

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2018

№ 54

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.М. Моисеева (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конев, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер, Н.Р. Щербаков.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenschikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Kseniya M. Moiseeva (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenichikov, Igor M. Vasenin, Anatoliy M. Grishin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager, Nikolay R. Shcherbakov.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Кулиев Г.Ф., Насибзаде В.Н. Приведение обратной задачи акустики к задаче оптимального управления и её исследование.....	5
Мансимов К.Б., Расулова Ш.М. Об оптимальности особых управлений в одной задаче оптимального управления.....	17
Славолюбова Я.В. Ассоциированные левоинвариантные контактные метрические структуры на семимерной группе Гейзенберга H^7	34
Турсунов Д.А. Асимптотика решения задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений».....	46

МЕХАНИКА

Биматов В.И., Бородачева И.А., Лавронович А.Н. Исследование направленного выброса компонующего тела разделяющей составной системы под действием аэродинамических сил.....	58
Казакова О.И., Смолин И.Ю., Безмозгий И.М. Анализ амплитудно-зависимых демпфирований и возможности их применения при расчете численными методами.....	66
Костюшин К.В., Шувариков В.А. Сравнение схем типа «MUSCL» для расчета течений идеального газа в соплах Лавала.....	79
Малик А.В., Лавит И.М. Метод расчета коэффициента интенсивности напряжений для неподвижной трещины нормального разрыва при динамическом нагружении.....	88
Парфенова Е.С., Князева А.Г. Начальная стадия формирования переходного слоя между пленкой и подложкой при нагреве сильноточным электронным пучком.....	103
Степанов К.А., Тимченко С.В. Аэродинамическое проектирование изолированно-го трехмерного крыла беспилотного летательного аппарата.....	118
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	131

CONTENTS

MATHEMATICS

Guliyev H.F., Nasibzadeh V.N. Reduction of the acoustic inverse problem to an optimal control problem and its investigation.....	5
Mansimov K.B., Rasulova Sh.M. On optimality of singular controls in an optimal control problem.....	17
Slavolyubova Ya.V. Associated left-invariant contact metric structures on the 7-dimensional Heisenberg group H^7	34
Tursunov D.A. Asymptotics of the Cauchy problem solution in the case of instability of a stationary point in the plane of “rapid motions”.....	46

MECHANICS

Bimatov V.I., Borodacheva I.A., Lavronovich A.N. Research of a directed emission of linked body of the separable compound system under the action of aerodynamic forces.....	58
Kazakova O.I., Smolin I.Yu., Bezmozgiy I.M. Analysis of amplitude-dependent damping and its application in numerical calculations.....	66
Kostyushin K.V., Shuvarikov V.A. Comparison of the MUSCL-type schemes for a gas flow calculation in de Laval nozzles.....	79
Malik A.V., Lavit I.M. On the computation method for the stress intensity factor of a stationary crack in mode I under dynamic loading.....	88
Parfenova E.S., Knyazeva A.G. The initial stage of transient layer formation between film and substrate during heating by a high-current electron beam.....	103
Stepanov K.A., Timchenko S.V. Aerodynamic design for an isolated three-dimensional wing of an unmanned aerial vehicle.....	118
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	131

МАТЕМАТИКА

УДК 517.97
DOI 10.17223/19988621/54/1

MSC 35L20, 49K20

Г.Ф. Кулиев, В.Н. Насибзаде

ПРИВЕДЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ АКУСТИКИ
К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
И ЕЁ ИССЛЕДОВАНИЕ

Для одномерного уравнения акустики рассматривается коэффициентная обратная задача, которая сводится к задаче оптимального управления, где доказываются теоремы существования оптимального управления, выводятся необходимые условия оптимальности, вычисляется градиент функционала и предлагается итерационный алгоритм нахождения решения задачи оптимального управления с помощью метода проекции градиента.

Ключевые слова: *коэффициентная обратная задача, оптимальное управление, необходимые условия, градиент функционала.*

В прямых задачах математической физики стремятся найти функции, описывающие различные физические явления. При этом свойства исследуемой среды предполагаются известными. Однако свойства изучаемой среды часто являются неизвестными. Тогда возникают обратные задачи, в которых по информации о решении прямой задачи требуется определить коэффициенты уравнений. Эти задачи в большинстве случаев некорректны. С другой стороны, искомые коэффициенты уравнений являются важными характеристиками изучаемых сред. Поэтому исследование таких обратных задач математической физики очень важно как с теоретической, так и с практической точки зрения [1–5]. Для изучения обратных задач одним из мощных средств является оптимизационный метод [1]. Идея использования методов теории оптимального управления для решения обратных задач принадлежит А.Н.Тихонову [6]. С библиографией работ, посвященных оптимизационному методу решения обратных задач, можно ознакомиться в работах В.Г.Романова, С.И. Кабанихина [7, 8].

Одной из важных обратных задач является обратная задача акустики [2, 9]. В работе [2] одномерная обратная задача акустики сводится к нахождению решения системы интегральных уравнений. В данной работе для одномерного уравнения акустики ставится коэффициентная обратная задача, которая сводится к задаче оптимального управления и далее исследуется методами теории оптимального управления.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу определения пары функций $(u(x, t), v(x))$ из следующих соотношений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v(x) \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t), (x, t) \in Q \equiv (0, \ell) \times (0, T); \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq \ell; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (3)$$

$$u(x, T) = g(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (4)$$

где $\ell > 0, T > 0$ – заданные числа, $u(x, t)$ – акустическое давление, $v(x)$ – функция, которая выражена через функции плотности среды и скорости распространения волн в среде [2].

Если функции $v(x), f(x, t), u_0(x), u_1(x)$ заданы, то получаем прямую задачу (1)–(3) определения функции $u(x, t)$. Если $v(x)$ – неизвестная функция, мы дополнительно зададим условие (4). Тогда получается обратная задача (1)–(4) определения пары функций $(u(x, t), v(x))$.

Предположим, что $f \in L_2(Q), u_0 \in W_2^1[0, \ell], u_1 \in L_2(0, \ell), g \in W_2^1[0, \ell]$ – заданные функции.

Задачу (1)–(4) приводим к следующей задаче оптимального управления: найти такую функцию $v(x)$ из множества:

$$V = \left\{ v(x) \in W_2^1[0, \ell] : |v(x)| \leq M_1, |v'(x)| \leq M_2 \text{ почти всюду на } [0, \ell] \right\}, \quad (5)$$

которая доставляет минимум функционалу

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^\ell [u(x, T; v) - g(x)]^2 dx \quad (6)$$

при ограничениях (1)–(3), где $u(x, t; v)$ – решение задачи (1)–(3) при $v = v(x)$, $M_1, M_2 > 0$ – заданные числа. Эту задачу назовем задачей (1)–(3), (5), (6).

Функцию $v(x)$ назовем управлением, а V – классом допустимых управлений. Отметим, что если $\min_{v \in V} J(v) = 0$, то дополнительное условие (4) выполняется.

Под решением краевой задачи (1)–(3) при каждом фиксированном управлении $v \in V$ будем понимать функцию из $W_2^1(Q)$, равную $u_0(x)$ при $t = 0$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_Q \left[-\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} \eta \right] dx dt - \int_0^\ell u_1(x) \eta(x, 0) dx = \int_Q f \eta dx dt \quad (7)$$

при всех $\eta = \eta(x, t)$ из $W_2^1(Q)$, равных нулю при $t = T$.

Из результатов работ [10, 11] следует, что при принятых условиях краевая задача (1)–(3) при каждом фиксированном $v \in V$ имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(Q)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^1(Q)} \leq c \left[\|u_0\|_{W_2^1[0,\ell]} + \|u_1\|_{L_2(0,\ell)} + \|f\|_{L_2(Q)} \right]. \quad (8)$$

Кроме того, это решение обладает свойствами

$$u \in C([0, T]; W_2^1[0, \ell]), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in C([0, T]; L_2(0, \ell)).$$

Здесь и в дальнейшем через c будем обозначать различные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и допустимых управлений.

2. О разрешимости задачи (1) – (3), (5), (6)

Теорема 1. Пусть выполнены условия, принятые при постановке задачи (1)–(3), (5), (6). Тогда множество оптимальных управлений этой задачи $V_* = \{v_* \in V : J(v_*) = \min_{v \in V} J(v)\}$ непусто, слабо компактно в $W_2^1[0, \ell]$ и любая минимизирующая последовательность $\{v_n\}$ слабо в $W_2^1[0, \ell]$ сходится к множеству V_* .

Доказательство. Ясно, что множество V , определяемое соотношением (5), слабо компактно в пространстве $W_2^1[0, \ell]$. Покажем, что функционал (6) слабо в $W_2^1[0, \ell]$ непрерывен на множестве V . Пусть $v \in V$ – некоторый элемент, $\{v_n\} \subset V$ – произвольная последовательность, такая, что $v_n \rightarrow v$ слабо в $W_2^1[0, \ell]$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда из компактности вложения $W_2^1[0, \ell] \rightarrow C[0, \ell]$ [10, с. 84] следует, что

$$v_n \rightarrow v \text{ сильно в } C[0, \ell]. \quad (9)$$

В силу однозначной разрешимости краевой задачи (1)–(3) каждому управлению $v_n \in V$ соответствует единственное решение $u_n = u(x, t; v_n)$ задачи (1)–(3) и справедлива оценка $\|u_n\|_{W_2^1(Q)} \leq c, \forall n = 1, 2, \dots$, т.е. последовательность $\{u_n\}$ равномерно ограничена по норме пространства $W_2^1(Q)$. Тогда из теорем вложения [10, с. 64, 71] следует, что из последовательности можно выделить подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$, такую, что при $k \rightarrow \infty$

$$u_{n_k} \rightarrow u \text{ сильно в } L_2(Q); \quad (10)$$

$$\frac{\partial u_{n_k}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_{n_k}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \text{ слабо в } L_2(Q); \quad (11)$$

$$u_{n_k}|_{t=0} \rightarrow u|_{t=0}, \quad u_{n_k}|_{t=T} \rightarrow u|_{t=T} \text{ сильно в } L_2(0, \ell), \quad (12)$$

где $u = u(x, t) \in W_2^1(Q)$ – некоторый элемент. Покажем, что $u(x, t) = u(x, t; v)$, т.е. функция является обобщенным решением задачи (1)–(3), соответствующим

управлению $v \in V$. Ясно, что справедливы тождества

$$\int_Q \left[-\frac{\partial u_{n_k}}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u_{n_k}}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_{n_k}(x) \frac{\partial u_{n_k}}{\partial x} \eta \right] dx dt - \int_0^\ell u_1(x) \eta(x, 0) dx = \int_Q f \eta dx dt \quad (13)$$

при всех $\eta = \eta(x, t)$ из $W_2^1(Q)$, равных нулю при $t = T$.

Переходя к пределу в (13) при $k \rightarrow \infty$ и используя (9)–(12), получим, что функция $u(x, t)$ равна $u_0(x)$ при $t = 0$ и удовлетворяет тождеству (7). Отсюда и из единственности решения задачи (1)–(3), соответствующего управлению $v \in V$, следует, что $u(x, t) = u(x, t; v)$.

Используя единственность решения задачи (1)–(3), соответствующего управлению $v \in V$, легко проверить, что соотношения (10)–(12) справедливы не только для подпоследовательности $\{u_{n_k}\}$, но и для всей последовательности $\{u_n\}$. Следовательно, в частности, справедливо предельное соотношение

$$u_n|_{t=T} \rightarrow u|_{t=T} \text{ сильно в } L_2(0, \ell)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Используя это соотношение, из (6) получаем, что $J(v_n) \rightarrow J(v)$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. $J(v)$ слабо в $W_2^1[0, \ell]$ непрерывен на множестве V . Тогда в силу теорем 2 и 4 из [12, с. 49, 51] получаем, что справедливы все утверждения теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Для обеспечения единственности решения задачи оптимального управления вместо функционала (6) можно рассматривать функционал вида

$$I(v) = J(v) + \alpha \|v - \omega\|_{W_2^1[0, \ell]}^2, \quad (14)$$

где $J(v)$ определен равенством (6), $\alpha > 0$ – заданное число, $\omega \in W_2^1[0, \ell]$ – заданная функция.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $\alpha > 0$. Тогда существует плотное подмножество G пространства $W_2^1[0, \ell]$, такое, что для любой $\omega \in G$ задача минимизации функционала (14) на множестве при условиях (1)–(3) имеет единственное решение.

Доказательство. Функционал $J(v)$ ограничен снизу и в силу теоремы 1 непрерывен на V . Кроме того, множество V замкнуто и ограничено в равномерно выпуклом банаховом пространстве $W_2^1[0, \ell]$. Тогда из результатов работы [13, с. 372–373] следует утверждение теоремы 2. Теорема 2 доказана.

3. Дифференцируемость функционала (6)

Теперь исследуем дифференцируемость функционала (6). Пусть $\psi = \psi(x, t; v)$ – обобщенное решение из $W_2^1(Q)$ сопряженной задачи

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(v \psi) = 0, (x, t) \in Q, \quad (15)$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}|_{t=T} = u(x, T; \nu) - g(x), \quad 0 \leq x \leq \ell; \quad (16)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}|_{x=\ell} = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (17)$$

Под обобщенным решением краевой задачи (15)–(17) при каждом фиксированном управлении $\nu \in V$ будем понимать функцию $\psi = \psi(x, t; \nu)$ из $W_2^1(Q)$, равную нулю при $t = T$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_Q \left[-\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \nu \psi \frac{\partial \mu}{\partial x} \right] dx dt = - \int_0^\ell [u(x, T; \nu) - g(x)] \mu(x, T) dx \quad (18)$$

при всех $\mu = \mu(x, t)$ из $W_2^1(Q)$, равных нулю при $t = 0$.

Из результатов работ [10, 11] следует, что краевая задача (15)–(17) при каждом фиксированном $\nu \in V$ имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(Q)$ и справедлива оценка

$$\|\psi\|_{W_2^1(Q)} \leq c \|u|_{t=T} - g\|_{L_2(0, \ell)}.$$

Учитывая здесь оценку (8) и неравенство $\|u|_{t=T}\|_{L_2(0, \ell)} \leq c \|u\|_{W_2^1(Q)}$ [10, с. 70], получим

$$\|\psi\|_{W_2^1(Q)} \leq c [\|u_0\|_{W_2^1[0, \ell]} + \|u_1\|_{L_2(0, \ell)} + \|f\|_{L_2(Q)} + \|g\|_{W_2^1[0, \ell]}]. \quad (19)$$

Теорема 3. Пусть выполнены предполагаемые выше условия на данные задачи (1)–(3), (5), (6). Тогда функционал (6) непрерывно дифференцируем по Фреше на V и его дифференциал в точке $\nu \in V$ при приращении $\delta \nu \in W_2^1[0, \ell]$ определяется выражением

$$\langle J'(\nu), \delta \nu \rangle = \int_Q \frac{\partial u}{\partial x} \psi \delta \nu dx dt. \quad (20)$$

Доказательство. Рассмотрим приращение функционала (6):

$$\Delta J(\nu) = J(\nu + \delta \nu) - J(\nu) = \int_0^\ell [u(x, T; \nu) - g(x)] \delta u(x, T) dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell (\delta u(x, T))^2 dx, \quad (21)$$

где $\delta u(x, t) \equiv u(x, t; \nu + \delta \nu) - u(x, t; \nu)$, а $u(x, t; \nu + \delta \nu)$ и $u(x, t; \nu)$ – решения задачи (1)–(3), соответствующие управлениям $\nu + \delta \nu, \nu \in V$. Ясно, что функция $\delta u(x, t)$ является обобщенным решением из $W_2^1(Q)$ краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + (\nu + \delta \nu) \frac{\partial \delta u}{\partial x} = -\delta \nu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (x, t) \in Q; \quad (22)$$

$$\delta u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \delta u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \ell; \quad (23)$$

$$\frac{\partial \delta u}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \delta u}{\partial x}|_{x=\ell} = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (24)$$

Обобщенное решение из $W_2^1(Q)$ задачи (22)–(24) равно нулю при $t=0$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q \left[\frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \delta u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - (v + \delta v) \frac{\partial \delta u}{\partial x} \eta \right] dx dt = \int_Q \delta v \frac{\partial u}{\partial x} \eta dx dt \quad (25)$$

при всех $\eta = \eta(x, t) \in W_2^1(Q)$, равных нулю при $t=T$. Как для решения задачи (1)–(3), для решения задачи (22)–(24) справедлива оценка

$$\|\delta u\|_{W_2^1(Q)} \leq c \left\| \delta v \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_2(Q)} \leq c \|u\|_{W_2^1(Q)} \|\delta v\|_{W_2^1[0, \ell]}. \quad (26)$$

Если в (18) положим $\mu = \delta u(x, t)$, а в (25) – $\eta = \psi(x, t, v)$ и сложим полученные соотношения, то имеем

$$\int_0^\ell [u(x, T; v) - g(x)] \delta u(x, T) dx = \int_Q \frac{\partial u}{\partial x} \psi \delta v dx dt + \int_Q \psi \frac{\partial \delta u}{\partial x} \delta v dx dt.$$

Учитывая это равенство в (21), имеем

$$\Delta J(v) = \int_Q \frac{\partial u}{\partial x} \psi \delta v dx dt + R, \quad (27)$$

где $R = \int_Q \psi \frac{\partial \delta u}{\partial x} \delta v dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\ell (\delta u(x, T))^2 dx$ – остаточный член.

Ясно, что выражение в правой части (20) при заданном $v \in V$ определяет линейный функционал от δv . Кроме того,

$$\left| \int_Q \frac{\partial u}{\partial x} \psi \delta v dx dt \right| \leq c \|u\|_{W_2^1(Q)} \|\psi\|_{W_2^1(Q)} \|\delta v\|_{W_2^1[0, \ell]}.$$

Учитывая здесь оценки (8), (19), получим ограниченность по δv функционала в правой части (20).

Теперь проведем оценку остаточного члена R , входящего в (27). Используя неравенство Коши – Буняковского получим

$$|R| \leq \|\psi\|_{L_2(Q)} \left\| \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right\|_{L_2(Q)} \|\delta v\|_{W_2^1[0, \ell]} + \frac{1}{2} \|\delta u(x, T)\|_{L_2(0, \ell)}^2.$$

Учитывая здесь теоремы вложения $W_2^1(Q) \rightarrow L_2(0, \ell)$ [10, с. 70], т.е. оценку $\|\delta u(x, T)\|_{L_2(0, \ell)} \leq c \|\delta u\|_{W_2^1(Q)}$ и оценку (26), получим, что $R = o(\|\delta v\|_{W_2^1[0, \ell]})$.

Тогда из (27) следует, что функционал (6) дифференцируем по Фреше на V и справедлива формула (20). Покажем, что отображение $v \rightarrow J'(v)$, определяемое равенством (20), непрерывно действует из V в сопряженное к $W_2^1[0, \ell]$ пространство $W_2^{-1}(0, \ell)$.

Пусть $\delta\psi(x, t) = \psi(x, t; v + \delta v) - \psi(x, t; v)$. Из (15)–(17) следует, что $\delta\psi(x, t)$ является обобщенным решением из $W_2^1(Q)$ краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \delta\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \delta\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}[(v + \delta v)\psi] &= \frac{\partial}{\partial x}(\psi \delta v), \quad (x, t) \in Q, \\ \delta\psi|_{t=T} &= 0, \quad \frac{\partial \delta\psi}{\partial t}|_{t=T} = \delta u(x, T), \quad 0 \leq x \leq \ell, \\ \frac{\partial \delta\psi}{\partial x}|_{x=0} &= 0, \quad \frac{\partial \delta\psi}{\partial x}|_{x=\ell} = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Аналогично (19), для решения этой задачи справедлива оценка

$$\|\delta\psi\|_{W_2^1(Q)} \leq c \left[\|\delta u(x, T)\|_{L_2(0, \ell)} + \|\delta v\|_{W_2^1[0, \ell]} \right].$$

В силу ограниченности вложения $W_2^1(Q) \rightarrow L_2(0, \ell)$ [10, с. 70] из последнего неравенства получим, что

$$\|\delta\psi\|_{W_2^1(Q)} \leq c \left[\|\delta u\|_{W_2^1(Q)} + \|\delta v\|_{W_2^1[0, \ell]} \right]. \quad (28)$$

Тогда из (26) и (28) следует оценка

$$\|\delta\psi\|_{W_2^1(Q)} \leq c \|\delta v\|_{W_2^1[0, \ell]}. \quad (29)$$

Используя (20) и неравенство Коши – Буняковского, имеем

$$\begin{aligned} &\|J'(v + \delta v) - J'(v)\|_{W_2^{-1}(0, \ell)} \leq \\ &\leq c \left[\left\| \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right\|_{L_2(Q)} \|\psi\|_{L_2(Q)} + \|\delta\psi\|_{L_2(Q)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_2(Q)} + \left\| \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right\|_{L_2(Q)} \|\delta\psi\|_{L_2(Q)} \right]. \end{aligned}$$

В силу (26) и (29) отсюда получаем оценку

$$\|J'(v + \delta v) - J'(v)\|_{W_2^{-1}(0, \ell)} \leq L \|\delta v\|_{W_2^1[0, \ell]}, \quad (30)$$

где L – константа Липшица. Отсюда следует, что $v \rightarrow J'(v)$ есть непрерывное отображение из V в $W_2^{-1}(0, \ell)$. Теорема 3 доказана.

4. Необходимые условия оптимальности и формула для градиента функционала (6)

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда для оптимальности управления $v_*(x) \in V$ в задаче (1)–(3), (5), (6) необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_Q \frac{\partial u_*(x, t)}{\partial x} \psi_*(x, t) (v(x) - v_*(x)) dx dt \geq 0 \quad (31)$$

для любого $v \in V$, где $u_*(x, t) = u(x, t; v_*)$, $\psi_*(x, t) = \psi(x, t; v_*)$ – решения задач (1)–(3) и (15)–(17) соответственно при $v = v_*(x)$.

Доказательство. Множество V , определяемое соотношением (5), выпукло в $W_2^1[0, \ell]$. Кроме того, согласно теореме 3, функционал $J(v)$ непрерывно диффе-

ренцируем по Фреше на V и его дифференциал в точке $v \in V$ определяется равенством (20). Тогда в силу теоремы 5 из [12, с. 28] на элементе $v_* \in V$ необходимо выполнение неравенства $\langle J'(v_*), v - v_* \rangle \geq 0$ при всех $v \in V$. Отсюда и из (20) следует справедливость неравенства (31) при всех $v \in V$. Теорема 4 доказана.

Теперь покажем, что можно получить формулу для градиента функционала (6). Введем следующую краевую задачу об определении функции $\psi_1 = \psi_1(x; v)$ из условий

$$-\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \psi_1 = f(x), 0 < x < \ell; \quad (32)$$

$$\frac{d\psi_1}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{d\psi_1}{dx}\Big|_{x=\ell} = 0, \quad (33)$$

где $f_1(x) = \int_0^T \frac{\partial u}{\partial x} \psi dt$ [4].

Под решением задачи (32), (33) при заданном $v \in V$ будем понимать функцию $\psi_1 = \psi_1(x; v)$ из $W_2^1[0, \ell]$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_0^\ell \left[\frac{d\psi_1}{dx} \frac{d\eta}{dx} + \psi_1 \eta \right] dx = \int_0^\ell f_1 \eta dx \quad (34)$$

при любой функции $\eta = \eta(x)$ из $W_2^1[0, \ell]$.

Отметим, что решение задачи (15)–(17) при фиксированном $v \in V$ обладает свойством $\psi \in C([0, T]; W_2^1[0, \ell])$, поэтому она эквивалентна непрерывной функции и, следовательно, ограничена на Q . Тогда правая часть уравнения (32) принадлежит $L_2(0, \ell)$ и краевая задача (32), (33) однозначно разрешима в $W_2^1[0, \ell]$ [14, с. 184].

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда градиент функционала (6) в произвольной точке $v \in V$ определяется выражением

$$J'(v) = \psi_1(x; v). \quad (35)$$

Доказательство. Пусть $v, v + \delta v \in V$ – произвольные управления, где $\delta v \in W_2^1[0, \ell]$ – приращение управления на элементе $v \in V$. Полагая в тождестве (34) $\eta = \delta v$, получим

$$\int_0^\ell \left[\frac{d\psi_1}{dx} \frac{d\delta v}{dx} + \psi_1 \delta v \right] dx = \int_0^\ell f_1(x) \delta v dx = \int_Q \frac{\partial u}{\partial x} \psi \delta v dx dt.$$

Учитывая это равенство в (20), будем иметь

$$\langle J'(v), \delta v \rangle = \int_0^\ell \left[\psi_1 \delta v + \frac{d\psi_1}{dx} \frac{d\delta v}{dx} \right] dx.$$

Отсюда следует, что градиент функционала (6) определяется равенством (35).

Теорема 5 доказана.

Следующая теорема выражает необходимое условие оптимальности в задаче (1)–(3), (5), (6) с использованием градиента функционала (6).

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда для оптимальности управления $v_* = v_*(x) \in V$ в задаче (1)–(3), (5), (6) необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_0^\ell \left[\psi_{1*}(x)(v(x) - v_*(x)) + \frac{d\psi_{1*}(x)}{dx} \left(\frac{dv(x)}{dx} - \frac{dv_*(x)}{dx} \right) \right] dx \geq 0$$

для любой $v = v(x) \in V$, где $\psi_{1*}(x) = \psi_1(x; v_*)$ – решение задачи (32), (33) при $v = v_*(x)$.

Доказательство теоремы 6 проводится вполне аналогично доказательству теоремы 4 с использованием формулы (35).

5. Алгоритм нахождения приближенного решения задачи (1) – (3), (5), (6)

Множество V выпукло и замкнуто в $W_2^1[0, \ell]$, и мы выше доказали, что функционал $J(v) \in C^{1,1}(V)$ [см. формулу (30)]. Тогда метод проекции градиента может применяться для приближенного решения задачи (1)–(3), (5), (6). В этом случае метод заключается в построении последовательности $\{v_k\}$ по правилу

$$v_{k+1} = P_V(v_k - \alpha_k J'(v_k)), k = 0, 1, \dots, \quad (36)$$

где α_k – положительная величина, $P_V(v)$ – проекция точки v на множество V , α_k выбирается из условия

$$0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_k \leq \frac{2}{L + 2\varepsilon}, \quad (37)$$

а $\varepsilon_0, \varepsilon$ – положительные числа, являющиеся параметрами метода [12, с. 73], L – константа Липшица для градиента $J'(v)$. В [12] в общем случае доказано, что при произвольном начальном приближении $v_0 \in V$ последовательность $\{J(v_k)\}$ монотонно убывает и $\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k - v_{k+1}\|_H = 0$, где $\{v_k\}$ – последовательность, полученная методом (36), (37).

В нашей задаче (1)–(3), (5), (6) за пространство H можно взять $W_2^1[0, \ell]$.

