad (9)$$

Здесь $\text{Re} = HU_0/B_0$ – число Рейнольдса, $e = E/U_0^2$, $b = B/B_0$, $u_x = U_x/U_0$, $u_y = U_y/U_0$, $l = L/H$, $\tau = tU_0/H$ и безразмерная форма координат x, y получена с помощью масштаба длины H , c_1 и c_2 – постоянные.

Для получения единственного решения используются следующие граничные условия. Во входном сечении для безразмерных значений вертикальной и горизонтальной составляющих вектора скорости используются условия: $u_y = -1$, $\partial u_x / \partial y = 0$. На выходной границе используются мягкие условия установления $\partial / \partial y = 0$ для всех искомых функций. На стенках канала нормальная компонента скорости равна нулю, а для тангенциальной составляющей скорости применяется условие скольжения. В работе [7] использование условия скольжения, которое было получено из определения тензора внутренних напряжений вблизи стенки, не привело к лучшей согласованности расчетов с опытными данными. В настоящей работе полагается, что на стенке скорость среды определяется не только величиной тензора напряжений, но и величиной сухого, кулоновского трения пары стенка – частица, и поэтому для определения условия скольжения вводится независимый эмпирический параметр, величина которого определяется из сопоставления численных и опытных данных. В безразмерном виде условие частичного скольжения на стенке для гранулированной среды можно представить в виде

$$\frac{\partial u_s}{\partial n} = \beta u_s, \quad (10)$$

где n – нормаль к стенке; u_s – тангенциальная составляющая вектора скорости; $\beta = \beta^0/H$ – безразмерное значение независимого эмпирического коэффициента (β^0 – размерный коэффициент скольжения), величина которого находится в диапазоне $0 \leq \beta \leq \infty$, причем значение $\beta = 0$ соответствует условиям полного скольжения среды на стенке, а $\beta \rightarrow \infty$ отвечает условию прилипания. Значение кинетической энергии на стенке равно нулю, на входе задается постоянное значение и на выходе используется условие Неймана. Следует отметить, что для лучшего согласования с опытом на передней части тарелки по направлению потока для скоростей используются условия прилипания, а на остальных границах – условие частичного скольжения (10).

Численный метод решения

Система дифференциальных уравнений (6) – (9) решается численно методом установления по времени. Каждое уравнение системы (6) – (9) может быть представлено в виде уравнения переноса транспортабельной скалярной субстанции Φ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial u_x \Phi}{\partial x} + \frac{\partial u_y \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + S. \quad (11)$$

Решение уравнений переноса проводится в «дельта»-форме ($\Delta\Phi = \Phi^{n+1} - \Phi^n$) на основе обобщенной неявной схемы переменных направлений, которая безусловно устойчива для линейного уравнения, имеет второй порядок точности по времени и для данной задачи представляет собой двухэтапный алгоритм [8]:

$$\frac{\Delta\Phi^*}{\Delta\tau} - \frac{1}{2}\Lambda_x(\Delta\Phi^*) = \Lambda_x(\Phi^n) + \Lambda_y(\Phi^n) + S,$$

$$\frac{\Delta\Phi^{**}}{\Delta\tau} - \frac{1}{2}\Lambda_y(\Delta\Phi^{**}) = \frac{\Delta\Phi^*}{\Delta\tau}, \quad \Phi^{n+1} = \Phi^n + \Delta\Phi^{**}.$$

Здесь Φ – представляет искомые функции $\Phi = \psi$, $\Phi = \Omega$, $\Phi = e$, а S – источник или сток. Значение операторов Λ_i содержит конвективные и диффузионные слагаемые в проекциях на ось x_i , разностная форма которых расписывается с помощью экспоненциальной схемы [9], которая снимает ограничение с сеточного числа Рейнольдса и имеет второй порядок точности по координатам.

Результаты расчетов

Достоверность численных исследований проверялась тестовыми расчетами на сеточную сходимость и сравнением с известными экспериментальными данными при обтекании высококонцентрированным потоком зернистой среды квадрата в плоском канале [10]. На рис. 2 показана схема этого течения с отмеченными на нем сечениями (а, б), в которых проводилось сравнение опытных [10] и расчетных данных для вертикальной составляющей вектора скорости u_y . Это сравнение представлено на рис. 3.