Посмотрим, как выглядит метод проекции градиента для задачи (1)–(3), (5), (6). Проекция любой точки $v(x) \in W_2^1[0, \ell]$ на множество V представляет собой функцию $P_V(v) = w(x), 0 \leq x \leq \ell$, где

$$w(x) = \begin{cases} -M_1 & \text{при } v(x) < -M_1, \\ v(x) & \text{при } |v(x)| \leq M_1, \\ M_1 & \text{при } v(x) > M_1; \end{cases} \quad w'(x) = \begin{cases} -M_2 & \text{при } v'(x) < -M_2, \\ v'(x) & \text{при } |v'(x)| \leq M_2, \\ M_2 & \text{при } v'(x) > M_2. \end{cases}$$

Поэтому $(k+1)$ -е приближение $v_{k+1}(x)$, $0 \leq x \leq \ell$, метода проекция градиента для задачи (1)–(3), (5), (6) будет получаться по правилу

$$v_{k+1}(x) = \begin{cases} -M_1 & \text{при } v_k(x) - \alpha_k \psi_1(x; v_k) < -M_1, \\ v_k(x) - \alpha_k \psi_1(x; v_k) & \text{при } |v_k(x) - \alpha_k \psi_1(x; v_k)| \leq M_1, \\ M_1 & \text{при } v_k(x) - \alpha_k \psi_1(x; v_k) > M_1; \end{cases} \quad (38)$$

$$v'_{k+1}(x) = \begin{cases} -M_2 & \text{при } v'_k(x) - \alpha_k \psi'_1(x; v_k) < -M_2, \\ v'_k(x) - \alpha_k \psi'_1(x; v_k) & \text{при } |v'_k(x) - \alpha_k \psi'_1(x; v_k)| \leq M_2, \\ M_2 & \text{при } v'_k(x) - \alpha_k \psi'_1(x; v_k) > M_2, \end{cases} \quad (39)$$

причем при выборе α_k в (38), (39) можно воспользоваться условием (37).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кабанихин С.И., Искаков К.Т. Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. Новосибирск: НГУ, 2001. 315 с.
2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 457 с.
3. Тагиев Р.К. Об оптимальном управлении коэффициентами гиперболического уравнения // Автомат. и телемех. 2012. № 7. С. 40–54.
4. Тагиев Р.К. Задачи оптимального управления коэффициентами уравнений с частными производными: автореф. докт. дис. Баку, 2010.
5. Li Bo., Lou Hongwei. Optimality conditions for semilinear hyperbolic equations with controls in coefficients // Applied Mathematics and Optimization. 2012. V. 65(3). P. 371–402.
6. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504.
7. Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратные задачи геоэлектрики. М.: Наука, 1991.
8. Kabanikhin S.I. Numerical analysis of inverse problems // J. Inverse and ILL-Posed Problems. 1995. V. 3. № 4. P. 278–304.
9. Искаков К.Т., Кабанихин С.И. Обобщенное решение обратной задачи для уравнения акустики. Новосибирск: Изд-во НИИ дискретной математики и информатики, 2000. 16 с.
10. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
11. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
12. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
13. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.
14. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983. 424 с.

Статья поступила 12.01.2018 г.

Guliyev H.F., Nasibzadeh V.N. (2018) REDUCTION OF THE ACOUSTIC INVERSE PROBLEM TO AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM AND ITS INVESTIGATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 54. pp. 5–16

DOI 10.17223/19988621/54/1

Keywords: coefficient inverse problem, optimal control, necessary conditions, gradient of the functional.

In this paper, the coefficient inverse problem for the one-dimensional acoustic equation is considered. The problem is reduced to an optimal control problem. In the new problem, the existence theorems are proved, necessary conditions of optimality are derived, differentiability of the functional is shown, and an iteration algorithm for finding the solution of the optimal control problem based on the gradient projection method is proposed.

We consider the problem of determining a pair of functions $(u(x, t), v(x))$ under constraints

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v(x) \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t), (x, t) \in Q \equiv (0, \ell) \times (0, T), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x), 0 \leq x \leq \ell, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0, 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(x, T) = g(x), 0 \leq x \leq \ell,$$

here, $f \in L_2(Q)$, $u_0 \in W_2^1[0, \ell]$, $u_1 \in L_2(0, \ell)$, $g \in W_2^1[0, \ell]$ – are given functions.

This problem is reduced to the following optimal control problem: find a function belonging to the set

$$V = \left\{ v(x) \in W_2^1[0, \ell] : |v(x)| \leq M_1, |v'(x)| \leq M_2 \text{ a.e. on } [0, \ell] \right\}, \quad (4)$$

and minimizing the functional

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^\ell [u(x, T; v) - g(x)]^2 dx \quad (5)$$

under constraints (1)–(3), where $u(x, t; v)$ is a solution of problem (1)–(3) at a given $v(x)$, which is called a control. The solvability of problem (1)–(3), (4), (5) is proved.

Then, the differential of the functional is calculated and the following theorem is proved.

Theorem. Under the conditions considered above, the inequality

$$\int_Q \frac{\partial u_*(x, t)}{\partial x} \psi_*(x, t) (v(x) - v_*(x)) dx dt \geq 0$$

where $\psi_*(x, t)$ is solution of the adjoint problem corresponding to the control $v_* = v_*(x)$:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} (v \psi) = 0, (x, t) \in Q,$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=T} = u(x, T; v) - g(x), 0 \leq x \leq \ell,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0, 0 \leq t \leq T$$

is a necessary condition for optimality of the control $v_* = v_*(x) \in V$ of the problem (1)–(3), (4), (5) if it is fulfilled for all $v \in V$.

AMS Mathematical Subject Classification: 35L20, 49K20

GULIYEV Hamlet Farman (Doctor of Physics and Mathematics, Baku State University, Baku, Azerbaijan). E-mail: hkuliyev@rambler.ru

NASIBZADEH Vusala Nazim (Sumgait State University, PhD candidate, Sumgait, Azerbaijan). E-mail: nasibzade1987@gmail.com

REFERENCES

1. Kabanikhin S.I., Isakov K.T. (2001) *Optimizatsionnye metody resheniya koeffitsiyentnykh obratnykh zadach* [Optimization methods for solving coefficient inverse problems]. Novosibirsk: NSU Publ. 315 p.
2. Kabanikhin S.I. (2009) *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and ill-posed problems]. Novosibirsk: Sib. scient. Publ. 457 p.
3. Tagiev R.K. (2012) On optimal control of the hyperbolic equation coefficients. *Automation and Remote Control*. 73(7). pp 1145–1155. DOI: 10.1134/S0005117912070041.
4. Tagiev R.K. (2010) *Zadachi optimal'nogo upravleniya koeffitsiyentami uravneniy s chastnymi proizvodnymi* [Problems of Optimal Control for Coefficients of Partial Differential Equations]. Abstract of the doctoral dissertation. Baku.
5. Li Bo, Lou Hongwei (2012) Optimality conditions for semilinear hyperbolic equations with controls in coefficients. *Applied Mathematics and Optimization*. 65(3). pp. 371–402.
6. Tikhonov A.N. (1963) O reshenii nekorrektno postavlennykh zadach i metode regulyarsizatsii [On the solution of ill-posed problems and the regularization method]. *Dokl. AN SSSR*. 151(3). pp. 501–504.
7. Romanov V.G., Kabanikhin S.I. (1991) *Obratnye zadachi geoelektriki* [Inverse problems of geoelectrics]. Moscow: Nauka.
8. Kabanikhin S.I. (1995) Numerical analysis of inverse problems. *J. Inverse and Ill-Posed Problems*. 3(4). pp. 278–304.
9. Isakov K.T., Kabanikhin S.I. (2000) *Obobshchennoye resheniye obratnoy zadachi dlya uravneniya akustiki* [Generalized solution of the inverse problem for the acoustic equation]. Novosibirsk. Publishing House of Discrete Mathematics and Informatics Research Institute.
10. Ladyzhenskaya O.A. (1973) *Krayevye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary-value problems of mathematical physics]. Moscow: Nauka. 408 p.
11. Lions J.L., Magenes E. (1971) *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Nonhomogeneous boundary value problems and their applications]. Moscow: Mir.
12. Vasilyev F.P. (1981) *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach* [Methods for solving extremum problems]. Moscow: Nauka. 400 p.
13. Ekeland I., Temam R. (1979) *Vypuklyy analiz i variatsionnye problemy* [Convex analysis and Variational Problems]. Moscow: Mir. 399 p.
14. Mikhailov V.P. (1983) *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Differential equations in partial derivatives]. Moscow: Nauka. 424 p.

УДК 517.977.56
DOI 10.17223/19988621/54/2

MSC 49K20

К.Б. Мансимов, Ш.М. Расулова

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается одна задача оптимального управления, занимающая промежуточное положение между задачами оптимального управления системами с сосредоточенными и с распределенными параметрами. Установлены необходимые условия оптимальности особых управлений в смысле принципа максимума Понтрягина.

Ключевые слова: *принцип максимума Понтрягина, необходимое условие оптимальности особых управлений, формула приращения.*

Исследуется ряд задач оптимального управления [1, 2], занимающих промежуточное место между задачами оптимального управления системами с сосредоточенными и с распределенными параметрами.

Как отмечано в [1], эти задачи тесно связаны с задачами оптимального управления с сосредоточенными параметрами, но вместе с тем могут быть интерпретированы так же, как задачи оптимального управления для уравнений в частных производных, с управлением на границе (граничная задача оптимального управления для одной системы с распределенными параметрами).

В [1, 2] для подобных задач получены необходимые условия оптимальности типа принципа максимума Л.С. Понтрягина и достаточные условия оптимальности типа В.Ф. Кротова.

В предлагаемой работе исследуется задача оптимального управления типа [1, 2] с несколько иным критерием качества. При помощи метода приращений сначала установлены необходимые условия оптимальности первого порядка в форме принципа максимума Понтрягина (см., напр., [3, 4]).

Заметим, что принцип максимума Понтрягина, являясь необходимым условием оптимальности первого порядка, нередко вырождается, становясь неэффективным. Такие случаи называют особыми а соответствующие управления – особыми управлениями. Для исследования на оптимальность особых управлений надо иметь новые необходимые условия оптимальности.

В работе, применяя методику, предложенную и развитую авторами [5–11] и др., исследуются также особые случаи. Суть применяемой схемы заключается в построении новых формул приращения второго порядка критерия качества, позволяющие получить необходимые условия оптимальности первого и второго порядков с единых позиций.

Для задачи, рассматриваемой в статье, особые управления исследуются впервые.

Заметим, что особые управления возникают во многих прикладных задачах оптимального управления (см., напр., [12–14]).

2. Постановка задачи

Допустим, что управляемый процесс в области $D = T \times X$ ($T = [t_0, t_1]$, $X = [x_0, x_1]$) описывается системой дифференциальных уравнений

$$z_t(t, x) = f(t, x, z(t, x), u(t, x)), \quad (t, x) \in D, \quad (1)$$

с начальным условием

$$z(t_0, x) = y(x), \quad x \in X. \quad (2)$$

Здесь $f(t, x, z, u)$ – заданная n -мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z до второго порядка включительно, t_0, t_1, x_0, x_1 – заданы, $u(t, x)$ – r -мерная кусочно-непрерывная по t (с конечным числом точек разрыва первого рода) при всех $x \in X$ и непрерывная по x при всех $t \in T$ управляющая вектор-функция со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U \subset R^r$, т.е.

$$u(t, x) \in U \subset R^r, \quad (t, x) \in D. \quad (3)$$

а $y(x)$ – управляемая начальная вектор-функция, определяемая из уравнения

$$\dot{y} = g(x, y, v), \quad x \in X, \quad (4)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0, \quad (5)$$

где $g(x, y, v)$ – заданная n -мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по y до второго порядка включительно, y_0 – заданный постоянный вектор, $v(x)$ – q -мерный кусочно-непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $V \subset R^q$, т.е.

$$v(x) \in V \subset R^q, \quad x \in X. \quad (6)$$

Пару $(u(t, x), v(x))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Под решением задачи (1), (2), (4), (5), соответствующем допустимому управлению $(u(t, x), v(x))$, понимается пара $(z(t, x), y(x))$ функций $z(t, x), y(x)$, непрерывных по совокупности переменных, при этом $z(t, x)$ и $y(x)$ – кусочно гладкие по t и x (с конечным числом точек разрыва первого рода) соответственно и удовлетворяющие соотношениям (1), (2), (4), (5).

На решениях задачи (1), (2), (4), (5), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим функционал

$$S(u, v) = \varphi(y(x_1)) + \int_{x_0}^{x_1} G(x, z(t_1, x)) dx. \quad (7)$$

Здесь $\varphi(y)$, $G(x, z)$ – заданные скалярные функции непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по y, z соответственно до второго порядка включительно.

Допустимое управление $(u^o(t, x), v^o(x))$, доставляющее минимум функционалу (7) при ограничениях (1) – (6), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u^o(t, x), v^o(x), z^o(t, x), y^o(x))$ – оптимальным процессом.

Нашей целью является вывод необходимых условий оптимальности.

3. Формула для приращения второго порядка критерия качества

Пусть $(u(t, x), v(x))$ – фиксированное, а $(\bar{u}(t, x) = u(t, x) + \Delta u(t, x), \bar{v}(x) = v(x) + \Delta v(x))$ – произвольные допустимые управления.

Через $(z(t, x), y(t))$, $(\bar{z}(t, x) = z(t, x) + \Delta z(t, x), \bar{y}(t) = y(t) + \Delta y(t))$ обозначим соответствующие им решения задач (1), (2), (4), (5) и запишем приращение функционала (7), соответствующее этим допустимым управлениям

$$\begin{aligned} \Delta S(u^o, v^o) &= S(\bar{u}, \bar{v}) - S(u^o, v^o) = \\ &= [\varphi(\bar{y}(x_1)) - \varphi(y^o(x_1))] + \int_{x_0}^{x_1} [G(x, \bar{z}(t_1, x)) - G(x, z^o(t_1, x))] dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее, ясно, что приращение $(\Delta z(t, x), \Delta y(x))$ состояния $(z^o(t, x), y^o(x))$ является решением системы дифференциальных уравнений

$$\Delta z_t(t, x) = f(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t, x)) - f(t, x, z^o(t, x), u^o(t, x)); \quad (9)$$

$$\Delta z(t_0, x) = \Delta y(x), \quad x \in X; \quad (10)$$

$$\Delta \dot{y}(x) = g(x, \bar{y}(x), \bar{v}(x)) - g(x, y^o(x), v^o(x)); \quad (11)$$

$$\Delta y(x_0) = 0. \quad (12)$$

Предположим, что $\psi^o(t, x) (p^o(x))$ – пока неизвестная n -мерная вектор-функция, удовлетворяющая тем условиям гладкости, которые нужны для корректности дальнейших рассуждений.

Умножая обе части соотношения (9) ((11)) слева скалярно на $\psi^o(t, x) (p^o(x))$, а затем интегрируя обе части полученного соотношения по области D (по t от t_0 -го до t_1) и введя обозначения

$$H(t, x, z, u, \psi^o) = \psi^{o'} f(t, x, z, u), \quad M(x, y, v, p^o) = p^{o'} g(x, y, v),$$

получим

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi^{o'}(t, x) \Delta z_t(t, x) dx dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [H(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t, x), \psi^o(t, x)) - H(t, x, z^o(t, x), u^o(t, x), \psi^o(t, x))] dx dt; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} p^{o'}(x) \Delta \dot{y}(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} [M(x, \bar{y}(x), \bar{v}(x), p^o(x)) - M(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x))] dx. \quad (14)$$

Далее, с учетом (10) и (12) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi^{o'}(t, x) \Delta z_t(t, x) dx dt = \\ & = \int_{x_0}^{x_1} \left[\psi^{o'}(t_1, x) \Delta z(t_1, x) - \psi^{o'}(t_0, x) \Delta y(x) \right] dx - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi_t^{o'}(t, x) dx dt; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} p^{o'}(x) \Delta \dot{y}(x) dx = p^{o'}(x_1) \Delta y(x_1) - \int_{x_0}^{x_1} \dot{p}^{o'}(x) \Delta y(x) dx. \quad (16)$$

С учетом тождеств (13) – (16) формула приращения (8) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta S(u^o, v^o) &= \left[\varphi(\bar{y}(x_1)) - \varphi(y^o(x_1)) \right] + \int_{x_0}^{x_1} \left[G(x, \bar{z}(t_1, x)) - G(x, z^o(t_1, x)) \right] dx + \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} \psi^{o'}(t_1, x) \Delta z(t_1, x) dx - \int_{x_0}^{x_1} \psi^{o'}(t_0, x) \Delta y(x) dx - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi_t^{o'}(t, x) \Delta z(t, x) dx dt + p^{o'}(x_1) \Delta y(x_1) - \int_{x_0}^{x_1} \dot{p}^{o'}(x) \Delta y(x) dx - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[H(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t, x), \psi^o(t, x)) - H(t, x, z^o(t, x), u^o(t, x), \psi^o(t, x)) \right] dx dt - \\ &- \int_{x_0}^{x_1} \left[M(x, \bar{y}(x), \bar{v}(x), p^o(x)) - M(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)) \right] dx. \end{aligned} \quad (17)$$

Для простоты изложений в дальнейшем будут использованы следующего типа обозначения:

$$\Delta_{\bar{u}(t, x)} H(t, x) \equiv H(t, x, z^o(t, x), \bar{u}(t, x), \psi^o(t, x)) - H(t, x, z^o(t, x), u^o(t, x), \psi^o(t, x)),$$

$$\Delta_{\bar{v}(x)} M(x) \equiv M(x, y^o(x), \bar{v}(x), p^o(x)) - M(x, y^o(x), v^o(x), p^o(x)),$$

$$f_z(t, x) \equiv f_z(t, x, z^o(t, x), u^o(t, x)),$$

$$g_y(x) \equiv g_y(x, y^o(x), v^o(x)).$$

По предположению $f(t, x, z, u)$, $g(x, y, v)$, $\varphi(y)$ и $G(x, z)$ достаточно гладкие функции. Поэтому используя формулу Тейлора из (17), получим

$$\begin{aligned} \Delta S(u^o, v^o) &= \varphi'_y(y^o(x_1)) \Delta y(x_1) + \int_{x_0}^{x_1} G'_z(x, z^o(t_1, x)) \Delta z(t_1, x) dx + \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} \psi^{o'}(t_1, x) \Delta z(t_1, x) dx + p^{o'}(x_1) \Delta y(x_1) - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi_t^{o'}(t, x) \Delta z(t, x) dx dt - \\ &- \int_{x_0}^{x_1} \dot{p}^{o'}(x) \Delta y(x) dx - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}(t, x)} H(t, x) dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_z(t, x) \Delta z(t, x) dx dt - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}(t,x)} H'_z(t,x) \Delta z(t,x) dx dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t,x) H_{zz}(t,x) \Delta z(t,x) dx dt - \\
& - \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{v}(x)} M(x) dx - \int_{x_0}^{x_1} M'_y(x) \Delta y(x) dx - \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{v}(x)} M'_y(x) \Delta y(x) dx - \\
& - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \Delta y'(x) M_{yy}(x) \Delta y(x) dx + \frac{1}{2} \Delta y'(x_1) \varphi_{yy}(y^o(x_1)) \Delta y(x_1) + \\
& + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t_1, x) G_{zz}(x, z^o(t_1, x)) \Delta z(t_1, x) dx + \eta_1 (\Delta u, \Delta v), \tag{18}
\end{aligned}$$

где по определению $\eta_1 (\Delta u, \Delta v)$ остаток формулы приращения определяемая формулой

$$\begin{aligned}
\eta_1 (\Delta u, \Delta v) = & o_1 (\|\Delta y(x_1)\|^2) + \int_{x_0}^{x_1} o_2 (\|\Delta z(t_1, x)\|^2) dx - \int_{x_0}^{x_1} o_3 (\|\Delta y(x)\|^2) dx - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_4 (\|\Delta z(t, x)\|^2) dx dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t, x) \Delta_{\bar{u}(t,x)} H_{zz}(t, x) \Delta z(t, x) dx dt - \\
& - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \Delta y'(x) \Delta_{\bar{v}(x)} M_{yy}(x) \Delta y(x) dx, \tag{19}
\end{aligned}$$

а величины $o_i(\cdot)$, $i = \overline{1, 4}$, определяются из разложений

$$\Phi(\bar{y}(x_1)) - \Phi(y^o(x_1)) = \Phi'_y(y^o(x_1)) \Delta y(x_1) + \frac{1}{2} \Delta y'(x_1) \varphi_{yy}(y^o(x_1)) \Delta y(x_1) + o_1(\|\Delta y(x_1)\|^2),$$

$$\begin{aligned}
G(x, \bar{z}(t_1, x)) - G(x, z^o(t_1, x)) &= G'_z(x, z^o(t_1, x)) \Delta z(t_1, x) + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t_1, x) G_{zz}(x, z^o(t_1, x)) \Delta z(t_1, x) dx + o_2(\|\Delta z(t_1, x)\|^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(x, \bar{y}(x), \bar{v}(x), p^o(x)) - M(x, y^o(x), \bar{v}(x), p^o(x)) &= M'_y(x, y^o(x), \bar{v}(x), p^o(x)) \Delta y(x) + \\
&+ \frac{1}{2} \Delta y'(x) M_{yy}(x, y^o(x), \bar{v}(x), p^o(x)) \Delta y(x) + o_3(\|\Delta y(x)\|^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t, x), \psi^o(t, x)) - H(t, x, z^o(t, x), \bar{u}(t, x), \psi^o(t, x)) &= \\
= H_z(t, x, z^o(t, x), \bar{u}(t, x), \psi^o(t, x)) \Delta z(t, x) + \\
&+ \frac{1}{2} \Delta z'(t, x) H_{zz}(t, x, z^o(t, x), \bar{u}(t, x), \psi^o(t, x)) \Delta z(t, x) + o_4(\|\Delta z(t, x)\|^2).
\end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем $\|\alpha\|$ – норма вектора в R^n , а $o_i(\alpha^2)$ означает, что $o(\alpha^2)/\alpha^2 \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Если предполагать, что $(\psi^0(t, x), p^0(x))$ есть решение задачи

$$\psi_t^0(t, x) = -H_z(t, x); \quad (20)$$

$$\psi^0(t_1, x) = -G_x(x, z^0(t_1, x)); \quad (21)$$

$$\dot{p}^0(x) = -M_y(x) - \psi^{0'}(t_0, x); \quad (22)$$

$$p^0(x_1) = -\varphi_y(y^0(x_1)), \quad (23)$$

то формула приращения (18) примет вид

$$\begin{aligned} \Delta S(u^0, v^0) = & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}(t, x)} H(t, x) dx dt - \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{v}(x)} M(x) dx + \\ & + \frac{1}{2} \Delta y'(x_1) \varphi_{yy}(y^0(x_1)) \Delta y(x_1) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t_1, x) G_{zz}(x, z^0(t_1, x)) \Delta z(t_1, x) dx - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}(t, x)} H'_z(t, x) \Delta z(t, x) dx dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t, x) H_{zz}(t, x) \Delta z(t, x) dx dt - \\ & - \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{v}(x)} M'_y(x) \Delta y(x) dx - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \Delta y'(x) M_{yy}(x) \Delta y(x) dx + \eta_1(\Delta u, \Delta v). \end{aligned} \quad (24)$$

Далее, из (9) – (12) получаем, что $(\Delta z(t, x), \Delta y(x))$ является решением линейризованной задачи

$$\Delta z_t(t, x) = f_z(t, x) - \Delta_{\bar{u}(t, x)} f(t, x) + \eta_2(t, x, \Delta u), \quad (t, x) \in D; \quad (25)$$

$$\Delta z(t_0, x) = \Delta y(x), \quad x \in X; \quad (26)$$

$$\Delta \dot{y}(x) = g_y(x) + \Delta_{\bar{v}(x)} g(x) + \eta_3(x, \Delta v); \quad (27)$$

$$\Delta y(x_0) = 0, \quad (28)$$

где по определению

$$\eta_2(t, x, \Delta u) = \Delta_{\bar{u}(t, x)} f_z(t, x) \Delta z(t, x) + o_5(\|\Delta z(t, x)\|),$$

$$\eta_1(x, \Delta v) = \Delta_{\bar{v}(x)} g_y(x) \Delta y(x) + o_6(\|\Delta y(x)\|).$$

Здесь величины $o_i(\cdot)$, $i = 5, 6$, находятся из разложений

$$\begin{aligned} f(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t, x)) - f(t, x, z(t, x), \bar{u}(t, x)) = \\ = f(t, x, z(t, x), \bar{u}(t, x)) \Delta z(t, x) + o_5(\|\Delta z(t, x)\|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x, \bar{y}(x), \bar{v}(x)) - g(x, y^0(x), \bar{v}(x)) = \\ = g_y(x, y^0(x), \bar{v}(x)) \Delta y(x) + o_6(\|\Delta y(x)\|). \end{aligned}$$

Интерпретируя уравнения (25), (27) как линейные дифференциальные уравнения относительно $\Delta z(t, x)$ и $\Delta y(x)$ соответственно, на основе формулы Коши о представлении решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений (см., напр., [15–17]) получаем, что решения задач (25) – (28) допускают соответ-

ственно представления в виде

$$\Delta z(t, x) = F(t, t_0, x) \Delta y(x) + \int_{t_0}^t F(t, \tau, x) \Delta_{\bar{u}(\tau, x)} f(\tau, x) d\tau + \eta_4(t, x, \Delta u); \quad (29)$$

$$\Delta y(x) = \int_{x_0}^x \Phi(x, s) \Delta_{\bar{v}(s)} g(s) ds + \eta_5(x, \Delta v). \quad (30)$$

Здесь, по определению,

$$\eta_4(t, x, \Delta u) = \int_{t_0}^t F(t, \tau, x) \eta_2(\tau, x, \Delta u) d\tau, \\ \eta_5(x, \Delta v) = \int_{x_0}^x \Phi(x, s) \eta_3(s, \Delta v) ds.$$

Далее, учитывая (30) в (29), получим

$$\Delta z(t, x) = \int_{x_0}^x F(t, t_0, x) \Phi(x, s) \Delta_{\bar{v}(s)} g(s) ds + \\ + \int_{t_0}^t F(t, x, \tau) \Delta_{\bar{u}(\tau, x)} f(\tau, x) d\tau + \eta_6(t, x, \Delta u, \Delta v), \quad (31)$$

где по определению

$$\eta_6(t, x, \Delta u, \Delta v) = \eta_4(t, x, \Delta u) + F(t, t_0, x) \eta_5(x, \Delta v). \quad (32)$$

Используя независимость и произвольность допустимых управлений $u(t, x)$ и $v(x)$, положим $\Delta u(t, x) \neq 0$, а $\Delta v(x) = 0$.

Тогда представление (31) примет вид

$$\Delta z(t, x) = \int_{t_0}^t F(t, \tau, x) \Delta_{\bar{u}(\tau, x)} f(\tau, x) d\tau + \eta_6(t, x, \Delta u, 0), \quad (33)$$

а из формулы приращения (24) критерия качества (7) будем иметь

$$\Delta_{\bar{u}} S(u^0, v^0) = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}(t, x)} H(t, x) dx dt + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t_1, x) G_{zz}(x, z(t_1, x)) \Delta z(t_1, x) dx - \\ - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t, x) H_{zz}(t, x) \Delta z(t, x) dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}(t, x)} H'_z(t, x) \Delta z(t, x) dx dt + \eta_1(\Delta u, 0). \quad (34)$$

Займемся преобразованием отдельных слагаемых в формуле (34), используя представление (33).

Имеем

$$\int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t_1, x) G_{zz}(x, z^0(t_1, x)) \Delta z(t_1, x) dx = \\ = \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^t \Delta_{\bar{u}(\tau, x)} f'(\tau, x) F'(t_1, \tau, x) G_{zz}(x, z^0(t_1, x)) F(t_1, s, x) \Delta_{\bar{u}(s, x)} f(s, x) d\tau ds dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}(\tau, x)} f'(\tau, x) F'(t_1, \tau, x) G_{zz}(x, z^0(t_1, x)) \eta_6(t_1, x, \Delta u, 0) d\tau dx + \\
& + \int_{x_0}^{x_1} \eta'_6(t_1, x, \Delta u, 0) G_{zz}(x, z^0(t_1, x)) \Delta z(t_1, x) dx, \quad (35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}(t, x)} H'_z(t, x) \Delta z(t, x) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_t^{t_1} \Delta_{\bar{u}(\tau, x)} H'_z(\tau, x) F(\tau, t, x) d\tau \right] \Delta_{\bar{u}(t, x)} f(t, x) dx dt + \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}(t, x)} H'_z(t, x) \eta_6(t, x, \Delta u, 0) dx dt. \quad (36)
\end{aligned}$$

По аналогии с [5–11] и др. получаем, что

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t, x) H_{zz}(t, x) \Delta z(t, x) dx dt = \\
& = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}(\tau, x)} f'(\tau, x) \left\{ \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} F'(t, \tau, x) H_{zz}(t, x) F(t, s, x) dt \right\} \Delta_{\bar{u}(s, x)} f(s, x) dx dt + \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{t_0}^t F(t, \tau, x) \Delta_{\bar{u}(\tau, x)} f(\tau, x) d\tau \right) H_{zz}(t, x) \eta_6(t, x, \Delta u, 0) dx dt + \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \eta_6(t, x, \Delta u, 0) H_{zz}(t, x) \Delta z(t, x) dx dt. \quad (37)
\end{aligned}$$

Положим по определению

$$\begin{aligned}
K(x, \tau, s) &= \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} F'(t, \tau, x) H_{zz}(t, x) F(t, s, x) dt - \\
&- F'(t_1, \tau, x) G_{zz}(x, z^0(t_1, x)) F(t_1, s, x). \quad (38)
\end{aligned}$$

Теперь, учитывая тождества (35) – (37), в формуле приращения (34) получим

$$\begin{aligned}
& \Delta_{\bar{u}} S(u^0, v^0) = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}(t, x)} H(t, x) dx dt - \\
& - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}(\tau, x)} f'(\tau, x) K(x, \tau, s) \Delta_{\bar{u}(s, x)} f(s, x) d\tau ds dx + \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_{t_0}^t \Delta_{\bar{u}(t, x)} H'_z(t, x) F(\tau, t, x) d\tau \right] \Delta_{\bar{u}(t, x)} f(t, x) ds dx + \eta_7(\Delta u). \quad (39)
\end{aligned}$$

Здесь по определению

$$\begin{aligned} \eta_7(\Delta u) = & \eta_1(\Delta u) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \eta_6(t_1, x, \Delta u, 0) G_{zz}(x, z^o(t_1, x)) \Delta z(t_1, x) dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}(\tau, x)} f'(\tau, x) F'(t_1, \tau, x) G_{zz}(x, z^o(t_1, x)) \eta_6(t_1, x, \Delta u, 0) d\tau dx - \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{t_0}^t F(t, \tau, x) \Delta_{\bar{u}(\tau, x)} f(\tau, x) d\tau \right)' H_{zz}(t, x) \eta_6(t, x, \Delta u, 0) dx dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \eta_6'(t, x, \Delta u, 0) H_{zz}(t, x) \Delta z(t, x) dx dt. \end{aligned}$$

Если предполагать, что $\Delta u(t, x) = 0$, $\Delta v(x) \neq 0$, то представление (31) примет вид

$$\Delta z(t, x) = \int_{x_0}^x F(t, t_0, x) \Phi(x, s) \Delta_{\bar{v}(s)} g(s) ds + \eta_6(t, x, 0, \Delta v), \quad (40)$$

а из формулы приращения (34) получим

$$\begin{aligned} \Delta_{\bar{v}} S(u^o, v^o) = & S(u^o, \bar{v}) - S(u^o, v^o) = \\ = & - \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{v}(x)} M(x) dx + \frac{1}{2} \Delta y'(x_1) \varphi_{yy}(y^o(x_1)) \Delta y(x_1) + \\ & + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t_1, x) G_{zz}(x, z^o(t_1, x)) \Delta z(t_1, x) dx - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \Delta y'(x) M_{yy}(x) \Delta y(x) dx - \\ & - \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{v}(x)} M'_y(x) \Delta y(x) dx - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t, x) H_{zz}(t, x) \Delta z(t, x) dx dt + \eta_1(0, \Delta v). \quad (41) \end{aligned}$$

При помощи представлений (30) доказывается справедливость соотношений

$$\begin{aligned} \Delta y'(x_1) \varphi_{yy}(y^o(x_1)) \Delta y(x_1) = \\ = \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{v}(m)} g'(m) \Phi'(x_1, m) \varphi_{yy}(y^o(x_1)) \Phi(x_1, \ell) \Delta_{\bar{v}(\ell)} g(\ell) dm d\ell + \\ + \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{v}(m)} g'(m) \Phi'(x_1, m) \varphi_{yy}(y^o(x_1)) \eta_5(x_1, \Delta v) dx + \eta_5'(x_1, \Delta v) \varphi_{yy}(y^o(x_1)) \Delta y(x_1), \quad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{v}(x)} M'_y(x) \Delta y(x) dx = \\ = \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{v}(m)} M_y(m) \Phi(x, m) dm \right]' \Delta_{\bar{v}(x)} g(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{v}(x)} M'_y(x) \eta_5(x, \Delta v) dx, \quad (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0}^{x_1} \Delta y'(x) M_{yy}(x) \Delta y(x) dx = \\
& = \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{v}(m)} g'(m) \left\{ \int_{\max(m, \ell)}^{x_0} \Phi'(x, m) M_{yy}(x) \Phi(x, \ell) dx \right\} \Delta_{\bar{v}(\ell)} g(\ell) dm d\ell + \\
& + \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{x_0}^x \Phi(x, m) \Delta_{\bar{v}(m)} g(m) dm \right) M_{yy}(x) \eta_5(x, \Delta v) dx + \int_{x_0}^{x_1} \eta'_5(x, \Delta v) M_{yy}(x) \Delta y(x) dx. \quad (44)
\end{aligned}$$

Далее, используя представление (40), получим

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t_1, x) G_{zz}(x, z^o(t_1, x)) \Delta z(t_1, x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{v}(m)} g'(m) \times \\
& \times \left\{ \int_{\max(m, \ell)}^{x_1} \Phi'(x, m) F'(t_1, t_0, x) G_{zz}(x, z^o(t_1, x)) F(t_1, t_0, x) \Phi(x, \ell) dx \right\} \Delta_{\bar{v}(\ell)} g(\ell) dm d\ell + \\
& + \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{x_0}^x F(t_1, t_0, x) \Phi(x, m) \Delta_{\bar{v}(m)} g(m) dm \right)' G_{zz}(x, z^o(t_1, x)) \eta_6(t_1, x, 0, \Delta v) dx + \\
& + \int_{x_0}^{x_1} \eta_6(t_1, x, 0, \Delta v) G_{zz}(x, z^o(t_1, x)) \Delta z(t_1, x) dx, \quad (45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t, x) H_{zz}(t, x) \Delta z(t, x) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{v}(m)} g'(m) \times \\
& \times \left\{ \int_{\max(m, \ell)}^{x_1} \Phi'(x, m) F'(t, t_0, x) H_{zz}(t, x) F(t, t_0, x) \Phi(x, \ell) dx \right\} \Delta_{\bar{v}(\ell)} g(\ell) dm d\ell + \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{x_0}^x F(t, t_0, x) \Phi(x, m) \Delta_{\bar{v}(m)} g(m) dm \right)' H_{zz}(t, x) \eta_6(t, x, 0, \Delta v) dx dt + \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \eta'_6(t, x, 0, \Delta v) H_{zz}(t, x) \Delta z(t, x) dx dt. \quad (46)
\end{aligned}$$

Полагая

$$\begin{aligned}
& J(m, \ell) = -\Phi'(x, m) \varphi_{yy}(y^o(x_1)) \Phi(x, \ell) - \\
& - \int_{\max(m, \ell)}^{x_1} \Phi'(x, m) F'(t_1, t_0, x) G_{zz}(x, z^o(t_1, x)) F(t_1, t_0, x) \Phi(x, \ell) dx + \\
& + \int_{\max(m, \ell)}^{x_1} \Phi'(x, m) M_{yy}(x) \Phi(x, \ell) dx + \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\max(m, \ell)}^{x_1} \Phi'(x, m) F'(t, t_0, x) H_{zz}(t, x) F(t, t_0, x) \Phi(x, \ell) dx dt \quad (47)
\end{aligned}$$

и учитывая тождества (42) – (46) в (39), получим

$$\begin{aligned} \Delta_{\bar{v}(x)} S(u^o, v^o) = S(u^o, \bar{v}) - S(u^o, v^o) = & -\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{v}(m)} g'(m) J(m, \ell) \Delta_{\bar{v}(\ell)} g(\ell) dm d\ell + \\ & + \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_x^{x_1} \Delta_{\bar{v}(m)} M'_y(m) \Phi(m, x) dm \right] \Delta_{v(x)} g(x) dx + \eta_8(\Delta v), \end{aligned} \quad (48)$$

где по определению

$$\begin{aligned} \eta_8(\Delta v) = & \frac{1}{2} \eta'_5(x_1, \Delta v) \varphi_{yy}(y^o(x_1)) \Delta y(x_1) + \\ & + \frac{1}{2} \int_x^{x_1} \Delta_{\bar{v}(m)} g'(m) \Phi(x_1, m) \varphi_{yy}(y^o(x_1)) \eta_5(x_1, \Delta v) dm - \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{v}(x)} M'_y(x) \eta_5(x, \Delta v) dx - \\ & - \frac{1}{2} \int_x^{x_1} \eta'_5(x, \Delta v) M_{yy}(x) \Delta y(x) dx - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{x_0}^x \Phi(x, m) \Delta_{\bar{v}(m)} g(m) dm \right)' M_{yy}(x) \eta_5(x, \Delta v) dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{x_0}^x F(t_1, t_0, x) \Phi(x, m) \Delta_{\bar{v}(m)} g(m) dm \right)' G_{zz}(x, z^o(t_1, x)) \eta_6(t_1, x, 0, \Delta v) dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \eta'_6(t_1, x, 0, \Delta v) G_{zz}(x, z^o(t_1, x)) \Delta z(t_1, x) dx - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \eta'_6(t_1, x, 0, \Delta v) H_{zz}(t, x) \Delta z(t, x) dx dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{x_0}^x F(t_1, t_0, x) \Phi(x, m) \Delta_{\bar{v}(m)} g(m) dm \right)' H_{zz}(t, x) \eta_6(t_1, x, 0, \Delta v) dx dt. \end{aligned}$$

Как видно, главные члены в формулах приращения (39), (48) функционала качества явно от приращения $(\Delta z(t, x), \Delta y(x))$ состояния $(z^o(t, x), y^o(x))$ не зависят. А это, в свою очередь, позволяет получить как необходимое условие оптимальности первого порядка, так и исследовать случай его вырождения с единых позиций.

Заметим, что матричные функции (38), (47) являются аналогами матричных функций, впервые введенных в рассмотрение в работах [5–11] и др. для исследования особых режимов и вывода необходимых условий оптимальности второго порядка.

4. Оценка нормы приращения состояния

Из (9), (11), переходя к эквивалентным интегральным уравнениями типа Вольтерра, будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta z(t, x) = & \Delta y(x) + \int_{t_0}^t \left[f(\tau, x, z^o(\tau, x) + \Delta z(\tau, x), u^o(\tau, x) + \Delta u(\tau, x)) - f(\tau, x, z^o(\tau, x), u^o(\tau, x)) \right] d\tau, \\ \Delta y(x) = & \int_{x_0}^x \left[g(s, y^o(s) + \Delta y(s), v^o(s) + \Delta v(s)) - g(s, y^o(s), v^o(s)) \right] ds. \end{aligned}$$

Отсюда, переходя к норме и используя условие Липшица, получим

$$\|\Delta z(t, x)\| \leq \|\Delta y(x)\| + L_1 \int_{t_0}^t \|\Delta_{\bar{u}(\tau, x)} f(\tau, x, z^0(\tau, x), u^0(\tau, x))\| d\tau + L_1 \int_{t_0}^t \|\Delta z(\tau, x)\| d\tau; \quad (49)$$

$$\|\Delta y(x)\| \leq L_2 \int_{x_0}^x \|\Delta_{\bar{v}(s)} g(s, y^0(s), v^0(s))\| ds + L_2 \int_{x_0}^x \|\Delta y(s)\| ds, \quad (50)$$

где $L_1, L_2 = \text{const} > 0$ – некоторые постоянные.

Применяя к неравенству (50) аналог леммы Гронуолла – Беллмана из [18] приходим к неравенству

$$\|\Delta y(x)\| \leq L_3 \int_{x_0}^{x_1} \|\Delta_{\bar{v}(s)} g(s, y^0(s), v^0(s))\| ds, \quad (51)$$

($L_4 = \text{const} > 0$).

Учитывая оценку (51) в неравенстве (49), а затем применяя к полученному неравенству леммы Гронуолла – Беллмана, приходим к оценке

$$\|\Delta z(t, x)\| \leq L_5 \left[\int_{x_0}^{x_1} \|\Delta_{\bar{v}(s)} g(s, y^0(s), v^0(s))\| ds + \int_{t_0}^{t_1} \|\Delta_{\bar{u}(\tau, x)} f(\tau, x, z^0(\tau, x), u^0(\tau, x))\| d\tau \right], \quad (52)$$

где $L_5 = \text{const} > 0$ некоторое постоянное.

Оценки (51), (52) в дальнейшем будут использованы при выводе необходимых условий оптимальности.

5. Необходимые условия оптимальности

Специальное приращение управляющей функции $u^0(t, x)$ определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t, x) = \begin{cases} u(x), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), x \in X, \\ 0, & t \in T \setminus [\theta, \theta + \varepsilon), x \in X. \end{cases} \quad (53)$$

Здесь $u(x) \in U$ – произвольная непрерывная функция, $\theta \in [t_0, t_1)$ – произвольная точка непрерывности управляющей функции $u^0(t, x)$ по t , а $\varepsilon > 0$ произвольное малое число, такое, что $\theta + \varepsilon < t_1$.

Через $(\Delta z_\varepsilon(t, x), \Delta y_\varepsilon(x))$ обозначим специальное приращение состояния $(z^0(t, x), y^0(x))$, соответствующее приращению (53) управления $u^0(t, x)$.

Ясно, что $\|\Delta y_\varepsilon(x)\| = 0$, а

$$\|\Delta z_\varepsilon(t, x)\| \leq L_6 \varepsilon, \quad (t, x) \in D. \quad (54)$$

Учитывая (53), (54) в (39), получаем разложение

$$\Delta_{v(x)} S(u^0, v^0) = -\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{v(x)} H(\theta, x) dx + o(\varepsilon). \quad (55)$$

Теперь специальное приращение управляющей функции $v^0(x)$ определим по формуле

$$\Delta v_\mu(x) = \begin{cases} v, & x \in [\xi, \xi + \mu), \\ 0, & x \in X \setminus [\xi, \xi + \mu), \end{cases} \quad (56)$$

где $v \in V$ – произвольный вектор, $\xi \in [x_0, x_1)$ – произвольная точка непрерывности $v^0(x)$, а $\mu > 0$ – произвольное достаточно малое число, такое, что $\xi + \mu < x_1$.

Через $(\Delta z_\mu(t, x), \Delta y_\mu(x))$ обозначим специальное приращение состояния $(z^0(t, x), y^0(x))$, отвечающее приращению (56) управляющей функции $(u^0(t, x), v^0(x))$.

Из оценок (51), (52) следует, что

$$\begin{aligned} \|\Delta z_\mu(t, x)\| &\leq L_7 \mu, \quad (t, x) \in D, \\ \|\Delta y_\mu(x)\| &\leq L_8 \mu, \quad x \in X. \end{aligned} \quad (57)$$

Принимая во внимания (56), (57) в (48) приходим к разложению

$$\Delta_{v(x)} S(u^0, v^0) = -\mu \Delta_v M(\xi) + o(\mu). \quad (58)$$

Из разложений (55), (58) следует справедливость утверждения.

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $(u^0(t, x), v^0(x))$ необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{w(x)} H(\theta, x) dx \leq 0 \quad (59)$$

для всех $u(x) \in U$, $x \in X$, $\theta \in [t_0, t_1)$,

$$\Delta_v M(\xi) \leq 0 \quad \text{для всех } \xi \in [x_0, x_1). \quad (60)$$

Соотношения (59), (60) назовем принципом максимума Понтрягина для рассматриваемой задачи.

Изучим случай вырождения условия максимума Понтрягина.

Определение. Допустимое управление $(u^0(t, x), v^0(x))$ назовем особым в смысле принципа максимума Понтрягина, если выполняются соотношения

$$\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{w(x)} H(\theta, x) dx = 0, \quad \text{для всех } \theta \in [t_0, t_1) \text{ и } u(x) \in U, \quad x \in X; \quad (61)$$

$$\Delta_v M(\xi) \equiv 0, \quad \text{для всех } \xi \in [x_0, x_1) \text{ и } v \in V. \quad (62)$$

Случай выполнения тождеств (61), (62) назовем особым.

Из определения ясно, что в особом случае условие максимума (59), (60) Понтрягина, вырождаясь, становится неэффективным [14].

Поэтому надо иметь новые необходимые условия оптимальности позволяющие распознать неоптимальность особых управлений.

Построенные формулы приращения (39), (48) позволяют получить такие необходимые условия оптимальности.

Предположим, что допустимое управление $(u^o(t, x), v^o(x))$ является особым в смысле принципа максимума Понтрягина управлением. Тогда из формул приращения (39), (48) с учетом оценок для $\|\Delta z_\varepsilon(t, x)\|$, $\|\Delta y_\mu(x)\|$, $\|\Delta z_\mu(t, x)\|$, а также соотношений (56), (57), (61), (62) получаем справедливость разложений

$$\Delta_{u(x)} S(u^o, v^o) = -\frac{\varepsilon^2}{2} \left[\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{u(x)} f'(\theta, x) K(x, \theta, \theta) \Delta_{u(x)} f(\theta, x) dx + \right. \\ \left. + \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{u(x)} H'_z(\theta, x) \Delta_{u(x)} f(\theta, x) dx \right] + o(\varepsilon^2), \quad (63)$$

$$\Delta_v S(u^o, v^o) = -\frac{\varepsilon^2}{2} [\Delta_v g'(\xi) J(\xi, \xi) \Delta_v g(\xi) + \Delta_v M'_y(\xi) \Delta_v g(\xi)] + o(\mu^2). \quad (64)$$

Из разложений (63), (64) в силу произвольности и достаточной малости ξ и μ следует

Теорема 2. Для оптимальности особого в смысле принципа максимума Понтрягина управления $(u^o(t, x), v^o(x))$ необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{u(x)} f'(\theta, x) K(x, \theta, \theta) \Delta_{u(x)} f(\theta, x) dx + \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{u(x)} H'_x(\theta, x) \Delta_{u(x)} f(\theta, x) dx \leq 0, \quad (65)$$

для всех $\theta \in [t_0, t_1]$, $u(x) \in U$, $x \in X$;

$$\Delta_v g'(\xi) J(\xi, \xi) \Delta_v g(\xi) + \Delta_v M'_y(\xi) \Delta_v g(\xi) \leq 0, \quad (66)$$

для всех $\xi \in [x_0, x_1]$, $v \in V$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Москаленко А.И. Об одном классе задач оптимального регулирования // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1969. № 1. С. 68–95.
2. Москаленко А.И. Некоторые вопросы теории оптимального управления: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 1971. 21 с.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. М.: URSS, 2011. 272 с.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевич В.В. Методы оптимизации. Минск: Четыре четверты, 2011. 472 с.
5. Мансимов К.Б. Об одной схеме исследования особого случая в системах Гурса – Дарбу // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук. 1981. № 2. С. 100–104.
6. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку: Изд-во ЭЛМ, 1999. 176 с.
7. Мансимов К.Б. Исследование особых процессов в задачах оптимального управления: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Баку: БГУ, 1994. 42 с.
8. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса – Дарбу. Баку: Изд-во ЭЛМ, 2010. 360 с.

9. Mardanov M.J., Mansimov K.B. Necessary optimality conditions of guasisingular controls in optimal control problem described by integro-differential equations // Proc. Inst. Mech.and Matem. ANAS. 2015. V. 41. № 1. P. 113–122.
10. Марданов М.Дж., Мансимов К.Б., Меликов Т.К. Исследование особых управлений и необходимые условия оптимальности второго порядка в системах с запаздыванием. Баку: Элм, 2013. 355 с.
11. Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра. Баку, 2013. 224 с.
12. Параев Ю.И., Грекова Т.И., Данилюк Е.Ю. Аналитическое решение задачи оптимального управления односекторной экономикой на конечном интервале времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4(17). С. 4–15.
13. Параев Ю.И. Оптимальное управления двухсекторный экономикой // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 3(28). С. 4–11.
14. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: URSS, 2013. 256 с.
15. Алексеев В.М., Фомин С.В., Тихомиров В.М. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 429 с.
16. Ащепков Л.Т. Лекции по оптимальному управлению. Владивосток: Изд-во ДВУ, 1985. 165 с.
17. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск: Изд-во БГУ, 1973. 256 с.
18. Плотников В.И., Сумин В.И. Проблема устойчивости нелинейных систем Гурса – Дарбу // Дифференц. уравнения. 1972. № 5. С. 845–856.

Статья поступила 07.01.2018 г.

Mansimov K.B., Rasulova Sh.M. (2018) ON OPTIMALITY OF SINGULAR CONTROLS IN AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 54. pp. 17–33

DOI 10.17223/19988621/54/2

Keywords: Pontryagin maximum principle, necessary condition for optimality of singular controls, formula of increment.

In this paper, a Moskalenko type optimal control problem is considered.

We consider the optimal control problem of minimizing the terminal type functional

$$S(u, v) = \varphi(y(x_1)) + \int_{x_0}^{x_1} G(x, z(t, x)) dx,$$

under constraints

$$u(t, x) \in U \subset R^r, \quad (t, x) \in D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1],$$

$$v(x) \in V \subset R^q, \quad x \in X = [x_0, x_1],$$

$$z_t(t, x) = f(t, x, z(t, x), u(t, x)), \quad (t, x) \in D,$$

$$z(t_0, x) = y(x), \quad x \in X,$$

$$y(x_0) = y_0.$$

Here, $f(t, x, z, u)$ ($g(x, y, v)$) is an n -dimensional vector function which is continuous on the set of variables, together with partial derivatives with respect to z (y) up to second order,

$t_0, t_1, x_0, x_1 (t_0 < t_1, x_0 < x_1)$ are given, $\varphi(y)$ ($G(x, z)$) is a given twice continuously differentiable with respect to y (z) scalar function, U (V) is a given nonempty bounded set, and $u(t, x)$ is an r -dimensional control vector function piecewise continuous with respect to t and continuous with respect to x , $v(x)$ is a q -dimensional piecewise continuous vector of control actions.

The necessary optimality conditions for singular controls in the sense of the Pontryagin maximum principle have been obtained.

AMS Mathematical Subject Classification: 49K20

MANSIMOV Kamil' Bayramali ogly (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Baku State University, Institute of Control Problems of the Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan). E-mail: kamilbmansimov@gmail.com, kmansimov@mail.ru

RASULOVA Shahla Macid gyzy (Institute of Control problems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan).

REFERENCES

1. Moskalenko A.I. (1969) Ob odnom klasse zadach optimal'nogo regulirovaniya [On a class of optimal control problems]. *Zhurn. vychisl. mat. i mat. fiziki*. 1. pp. 68–95.
2. Moskalenko A.I. (1971) *Nekotorye voprosy teorii optimal'nogo upravleniya* [Some problems in the theory of optimal control]. Dis. Cand. fiz.-mat. nauk. Tomsk. 21 p.
3. Gabbasov R., Kirillova F. M. (2011) *Printsip maksimuma v teorii optimal'nogo upravleniya* [The maximum principle in the optimal control theory]. Moscow. URSS. 272 p.
4. Gabasov R., Kirillova F.M., Alisievich V.V. (2011) *Metody optimizatsii* [Optimization Methods] Minsk: Publishing house «Four quarters». 472 p.
5. Mansimov K.B. (1981) Ob odnoy scheme issledovaniya osobogo sluchaya v sistemakh Gursa–Darbu [On a scheme of studying a singular case in Goursat–Darboux systems]. *Izv. AN Azerb. SSR. Ser. Phys.-tech. and math. Sciences*, no. 2, pp. 100–104.
6. Mansimov K.B. (1999) *Osobyie upravleniya v sistemakh s zapazdyvaniem* [Singular controls in systems with delay]. Baku: Publishing house "ELM". 176 p.
7. Mansimov K.B. (1994) *Issledovaniye osobykh protsessov v zadachakh optimal'nogo upravleniya* [Study of singular processes in optimal control problems]. Author's abstract. Diss. on competition of a scientific degree. PhD in physics and mathematics sciences. Baku: BSU. 42 pp.
8. Mansimov K.B., Mardanov M.J. (2010) *Kachestvennaya teoriya optimalnogo upravleniya sistemami Gursa–Darbu* [Qualitative theory of optimal control of Goursat–Darboux systems]. Baku: Publishing house "ELM". 360 p.
9. Mardanov M.J., Mansimov K.B. (2015) Necessary optimality conditions of quasisingular controls in optimal control problem described by integro-differential equations // *Proc. Inst. Mech. and matem.* ANAS. V. 41. No. 1. P. 113–122.
10. Mardanov M.J., Mansimov K.B., Melikov T.K. (2013) *Issledovaniya osobykh upravleniy i neobkhodimye usloviya vtorogo poryadka v sistemakh s zapazdyvaniem* [Study of singular controls and necessary optimality conditions of second order in systems with delay]. Baku: Publishing house "ELM". 355 p.
11. Abdullayev A.A., Mansimov K.B. (2013) *Neobkhodimye usloviya optimalnosti v protsessakh opisyvaemykh sistemoy differentsialnykh uravneniy tipa Volterra* [Necessary optimality conditions in processes described by a system of Volterra-type integral equations]. Baku. 224 p.
12. Parayev Yu.I., Grekova T.I., Danilyuk Ye.Yu. (2011) Analiticheskoe reshenie zadachi optimal'nogo upravleniya odnosektornoy ekonomikoy na konechnom intervale vremeni [Analytical solution of the problem of optimum control for one-sector economy on a finite

- time interval]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika*. 4(17). pp. 4–15.
13. Parayev Yu.I. (2014) Optimal'noye upravleniya dvukhsektornyy ekonomikoy [Optimal control for the two-sector economy]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika*. 3(28). pp. 4–11.
 14. Gabasov R., Kirillova F.M. (1973) *Osobyie optimal'nyye upravleniya* [Singular optimal controls]. Moscow: URRS. 256 p.
 15. Alekseyev V.M., Fomin S.V., Tikhomirov V.M. (1979) *Optimal'noye upravleniye* [Optimal control]. Moscow: Nauka. 429 p.
 16. Ashchepkov L.T. (1985) *Lektsii po optimal'nomu upravleniyu* [Lectures on optimal control]. Vladivostok: Izd-vo DVU. 165 p.
 17. Gabasov R., Kirillova F.M. (1973) *Optimizatsiya lineynykh system* [Optimization of linear systems]. Minsk: Izd-vo BGU. 256 p.
 18. Plotnikov V.I., Sumin V.I. (1972) Problema ustoychivosti nelineynykh sistem Gursa–Darbu [The stability problem for non-linear Goursat–Darboux systems]. *Differents. uravneniya*. 5. pp. 845–856.