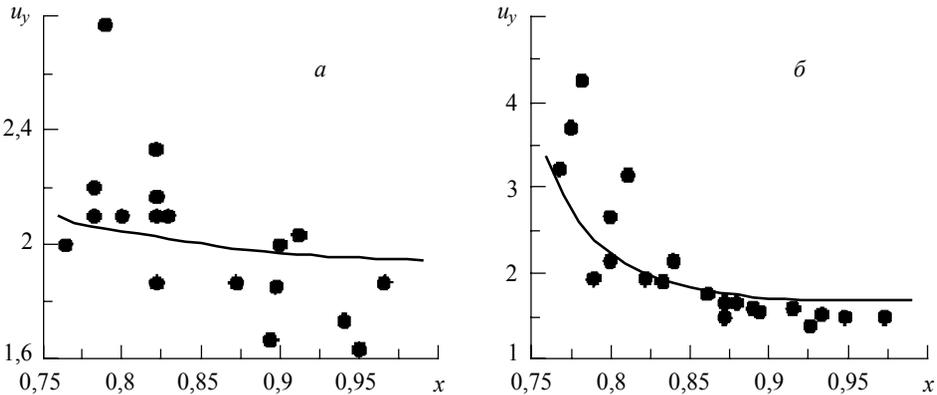


Рис. 3. Сопоставление расчетных и опытных данных [10] для вертикальной скорости u_y в зависимости от координаты x в сечениях а, б (см. рис. 2) при параметрах потока $Re = 10$, $c_1 \cdot l = 1,5$, $c_2 \cdot l = 10,5$, $\beta = 0$

На рис. 4 показано распределение осредненных линий тока в бункере. Из этого графика хорошо видны траектории движения гранулированной среды, а также застойные области, расположенные на горизонтальных тарелках в смесительном аппарате. Распределение изолиний осредненной кинетической энергии стохастического пульсационного движения в бункере показано на рис. 5.

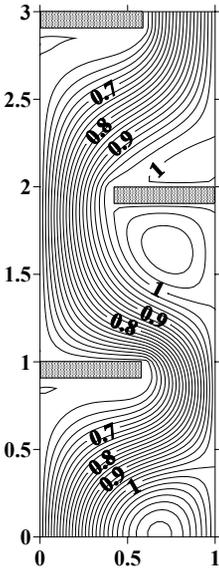


Рис. 4. Распределение линий тока гранулированной высококонцентрированной среды в бункере при параметрах, указанных на рис. 3

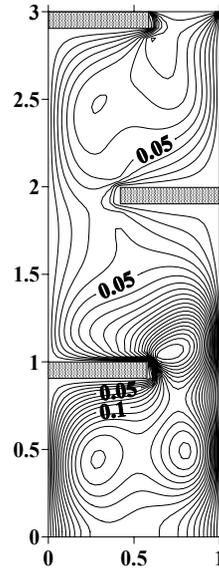


Рис. 5. Распределение изолиний кинетической энергии пульсационного движения зернистой среды в бункере при тех же параметрах

На рис. 6 показаны характерные распределения вертикальной составляющей скорости в зависимости от горизонтальной координаты x в сечениях, представленных пунктиром на рис. 1.

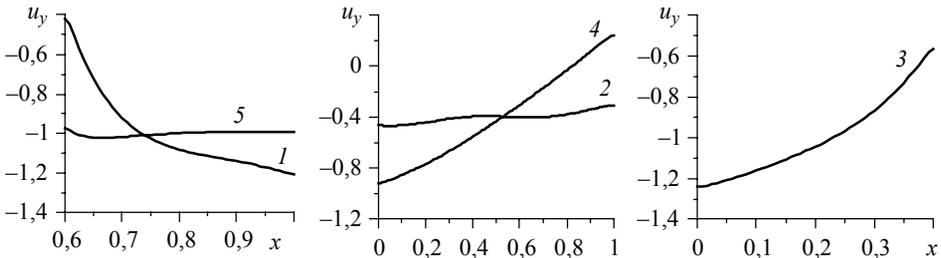


Рис. 6. Распределение вертикальной составляющей скорости в зависимости от горизонтальной координаты x в сечениях 1–5, показанных на рис. 1

Заключение

Предложенная модель, как показывает сравнение теоретических и экспериментальных данных, может быть использована для описания динамики высококонцентрированных потоков гранулированных и зернистых сред в инерционном режиме движения, а также при моделировании процессов смешения или усреднения гранулированных сред в аппаратах порошковой технологии. Разработанная модель движения плотного слоя может быть также полезна при оптимизации смесительного оборудования, использующего принцип движения среды с высокой концентрацией зернистых материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макаров Ю. И. Аппараты для смешения сыпучих материалов. М.: Машиностроение, 1973. 216 с.
2. Росляк А.Т., Бирюков Ю.А., Пачин В.Н. Пневматические методы и аппараты порошковой технологии. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1990. 272 с.
3. Shvab A. V., Martsenko M.S., Ryzhikh Yu.N. Modeling the hydrodynamics and the process of averaging a highly concentrated granulated medium in powder technology apparatuses // J. Engineering Physics and Thermophysics. 2011. V. 84. No. 4. P. 730–735.
4. Шваб А.В., Марценко М.С. Модель движения высококонцентрированной гранулированной среды // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 3 (15). С. 108–116.
5. Механика гранулированных сред. Теория быстрых движений: сб. ст.: пер. с англ. М.: Мир, 1985. 280 с.
6. Ahmadi G., Shahinpoor M. Towards a turbulent modeling of rapid flow of granular materials // Powder Technology, 1983. V. 35. No. 2. P. 241–248.
7. Hutter K., Sheiwiller T. Rapid Plane Flow of Granular Materials down a Chute // Mechanics of Granular Materials. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1983. P. 283–293.
8. Peyret R., Taylor T. Computational Methods for Fluid Flow. Springer-Verlag, 1983.
9. Patankar S. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. N.Y.: Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
10. Nedderman R., Davies S., Horton D. The flow of granular materials round obstacles // Powder Technology. 1980. V. 25. No. 2. P. 215–223.