Я.В. Славолубова

АССОЦИИРОВАННЫЕ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА СЕМИМЕРНОЙ ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА H^7

Построены новые ассоциированные левоинвариантные контактные метрические структуры на семимерной группе Гейзенберга H^7 . Изучен общий двенадцатипараметрический класс таких структур, подробно рассмотрены четыре подкласса. Основной результат работы сформулирован в виде теорем, обобщающих свойства левоинвариантных контактных структур на семимерной группе Гейзенберга H^7 и на произвольной $(2n+1)$ -мерной группе Гейзенберга H^{2n+1} .

Ключевые слова: группа Ли, контактные метрические структуры, ассоциированная метрика.

1. Предварительные сведения

Напомним основные понятия из теории контактных многообразий.

Определение 1 ([1]). Дифференцируемое $(2n+1)$ -мерное многообразие M^{2n+1} класса C^∞ называется контактным многообразием, если на нём задана дифференциальная 1-форма η , удовлетворяющая условию $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ всюду на M^{2n+1} . Форма η называется контактной формой.

Контактная форма определяет на многообразии M^{2n+1} $2n$ -мерное распределение $E^{2n} = \{X \in TM^{2n+1} : \eta(X) = 0\}$, которое называется контактным распределением. Кроме того, контактное многообразие M^{2n+1} имеет всюду ненулевое векторное поле, обозначаемое ξ , которое определяется свойствами: $\eta(\xi) = 1$ и $d\eta(\xi, X) = 0$, для всех векторных полей X на многообразии M^{2n+1} . Векторное поле ξ определяет одномерное распределение, дополнительное к распределению E^{2n} , и называется полем Рибба или характеристическим векторным полем контактной структуры.

Определение 2 ([1]). Если M^{2n+1} – контактное многообразие с контактной формой η , то контактной метрической структурой называется четвёрка (η, ξ, φ, g) , где ξ – характеристическое векторное поле, φ – аффинор на M^{2n+1} , g – риманова метрика, для которой имеют место следующие свойства:

1. $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$, где I – тождественный оператор на M^{2n+1} .
2. $d\eta(X, Y) = g(X, \varphi Y)$.
3. $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$.

Риманова метрика g контактной метрической структуры называется ассоциированной.

Пусть M^{2n+1} – контактное многообразие с контактной метрической структурой (η, ξ, φ, g) . Рассмотрим многообразие $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$. Векторное поле на $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$ задаётся парой $\left(X, f \frac{d}{dt}\right)$, где X – векторное поле, касательное к M^{2n+1} , t – координата

из $\mathbf{R}$ и f – функция класса C^∞ на $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$. Определим почти комплексную структуру J на $M^{2n+1} \times \mathbf{R}$ с помощью оператора J , действующего по формуле $J\left(X, f \frac{d}{dt}\right) = \left(\varphi X - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}\right)$. Очевидно, что $J^2 = -I$, $J(\xi) = \frac{d}{dt}$, $J\left(\frac{d}{dt}\right) = -\xi$, $J(X) = \varphi(X)$, если $X \in E^{2n}$. Если почти комплексная структура J интегрируемая, то контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) называется структурой Сасаки [1].

Пусть M^{2n+1} – контактное метрическое многообразие, такое, что η – контактная форма и (η, ξ, φ, g) – ассоциированная контактная метрическая структура для контактной структуры η . Если характеристическое векторное поле ξ порождает группу изометрий метрики g , то есть ξ – векторное поле Киллинга относительно g , то такую контактную метрическую структуру называют K -контактной структурой [1].

Определение 3 ([1]). Контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) называется η -Эйнштейновой структурой, если существуют гладкие функции a и b на многообразии M^{2n+1} , такие, что

$$Ric_g(X, Y) = ag(X, Y) + b\eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in TM^{2n+1}. \quad (1.1)$$

2. Контактная структура на группе Гейзенберга H^7

Известно [2], что на любой трёхмерной неабелевой группе Ли, за исключением $\mathbf{R} \times_{Id_{\mathbf{R}^2}} \mathbf{R}^2$, можно задать левоинвариантную контактную структуру. Среди пятимерных разрешимых алгебр Ли контактными являются 24 алгебры Ли. В размерности ≥ 7 существует бесконечное семейство неизоморфных контактных алгебр Ли [2]. На любой группе Гейзенберга H^{2n+1} можно задать левоинвариантную контактную структуру.

Рассмотрим семимерную группу Гейзенберга H^7 . Её алгебра Ли $L(H^7)$ образована следующими матрицами:

$$L(H^7) = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & x_4 & x_6 & x_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем в алгебре Ли группы Гейзенберга $L(H^7)$ базис $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$, состоящий из матриц из нулей с единицами только на местах, соответствующих координатным осям $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда скобки Ли в базисе $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ будут иметь вид $[e_2, e_1] = e_7$, $[e_4, e_3] = e_7$, $[e_6, e_5] = e_7$. Следовательно, ненулевые структурные константы следующие: $C_{12}^7 = -C_{21}^7 = -1$, $C_{34}^7 = -C_{43}^7 = -1$, $C_{56}^7 = -C_{65}^7 = -1$.

Поскольку построение контактной структуры проводится не просто на многообразии, а на группе Ли, то данная структура является левоинвариантной, и контактная форма η вместе с характеристическим векторным полем ξ задаются своими значениями в единице группы Ли, то есть $\eta = \eta(e)$, $\xi = \xi(e)$, $e \in H^7$.

Алгебра Ли группы Гейзенберга $L(H^7)$ является контактной алгеброй Ли с контактной формой $\eta = e_7^* = e^7$. Легко видеть, что дифференциал $d\eta$ формы η имеет вид: $d\eta = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^* + e_5^* \wedge e_6^*$. Таким образом, вектор e_7 является характеристическим векторным полем ξ данной контактной структуры, $\xi = e_7$, так как он удовлетворяет свойствам $\eta(\xi) = 1$ и $d\eta(\xi, X) = 0$ для всех векторных полей X в $L(H^7)$.

Контактное распределение, ядро 1-формы η , является левоинвариантным распределением, заданным подпространством E^6 в алгебре Ли группы Гейзенберга, $E^6 = \mathbf{R}\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

Алгебра Ли группы Гейзенберга $L(H^7)$ имеет нетривиальный центр $Z(L(H^7)) = e_7$ и является разрешимой. Данная контактная алгебра Ли $(L(H^7), \eta)$ получена центральным расширением $E^6 \times_{d\eta} \mathbf{R}$ симплектической коммутативной алгебры Ли $(E^6, d\eta)$ с помощью невырожденного 2-коцикла $d\eta$.

3. Ассоциированные контактные метрические структуры на (H^7, η)

Построим на контактной группе Ли (H^7, η) ассоциированные левоинвариантные контактные метрические структуры (η, ξ, φ, g) для контактной структуры η . Для этого на основе свойств: $\varphi^2|_{E^6} = -I$, $\varphi(\xi) = 0$, $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$, определим на контактной алгебре Ли $(L(H^7), \eta)$ аффиноф φ . Такой аффиноф φ может быть задан неоднозначно. Из свойства 3 определения 2 следует, что ассоциированную метрику g можно задавать с помощью аффинофа φ на основе формулы: $g(X, Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$. Также нетрудно заметить, что действие аффинофа φ совпадает с действием почти комплексной структуры J на векторах контактного распределения E^{2n} .

Рассмотрим более общую (псевдо)риманову метрику вида

$$g_\lambda(X, Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \lambda \eta(X)\eta(Y). \quad (3.1)$$

Параметр λ обеспечивает деформацию ассоциированной метрики g_λ вдоль поля Рибба ξ . В случае отрицательного значения данного параметра, имеем дело с псевдоримановой метрикой.

Зафиксируем аффиноф φ_0 , действие которого на базисных векторах $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_0(e_1) &= e_2, \quad \varphi_0(e_2) = -e_1, \quad \varphi_0(e_3) = e_4, \quad \varphi_0(e_4) = -e_3, \\ \varphi_0(e_5) &= e_6, \quad \varphi_0(e_6) = -e_5, \quad \varphi_0(e_7) = 0. \end{aligned}$$

Определим также метрику выражением

$$g_0 = e_1^{*2} + e_2^{*2} + e_3^{*2} + e_4^{*2} + e_5^{*2} + e_6^{*2} + \lambda e_7^{*2}.$$

По заданной ассоциированной метрике g_0 , соответствующей аффинофу φ_0 , можно определить новый аффиноф φ , который задаётся оператором P по формуле

$\varphi = \varphi_0(I + P)(I - P)^{-1}$ [3]. Оператор P действует на алгебре Ли $L(H^7)$ и имеет следующие свойства:

1. $P\varphi_0 = -\varphi_0P$, P антикоммутирует с аффинором φ_0 ; $P(\xi) = 0$.
2. P симметричен относительно метрики g_0 , Pg_0 – симметричная матрица.
3. $I - P^2$ – невырожденная матрица, $\det(I - P^2) \neq 0$, где I – тождественный оператор на $L(H^7)$.

С учётом вышеуказанных свойств, следует, что матрица оператора P имеет блочный вид

$$P|_{E^6} = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & F \\ D & F & N \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где блоки A, B, C, D, F, N – симметричные матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} s & t \\ t & -s \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} k & l \\ l & -k \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} q & r \\ r & -q \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} w & z \\ z & -w \end{pmatrix},$$

параметры $u, v, s, t, k, l, x, y, q, r, w, z$ – действительные числа.

Заметим, что матрица (3.2) оператора P содержит 12 параметров.

Изучим сначала некоторые частные классы ассоциированных метрик, соответствующих аффинорам φ , которые задаются операторами P четырёх типов

$$P|_{E^6} = \begin{pmatrix} 0 & B & 0 \\ B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P|_{E^6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P|_{E^6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \\ 0 & F & 0 \end{pmatrix}, \quad P|_{E^6} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix}.$$

В этом случае могут быть найдены выражения ассоциированных метрик и контактных метрических структур в явном виде, что позволит провести дальнейшие исследования.

1. Пусть матрица оператора P имеет вид $P|_{E^6} = \begin{pmatrix} 0 & B & 0 \\ B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где блок

$B = \begin{pmatrix} s & t \\ t & -s \end{pmatrix}$ содержит два параметра s и t . Тогда двухпараметрическое семейство

аффиноров φ определяется матрицей $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi|_{E^6} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где компоненты ненулевого

блока $\varphi|_{E^6}$, вычисленные на основе формулы $\varphi|_{E^6} = \varphi_0|_{E^6}(I + P)(I - P)^{-1}$, имеют вид

$$\varphi|_{E^6} = \frac{1}{1 - s^2 - t^2} \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \\ \varphi_2 & \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_3 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 + s^2 + t^2 \\ -(1 + s^2 + t^2) & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 2t & -2s \\ -2s & -2t \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

На параметры s и t накладывается ограничение $s^2 + t^2 \neq 1$, вытекающее из условия невырожденности матрицы $I - P^2$, $\det(I - P^2) = (1 - s^2 - t^2)^2 \neq 0$. Для определенности примем, что параметры s и t принимают достаточно малые значения и $s^2 + t^2 < 1$. Соответствующее двухпараметрическое семейство ассоциированных метрик определяется из формулы (3.1). Выпишем выражение (3.1) на векторах базиса $\{e_i\}$: $g_{ij} = d\eta_{ik}\phi_j^k + \lambda\eta_i\eta_j$.

В результате проведенных вычислений в системе Maple ассоциированные метрики определяются матрицей $g_\lambda = \begin{pmatrix} g|_{E^6} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, где компоненты блока $g|_{E^6}$ имеют следующий вид:

$$g|_{E^6} = \frac{1}{1-s^2-t^2} \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & 0 \\ g_2 & g_1 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 \end{pmatrix},$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1+s^2+t^2 & 0 \\ 0 & 1+s^2+t^2 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 2s & 2t \\ 2t & -2s \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варьируя значения параметров s и t , получаем различные вариации ассоциированных контактных метрических структур.

Секционные кривизны $K_{\{i,j\}}$ в направлении двумерных координатных площадок базисных векторов $\{e_i\}$ имеют следующие выражения:

$$K_{\{1,2\}} = K_{\{3,4\}} = -\frac{3\lambda(1-b)^2}{4(1+b)^2}, \quad K_{\{5,6\}} = -\frac{3\lambda}{4}, \quad K_{\{1,3\}} = K_{\{1,4\}} = K_{\{1,5\}} = K_{\{1,6\}} = 0,$$

$$K_{\{2,3\}} = K_{\{2,4\}} = K_{\{2,5\}} = K_{\{2,6\}} = 0, \quad K_{\{3,4\}} = K_{\{3,5\}} = K_{\{3,6\}} = 0, \quad K_{\{4,5\}} = K_{\{4,6\}} = 0,$$

$$K_{\{1,7\}} = K_{\{2,7\}} = K_{\{3,7\}} = K_{\{4,7\}} = K_{\{5,7\}} = K_{\{6,7\}} = \frac{\lambda}{4},$$

где $b = s^2 + t^2$.

2. Пусть матрица оператора P имеет вид $P|_{E^6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где блок

$D = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$. Тогда двухпараметрические семейства аффиноров ϕ и ассоциированных метрик g_λ задаются матрицами

$$\phi|_{E^6} = \frac{1}{1-x^2-y^2} \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 \\ 0 & \phi_3 & 0 \\ \phi_2 & 0 & \phi_1 \end{pmatrix},$$

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1+x^2+y^2 \\ -(1+x^2+y^2) & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 2y & -2x \\ -2x & -2y \end{pmatrix}, \quad \phi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g|_{E^6} = \frac{1}{1-x^2-y^2} \begin{pmatrix} g_1 & 0 & g_2 \\ 0 & g_3 & 0 \\ g_2 & 0 & g_1 \end{pmatrix},$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1+x^2+y^2 & 0 \\ 0 & 1+x^2+y^2 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & -2x \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $x^2 + y^2 < 1$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Получены выражения секционной кривизны $K_{\{i,j\}}$ в направлении двумерных координатных площадок базисных векторов $\{e_i\}$:

$$\begin{aligned} K_{\{1,2\}} = K_{\{5,6\}} &= -\frac{3\lambda(1-d)^2}{4(1+d)^2}, \quad K_{\{3,4\}} = -\frac{3\lambda}{4}, \quad K_{\{1,3\}} = K_{\{1,4\}} = K_{\{1,5\}} = K_{\{1,6\}} = 0, \\ K_{\{2,3\}} = K_{\{2,4\}} = K_{\{2,5\}} = K_{\{2,6\}} &= 0, \quad K_{\{3,4\}} = K_{\{3,5\}} = K_{\{3,6\}} = 0; \quad K_{\{4,5\}} = K_{\{4,6\}} = 0, \\ K_{\{1,7\}} = K_{\{2,7\}} = K_{\{3,7\}} = K_{\{4,7\}} &= K_{\{5,7\}} = K_{\{6,7\}} = \frac{\lambda}{4}, \end{aligned}$$

где $d = x^2 + y^2$.

3. Пусть матрица оператора P имеет вид $P|_{E^6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \\ 0 & F & 0 \end{pmatrix}$, где блок

$F = \begin{pmatrix} q & r \\ r & -q \end{pmatrix}$. Тогда двухпараметрическое семейство аффиноров φ , ассоциированная метрика g_λ задаются матрицами

$$\begin{aligned} \varphi|_{E^6} &= \frac{1}{1-q^2-r^2} \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ 0 & \varphi_3 & \varphi_2 \end{pmatrix}, \\ \varphi_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1+q^2+r^2 \\ -(1+q^2+r^2) & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} 2r & -2q \\ -2q & -2r \end{pmatrix}, \\ g|_{E^6} &= \frac{1}{1-q^2-r^2} \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & g_3 \\ 0 & g_3 & g_2 \end{pmatrix}, \\ g_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1+q^2+r^2 & 0 \\ 0 & 1+q^2+r^2 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 2q & 2r \\ 2r & -2q \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $q^2 + r^2 < 1$, $q, r \in \mathbb{R}$.

Получены выражения секционной кривизны $K_{\{i,j\}}$ в направлении двумерных координатных площадок базисных векторов $\{e_i\}$:

$$\begin{aligned} K_{\{1,2\}} &= -\frac{3\lambda}{4}, \quad K_{\{3,4\}} = K_{\{5,6\}} = -\frac{3\lambda(1-f)^2}{4(1+f)^2}, \quad K_{\{1,3\}} = K_{\{1,4\}} = K_{\{1,5\}} = K_{\{1,6\}} = 0, \\ K_{\{2,3\}} = K_{\{2,4\}} = K_{\{2,5\}} = K_{\{2,6\}} &= 0, \quad K_{\{3,4\}} = K_{\{3,5\}} = K_{\{3,6\}} = 0, \quad K_{\{4,5\}} = K_{\{4,6\}} = 0, \\ K_{\{1,7\}} = K_{\{2,7\}} = K_{\{3,7\}} = K_{\{4,7\}} &= K_{\{5,7\}} = K_{\{6,7\}} = \frac{\lambda}{4}, \end{aligned}$$

где $f = q^2 + r^2$.

4. Пусть матрица оператора P имеет диагональный вид $P|_{E^6} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix}$, где

блоки $A = \begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} k & l \\ l & -k \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} w & z \\ z & -w \end{pmatrix}$ содержат по два параметра. Тогда шестипараметрическое семейство аффиноров φ , соответствующая ассоциированная метрика g_λ задаются матрицами

$$\begin{aligned} \varphi|_{E^6} &= \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_3 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} \frac{2v}{1-u^2-v^2} & \frac{(1-u)^2+v^2}{1-u^2-v^2} \\ \frac{-((1+u)^2+v^2)}{1-u^2-v^2} & \frac{-2v}{1-u^2-v^2} \end{pmatrix}, \\ \varphi_2 &= \begin{pmatrix} \frac{2l}{1-k^2-l^2} & \frac{(1-k)^2+l^2}{1-k^2-l^2} \\ \frac{-((1+k)^2+l^2)}{1-k^2-l^2} & \frac{-2l}{1-k^2-l^2} \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} \frac{2z}{1-w^2-z^2} & \frac{(1-w)^2+z^2}{1-w^2-z^2} \\ \frac{-((1+w)^2+z^2)}{1-w^2-z^2} & \frac{-2z}{1-w^2-z^2} \end{pmatrix}, \\ g|_{E^6} &= \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} \frac{(1+u)^2+v^2}{1-u^2-v^2} & \frac{2v}{1-u^2-v^2} \\ \frac{2v}{1-u^2-v^2} & \frac{(1-u)^2+v^2}{1-u^2-v^2} \end{pmatrix}, \\ g_2 &= \begin{pmatrix} \frac{(1+k)^2+l^2}{1-k^2-l^2} & \frac{2l}{1-k^2-l^2} \\ \frac{2l}{1-k^2-l^2} & \frac{(1-k)^2+l^2}{1-k^2-l^2} \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} \frac{(1+w)^2+z^2}{1-w^2-z^2} & \frac{2z}{1-w^2-z^2} \\ \frac{2z}{1-w^2-z^2} & \frac{(1-w)^2+z^2}{1-w^2-z^2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $u^2+v^2 < 1$, $k^2+l^2 < 1$, $w^2+z^2 < 1$, $u, v, k, l, w, z \in \mathbb{R}$.

Секционные кривизны $K_{\{i,j\}}$ в направлении двумерных координатных площадок базисных векторов $\{e_i\}$ имеют следующие выражения:

$$\begin{aligned} K_{\{1,2\}} &= K_{\{3,4\}} = -\frac{3\lambda}{4}, \quad K_{\{5,6\}} = -\frac{3\lambda((1+w)^2+z^2)((1-w)^2+z^2)}{4(1-w^2-z^2)^2}, \\ K_{\{1,3\}} &= K_{\{1,4\}} = K_{\{1,5\}} = K_{\{1,6\}} = 0, \quad K_{\{2,3\}} = K_{\{2,4\}} = K_{\{2,5\}} = K_{\{2,6\}} = 0, \\ K_{\{3,4\}} &= K_{\{3,5\}} = K_{\{3,6\}} = 0, \quad K_{\{4,5\}} = K_{\{4,6\}} = 0, \\ K_{\{1,7\}} &= K_{\{2,7\}} = K_{\{3,7\}} = K_{\{4,7\}} = K_{\{5,7\}} = K_{\{6,7\}} = \frac{\lambda}{4}. \end{aligned}$$

Рассмотрению также подлежал оператор P общего вида (3.2), для которого были найдены явные аналитические выражения двенадцатипараметрического семейства аффиноров φ и ассоциированных метрик g_λ . Для полученных выражений был проведен многопараметрический анализ и вычислены основные геометрические характеристики с использованием системы компьютерной математики Maple.

В общем случае, для любой ассоциированной (псевдо)римановой метрики вида $g_\lambda(X, Y) = d\eta(\phi X, Y) + \lambda\eta(X)\eta(Y)$ имеет место

Теорема 1. Любая левоинвариантная контактная метрическая структура $(\eta, \xi, \phi, g_\lambda)$ на группе Гейзенберга H^7 является η -эйнштейновой K -контактной структурой Сасаки.

Квадраты норм тензора Римана и тензора Риччи ассоциированной левоинвариантной метрики g_λ имеют следующие выражения: $\|R\|^2 = \frac{69\lambda^2}{4}$, $\|Ric\|^2 = \frac{15\lambda^2}{4}$.

Для любой левоинвариантной контактной метрической структуры $(\eta, \xi, \phi, g_\lambda)$ на группе Гейзенберга H^7 оператор тензора Риччи, $Ric(X, Y) = g_\lambda(A_{Ric}X, Y)$, имеет следующую диагональную матрицу:

$$A_{Ric} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3\lambda}{2} \end{pmatrix}.$$

Скалярная кривизна ассоциированной левоинвариантной метрики g_λ знакопеременная и равна $-\frac{3\lambda}{2}$, $S = -\frac{3\lambda}{2}$.

Аналогично были исследованы другие семимерные разрешимые контактные алгебры Ли классификационного списка, приведенного в работе [2].

Также для произвольной $(2n+1)$ -мерной группы Гейзенберга H^{2n+1} с заданной (псевдо)римановой метрикой $g_0 = e_1^{*2} + \dots + e_{2n}^{*2} + \lambda e_{2n+1}^{*2}$ имеет место

Теорема 2. Левоинвариантная контактная метрическая структура (η, ξ, ϕ_0, g_0) на группе Гейзенберга H^{2n+1} является η -эйнштейновой и

$$Ric_{g_0}(X, Y) = -\frac{\lambda}{2}g_0(X, Y) + \frac{(n+\lambda)\lambda}{2}\eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in L(H^{2n+1}).$$

Доказательство. Рассмотрим контактную метрическую структуру (η, ξ, ϕ_0, g_0) на группе Гейзенберга H^{2n+1} . В базисе $(e_1, \dots, e_{2n+1})$ скобки Ли имеют вид $[e_{2m}, e_{2m-1}] = e_{2n+1}$, $m = 1, \dots, n$. Тогда ненулевые структурные константы: $C_{2m, 2m-1}^{2n+1} = 1$, $m = 1, \dots, n$.

Определим компоненты связности Леви – Чивита Γ_{ij}^k левоинвариантной метрики g_0 , $\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k$, используя шестичленную формулу [4], которая для левоинва-

риантных векторных полей X, Y, Z на группе Ли принимает вид

$$2g_0(\nabla_X Y, Z) = g_0([X, Y], Z) + g_0([Z, X], Y) - g_0([Y, Z], X).$$

В базисе $\{e_i\}$ имеем $2g_0(\nabla_{e_i} e_j, e_l) = g_0([e_i, e_j], e_l) + g_0([e_l, e_i], e_j) - g_0(e_i[e_l, e_j])$, поэтому

$$\Gamma_{ij}^p = \frac{1}{2} (C_{ij}^p + g_0^{lp} g_{0ik} C_{lj}^k + g_0^{lp} g_{0jk} C_{li}^k), \quad i, j, p, k, l = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Используя формулу (3.3), получаем

$$\Gamma_{2\tau, 2\mu}^p = \frac{1}{2} (C_{2\tau, 2\mu}^p + g_0^{lp} g_{02\tau, k} C_{l, 2\mu}^k g_0^{kp} + g_0^{lp} g_{02\mu, k} C_{l, 2\tau}^k) = 0$$

$$\text{и } \Gamma_{2\tau-1, 2\mu-1}^p = 0, \quad \tau, \mu = 1, \dots, n, p - \text{любое.}$$

Это следует из того, что $C_{l, 2\mu}^k \neq 0$ при $l = 2\mu - 1$ и $k = 2n + 1$, $C_{l, 2\tau}^k \neq 0$ при $l = 2\tau - 1$ и $k = 2n + 1$, $g_{0ij} \neq 0$ при $i = j$. Очевидно, $\Gamma_{2\mu, 2\tau}^p = 0$, $\Gamma_{2\tau-1, 2\mu-1}^p = 0$, $\Gamma_{2\mu-1, 2\tau-1}^p = 0$, $\tau, \mu = 1, \dots, n, p - \text{любое.}$

Аналогичными рассуждениями получены ненулевые символы Кристофеля:

$$\begin{aligned} \Gamma_{2\tau-1, 2\tau}^{2n+1} &= -\frac{1}{2}, \quad \Gamma_{2\tau, 2\tau-1}^{2n+1} = \frac{1}{2}, \quad \Gamma_{2n+1, 2\tau}^{2\tau-1} = -\frac{\lambda}{2}, \quad \Gamma_{2\tau, 2n+1}^{2\tau-1} = -\frac{\lambda}{2}, \\ \Gamma_{2n+1, 2\tau-1}^{2\tau} &= \frac{\lambda}{2}, \quad \Gamma_{2\tau-1, 2n+1}^{2\tau} = \frac{\lambda}{2}, \quad \tau = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Тензор Риччи метрики g_0 на алгебре Ли определяется как свёртка тензора кривизны R , $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$, по первому и четвёртому индексам: $Ric(X, Y) = g^{ij} g(R(e_i, X)Y, e_j)$.

Компоненты тензора Риччи на базисных векторах:

$$Ric_{ij} = \Gamma_{ij}^u \Gamma_{lu}^l - \Gamma_{lj}^u \Gamma_{iu}^l - C_{li}^u \Gamma_{uj}^l. \quad (3.5)$$

Вычислим компоненты тензора Риччи (3.5) на контактном распределении $E^{2n} = \mathbf{R}\{e_1, \dots, e_{2n}\}$:

$$\begin{aligned} Ric_{2\tau, 2\tau} &= \Gamma_{2\tau, 2\tau}^u \Gamma_{lu}^l - \Gamma_{l, 2\tau}^u \Gamma_{2\tau, u}^l - C_{l, 2\tau}^u \Gamma_{u, 2\tau}^l = \\ &= \Gamma_{2\tau, 2\tau}^{2n+1} \Gamma_{2\tau-1, 2n+1}^{2\tau-1} - \Gamma_{2\tau-1, 2\tau}^{2n+1} \Gamma_{2\tau, 2n+1}^{2\tau-1} - C_{2\tau-1, 2\tau}^{2n+1} \Gamma_{2n+1, 2\tau}^{2\tau-1} + \\ &+ \Gamma_{2\tau, 2\tau}^{2\tau-1} \Gamma_{2n+1, 2\tau-1}^{2n+1} - \Gamma_{2n+1, 2\tau}^{2\tau-1} \Gamma_{2\tau, 2\tau-1}^{2n+1} - C_{2n+1, 2\tau}^{2\tau-1} \Gamma_{2\tau-1, 2\tau}^{2n+1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подставляя в выражение (3.6) символы Кристофеля (3.4), получим $Ric_{2\tau, 2\tau} = -\frac{\lambda}{2}$, $\tau = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} Ric_{2\tau, 2\tau-1} &= \Gamma_{2\tau, 2\tau-1}^u \Gamma_{lu}^l - \Gamma_{l, 2\tau-1}^u \Gamma_{2\tau, u}^l - C_{l, 2\tau}^u \Gamma_{u, 2\tau-1}^l = \\ &= \sum_{(u, l)} \left(\Gamma_{2\tau, 2\tau-1}^u \Gamma_{lu}^l - \Gamma_{l, 2\tau-1}^u \Gamma_{2\tau, u}^l - C_{l, 2\tau}^u \Gamma_{u, 2\tau-1}^l \right) = 0, \quad \tau = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Суммирование в формуле (3.7) идёт по всем наборам

$$(u, l) \in \{(2\tau - 1, 2n + 1), (2\tau, 2n + 1), (2n + 1, 2\tau - 1)\}.$$

Определим $Ric_{2n+1,2n+1}$:

$$\begin{aligned} Ric_{2n+1,2n+1} &= \Gamma_{2n+1,2n+1}^u \Gamma_{lu}^l - \Gamma_{l,2n+1}^u \Gamma_{2n+1,u}^l - C_{l,2n+1}^u \Gamma_{u,2n+1}^l = \\ &= -\Gamma_{l,2n+1}^u \Gamma_{2n+1,u}^l = -\sum_{(u,l)} \left(\Gamma_{l,2n+1}^u \Gamma_{2n+1,u}^l \right), \end{aligned}$$

где суммирование ведётся по всем наборам $(u, l) \in \{(2\tau-1, 2\tau), (2\tau, 2\tau-1)\}$.

С учётом выражений (3.4) получаем $Ric_{2n+1,2n+1} = \frac{n\lambda}{2}$.

Окончательно, имеем

$$Ric_{2\tau,2\tau} = -\frac{\lambda}{2}, Ric_{2\tau,2\tau-1} = 0, Ric_{2n+1,2n+1} = \frac{n\lambda}{2}, \tau = 1, \dots, n. \quad (3.8)$$

Из выражений (3.8) следует, что

$$Ric_{g_0}(X, Y) = -\frac{\lambda}{2} g_0(X, Y), \quad X, Y \in E^{2n}.$$

Пусть в равенстве (1.1) $X = \xi, Y = \xi, a = -\frac{\lambda}{2}$, тогда получим

$$Ric_{g_0}(\xi, \xi) = -\frac{\lambda^2}{2} + b.$$

Так как $\xi = e_{2n+1}$, тогда

$$Ric_{g_0}(e_{2n+1}, e_{2n+1}) = -\frac{\lambda^2}{2} + b, \quad b = Ric_{2n+1,2n+1} - \frac{\lambda^2}{2} = \frac{(n+\lambda)\lambda}{2}.$$

Таким образом, найдены функции $a = a(e), b = b(e), e \in H^7$, удовлетворяющие равенству $Ric_{g_0}(X, Y) = a g_0(X, Y) + b \eta(X) \eta(Y), X, Y \in L(H^{2n+1})$. Следовательно, структура (η, ξ, ϕ_0, g_0) – η -эйнштейнова.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Blair D.E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Mathematics. New York: Springer-Verlag Publ., 1976. 148 p.
2. Diatta A. Left invariant contact structures on Lie groups. Differential Geometry and its Applications. 2008. V. 26. Iss. 5. P. 544–552. DOI: 10.1016/j.difgeo.2008.04.001.
3. Смоленцев Н.К. Пространства римановых метрик // Современная математика и ее приложения. 2005. Т. 31. С. 69–146.
4. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т.1 и Т.2. М.: Наука, 1981. 344 с.

Статья поступила 27.02.2018 г.

Slavolyubova Ya.V. (2018) ASSOCIATED LEFT-INVARIANT CONTACT METRIC STRUCTURES ON THE 7-DIMENSIONAL HEISENBERG GROUP H^7 . *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 54. pp. 34-45

DOI 10.17223/19988621/54/3

Keywords: Lie group, contact metric structures, associated metric.

In this paper, we construct new nonstandard associated left-invariant contact metric structures $(\eta, \xi, \varphi, g_\lambda)$ on the 7-dimensional Heisenberg group H^7 .

The associated left-invariant contact metric structures for the contact structure η on the contact Lie group (H^7, η) were given by the affinor φ and the (pseudo-)Riemannian metric g_λ such that

$$\begin{aligned} \varphi|_{\ker \eta} &= J, \quad \varphi(\xi) = 0, \\ g_\lambda(X, Y) &= d\eta(\varphi X, Y) + \lambda \eta(X)\eta(Y), \end{aligned} \quad (1)$$

where J is an almost complex structure compatible with the restriction of g_λ on $\ker \eta$, $g_\lambda|_{\ker \eta}$.

The parameter λ provided deformation of the associated metric g_λ along the Reeb field ξ .

The affinor $\varphi_0 = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ and the metric $g_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ are fixed. The new affinors $\varphi = \varphi_0(Id + P)(Id - P)^{-1}$ are given by an operator $P: L(H^7) \rightarrow L(H^7)$ such that $P(\xi) = 0$ and $P|_{\ker \eta} = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & F \\ D & F & N \end{pmatrix}$, where $A = \begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} s & t \\ t & -s \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} k & l \\ l & -k \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} q & r \\ r & -q \end{pmatrix}$, and $N = \begin{pmatrix} w & z \\ z & -w \end{pmatrix}$ are symmetric matrices; $u, v, s, t, k, l, x, y, q, r, w$, and z are real parameters.

Each new affinor φ defines a new associated metric g_λ by formula (1).

We have considered some particular classes of associated metrics corresponding to the affinors φ which were given by the operators P of the following types

$$P|_{\ker \eta} = \begin{pmatrix} 0 & B & 0 \\ B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P|_{\ker \eta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P|_{\ker \eta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \\ 0 & F & 0 \end{pmatrix}, \quad P|_{\ker \eta} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix}.$$

The following theorem was received for any associated (pseudo-)Riemannian metric $g_\lambda(X, Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \lambda \eta(X)\eta(Y)$.

Theorem 1. Any left-invariant contact metric structure $(\eta, \xi, \varphi, g_\lambda)$ on the Heisenberg group H^7 is a Sasaki, K -contact, and η -Einstein structure.

The squares of the norms of a Riemann tensor R and Ricci tensor $Ric(X, Y) = g_\lambda(A_{Ric}X, Y)$ of associated left-invariant metric g_λ have the following expressions: $\|R\|^2 = \frac{69\lambda^2}{4}$, $\|Ric\|^2 = \frac{15\lambda^2}{4}$.

The Ricci operator has the following matrix:

$$A_{Ric} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3\lambda}{2} \end{pmatrix}.$$

The sign of the scalar curvature of associated left-invariant metric g_λ is not constant and $S = -\frac{3\lambda}{2}$.

In addition, the following theorem has been proved for any $(2n+1)$ -dimensional Heisenberg group H^{2n+1} with a given (pseudo-)Riemannian metric $g_0 = e_1^{*2} + \dots + e_{2n}^{*2} + \lambda e_{2n+1}^{*2}$.

Theorem 2. A left-invariant contact metric structure $(\eta, \xi, \varphi_0, g_0)$ on the Heisenberg group H^{2n+1} is η -Einstein, and $Ric_{g_0}(X, Y) = -\frac{\lambda}{2}g_0(X, Y) + \frac{(n+\lambda)\lambda}{2}\eta(X)\eta(Y)$, $X, Y \in L(H^{2n+1})$.

MSC 53D10

SLAVOLYUBOVA Yaroslavna Viktorovna (Candidate of Physics and Mathematics, Kemerovo Institute (branch) of Plekhanov Russian University of Economics, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: jar1984@mail.ru

REFERENCES

1. Blair D.E. (1976.) *Contact Manifolds in Riemannian Geometry*. Lecture Notes in Mathematics. New York: Springer-Verlag Publ., 148 p.
2. Diatta A. (2008) Left invariant contact structures on Lie groups. *Differential Geometry and its Applications*. Vol. 26, iss. 5, pp. 544–552. DOI: 10.1016/j.difgeo.2008.04.001.
3. Smolentsev N.K. (2007) Spaces of Riemannian metrics. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 142, Issue 5, pp. 2436–2519. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-007-0185-3>
4. Kobayashi S., Nomizu K. (1963) *Foundations of Differential Geometry*, New York: Wiley.

УДК 517.928
DOI 10.17223/19988621/54/4

MSC: 34M60, 34E10, 34A12

Д.А. Турсунов

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ПРИ НАРУШЕНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ТОЧКИ ПОКОЯ В ПЛОСКОСТИ «БЫСТРЫХ ДВИЖЕНИЙ»

Получена асимптотическая оценка для решения сингулярно возмущенной задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений». Построен главный член асимптотического разложения решения, который имеет отрицательную дробную степень по малому параметру, что свойственно бисингулярно возмущенным уравнениям или уравнениям с точками поворота.

Ключевые слова: асимптотическое разложение решения, бисингулярная задача, сингулярное возмущение, задача Коши, малый параметр, метод стационарной фазы, система обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной.

Одним из основных результатов в теории сингулярно возмущенных уравнений является теорема А.Н. Тихонова о предельном переходе [1, 2]. Он сформулировал достаточные условия, при выполнении которых решение возмущенной задачи и решение невозмущенной системы асимптотически близки. Далее эти достаточные условия стали называть условиями устойчивости.

Первой работой, когда нарушаются условия устойчивости на некотором отрезке, но выполняется предельный переход, является работа М.А. Шишковой [3], ученицы Л.С. Понтрягина. Вслед за этой работой появились работы [4–15]. В работах [6, 7] приведено приложение для маятника Циглера [8].

В данной работе, применяя методы стационарной фазы, перевала, последовательных приближений и идеи [3, 5], обобщаются ранее полученные результаты.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши

$$\varepsilon x'(t, \varepsilon) = A(t)x(t, \varepsilon) + f(t), \quad t_0 < t \leq T; \quad (1)$$

$$x(t_0, \varepsilon) = x^0, \quad (2)$$

где $0 < \varepsilon$ – малый параметр, $A(t)$ – квадратная матрица-функция второго порядка с элементами $a_{jk}(t)$, $f(t) = \text{colon}(f_1(t), f_2(t))$, $a_{jk}(t)$, $f_k(t)$ – аналитические функций в рассматриваемой области, $x^0 = \text{colon}(x_1^0, x_2^0)$ – постоянный вектор.

Пусть выполняются условия:

Условие 1. Матрица-функция $A(t)$ имеет комплексно-сопряженные собственные значения: $\lambda_1(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, $\lambda_2(t) = \alpha(t) - i\beta(t)$, причем $\alpha(t) < 0$, при $t_0 \leq t < 0$; $\alpha(t) > 0$, при $0 < t \leq T$; $\alpha(0) = 0$, но $\beta(0) \neq 0$.

Условие 2. Пусть $\text{Re}(u_1(t_1^*, t_2^*) - u_1(t_0, 0)) = 0$, т.е. граница области D является критической линией уровня (линией Стокса [6]), где (t_1^*, t_2^*) – единственный про-

стой корень собственного значения $\lambda_1(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ в области D , где $D = \{t = t_1 + it_2: \operatorname{Re}(u_k(t) - u_k(t_0)) \leq 0, k = 1, 2\}$, $i = \sqrt{-1}$, $u_k(t) = \int \lambda_k(t) dt$, $k = 1, 2$.

Систему (1) можно рассматривать как возмущенную по отношению к вырожденной системе

$$A(t) \tilde{x}(t) + f(t) = 0.$$

Вырожденная система имеет единственное решение:

$$\tilde{x}(t) = A^{-1}(t)f(t).$$

Это решение в области D , а именно в точках $t = t_1^* \pm t_2^*$, имеет особенность, так как собственные значения матрицы-функции $A(t)$ в этих точках обращаются в нуль, т.е. решение вырожденной системы не является гладкой функцией в D . Задачу (1), (2) можно назвать бисингулярной [16].

Например, если собственные значения $\lambda_1(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, $\lambda_2(t) = \alpha(t) - i\beta(t)$ имеют простые нули в рассматриваемой области, то нарастающая особенность имеет вид

$$g_k(t) = O\left(\left((t - t^*)(t + t^*)\right)^{-1-2k}\right), k = 0, 1, 2, \dots, (\lambda_1(t^*) = 0, \lambda_2(-t^*) = 0).$$

А если собственные значения $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ имеют n -кратный нуль в рассматриваемой области, то нарастающую особенность можно записать как

$$g_k(t) = O\left(\left((t - t^*)(t + t^*)\right)^{-n-(n+1)k}\right), k = 0, 1, 2, \dots$$

Когда собственные значения $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ не имеют нулей в рассматриваемой области, то решение вырожденной системы является регулярной (гладкой) функцией, асимптотика решения задачи (1) – (2) получается проще. Этот случай автором рассмотрены в работе [10].

Как нам известно, существует такая неособенная матрица-функция $B_0(t)$, с помощью которой $A(t)$ можно привести к диагональному виду

$$B_0^{-1}(t)A(t)B_0(t) = \Lambda(t), \Lambda(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1(t), \lambda_2(t)).$$

Пусть в области D выполняется неравенство $\det B_0(t) \neq 0$.

С помощью замены $x(t, \varepsilon) = B_0(t)y(t, \varepsilon)$ задачу (1), (2) приведем к виду

$$\varepsilon y'(t, \varepsilon) = \Lambda(t)y(t, \varepsilon) + \varepsilon B(t)y(t, \varepsilon) + h(t), t_0 < t \leq T, y(t_0, \varepsilon) = y^0, \quad (3)$$

где $B(t) = -B_0^{-1}(t)B_0'(t)$, $y^0 = B_0^{-1}(t_0)x^0$, $h(t) = B_0^{-1}(t)f(t)$.

Далее, задачу (3) заменим интегральным уравнением

$$y(t, \varepsilon) = E(t, t_0, \varepsilon)y^0 + \int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon) \left(B(\tau)y(\tau, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} h(\tau) \right) d\tau, \quad (4)$$

где $E(t, \tau, \varepsilon) = \exp\left(\int_{\tau}^t \Lambda(s) ds / \varepsilon\right)$.

Если ввести обозначение $y(t, \varepsilon) = z(t, \varepsilon)/\varepsilon$, то (4) примет вид

$$z(t, \varepsilon) = \varepsilon E(t, t_0, \varepsilon)y^0 + \int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon) (B(\tau)z(\tau, \varepsilon) + h(\tau)) d\tau. \quad (5)$$

Для начала вычислим асимптотику интегралов

$$E_j(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \lambda_j(\tau) d\tau\right) h_j(\tau) d\tau, j = 1, 2, \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

При выполнении условий 1 и 2, имеем $u'_1(\tau) = \lambda_1(\tau), \lambda_1(t^*) \equiv 0, \lambda'_1(t^*) \neq 0, t^* = t_1^* + it_2^*$. Точка $\tau = t^*$ является простой точкой перевала функции $u_1(\tau)$. В окрестности точки перевала $\tau = t^*$ критические линии уровня $\text{Re}(u_1(\tau_1, \tau_2) - u_1(t_0, 0)) = 0$ делят плоскость на четыре равных сектора. В двух из них выполняется условие $\text{Re}(u_1(\tau_1, \tau_2) - u_1(t_0, 0)) < 0$, а в остальных $\text{Re}(u_1(\tau_1, \tau_2) - u_1(t_0, 0)) > 0$ [17]. Так как собственные значения комплексно-сопряженные:

$$\lambda_1(t) = \overline{\lambda_2(t)} \text{ и } u'_2(\tau) = \lambda_2(\tau), \lambda_2(\overline{t^*}) \equiv 0, \lambda'_1(\overline{t^*}) \neq 0, \overline{t^*} = t_1^* - it_2^*,$$

то точка $\tau = \overline{t^*}$ является простой точкой перевала для функции $u_2(\tau)$. Аналогично, в окрестности точки перевала $\tau = \overline{t^*}$ критические линии уровня $\text{Re}(u_2(\tau_1, \tau_2) - u_2(t_0, 0)) = 0$ делят плоскость на четыре равных сектора. В двух из них выполняется неравенство $\text{Re}(u_2(\tau_1, \tau_2) - u_2(t_0, 0)) < 0$, а в остальных двух $\text{Re}(u_2(\tau_1, \tau_2) - u_2(t_0, 0)) > 0$. При $\tau_2 = 0$ имеем $\text{Re}(u_1(\tau_1, 0) - u_1(t_0, 0)) \leq 0, \text{Re}(u_2(\tau_1, 0) - u_2(t_0, 0)) \leq 0$, причем знак равенства выполняется только при $\tau_1 = t_0$ и $\tau_1 = T$. Пересечение множеств $\{t: \text{Re}(u_1(t_1, t_2) - u_1(t_0, 0)) \leq 0\}$ и $\{t: \text{Re}(u_2(t_1, t_2) - u_2(t_0, 0)) \leq 0\}$ содержащее действительную ось обозначим через D , т.е.

$$D = \{t = t_1 + it_2: \text{Re}(u_k(t_1, t_2) - u_k(t_0, 0)) \leq 0, |t_2| \leq |t_2^*|, k = 1, 2\}.$$

В общем случае D – криволинейный четырехугольник с вершинами $A(t_0, 0), B(t_1^*, t_2^*), A_1(T, 0), B_1(t_1^*, -t_2^*)$.

Из теории аналитических функций известно, что область D покрывается линиями уровня $\text{Re}(u_k(t_1, t_2) - u_k(t_0, 0)) = -c, c > 0 - \text{const}, k = 1, 2$. Локальную и глобальную структуру линии уровней можно найти в [17]. Эти линии соединяют устойчивый и неустойчивый интервалы.

Пусть $u_1(t_1, t_2) = u_{11}(t_1, t_2) + iu_{12}(t_1, t_2), u_2(t_1, t_2) = u_{21}(t_1, t_2) + iu_{22}(t_1, t_2)$, где $u_{k1}(t_1, t_2) = \text{Re}(u_k(t_1, t_2) - u_k(t_0, 0)), u_{k2}(t_1, t_2) = \text{Im}(u_k(t_1, t_2) - u_k(t_0, 0)), k = 1, 2$.

Для определения более точной асимптотики интегралов $E_1(t, \varepsilon), E_2(t, \varepsilon)$ в D область D разобьем на подобласти:

$$H_{00} = \{t: \varepsilon \ln \varepsilon \leq u_{11}(t_1, t_2) \leq 0, u_{21}(t_1, t_2) \leq 0, |t_2| \leq |t_2^*|, |t - t^*| \geq \delta, t_1 < t_1^*(t_2^*/t_2^*)\},$$

$$H_{01} = \{t: u_{11}(t_1, t_2) \leq \varepsilon \ln \varepsilon, u_{21}(t_1, t_2) \leq 0, |t_2| \leq |t_2^*|, |t - t^*| \geq \delta\},$$

$$H_{10} = \{t: |t - t^*| = \varepsilon^\gamma \delta, u_{11}(t_1, t_2) \leq 0, t_1^0 \leq t_1 \leq t_1^1, |t_2| \leq |t_2^*|\},$$

$$H_{11} = \{t: u_{11}(t_1, t_2) = (1/2 - \gamma)\varepsilon \ln \varepsilon, u_{21}(t_1, t_2) \leq 0, t_1^1 \leq t_1, |t_2| \leq |t_2^*|\},$$

$$H_{20} = \{t: |t - t^*| \leq \sqrt{\varepsilon} \delta, u_{11}(t_1, t_2) \leq 0, |t_2| \leq |t_2^*|\},$$

$$H_{21} = \{t: -c\varepsilon \leq u_{11}(t_1, t_2) \leq 0, u_{21}(t_1, t_2) \leq 0, |t - t^*| \geq c\sqrt{\varepsilon}, |t_2| \leq |t_2^*|\},$$

где $H_0 = H_{00} \cup H_{01}, H_1 = H_{10} \cup H_{11}, H_2 = H_{20} \cup H_{21}, D = H_0 \cup H_1 \cup H_2, \delta > 0$ – достаточно малое число, $0 \leq \gamma < 1/2, t_1^0$ находим, решая систему $\begin{cases} u_{11}(t_1, t_2) = 0, \\ |t - t^*| = \varepsilon^\gamma \delta. \end{cases}$ Эта система,

при $t_2 \geq t_2^*$, имеет два корня $(\tilde{t}_1^1, \tilde{t}_2^1)$, $(\tilde{t}_1^2, \tilde{t}_2^2)$, и здесь определяем $t_1^0 = \min\{\tilde{t}_1^1, \tilde{t}_1^2\}$.

Аналогично, t_1^1 находим, решая систему $\begin{cases} u_{11}(t_1, t_2) = (1/2 - \gamma)\varepsilon \ln \varepsilon, \\ |t - t^*| = \varepsilon^\gamma \delta, \end{cases}$ при $t_2 \geq t_2^*$

система имеет два корня $(\tilde{t}_1^3, \tilde{t}_2^3)$, $(\tilde{t}_1^4, \tilde{t}_2^4)$, и $t_1^1 = \max\{\tilde{t}_1^3, \tilde{t}_1^4\}$.

Исследуем интегралы

$$E_k(t, \varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon} u_k(t)} \int_{L_k} e^{-\frac{1}{\varepsilon} (u_{k1}(\tau_1, \tau_2) + i u_{k2}(\tau_1, \tau_2))} h_k(\tau_1, \tau_2) d(\tau_1 + i \tau_2), \quad k = 1, 2.$$

В комплексной плоскости ($t = t_1 + i t_2$, $\tau = \tau_1 + i \tau_2$) определим пути интегрирования L_1 и L_2 . По теореме Коши можно деформировать путь интегрирования наиболее оптимально для получения асимптотических оценок в D . Пути интегрирования L_1 , L_2 симметричны относительно действительной оси. Поэтому достаточно определить только одну из них, мы определим L_1 .

Путь интегрирования L_1 . Если $(t_1, t_2) \in H_{00}$, то L_1 – отрезок прямой, соединяющий точки $(t_0, 0)$ и (t_1, t_2) , уравнение которой имеет вид $\tau_2 = (\tau_1 - t_0)(t_1 - t_0)/t_2$, $t_0 \leq \tau_1 \leq t_1$; а если $(t_1, t_2) \in H_{01} \cup H_1 \cup H_2$, то $L_1 = L_{11} \cup L_{12}$, где L_{11} – $\tau_2 = \varphi_1(\tau_1)$ – часть критической линии уровня, определяемая из равенства $u_{11}(\tau_1, \tau_2) = 0$, при этом $t_0 \leq \tau_1 \leq t_1^*$ ($t_1^* \leq \tau_1 \leq t_0$); L_{12} – отрезок прямой $\tau_1 = \psi(\tau_2)$, где $\psi(\tau_2) = (t_1 - t_1^*)(\tau_2 - t_2^*)/(t_2 - t_2^*) + t_1^*$, $t_2^* \leq \tau_2 \leq t_2$.