Статья поступила 08.04.2013 г.

Shvab A.V., Martsenko A.A., Martsenko M.S. MODELING OF HYDRODYNAMICS OF HIGHLY CONCENTRATED GRANULATED MEDIA IN THE BLENDING SILO. In this paper we study the dynamics of highly concentrated granulated well granular medium in the vertical mixing hopper. To describe such a flow, a differential model proposed by the authors based on the provision of continuum mechanics with allowance for rheological properties of the granular material and the additional transport equation for the chaotic energy of the pulsation of the granules. The reliability of the proposed model is established by comparing the calculated average velocity distribution environment with the experimental data.

Keywords: hydrodynamics, velocity, granular medium, slip condition, fast motion regime, stress tensor, vorticity, stream function.

SHVAB Alexander Veniaminovich (Tomsk State University)

E-mail: avshvab@inbox.ru

MARTSENKO Anastasia Aleksandrovna (Tomsk State University)

E-mail: newerowa@sibmail.com

MARTSENKO Maksim Sergeevich (Tomsk State University)

E-mail: martsenko@sibmail.com

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АГАФОНЦЕВА Младена Владимировна – аспирантка кафедры алгебры Томского государственного университета. E-mail: mladenka@mail.ru

АНИКЕЕВА Галина Максимовна – магистрант Томского государственного университета. E-mail: anikeeva@ispms.tsc.ru

БИМАТОВ Владимир Исмагилович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой динамики полета физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: vbimatov@mail.ru

ГРИНШПОН Самуил Яковлевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры Томского государственного университета. E-mail: Grinshpon@math.tsu.ru

ЗЮЗЬКОВ Валентин Михайлович – старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: vmz@math.tsu.ru

КАЙГОРОДОВ Евгений Владимирович – аспирант кафедры алгебры Томского государственного университета. E-mail: gazetaintegral@gmail.com

КАРАКУЛОВ Валерий Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: valery@ftf.tsu.ru

ЛАНДИК Лидия Владимировна – заведующая лабораторией Пермского государственного университета. E-mail: LidiaLandik@gmail.com

ЛОБАНОВ Дмитрий Владимирович – кандидат технических наук, доцент Братского государственного университета. E-mail: mf_nauka@brstu.ru

МАРЦЕНКО Анастасия Александровна – магистрант кафедры прикладной аэромеханики физико-технического факультета Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: newerowa@sibmail.com

МАРЦЕНКО Максим Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: martsenko@sibmail.com

НЕСМЕЕВ Юрий Алексеевич – пенсионер, до выхода на пенсию преподаватель кафедры высшей математики Магнитогорского государственного технического университета. E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

ОНИЩУК Надежда Максимовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: onishuk.nadezhda@yandex.ru

ПЕСТРЕНИН Валерий Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий механико-математического факультета Пермского государственного университета. E-mail: PestreninVM@mail.ru

ПЕСТРЕНИНА Ирина Владимировна – кандидат технических наук, доцент кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий механико-математического факультета Пермского государственного университета. E-mail: IPestrenina@gmail.com

ПСАХЬЕ Сергей Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук, профессор Томского государственного университета, заведующий кафедрой физики высоких технологий в машиностроении Томского политехнического университета. E-mail: sp@ispms.tsc.ru

РОГОЗИНСКИЙ Михаил Иванович – аспирант кафедры алгебры Томского государственного университета. E-mail: Rogozinsky_mikhail@mail.ru

САВКИНА Надежда Валерьевна – аспирант кафедры динамики полета физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: pantera256@mail.ru

СЕВАСТЬЯНОВ Николай Николаевич – заведующий кафедрой промышленных и космических систем физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: sevastyanov@gascom.ru

СКРИПНЯК Владимир Альбертович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики деформируемого твердого тела физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: skrp@ftf.tsu.ru

СКРИПНЯК Владимир Владимирович – аспирант кафедры механики деформируемого твердого тела физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: skrp2012@yandex.ru

СМОЛИН Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук, профессор Томского государственного университета. E-mail: asmolin@ispms.tsc.ru

СМОЛИН Игорь Юрьевич – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории механики структурно-неоднородных сред Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук, профессор кафедры прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета. E-mail: smolin@ispms.tsc.ru

ЦАРЕВ Андрей Валерьевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры Московского педагогического государственного университета. E-mail: an-tsarev@yandex.ru

ЧЕХЛОВ Андрей Ростиславович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры Томского государственного университета. E-mail: cheklov@math.tsu.ru

ШВАБ Александр Вениаминович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной аэромеханики физико-технического факультета Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: avshvab@inbox.ru

ШИЛЬКО Евгений Викторович – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук, профессор Томского государственного университета. E-mail: shilko@ispms.tsc.ru

ЯНЮШКИН Александр Сергеевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой технологии машиностроения Братского государственного университета. E-mail: yanushkin@brstu.ru