Оценки интегралов в подобластях. Пусть $t \in H_{00}$, тогда

$$E_1(t, \varepsilon) = (1 + i(t_1 - t_0)/t_2) e^{\frac{1}{\varepsilon} u_1(t)} \int_{t_0}^{t_1} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \tilde{u}_1(\tau_1)} \tilde{h}_1(\tau_1) d\tau_1,$$

где $\tilde{u}_1(\tau_1) = u_{11}(\tau_1, (\tau_1 - t_0)t_2/(t_1 - t_0)) + i u_{12}(\tau_1, (\tau_1 - t_0)t_2/(t_1 - t_0))$,

$$\tilde{h}_1(\tau_1) = h_1(\tau_1, (\tau_1 - t_0)t_2/(t_1 - t_0)).$$

Интеграл $E_1(t, \varepsilon)$ интегрируем по частям:

$$\begin{aligned} E_1(t, \varepsilon) &= e^{\frac{1}{\varepsilon} u_1(t)} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\varepsilon}{-\lambda_1(\tau_1)} \tilde{h}_1(\tau_1) d\tau_1 e^{-\frac{1}{\varepsilon} \tilde{u}_1(\tau_1)} = \\ &= \frac{\varepsilon}{-\lambda_1(t_1)} \tilde{h}_1(t_1) - \frac{\varepsilon}{-\lambda_1(t_0)} \tilde{h}_1(t_0) - \varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon} u_1(t)} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\tilde{h}_1(\tau_1)}{\lambda_1(\tau_1)} \right)' e^{-\frac{1}{\varepsilon} \tilde{u}_1(\tau_1)} d\tau_1. \end{aligned}$$

Учитывая, что в H_{00} : $\operatorname{Re} \lambda_1(t_1, t_2) < 0$, имеем

$$|E_1(t, \varepsilon)| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda_1(t_1)|} c + \frac{\varepsilon^2}{|\lambda_1(t_1)|^3} c + \dots + \frac{\varepsilon^n}{|\lambda_1(t_1)|^{2n-1}} c.$$

Так как $|t - t^*| \geq \delta$, т.е. $(t_1 - t_1^*)^2 + (t_2 + t_2^*)^2 \geq \delta^2$, то

$$|E_1(t, \varepsilon)| \leq \frac{\varepsilon c}{|\lambda_1(t_1)|} + \frac{\varepsilon^2 c}{|\lambda_1(t_1)|^3} + \dots + \frac{\varepsilon^n c}{|\lambda_1(t_1)|^{2n-1}} = O(\varepsilon).$$

Следствие 1. Если $|t-t^*| = \varepsilon^\gamma \delta$, то в этом случае

$$\begin{aligned} |E_1(t, \varepsilon)| &\leq \frac{\varepsilon}{|\lambda_1(t_1)|} c + \frac{\varepsilon^2}{|\lambda_1(t_1)|^3} c + \dots + \frac{\varepsilon^n}{|\lambda_1(t_1)|^{2n-1}} c = \\ &= \varepsilon^{1-\gamma} c + (\varepsilon^{1-\gamma})^2 c + \dots + (\varepsilon^{1-\gamma})^n c = O(\varepsilon^{1-\gamma}). \end{aligned}$$

Следовательно, в H_{00} для $E_1(t, \varepsilon)$ справедлива оценка

$$|E_1(t, \varepsilon)| \leq c\varepsilon. \quad (6)$$

Пусть $(t_1, t_2) \in H_{00} \cup H_1 \cup H_2$, тогда $E_1(t, \varepsilon) = E_{11}(t, \varepsilon) + E_{12}(t, \varepsilon)$, где

$$E_{1k}(t, \varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon} u_1(t)} \int_{L_{1k}} e^{-\frac{1}{\varepsilon} (u_{11}(\tau_1, \tau_2) + i u_{12}(\tau_1, \tau_2))} h_1(\tau_1, \tau_2) d(\tau_1 + i\tau_2), k = 1, 2.$$

Асимптотическая оценка $E_{11}(t, \varepsilon)$. Так как $u'_{12}(t_1^*, \varphi_1(t_1^*)) = 0$, поэтому инте-

грал делим на две части. Пусть $E_{11}(t, \varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon} u_1(t)} \tilde{E}_{11}(t, \varepsilon)$, тогда

$$\tilde{E}_{11}(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1^*} e^{-\frac{1}{\varepsilon} (i u_{12}(\tau_1, \varphi_1(\tau_2)))} h_1(\tau_1, \varphi_1(\tau_1)) (1 + i\varphi'_1(\tau_1)) d\tau_1 = j_1(\varepsilon) + j_2(\varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned} j_1(\varepsilon) &= \int_{t_0}^{t_1^* - \delta} e^{-\frac{1}{\varepsilon} (i u_{12}(\tau_1, \varphi_1(\tau_1)))} h_1(\tau_1, \varphi_1(\tau_1)) (1 + i\varphi'_1(\tau_1)) d\tau_1, \\ j_2(\varepsilon) &= \int_{t_1^* - \delta}^{t_1^*} e^{-\frac{i}{\varepsilon} u_{12}(\tau_1, \varphi_1(\tau_1))} h_1(\tau_1, \varphi_1(\tau_1)) (1 + i\varphi'_1(\tau_1)) d\tau_1. \end{aligned}$$

Интеграл $j_1(\varepsilon)$ не имеет особенностей, поэтому его интегрируем по частям:

$$\begin{aligned} j_1(\varepsilon) &= \int_{t_0}^{t_1^* - \delta} e^{-\frac{i}{\varepsilon} \tilde{u}_{12}(\tau_1)} \tilde{h}_1(\tau_1) d\tau_1 = i\varepsilon \int_{t_0}^{t_1^* - \delta} \frac{\tilde{h}_1(\tau_1)}{\tilde{u}'_{12}(\tau_1)} d \left(e^{-\frac{i}{\varepsilon} \tilde{u}_{12}(\tau_1)} \right) = \\ &= i\varepsilon \left(\frac{\tilde{h}_1(t_1^* - \delta)}{\tilde{u}'_{12}(t_1^* - \delta)} e^{-\frac{i}{\varepsilon} \tilde{u}_{12}(t_1^* - \delta)} - \frac{\tilde{h}_1(t_0)}{\tilde{u}'_{12}(t_0)} e^{-\frac{i}{\varepsilon} \tilde{u}_{12}(t_0)} \right) - (i\varepsilon)^2 \int_{t_0}^{t_1^* - \delta} \left(\frac{\tilde{h}_1(\tau_1)}{\tilde{u}'_{12}(\tau_1)} \right)' \frac{1}{\tilde{u}'_{12}(\tau_1)} d \left(e^{-\frac{i}{\varepsilon} \tilde{u}_{12}(\tau_1)} \right). \\ |j_1(\varepsilon)| &\leq \varepsilon \frac{c}{\delta} c + \varepsilon^2 \frac{c}{\delta^3}. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям n раз можно получить оценку

$$|j_1(\varepsilon)| \leq \sqrt{\varepsilon} \left(c \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta} + c \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta} \right)^3 + \dots + c \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta} \right)^{2n-1} \right) = O(\varepsilon).$$

Отметим, что если $\delta = c\varepsilon^\gamma$, $0 < \gamma \leq 1/2$, то имеем

$$|j_1(\varepsilon)| \leq \varepsilon^{1-\gamma} (c + c\varepsilon^{1-2\gamma} + \dots + c\varepsilon^{n(1-2\gamma)}) = O(\varepsilon^{1-\gamma}), \varepsilon \rightarrow 0.$$

Оценка следующего интеграла покажет, что γ не может быть больше $1/2$

$$j_2(\varepsilon) = \int_{t_1^* - \delta}^{t_1^*} e^{-\frac{1}{\varepsilon} (i u_{12}(\tau_1, \varphi_1(\tau_1)))} h_1(\tau_1, \varphi_1(\tau_1)) (1 + i\varphi'_1(\tau_1)) d\tau_1.$$

В δ ($0 < \delta \ll 1$) окрестности точки t_1^* функцию $u_{12}(\tau_1, \varphi_1(\tau_1))$ можно записать в виде $u_{12}(\tau_1, \varphi_1(\tau_1)) \sim c(\tau_1 - t_1^*)^2$, $c = u_{12}''(t_1^*)/2$, тогда

$$j_2(\varepsilon) = \int_{t_1^* - \delta}^{t_1^*} e^{-\frac{ic}{\varepsilon}(\tau_1 - t_1^*)^2} \tilde{h}_1(\tau_1) d\tau_1 = \sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2|c|}} \tilde{h}_1(t_1^*) e^{i\pi/4 \operatorname{sign}(-c)} + O(\varepsilon), \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отсюда получим

$$|E_{11}(t, \varepsilon)| \leq c\Omega_{01}(t, \varepsilon) e^{\frac{1}{\varepsilon}u_{11}(t)}, \quad (7)$$

где
$$\Omega_{01}(t, \varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{при } t_0 \leq t_1 \leq -\delta, \quad 0 < \delta \ll 1, \\ \varepsilon^{1-\gamma}, & \text{при } t_0 \leq t_1 \leq -c\varepsilon^\gamma, \quad 0 \leq \gamma < 1/2, \\ \sqrt{\varepsilon}, & \text{при } t_0 \leq t_1 \leq t_1^*, \end{cases}$$

или
$$\begin{aligned} |E_{11}(t, \varepsilon)| &\leq c\varepsilon^n, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \text{ при } (t_1, t_2) \in H_{01}, \\ |E_{11}(t, \varepsilon)| &\leq c\varepsilon^{1-\gamma}, \text{ при } (t_1, t_2) \in H_1, \\ |E_{11}(t, \varepsilon)| &\leq c\varepsilon^{1/2}, \text{ при } (t_1, t_2) \in H_2. \end{aligned}$$

Асимптотическая оценка интеграла $E_{12}(t, \varepsilon)$. Интеграл делим на две части: $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$ -окрестность точки (t_1^*, t_2^*) и остальная часть отрезка, т.е.

$$E_{12}(t, \varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}u_1(t_1, t_2)} \left(\int_{t_2^*}^{\sqrt{\varepsilon}+t_2^*} + \int_{\sqrt{\varepsilon}+t_2^*}^{t_2} \right) e^{\frac{1}{\varepsilon}u_1(\psi(\tau_2), \tau_2)} h_1(\psi(\tau_2), \tau_2)(i + \psi'(\tau_2)) d\tau_2.$$

Для первого интеграла, в $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$ -окрестности точки перевала (t_1^*, t_2^*) справедливо неравенство

$$|E_{12}(t, \varepsilon)| \leq \varepsilon^{1/2} c(|h_{10}| + O(\varepsilon^{1/2})).$$

Действительно, в интеграле

$$E_{12}(t, \varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}u_1(t_1, t_2)} \int_{t_2^*}^{\sqrt{\varepsilon}+t_2^*} e^{-\frac{1}{\varepsilon}u_1(\psi(\tau_2), \tau_2)} h_1(\psi(\tau_2), \tau_2)(i + \psi'(\tau_2)) d\tau_2$$

функцию $u_1(\psi(\tau_2), \tau_2)$ можно записать в виде

$$u_1(\psi(\tau_2), \tau_2) \sim c(\tau_2 - t_2^*)^2, \quad c = u_1''(t_1^*, t_2^*)/2.$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} E_{12}(t, \varepsilon) &= O(1) e^{\frac{1}{\varepsilon}u_1(t_1, t_2)} \int_{t_2^*}^{t_2^* + \delta} e^{-\frac{ic}{\varepsilon}(\tau_2 - t_2^*)^2} h_1(\tau_2) d\tau_2 = \\ &= O(1) \sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2|c|}} h_{10} e^{i\pi/4 \operatorname{sign}(-c)} + O(\varepsilon) h_{11} + \dots, \end{aligned}$$

где $h_{10} = h_1(t_1^*, t_2^*)$, $h_{1k} = h_1^{(k)}(t_1^*, t_2^*)/k!$.

Тем самым $|E_{12}(t, \varepsilon)| \leq \varepsilon^{1/2} c(|h_{10}| + O(\varepsilon^{1/2})), \varepsilon \rightarrow 0$.

Второй интеграл не имеет особенностей, кроме того, когда мы поднимаемся по прямой $\psi(\tau_2) = (t_1 - t_1^*)(\tau_2 - t_2^*) / (t_2 - t_2^*) + t_1^*$, $t_2^* \leq \tau_2 \leq t_2$, функция $u_{11}(\psi(\tau_2), \tau_2)$ монотонно убывает (значения линии уровней убывают) при $-t_2^* + \sqrt{\varepsilon} \leq \tau_2 \leq t_2$. Отметим, что здесь не требуем условия 4⁰ [9], условия монотонности по вертикали.

Интегрируя по частям интеграл $E_{12}(t, \varepsilon)$, получим

$$\begin{aligned} E_{12}(t, \varepsilon) &= e^{\frac{1}{\varepsilon} u_{11}(t_1, t_2)} \int_{-t_2^* + \sqrt{\varepsilon}}^{t_2} e^{-\frac{1}{\varepsilon} u_{11}(\psi(\tau_2), \tau_2)} h_1(\psi(\tau_2), \tau_2) (i + \psi'(\tau_2)) d\tau_2 = \\ &= \frac{\varepsilon h_1(t_1, t_2)}{-\lambda_1(t_1, t_2)} + \frac{\sqrt{\varepsilon} (h_{10} + \sqrt{\varepsilon} h_{11} + O(\varepsilon))}{O(1)} e^{\frac{1}{\varepsilon} u_{11}(t_1, t_2)} + \frac{\varepsilon h_1(t_1, t_2)}{\lambda_1(t_1, t_2)} O(1). \end{aligned}$$

Отсюда $|E_{12}(t, \varepsilon)| \leq \varepsilon \left| \frac{h_1(t_1, t_2)}{-\lambda_1(t_1, t_2)} \right| + c\sqrt{\varepsilon} (|h_{10}| + O(\sqrt{\varepsilon})) e^{\frac{1}{\varepsilon} u_{11}(t_1, t_2)}.$

Поэтому, если $h_1(t_1^*, t_2^*) = 0$, то $|E_{12}(t, \varepsilon)| \leq c\varepsilon$, а если $h_1(t_1^*, t_2^*) \neq 0$, то

$$|E_{12}(t, \varepsilon)| \leq \frac{c\varepsilon}{|\lambda_1(t_1, t_2)|} + c\sqrt{\varepsilon} e^{\frac{1}{\varepsilon} u_{11}(t_1, t_2)}.$$

Отсюда вытекает справедливость неравенства

$$|E_{12}(t, \varepsilon)| \leq c\Omega_{02}(t, \varepsilon), \quad (8)$$

где $\Omega_{02}(t, \varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{при } t \in H_{01}, \\ \varepsilon^{1-\gamma}, & \text{при } t \in H_1, \\ \sqrt{\varepsilon}, & \text{при } t \in H_2. \end{cases}$

Объединяя асимптотические оценки (6) – (8) и следствие 1, получим асимптотику для $E_1(t, \varepsilon)$ в области D при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Нами доказана

Теорема 1. Пусть $h_1(t_1^*, t_2^*) \neq 0$, тогда для $E_1(t, \varepsilon)$ в области D справедлива оценка

$$|E_1(t, \varepsilon)| \leq c\Omega_1(t, \varepsilon),$$

где $\Omega_1(t, \varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{при } t \in H_0, \\ \varepsilon^{1-\gamma}, & \text{при } t \in H_1, \\ \sqrt{\varepsilon}, & \text{при } t \in H_2, 0 \leq \gamma < 1/2. \end{cases}$

Аналогично, вычисляя интеграл $E_2(t, \varepsilon)$ по пути L_2 (L_2 симметрично к L_1 относительно действительной оси), получим асимптотику для $E_2(t, \varepsilon)$ в D , т.е. справедлива

Теорема 2. Пусть $h_2(t_1^*, -t_2^*) \neq 0$, тогда для $E_2(t, \varepsilon)$ в области D справедлива оценка

$$|E_2(t, \varepsilon)| \leq c\tilde{\Omega}_1(t, \varepsilon),$$

где $\tilde{\Omega}_1(t, \varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{при } t \in \tilde{H}_0, \\ \varepsilon^{1-\gamma}, & \text{при } t \in \tilde{H}_1, \\ \sqrt{\varepsilon}, & \text{при } t \in \tilde{H}_2, 0 \leq \gamma < 1/2. \end{cases}$

Тем самым, если $h_1(t_1^*, t_2^*) \neq 0$ или $h_2(t_1^*, -t_2^*) \neq 0$, то справедлива оценка

$$\left\| \int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon) h(\tau) d\tau \right\| \leq c \Omega_2(t, \varepsilon), \text{ или } \left\| \int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon) h(\tau) d\tau \right\| \leq c \sqrt{\varepsilon}, t \in D,$$

где

$$\Omega_2(t, \varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{при } t \in H_0 \cap \tilde{H}_0, \\ \varepsilon^{1-\gamma}, & \text{при } t \in H_1 \cup \tilde{H}_1, t_1 \leq T + (1/2 - \gamma)\varepsilon \ln \varepsilon, \\ \sqrt{\varepsilon}, & \text{при } t \in H_2 \cup \tilde{H}_2, 0 \leq \gamma < 1/2. \end{cases}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть в области D справедливы оценки $\|B(t)\| \leq c$ и

$$\int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon) h(\tau) d\tau \sim O(\delta(\varepsilon)), \varepsilon \rightarrow 0, \text{ где } \varepsilon \leq \delta(\varepsilon) \leq \varepsilon^\gamma, 0 < \gamma < 1,$$

то для решения систем интегральных уравнений (8) справедлива оценка

$$z(t, \varepsilon) \sim O(\delta(\varepsilon)), \varepsilon \rightarrow 0.$$

Доказательство. Воспользуемся методом последовательных приближений.

Пусть $z_0(t, \varepsilon) \equiv 0$,

$$z_n(t, \varepsilon) = \varepsilon E(t, t_0, \varepsilon) y^0 + \int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon) (B(\tau) z_{n-1}(\tau, \varepsilon) + h(\tau)) d\tau,$$

тогда

$$z_1(t, \varepsilon) = \varepsilon E(t, t_0, \varepsilon) y^0 + \int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon) h(\tau) d\tau,$$

$$z_n(t, \varepsilon) = z_1(t, \varepsilon) + \int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon) B(\tau) z_{n-1}(\tau, \varepsilon) d\tau, n = 1, 2, \dots$$

По условию теоремы имеем

$$\int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon) h(\tau) d\tau \sim O(\delta(\varepsilon)), \varepsilon \rightarrow 0, \text{ и } \varepsilon \leq \delta(\varepsilon) \leq \varepsilon^\gamma,$$

поэтому

$$z_1(t, \varepsilon) \sim E(t, t_0, \varepsilon) y^0 \varepsilon + \int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon) h(\tau) d\tau \sim O(\delta(\varepsilon)), \varepsilon \rightarrow 0, t \in D.$$

Оценим второе приближение:

$$z_2(t, \varepsilon) = z_1(t, \varepsilon) + \int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon) B(\tau) z_1(\tau, \varepsilon) d\tau \sim O(\delta(\varepsilon)) + O(\delta^2(\varepsilon)), \varepsilon \rightarrow 0, t \in D.$$

Аналогично, получаем

$$z_3(t, \varepsilon) = z_1(t, \varepsilon) + \int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon) B(\tau) z_2(\tau, \varepsilon) d\tau \sim O(\delta(\varepsilon)) + O(\delta^2(\varepsilon)) + O(\delta^3(\varepsilon)),$$

$$\varepsilon \rightarrow 0, t \in D.$$

Для n -го приближения справедливо соотношение

$$z_n(t, \varepsilon) \sim O(\delta(\varepsilon)) + O(\delta^2(\varepsilon)) + \dots + O(\delta^n(\varepsilon)), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad t \in D.$$

Это можно доказать, применяя метод математической индукции.

Последовательные приближения $z_n(t, \varepsilon)$ равномерно ограничены:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|z_n(t, \varepsilon)\| \leq c\delta(\varepsilon), \quad 0 < c = \text{const}.$$

Рассмотрим ряд

$$z_n(t, \varepsilon) = z_1(t, \varepsilon) + (z_2(t, \varepsilon) - z_1(t, \varepsilon)) + (z_3(t, \varepsilon) - z_2(t, \varepsilon)) + \dots + (z_n(t, \varepsilon) - z_{n-1}(t, \varepsilon)),$$

отсюда

$$\|z_n(t, \varepsilon)\| \leq \|z_1(t, \varepsilon)\| + \|z_2(t, \varepsilon) - z_1(t, \varepsilon)\| + \|z_3(t, \varepsilon) - z_2(t, \varepsilon)\| + \dots + \|z_n(t, \varepsilon) - z_{n-1}(t, \varepsilon)\|.$$

Так как

$$z_1(t, \varepsilon) \sim O(\delta(\varepsilon)), \quad z_k(t, \varepsilon) - z_{k-1}(t, \varepsilon) \sim O(\delta^k(\varepsilon)), \quad k = 2, 3, \dots, n,$$

то в области D последовательность $\{z_n(t, \varepsilon)\}$ является сходящейся и имеет предел $z(t, \varepsilon) = O(\delta(\varepsilon))$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Теорема 3 доказана.

А если $h_1(t_1^*, t_2^*) = 0$ и $h_2(t_1^*, -t_2^*) = 0$, то в области D справедлива оценка

$$\left\| \int_{t_0}^t E(t, \tau, \varepsilon) h(\tau) d\tau \right\| \leq c\varepsilon.$$

Поэтому, в этом случае, $z(t, \varepsilon) \sim \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Справедливы теоремы:

Теорема 4. Пусть выполняются условия 1, 2 и $f(t_1^*, t_2^*) \neq 0$, $f(t_1^*, -t_2^*) \neq 0$, тогда задача (1), (2) имеет единственное решение, для которого справедлива асимптотическая оценка

$$\|x(t, \varepsilon)\| \leq c\Omega_3(t, \varepsilon),$$

где

$$\Omega_3(t, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in H_0 \cap \tilde{H}_0, \\ 1/\varepsilon^\gamma, & \text{при } t \in H_1 \cup \tilde{H}_1, t_1 \leq T + (1 - 2\gamma)\varepsilon \ln \varepsilon, \\ 1/\sqrt{\varepsilon}, & \text{при } t \in H_2 \cup \tilde{H}_2, 0 \leq \gamma < 1/2. \end{cases}$$

Теорема 5. Пусть выполняются условия 1, 2, $f(t_1^*, t_2^*) = 0$ и $f(t_1^*, -t_2^*) = 0$, тогда задача (1), (2) имеет единственное решение и для решения справедливо неравенство: $\|x(t, \varepsilon)\| \leq c$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Замечание. Мы рассматривали общий случаи простой точки перевала. Этот результат можно обобщить для n -кратной точки перевала, т.е. когда собственные значения $\lambda_1(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, $\lambda_2(t) = \alpha(t) - i\beta(t)$ в области D имеют единственный n -кратный нуль:

$$\lambda_1^{(k)}(t^*) = 0, \quad \lambda_2^{(k)}(\bar{t}^*) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \quad \lambda_1^{(n)}(t^*) \neq 0, \quad \lambda_2^{(n)}(\bar{t}^*) \neq 0,$$

где $t^* = t_1^* + it_2^*$, $\bar{t}^* = t_1^* - it_2^*$ принадлежит границе D .

В данном случае асимптотика интегралов $E_j(t, \varepsilon)$, $j = 1, 2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, вычисляется аналогично. Но надо иметь ввиду, что точка $\tau = t^*$ ($\tau = \bar{t}^*$) является точкой перевала порядка n функций $u_1(\tau)$ ($u_2(\tau)$). В окрестности точки перевала $\tau = t^*$ ($\tau = \bar{t}^*$) ли-

нии $\operatorname{Re}(u_1(\tau_1, \tau_2) - u_1(t_0, 0)) = 0$ ($\operatorname{Re}(u_2(\tau_1, \tau_2) - u_2(t_0, 0)) = 0$) делят плоскость на $2(n+1)$ равных секторов с углами $\pi/(n+1)$ при вершине, $\tau = t^*$ ($\tau = \overline{t^*}$). В соседних секторах знаки $\operatorname{Re}(u_1(\tau_1, \tau_2) - u_1(t_0, 0))$ ($\operatorname{Re}(u_2(\tau_1, \tau_2) - u_2(t_0, 0))$) различные [17].

Следствие 2. Пусть собственные значения $\lambda_1(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, $\lambda_2(t) = \alpha(t) - i\beta(t)$ на границе области D имеют единственный n -кратный нуль и $f(t_1^*, t_2^*) \neq 0$, $f(t_1^*, -t_2^*) \neq 0$. Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение и для него справедлива оценка

$$\|x(t, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{-n/(n+1)}, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Математический сборник. 1948. Т. 22 (64). С. 193–204.
2. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных // Математический сборник. 1952. Т. 31(73). № 3. С. 575–586.
3. Шишкова М.А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Докл. АН СССР. 1973. Т. 209. № 3. С. 576–579.
4. Нейштадт А.И. Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось. Заседания семинара имени И.Г. Петровского по дифференциальным уравнениям и математическим проблемам физики // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40. Вып. 5. С. 300–301.
5. Нейштадт А.И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях I, II // Диф. урав. 1987. Т. 23. № 12. С. 2060–2067; 1988. Т. 24. № 2. С. 226–233.
6. Нейштадт А.И., Сидоренко В.В. Запаздывание потери устойчивости в системе Циглера / Препринт. М.: Институт прикладной математики РАН им. М.В. Келдыша, 1995.
7. Neishtadt A.I. Sidorenko V.V. Stability loss delay in a Ziegler system // J. App. Maths. Mechs. 1997. V. 61. No. 1. P. 15–25.
8. Ziegler H. Stabilitäts kriterien der Flasto mechanic // Ing. Archiv. 1952. V. 20. N 1. S. 49–56.
9. Каримов С. Асимптотика решений некоторых классов дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» // Дифф. уравнения. 1985. Т. 21. № 10. С. 1698–1701.
10. Каримов С., Турсунов Д.А., Маматкулова М. Асимптотические оценки решений дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости. Ош: Билим, 2006. Серия № 2. 112 с.
11. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. 1986. Т. 5. С. 5–218.
12. Арнольд В.И. Теория катастроф. 3-е изд., доп. М.: Наука, 1990. С. 128.
13. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. Жалалабат, 2001. 203 с.
14. Турсунов Д.А. Асимптотика решений сингулярно возмущенных уравнений в случае смены устойчивости, когда собственные значения имеют n -кратный полюс: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Ош, 2005. 110 с.
15. Турсунов Д.А. Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи с периодическими точками поворота // Изв. Томского политехнического университета. 2014. Т. 324. № 2. С. 31–35.
16. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач. М.: Наука, 1989. 334 с.
17. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Статья поступила 21.02.2018 г.

Tursunov D.A. (2018) ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM IN THE CASE OF A CHANGE IN THE STABILITY OF A STATIONARY POINT IN THE PLANE OF “RAPID MOTIONS”. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 54. pp. 46–57

DOI 10.17223/19988621/54/4

Keywords: asymptotic expansion of the solution, bisingular problem, singular perturbation, Cauchy problem, small parameter, stationary phase method, system of ordinary differential equations with a small parameter for the derivative.

In this paper, the Cauchy problem for a normal system of two linear inhomogeneous ordinary differential equations with a small parameter at the derivative is considered. The coefficient matrix of the linear part of the system has complex conjugate eigenvalues. The real parts of the complex conjugate eigenvalues in the considered interval change signs from negative to positive ones. A singularly perturbed Cauchy problem is investigated in the case of instability, i.e., when the asymptotic stability condition is violated. Moreover, the singularly perturbed Cauchy problem has an additional singularity, namely, the corresponding unperturbed equation has a non-smooth solution in the investigated extended domain. More exactly, the solution of the corresponding unperturbed equation has poles in the complex plane. Therefore, the Cauchy problem under consideration can be called bisingular in the terminology introduced by Academician A.M. Il'in.

The aim of the research is to construct the principal term of the asymptotic behavior of the Cauchy problem solution when the asymptotic stability condition is violated.

In the study, methods of the stationary phase, saddle point, successive approximations, and L.S. Pontryagin's idea—the transition to a complex plane—are applied.

An asymptotic estimate is obtained for the solution of a bisingularly perturbed Cauchy problem in the case of a change in the stability of a stationary point in the plane of “rapid motions” is violated. The principal term of the asymptotic expansion of the solution is constructed. It has a negative fractional power with respect to a small parameter, which is characteristic of bisingularly perturbed equations or equations with turning points.

The obtained results can find applications in chemical kinetics, in the study of Ziegler's pendulum, etc.

AMS Mathematical Subject Classification: 34M60, 34E10, 34A12

TURSUNOV Dilmurat A. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Osh State University, Kyrgyzstan). E-mail: tdaosh@gmail.com

REFERENCES

1. Tikhonov A. N. (1948) O zavisimosti resheniy differentsial'nykh uravneniy ot malogo parametra [On the dependence of solutions of differential equations on a small parameter]. *Mat. Sb. (N.S.)*. 22(64). pp. 193–204.
2. Tikhonov A. N. (1952) Sistemy differentsial'nykh uravneniy soderzhashchikh малыe parametry pri proizvodnykh [Systems of differential equations containing small parameters at the derivatives]. *Mat. Sb. (N.S.)*. 31(73). pp. 575–586.
3. Shishkova M.A. (1973) Rassmotreniye odnoy sistemy differentsial'nykh uravneniy s malym parametrom pri vysshikh proizvodnykh [Consideration of a system of differential equations with a small parameter at higher derivatives]. *Dokl. AN SSSR*. 209(3). pp. 576–579.
4. Neishtadt A.I. (1985) Asimptoticheskoye issledovaniye poteri ustoychivosti ravnovesiya pri medlennom prokhozhenii pary sobstvennykh chisel cherez mnimuyu os' [Asymptotic study of the loss of equilibrium stability upon a slow passage of a pair of eigenvalues through an imaginary axis]. Sessions of the Petrovskii seminar on differential equations and mathematical problems of physics. *Uspekhi Mat. Nauk*, 40(5). pp. 300–301.
5. Neishtadt A. I. (1987, 1988) O zatyagivaniy poteri ustoychivosti pri dinamicheskikh bifurkatsiyakh [Prolongation of the loss of stability in the case of dynamic bifurcations. I, II]. *Differ. Uravn.* 23(12). pp. 2060–2067; 24(2). pp. 226–233

6. Neishtadt A.I. Sidorenko V.V. (1995) Запаздывание потери устойчивости в системе Циглера [Stability loss delay in a Ziegler system]. Preprint. Moscow: Institute of Applied Mathematics RAS. M.V. Keldysh.
7. Neishtadt A.I. Sidorenko V.V. (1997) Stability loss delay in a Ziegler system. *J. App. Math. Mech.* 61(1). pp. 15–25.
8. Ziegler H. (1952) Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik. *Ing. Archiv.* 20(1). S. 49–56.
9. Karimov S. (1985) Asimptotika resheniy nekotorykh klassov differentsial'nykh uravneniy s malym parametrom pri proizvodnykh v sluchaye smeny ustoychivosti tochki pokoya v ploskosti “bystrykh dvizheniy” [Asymptotic behavior of the solutions of certain classes of differential equations with a small parameter at the derivatives in the case of a change in the stability of a stationary point in the plane of “rapid motions”]. *Differ. Uravn.* 21(10). pp. 1698–1701.
10. Karimov S., Tursunov D.A. Mamatkulova M. (2006) *Asimptoticheskiye otsenki resheniy differentsial'nykh uravneniy s malym parametrom pri proizvodnykh v sluchaye smeny ustoychivosti* [Asymptotic estimates for solutions of differential equations with a small parameter at derivatives in the case of a change of stability]. Osh: Bilim. 112 p.
11. Arnol'd V.I., Afraimovich V.S., Ilyashenko Yu. S., Shilnikov L. P. (1986) Teoriya bifurkatsiy [Bifurcation theory]. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr.* 5. Moscow: VINITI. pp. 5–218.
12. Arnold V.I. (1990) *The theory of catastrophes*. Moscow: Nauka. p. 128.
13. Alybaev K.S. (2001) Metod liniy urovnya issledovaniya singulyarno vozmushchennykh uravneniy pri narushenii usloviya ustoychivosti [Method of level lines for the study of singularly perturbed equations upon violation of the stability condition]: Diss. Dr. phys.-math. sciences: 01.01.02. Jalalabat. 203 p.
14. Tursunov D.A. (2005) Asimptotika resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy v sluchaye smeny ustoychivosti, kogda sobstvennyye znacheniya imeyut n -kratnyy polyus. [Asymptotic behavior of solutions of singularly perturbed equations in the case of a change of stability, when the eigenvalues have an n -multiple pole]: Diss. Cand. fiz.-mat. sciences: 01.01.02. Osh. 110 p.
15. Tursunov D.A. (2014) Asimptotika resheniya bisingulyarno vozmushchennogo ellipticheskogo uravneniya. Sluchay osoboy tochki na granitse [Asymptotic solutions of the bisingular perturbed elliptic equation. Case of a singular point at the boundary]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University.* 324(2). pp. 31–35.
16. Ilin A.M. (1989) *Soglasovaniye asimptoticheskikh razlozheniy krayevykh zadach* [Matching of asymptotic expansions of boundary value problems]. Moscow: Nauka. 334 p.
17. Fedoryuk M.V. (1977) *Metod perevala* [Saddle-point method]. Moscow: Nauka. 368 p.

МЕХАНИКА

УДК 531.554

DOI 10.17223/19988621/54/5

В.И. Биматов, И.А. Бородачева, А.Н. Лавронович

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРАВЛЕННОГО ВЫБРОСА КОМПОНУЮЩЕГО ТЕЛА РАЗДЕЛЯЮЩЕЙСЯ СОСТАВНОЙ СИСТЕМЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ

Исследования посвящены решению задачи направленного выброса компонентующего тела из контейнера разделяющейся составной системы при сверхзвуковых скоростях движения под действием аэродинамических сил. Установлены критериальные зависимости, указывающие на направление выброса компонентующего тела из контейнера. Данные критериальные зависимости могут быть использованы при конструировании элементов составных систем и по их массово-геометрическим и аэродинамическим характеристикам прогнозировать требуемые направления разделения составных систем.

Ключевые слова: *разделяющаяся составная система, компонентующее тело, аэродинамические характеристики, критериальные зависимости.*

Класс составных систем (СС) представляет собой набор тел, имеющих обычно сгруппированные массовые, геометрические и аэродинамические характеристики. Будем рассматривать способ компоновки, предполагающий расположение компонентующих тел (КТ) так, что их продольные оси образуют продольную ось СС.

Наиболее приемлемым путем получения полной и достоверной информации о влиянии сверхзвуковых отрывных течений на обтекание и аэродинамические характеристики (АДХ) разделяющихся СС является сочетание экспериментальных методов исследования на баллистических трассах, в сверхзвуковых аэродинамических установках, на полигонах с теоретическим анализом выбранных моделей отрывного обтекания КТ, механизма разделения и рассеивания СС под действием аэродинамических сил [1–4].

Для экспериментального исследования динамики совместного движения КТ составных систем необходимо прогнозировать закономерности их разделения на баллистической трассе и гарантировано задавать направление разделения. В статье представлена модель разделения компонентующих тел составной системы и методика получения критериальных зависимостей, позволяющих на основе сравнения ускорений компонентующих тел СС определить направление их разделения.

Модель составной системы, методика получения критериальных зависимостей и результаты решения задачи

Для установления критериальных зависимостей, указывающих на направление выброса КТ из контейнера, рассмотрим разделяющуюся СС (рис. 1), моделирующую контейнеры с находящимися в них КТ, применяемые при проведении баллистических экспериментов.

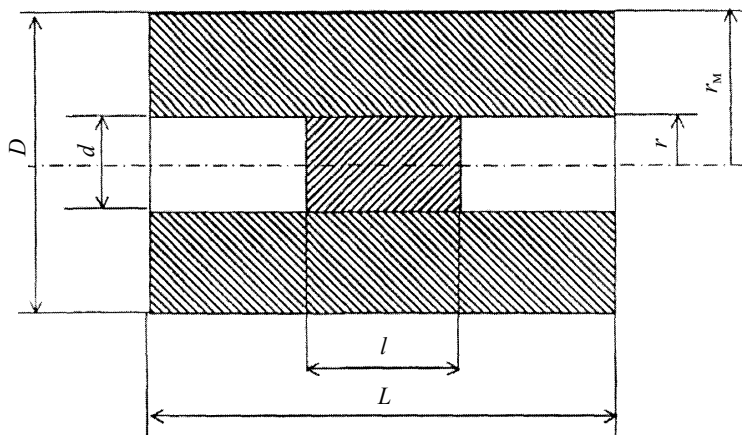


Рис. 1. Контейнер с отделяющимся телом в сквозном осевом канале
Fig. 1. Container with a separable body in a through axial channel

Разделяющаяся СС состоит из двух частей: контейнера и выбрасываемого КТ. Контейнер представляет собой цилиндр диаметром $D = 2r_M$ и длиной L с плоским передним и задним торцами, имеющий цилиндрический осевой канал диаметром d . В канале расположено выбрасываемое КТ, представляющее собой также цилиндр диаметром d и длиной l . Известны плотности материалов контейнера ρ_K и КТ ρ_T . Ограничимся случаем сверхзвукового движения разделяющейся СС с углом атаки $\alpha = 0$.

Составляющую продольной аэродинамической силы, действующую на передний торец системы, определим выражением

$$R_x = \frac{4q_\infty}{kM_\infty^2} \pi r_M^2 \int_0^1 (f(\bar{r}) - 1) \bar{r} dr. \quad (1)$$

Здесь $\bar{r} = r/r_M$, r_M – радиус миделевого сечения, $f(\bar{r}) = P_T/P_\infty$, P_T – давление на выбранной площади элемента поверхности, P_∞ – давление невозмущенного потока, r – текущий радиус.

Разделим составляющую R_x на силу, действующую на торец контейнера R_x^K и на силу, действующую на выбрасываемое КТ – R_x^T :

$$R_x^K = \frac{4q_\infty}{kM_\infty^2} \pi r_M^2 \int_{\bar{r}_1}^1 (f(\bar{r}) - 1) \bar{r} dr; \quad (2)$$

$$R_x^T = \frac{4q_\infty}{kM_\infty^2} \pi r_M^2 \int_0^{\bar{r}_1} (f(\bar{r}) - 1) \bar{r} dr. \quad (3)$$

Аэродинамические коэффициенты этих сил C_x , C_x^K и C_x^T выражаются в виде

$$C_x = \frac{4}{kM_\infty^2} \int_0^1 (f(\bar{r}) - 1) \bar{r} dr; \quad (4)$$

$$C_x^{\kappa} = \frac{4}{kM_{\infty}^2} \int_{\bar{r}_1}^1 (f(\bar{r}) - 1) \bar{r} d\bar{r}; \quad (5)$$

$$C_x^{\tau} = \frac{4}{kM_{\infty}^2} \int_0^{\bar{r}_1} (f(\bar{r}) - 1) \bar{r} d\bar{r}, \quad (6)$$

где $\bar{r}_1 = \frac{d}{2r_m}$ – безразмерный радиус сквозного осевого канала.

Для дальнейших исследований в качестве функции $f(\bar{r})$ будем использовать полином четвертой степени, построенный по результатам дренажных испытаний при скорости набегающего потока $M_{\infty} = 3$ [1, 5], который был вычислен по девяти точкам (с учетом точки Релея) (рис. 2).

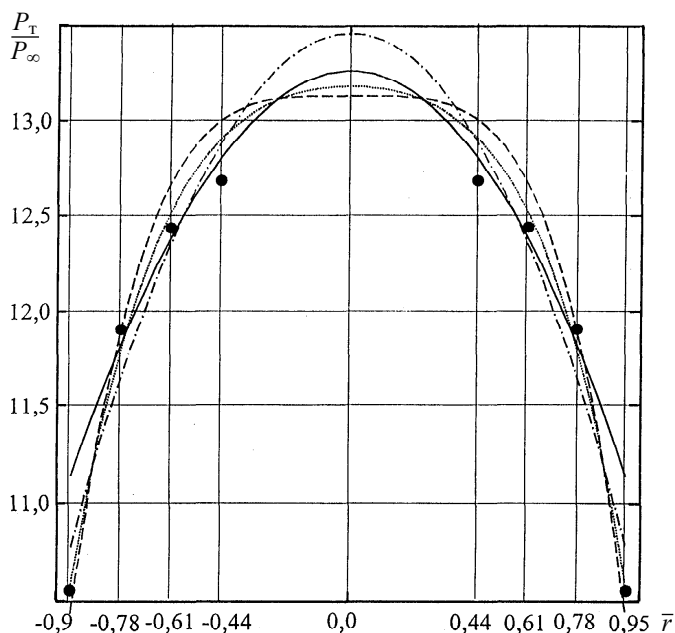


Рис. 2. Аппроксимация экспериментальных данных распределения относительно давления P_t/P_{∞} по переднему торцу компонующего тела с помощью многочленов второй и четвертой степени, $\alpha = 0$, $M_{\infty} = 3$; — уравнение второй степени; - - - уравнение четвертой степени; - · - · - уравнение второй степени с учетом точки $\bar{r} = 0$; уравнение четвертой степени с учетом точки $\bar{r} = 0$

Fig. 2. Approximation of experimental distribution data with respect to the pressure P_t/P_{∞} along the front end of linked body using the quadratic and quartic polynomials at $\alpha = 0$ and $M_{\infty} = 3$; — is for quadratic equation; - - - is for quartic equation; - · - · - is for quadratic equation with allowance for the point $\bar{r} = 0$; and is for quartic equation with allowance for the point $\bar{r} = 0$

Вид этого полинома

$$\frac{P}{P_{\infty}} = f(\bar{r}) = 12.8138 - 0.1124 \bar{r}^{2.2} - 2.5895 \bar{r}^4. \quad (7)$$

Расчет по формулам (4), (5) и (6) с учетом (7) позволяет определить общий аэродинамический коэффициент продольной силы C_x , действующей на разделяющую СС, а также зависимость аэродинамических коэффициентов продольной силы, действующей на контейнер C_x^k и выбрасываемое КТ C_x^t от $\bar{r}$. На рис. 3 представлены эти зависимости. Пересечение кривых позволяет определить точку, в которой значения C_x^k и C_x^t равны между собой. Эта точка соответствует значению $\bar{r} = 0,68$. При этом значения $C_x^k = C_x^t = 0.825$, $C_x = 1.65$.

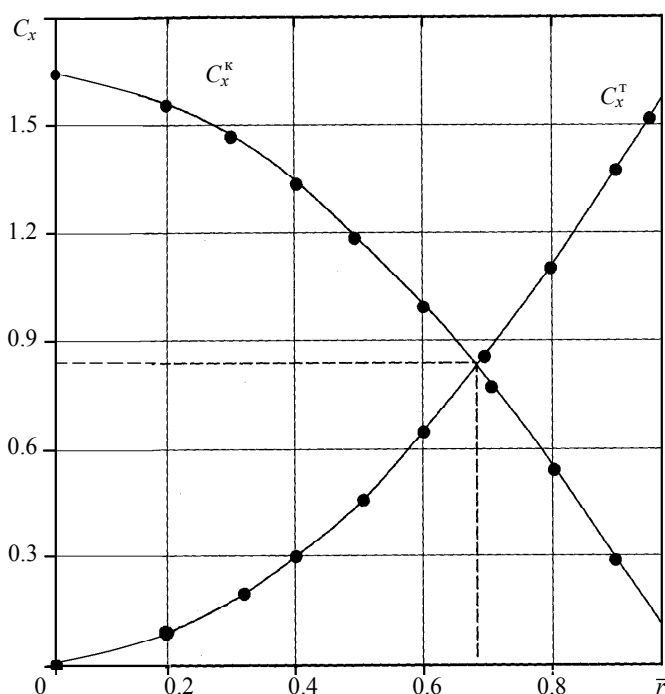


Рис. 3. Зависимость аэродинамических коэффициентов продольной силы, действующей на контейнер C_x^k и выбрасываемое компонентное тело C_x^t от $\bar{r}$
Fig. 3. Aerodynamic coefficients of the axial force acting on the container C_x^k and ejected linked body C_x^t as the functions of $\bar{r}$

Для нахождения критериальных зависимостей, позволяющих определить направление выброса КТ из контейнера, рассмотрим отношение их ускорений:

$$\frac{a_k}{a_t} = \frac{C_x^k}{C_x^t} \cdot \frac{m_t}{m_k}, \quad (8)$$

где m_t и m_k – массы КТ и контейнера соответственно.

Разделение СС произойдет при выполнении условия

$$\frac{a_k}{a_T} \neq 1. \quad (9)$$

Если соотношение $\frac{a_k}{a_T} > 1$, то выброс КТ будет происходить по направлению, совпадающему с вектором скорости (выброс через головную часть контейнера). При $\frac{a_k}{a_T} < 1$ будет происходить выброс в донную область контейнера.

Значение для масс контейнера и КТ запишутся соответственно

$$m_k = \rho_k W_k = \pi \rho_k (r_k^2 - r^2) L; \quad (10)$$

$$m_T = \rho_T W_T = \pi \rho_T r^2 l. \quad (11)$$

Подставляя значения из (10) и (11) в (8) и учитывая, что $\bar{r} = \frac{r}{r_m}$, $\bar{L} = \frac{L}{D}$ и

$\bar{l} = \frac{l}{D}$, получим

$$\frac{a_k}{a_T} = \frac{C_x^k}{C_x^T} \cdot \frac{\bar{r}^2}{(1 - \bar{r}^2)} \cdot \frac{\rho_T}{\rho_k} \cdot \frac{\bar{l}}{\bar{L}}. \quad (12)$$

Для анализа (12) предположим, что выбрасываемое КТ имеет ту же длину, что и контейнер, т.е. $l = L$. Тогда

$$\frac{a_k}{a_T} = \frac{C_x^k}{C_x^T} \cdot \frac{\bar{r}^2}{(1 - \bar{r}^2)} \cdot \frac{\rho_T}{\rho_k}. \quad (13)$$

Из (13) видно, что $\frac{a_k}{a_T}$ является функцией, зависящей от $\bar{r}$ и от плотностей разделяющихся тел. Задавая плотность тел, можно определить, произошел выброс КТ в донную область или через головную часть контейнера при заданном $\bar{r}$ и M_∞ . Обозначая

$$\frac{C_x^k}{C_x^T} \cdot \frac{\bar{r}^2}{(1 - \bar{r}^2)} = F(\bar{r}) \quad (14)$$

и учитывая отношение $\frac{\bar{l}}{\bar{L}} = n$, выражение (12) можно записать в виде

$$\frac{a_k}{a_T} = F(\bar{r}) \frac{\rho_T}{\rho_k} n. \quad (15)$$

Расчеты, проведенные для $M_\infty = 3$, позволяют построить критериальные кривые разделения составной системы (рис. 4).

На самой кривой $\frac{\rho_T}{\rho_k} = \frac{1}{F(\bar{r})n}$, т.е. выбрасываемое КТ и контейнер движутся вместе и разделения не происходит.

Если соблюдаются условие $\frac{\rho_T}{\rho_K} > \frac{1}{F(\bar{r})n}$, значения $\frac{\rho_T}{\rho_K}$ лежат выше кривой и происходит выброс КТ через головную часть контейнера.

При $\frac{\rho_T}{\rho_K} < \frac{1}{F(\bar{r})n}$ выброс КТ произойдет в донную область (рис. 4).

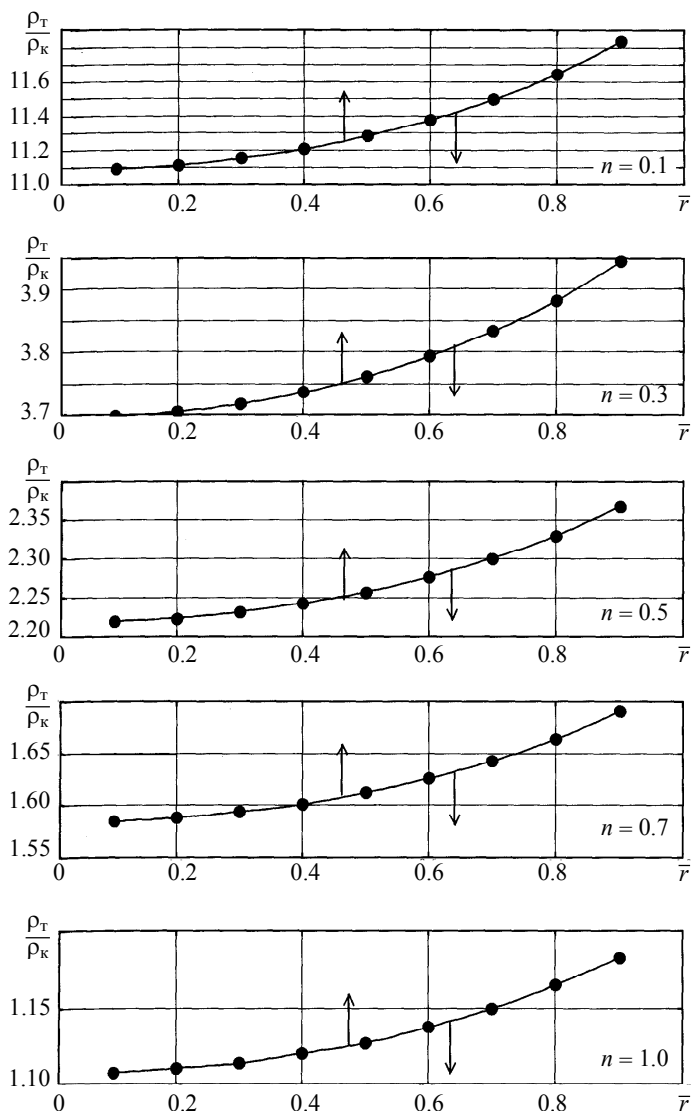


Рис. 4. Критериальная зависимость, характеризующая направление выброса компонующего тела из контейнера. ↓ – выброс в донную область, ↑ – выброс навстречу набегающему потоку

Fig. 4. Criteria dependency characterizing a direction of the linked body ejection from the container. ↓ indicates the ejection towards the bottom area, ↑ indicates the ejection towards the oncoming flow

Выводы

Методика получения критериальных зависимостей, предложенная в работе, позволяет получить однозначный ответ о направлении разделения составляющих тел составной системы: выброс через головную часть контейнера или выброс в донную область контейнера. Данные критериальные зависимости могут быть использованы при конструировании элементов составных систем и по их массово-геометрическим и аэродинамическим характеристикам прогнозировать требуемые направления разделения составных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Патент РФ № 2145067. Баллистический способ определения коэффициента лобового сопротивления тела / В.К. Якушев, В.И. Биматов, Р.Г. Николаев. Опубл. Б.И. № 327.01.2000.
2. Хлебников В.С. Осесимметричное обтекание пары тел сверхзвуковым потоком газа // Уч. записки ЦАГИ. 1978. Т. 9. № 6. С. 108.
3. Хлебников В.С. Картина сверхзвукового обтекания пары тел и перестройка течения между ними // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1994. № 1. С.158–165.
4. Хлебников В.С. Исследование обтекания пары тел при транс- и сверхзвуковых режимах // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1998. № 2. С.158–163.
5. Биматов В.И., Якушев В.К., Николаев Р.Г. Применение эффекта группового движения тел для определения коэффициента лобового сопротивления // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Доклады Всероссийской научной конференции. Томск, 1998. С. 179–180.

Статья поступила 28.04.2018 г.

Bimatov V.I., Borodacheva I.A., Lavronovich A.N. (2018) RESEARCH OF A DIRECTED EMISSION OF LINKED BODY OF THE SEPARABLE COMPOUND SYSTEM UNDER THE ACTION OF AERODYNAMIC FORCES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 54. pp. 58–65

DOI 10.17223/19988621/54/5

Keywords: separable compound system, linked body, aerodynamic characteristics, criteria dependencies.

The studies are devoted to solving the problem of directed ejection of a linked body from a container of the separable compound system at supersonic speeds under the action of aerodynamic forces. The considered separable compound system consists of two parts which are the container and the ejected linked body. The container represents a cylinder with a flat front and rear ends with a cylindrical axial channel inside. There is an ejected linked body in the channel, which is also a cylinder of the same diameter as the axial channel. The densities of the materials of container and linked body are known. The criterial dependencies indicating the direction of the linked body ejection from the container are obtained. These criterial dependencies can be used when designing elements of compound systems and, based on the mass, geometric, and aerodynamic characteristics of the systems, they can predict the required directions of the separation of compound systems.

BIMATOV Vladimir Ismagilovich (Doctor of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vbimatov@mail.ru

BORODACHEVA Irina Aleksandrovna (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: i.revenko@mail.ru

LAVRONOVICH Aleksey Nikolaevich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: vbimatov@mail.ru

REFERENCES

1. Yakushev V.K., Bimatov V.I., Nikolayev R.G. (2000) *Ballisticheskiy sposob opredeleniya koeffitsienta lobovogo soprotivleniya tela* [Ballistic method of determining the drag coefficient of a body]. RF Patent 2145067.
2. Khlebnikov V.S. (1978) Osesimmetrichnoe obtekanie pary tel sverkhzvukovym potokom gaza [Axisymmetric flow around a pair of bodies by a supersonic gas flow]. *TsAGI Science Journal*. 9(6). P. 108.
3. Khlebnikov V.S. (1994) Kartina sverkhzvukovogo obtekaniya pary tel i perestroyka techeniya mezhdru nimi [The picture of supersonic flow around a pair of bodies and the restructuring of the flow between them]. *Izvestiya RAN, Mekhanika Zhidkosti i Gaza – Fluid Dynamics*. 1. pp. 158–165.
4. Khlebnikov V.S. (1998) *Issledovanie obtekaniya pary tel pri trans- i sverkhzvukovykh rezhimakh* [Investigation of the flow around a pair of bodies under trans- and supersonic regimes]. *Izvestiya RAN, Mekhanika Zhidkosti i Gaza – Fluid Dynamics*. 2. pp. 158–163.
5. Bimatov V.I. Yakushev V.K., Nikolayev R.G. (1998) Primenenie effekta gruppovogo dvizheniya tel dlya opredeleniya koeffitsienta lobovogo soprotivleniya [Application of the effect of group motion of the bodies for determining the drag coefficient]. *Fundamental'nye i prikladnye problemy sovremennoy mekhaniki: Doklady Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii – Fundamental and Applied Problems of Modern Mechanics. Proceedings of All-Russian Scientific Conference*. pp. 179–180.

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/54/6

О.И. Казакова, И.Ю. Смолин, И.М. Безмозгий

АНАЛИЗ АМПЛИТУДНО-ЗАВИСИМЫХ ДЕМПФИРОВАНИЙ И ВОЗМОЖНОСТИ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИ РАСЧЕТЕ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ¹

Статья посвящена рассмотрению амплитудно-зависимых коэффициентов демпфирования на примере плоских образцов из алюминиевого сплава АМг6. Приведены результаты экспериментальных исследований затухающих и вынужденных колебаний образцов, а также их анализ. Выявлены зависимости параметров демпфирования образцов и материала от напряжений и описан подход к их использованию при решении динамических задач численными методами.

Ключевые слова: колебания, напряжённое состояние, амплитудно-зависимые демпфирования, конечно-элементное моделирование.

В настоящее время все большую популярность набирает концепция «цифровых двойников» изделия, иными словами расчетная математическая модель [1, 2]. В области ракетно-космической техники, где основными воздействиями на изделия являются затухающие во времени переходные процессы [3], важной составляющей цифрового двойника является конечно-элементная динамическая модель (КЭМ) изделия. К ней предъявляется ряд требований. Во-первых, модель должна иметь внешнее соответствие реальному изделию. Во-вторых, позволять проводить на ее основе моделирование динамических испытаний, а также иметь возможность настройки по результатам испытаний. В-третьих, верифицированная модель должна достоверно моделировать поведение конструкции тогда, когда нет возможности проводить испытания.

В общем виде решение на КЭМ с n степенями свободы представляет собой решение следующего уравнение [4]:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = P, \quad (1)$$

где M – матрица масс, C – матрица демпфирования, K – матрица жесткости, u – вектор узловых перемещений, P – вектор внешних сил. Отсюда следует, что модель будет давать достоверный результат только в случае правильно построенных матриц масс, жесткости и демпфирования. И если в случае матриц масс и жесткости данная задача является хоть и весьма трудоемкой, но реализуемой с использованием современных конечно-элементных (КЭ) пакетов, путем верификации модели по результатам испытаний, то в случае матрицы демпфирования возникает ряд проблем. Связаны они с тем, что во всех известных авторам КЭ-пакетах демпфирование задается в трех основных формах: 1) постоянное, в случае обще конструкционного демпфирования; 2) пропорциональное матрице жесткости, в

¹ В статье использованы результаты, полученные в ходе выполнения проекта 8.2.19.2018 в рамках Программы повышения конкурентоспособности ТГУ (экспериментальные исследования) и в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 годы, направление III.23 (численное моделирование).

случае внутреннего демпфирования, 3) пропорционального матрице масс, в случае внешнего демпфирования. В некоторых случаях вместо постоянного демпфирования КЭ-пакеты позволяют задавать разные значения в выбранных диапазонах частот. Однако в реальных конструкциях величина конструкционного демпфирования зависит не столько от частоты, сколько от амплитуды и формы распределения напряжений [5 – 8].

В то же время проводятся попытки реализовать данное поведение на математических моделях. С.Дж. Эллиотт [9] приводит математическое моделирование системы с двумя степенями свободы с учетом наличия в ней нелинейного демпфера. Однако в его расчетах демпфирование зависит от первой производной перемещения.

Данная статья посвящена изучению зависимостей демпфирования от уровня напряжений/деформаций в наиболее распространенном в изделиях ракетно-космической техники материале – алюминиевом сплаве АМг6, а также возможностям применения данных зависимостей для расчетов на основе КЭМ.

Амплитудно-зависимое демпфирование

В литературе широко представлены значения коэффициентов демпфирования [7]. Данные значения являются либо свойством конкретного образца, на котором проводится исследование, или представляют собой одно значение, советуемое конкретному уровню напряжений. Проводятся такие исследования на равномерно напряженном образце, например, растяжением-сжатием пластины, или кручением трубчатого образца. Данные характеристики не универсальны и, если их использовать при расчете сложных КЭМ-изделий, то результаты могут оказаться неверными.

Однако в случае переменного изгиба пластин или кручении толстостенных трубок распределение напряжений становится неоднородным и это обстоятельство требует дополнительных усилий для перехода от демпфирующих характеристик образца к характеристике материала. Рассеяние энергии в изотропном материале при сложно-напряженном состоянии при колебаниях должно зависеть от амплитуд инвариантов напряжения. В частности, для пластичных материалов в качестве такого инварианта следует использовать интенсивность напряжений или эквивалентные напряжения по Мизесу [6]. Такую зависимость уровня демпфирования от напряжения в материале, получаемую на основе экспериментальных данных, удобно аппроксимировать степенной функцией [10]

$$\psi(\sigma_i) = k\sigma_i^n. \quad (2)$$

где k , n – характеристики материала, которые в определенном диапазоне частот и температур можно считать постоянными, а σ_i – амплитуда интенсивности напряжений. В случае амплитудно-независимого демпфирования $n = 0$.

В реальных конструкциях кроме демпфирования в материале также присутствуют другие виды демпфирования (конструкционное, внешнее). В связи с этим экспериментальную характеристику образца целесообразно представлять как сумму

$$\tilde{\psi} = \psi_{\text{нач}} + \psi(\sigma_i), \quad (3)$$

где $\psi_{\text{нач}}$ – величина коэффициента рассеяния энергии при малых напряжениях.

Экспериментально-расчетное исследование алюминиевых образцов

Для целей данного исследования были изготовлены и испытаны плоские образцы из алюминиевого сплава АМг6. Для определения зависимостей рассеяния энергии в материале от напряжений к образцам были применены следующие виды экспериментальных исследований: определение резонансной кривой, полученной при вынужденных колебаниях, и определение виброграммы свободных затухающих колебаний для оценки затухания за цикл при свободных колебаниях.

В процессе испытаний образец имел консольное закрепление. Исследования проводились по первой форме колебаний, которая соответствует изгибной форме колебаний и частоте порядка 17,2 Гц. Данная частота обусловлена закреплением в консольной части образца стальной пластины. Она позволяет достигнуть больших уровней напряжений в материале. Схема испытаний представлена на рис. 1. Контроль напряжений осуществлялся по показаниям тензодатчика (Т2), расположенного в месте максимальных напряжений – корне образца, контроль ускорений осуществлялся с помощью трехкомпонентного вибропреобразователя (В1), установленного на незакрепленной стороне образца.

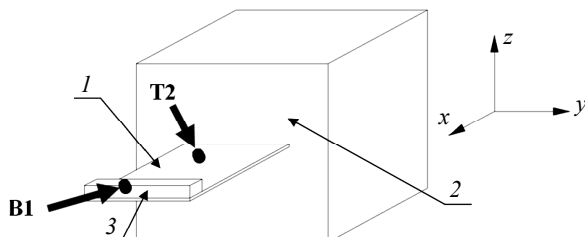


Рис. 1. Схема испытаний образцов (1 – образец, 2 – оснастка, 3 – стальная накладка)

Fig. 1. Scheme of the tests of samples: 1 – sample, 2 – mounting, and 3 – steel strip

Затухающие свободные колебания

Первый вид испытаний на образцах проводился приложением импульсной нагрузки к свободному краю образца. Виброграмма, полученная при этих испытаниях и отфильтрованная для исключения высоких частот, представлена на рис. 2.

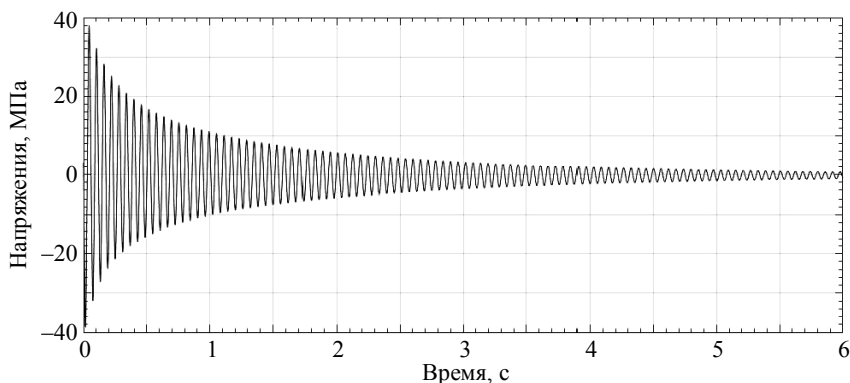


Рис. 2. Развертка затухающих колебаний

Fig. 2. Time-base of the damped oscillations

Уровень рассеяния энергии при затухающих колебаниях обычно оценивается логарифмическим декрементом колебаний. Несмотря на то, что изначально понятие логарифмического декремента колебаний было введено для линейной колебательной системы при экспоненциальном законе затухания, в случае амплитудно-зависимого демпфирования в системе данную характеристику можно использовать, если считать ее переменной величиной и определять по усредненным значениям между соседними амплитудами одного цикла. Усреднённое значение логарифмического декремента вычисляют по формуле

$$\delta_i = \ln \left(\frac{a_i}{a_{i+T}} \right), \quad (4)$$

где a_i и a_{i+T} – амплитуды колебаний в начале и конце рассматриваемого цикла i , T – период колебаний.

На рис. 3, *а* показана взаимосвязь амплитуд замеренных виброускорений в свободной части образца и напряжений (деформаций) в корне образца. На рис. 3, *б* представлено значение логарифмического декремента затухания, определенного по формуле (4), отнесенного к средней амплитуде колебаний $a_{i+T/2}$, как функции напряжений, которые соответствуют этой амплитуде колебаний.

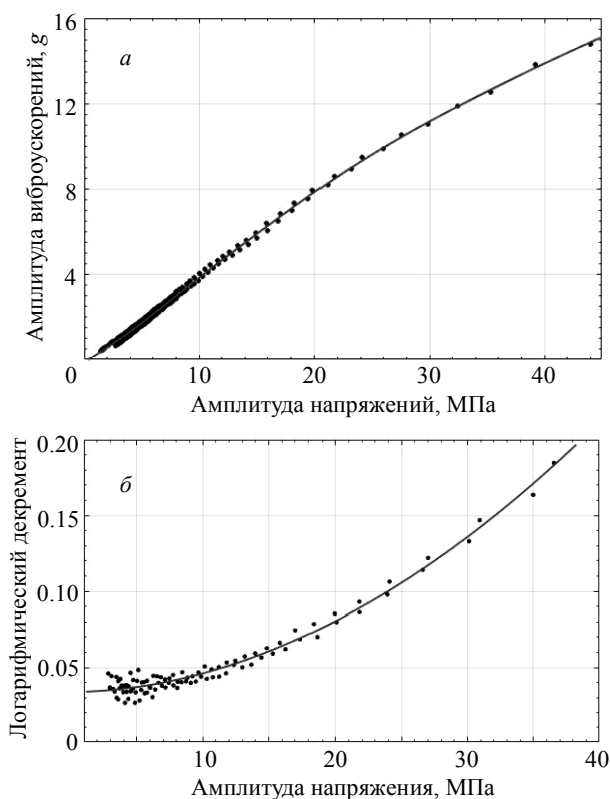


Рис. 3. Характеристики затухающего процесса колебаний образца:
точки – экспериментальные данные, кривые – аппроксимация

Fig. 3. Characteristics of the damped oscillations of the sample:
the dotted line is the experimental data and the solid line is the approximation

Видно, что нелинейность зависимости виброускорений от напряжений наблюдается только выше 25 МПа, при этом логарифмический декремент нелинейно зависит от уровня напряжений даже при невысоких значениях напряжений.

Логарифмический декремент колебаний используется для определения уровня рассеяния энергии в системе при затухающих колебаниях из-за удобства определения, однако более точно демпфирующая способность колебательной системы определяется относительным рассеянием энергии (коэффициентом поглощения):

$$\psi(a) = \frac{\Delta U(a)}{U(a)}, \quad (5)$$

где $U(a)$ – амплитудное значение энергии упругого деформирования. Данные характеристики обычно связывают формулой

$$\psi = 2\delta, \quad (6)$$

справедливой в случае вязкого трения. Для систем с нелинейным сопротивлением данная формула справедлива только при малом значении декремента. При большом затухании В.В. Матвеевым было предложено [11] дифференциальное определение логарифмического декремента затухания:

$$\delta(a) = -\frac{4\pi}{a\omega(a)} \left[\frac{a}{\omega(a)} \frac{d\omega(a)}{da} + 1 \right] \frac{da}{dt}. \quad (7)$$

Полученные на основе формул (6) и (7) результаты были аппроксимированы степенной зависимостью в соответствии с уравнением (2). На рис. 4 представлены эти аппроксимированные кривые относительного рассеяния энергии (кривая 1 – получена по формуле (6), кривая 2 – по формуле (7)). Полученные по экспериментальным данным по затуханию характеристики составили для кривой 1 – $\psi_{\text{нач}} = 0.0392$ (3.92%), $k = 9.092415 \cdot 10^{-4} (\text{МПа})^n$, $n = 1.7238$; для кривой 2 – $\psi_{\text{нач}} = 0.0375$ (3.75%), $k = 7.346413 \cdot 10^{-4} (\text{МПа})^n$, $n = 1.6403$. Аппроксимированные кривые дают практически одинаковый результат в диапазоне напряжений от 0 до 20 МПа. Это свидетельствует о применимости формулы (6) при небольших уровнях напряжений.

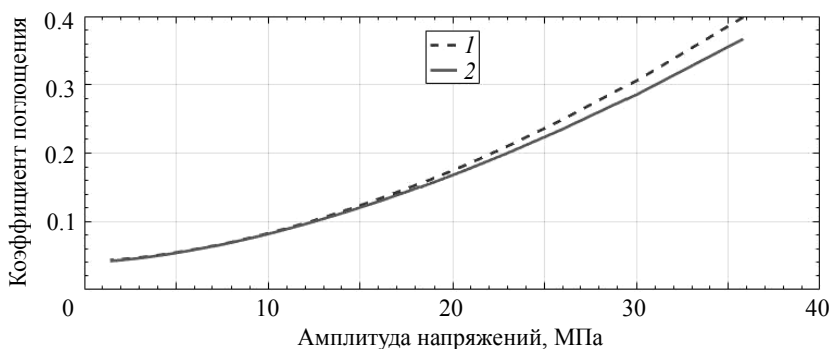


Рис. 4. Зависимость рассеяния энергии в образце от амплитуды напряжений

Fig. 4. Energy absorption coefficient of the sample as a function of stress amplitude

Вынужденные колебания

Второй вид испытаний проводился при воздействии гармонической силы с различными уровнями (0.3, 1.0 и 1.5g). Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ), полученные по измерениям напряжений в месте установки тензорезистора, представлены на рис. 5.

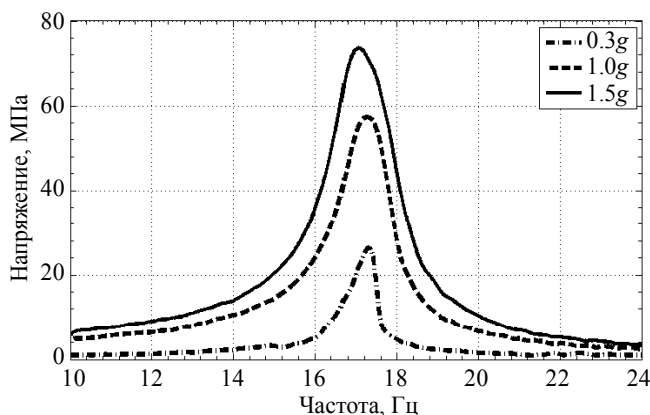


Рис. 5. АЧХ образца

Fig. 5. Amplitude-frequency response of the sample

Используя эти АЧХ, значения демпфирования для образца при уровне относительных напряжений 70 % от резонансных значений могут быть определены по широко известной формуле

$$\psi_{0.7} = 2\pi \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_r}, \quad (8)$$

где ω_r – резонансная частота, ω_1 и ω_2 – частоты, соответствующие 70 %-му уровню напряжений.

Обработка полученных АЧХ для других значений напряжений с целью определения зависимости характеристик демпфирования от напряжений была произведена по предложенной Б.Ф. Шорром и Н.Н. Серебряковым методике [12]. Были получены значения коэффициента рассеяния при небольшом уровне относительных напряжений, составляющих 15–20 %, по формуле

$$\begin{aligned} \psi_p &= 2\pi [\tilde{\sigma}(\Delta\bar{\omega})] \Delta\bar{\omega}, \\ \Delta\bar{\omega} &= \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_p}, \end{aligned} \quad (9)$$

где ω_1 и ω_2 – частоты, соответствующие уровню напряжений $\tilde{\sigma}$, ω_p – резонансная частота.

Далее были получены значения демпфирования при меньших нерезонансных уровнях напряжений по формуле

$$\psi(\tilde{\sigma}) = 2\pi \sqrt{\left(\frac{\psi_p}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{\tilde{\sigma}^2} - \Delta\bar{\omega}^2}. \quad (10)$$

Полученные значения отмечены точками на рис. 6, через них была проведена аппроксимирующая кривая, согласно формулам (2) и (3). На характер получаемой таким образом зависимости сильно сказывается количество точек, использованных для ее построения. В данном случае с помощью уравнения (10) были получены значения демпфирования при нерезонансных уровнях напряжений, составляющих 50, 70 и 90 % от резонансного значения.

Характеристики аппроксимирующих кривых при ψ_p , полученной на уровне 15 % от резонансного значения имеют следующие значения: $\psi_{нач} = 0.0662$ (6,6 %), $k = 0.0027$ (МПа)ⁿ, $n = 1.0893$ и на уровне 20 % – $\psi_{нач} = 0.0970$ (15,1 %), $k = 5.3271 \cdot 10^{-4}$ (МПа)ⁿ, $n = 1.4453$.

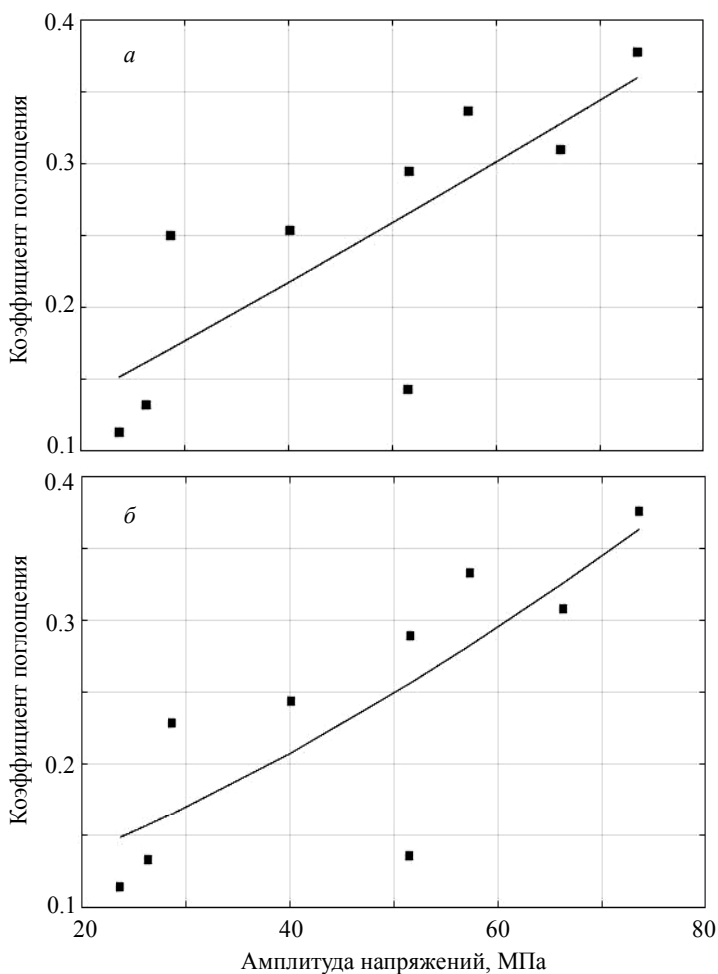


Рис. 6. Зависимость относительного рассеяния энергии в образце от амплитуды напряжений (*a* – ψ_p получено при 15 % от резонансного значения напряжений, *б* – ψ_p получено при 20 % от резонансного значения напряжений)

Fig. 6. Energy absorption coefficient of the sample as a function of stress amplitude: ψ_p was obtained at (*a*) 15 % and (*b*) 20 % of the stress resonant value

Определение зависимостей коэффициентов демпфирования в материале

Все полученные выше зависимости характеризуют уровень демпфирования в образцах. При изгибных колебаниях образцов распределение напряжений неоднородное, что требует дополнительного анализа для перехода к характеристике рассеяния энергии в материале.

Для образца в целом полная энергия получается из суммы

$$U_{\Sigma 0} = U_{\phi 0} + U_{V 0}, \quad (11)$$

где $U_{\phi 0}$ – энергия формоизменения, $U_{V 0}$ – энергия изменения объема. Индекс 0 здесь и в дальнейшем означает свойство образца.

При этом уменьшение энергии образца при ее диссипации за счет неупругих деформаций определяется только, за счет изменения формы образца:

$$\Delta U_{\Sigma 0} = \Delta U_{\phi 0} = \int_{V_0} \Delta U(\sigma_i) dV = \int_{V_0} \psi_{\phi}(\sigma_i) U_{\phi}(\sigma_i) dV, \quad (12)$$

где V_0 – объем образца.

Из формул (5) и (12) следует, что

$$\begin{aligned} \psi_0(\sigma_k)(1 + \vartheta) &= \psi_{\phi 0}(\sigma_k) = \psi_{\phi}(\sigma_i), \\ \vartheta &= U_{V 0} / U_{\phi 0}, \end{aligned} \quad (13)$$

где σ_k – амплитуда напряжений, измеренная тензорезистром (контрольное напряжение); σ_i – амплитуда интенсивности напряжений.

При сложном напряженном состоянии колеблющегося тела энергия формоизменения единичного объема равна:

$$U_{\phi}(\sigma_i) = \frac{\sigma_i^2}{6G}, \quad (14)$$

где G – модуль сдвига.

Амплитуда интенсивности напряжений в любой точке образца произвольной геометрии равна

$$\sigma_i = \sigma_k \bar{\sigma}_i, \quad (15)$$

где $\bar{\sigma}_i$ – относительная амплитуда интенсивности напряжений.

Отсюда

$$U_{\phi 0} = \frac{1}{6G} \sigma_k^2 \int_{V_0} \bar{\sigma}_i^2 dV, \quad \Delta U_{\phi 0} = \frac{k}{6G} \sigma_k^{2+n} \int_{V_0} \bar{\sigma}_i^{2+n} dV. \quad (16)$$

Следовательно,

$$\psi_{\phi 0}(\sigma_k, \eta) = \frac{\Delta U_{\phi 0}}{U_{\phi 0}} = k \sigma_k^n \eta; \quad (17)$$

$$\eta = \int_{V_0} \bar{\sigma}_i^{2+n} dV / \int_{V_0} \bar{\sigma}_i^2 dV. \quad (18)$$

Таким образом η – расчетный коэффициент, зависящий от характеристики демпфирования n , геометрии образца и распределения амплитуд интенсивности напряжений при рассматриваемой форме колебаний $\bar{\sigma}_i$.

Для расчета коэффициента η по формуле (18) используются амплитуды интенсивности напряжений, полученные на КЭМ модели образца при проведении гармонического анализа. Соотнося формулы (2) и (17), получаем значение коэффициента $k = k_0/\eta$. Полученные значения коэффициентов представлены в таблице.

**Значения коэффициентов уравнений (2), (3) и (17),
полученные после обработки результатов испытаний**

Испытания	№	Амплитудно-независимая часть демпфирования $\psi_{нач}$	Коэффициент уравнения k	Степень n	Расчетный коэффициент η	Коэффициент уравнения k_0
Свободные колебания	1	0,037529	$9,0924 \cdot 10^{-4}$	1,6403	0,5837	$1,5578 \cdot 10^{-3}$
	2	0,039198	$7,3464 \cdot 10^{-4}$	1,7238	0,5704	$1,2878 \cdot 10^{-3}$
Вынужденные колебания	3	0,066248	$2,7125 \cdot 10^{-3}$	1,0893	0,6850	$3,9599 \cdot 10^{-3}$
	4	0,096997	$5,3271 \cdot 10^{-4}$	1,4453	0,6165	$8,6404 \cdot 10^{-4}$

Применение полученных зависимостей при численном моделировании

Численное моделирование проводилось с использованием программного комплекса (ПК) ANSYS. Для применения уравнения (3) при расчете из набора существующих в ПК ANSYS параметров демпфирования были выбраны следующие. DMPRAT – постоянный частотно-независимый коэффициент демпфирования, применяемый лишь при решении задач методом суперпозиции. Ему присваивается значение $\psi_{нач}$. Для задания амплитудно-зависимой части использовался коэффициент демпфирования DMPR – постоянное конструкционное (гистерезисное) демпфирование, задаваемое в материале. Данное демпфирование применимо как при прямом интегрировании, так и при методе суперпозиции. Матрица демпфирования $[C]$ из уравнения (1) при использовании этих двух видов демпфирования принимает следующий вид [4]:

$$[C] = \sum_{j=1}^{N_m} \frac{m_j}{\pi \bar{\Omega}} [\Phi^T][K_j][\Phi] + [\Xi], \quad (19)$$

где m_j – значение DMPR; N_m – количество материалов с DMPR; $\bar{\Omega}$ – частота возбуждающей силы (the forcing frequency), $[\Phi]$ – матрица форм (matrix of the mode shapes); $[K_j]$ – матрица жесткости части конструкции с заданным материалом j ; $[\Xi]$ – диагональная матрица с элементами главной диагонали со значениями DMPRAT.

Явное задание амплитудно-зависимых параметров демпфирования в программном комплексе ANSYS не предусмотрено. Для реализации возможности задания переменного демпфирования в зависимости от напряжения каждому элементу настроенной конечно-элементной модели образца был присвоен оригинальный материал. Далее был реализован итерационный алгоритм с использованием встроенного командного языка APDL. Общий принцип действия алгоритма представлен на рис. 7 в виде блок-схемы.

Начальными условиями для алгоритма являются значения параметров n , k_0 , $\psi_{нач}$ из таблицы, а также расчетная частота $freq$ и уровень нагружения F , значение начального демпфирования d_{init} , при котором рассчитываются предварительные значения напряжений в элементах образца и значение относительной погрешности, которое является критерием для оценки сходимости цикла.

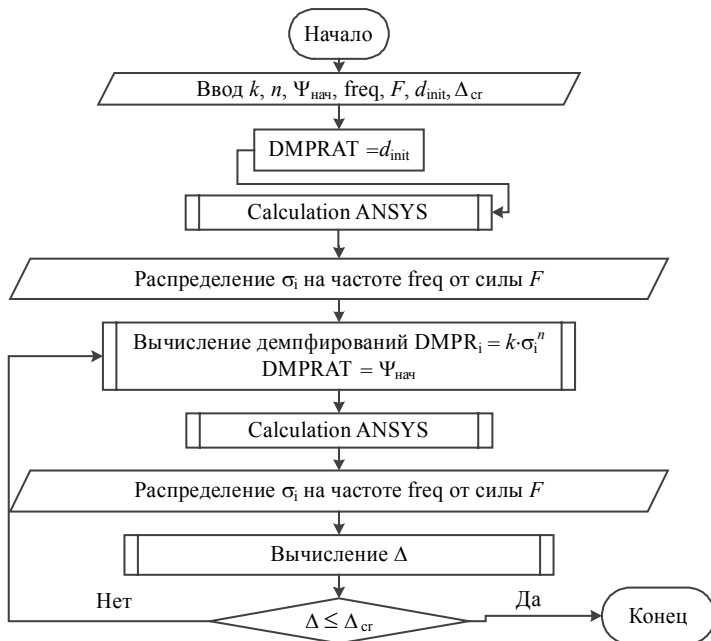


Рис. 7. Блок-схема процесса вычисления напряжений с учетом амплитудно-зависимого демпфирования

Fig. 7. Flow diagram for the stress calculating with allowance for amplitude-dependent damping

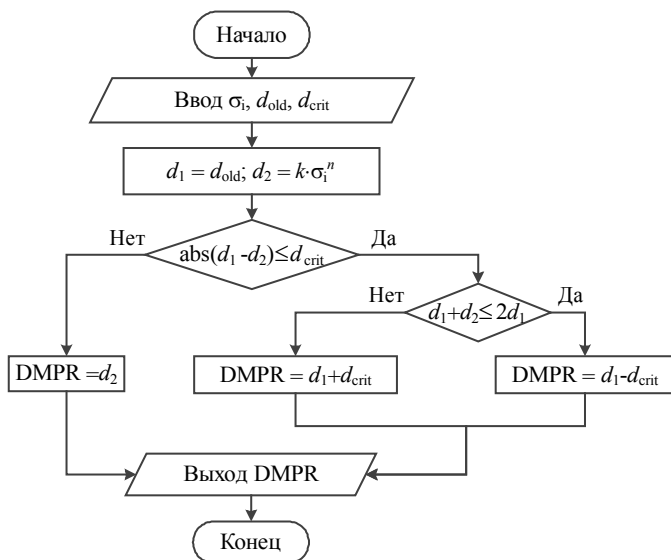


Рис. 8. Блок-схема процесса вычисления коэффициентов демпфирования DMPR в материале

Fig. 8. Flow diagram for the calculating of material damping coefficient DMPR

Значение начального демпфирования d_{init} выбирается таким, чтобы предварительное распределение напряжений в образце, по которому будут определены значения коэффициента демпфирования DMPR, были не слишком велики. После присвоения материалам значений коэффициента демпфирования DMPR заново проводится расчет напряжений в элементах образца. Полученные распределения сравниваются и, если условие сходимости не удовлетворяется, то расчет коэффициентов демпфирования и уровней напряжения проводится заново до тех пор, пока условие сходимости не будет выполнено. При этом изменение коэффициентов демпфирования DMPR в материалах происходит постепенно. Алгоритм изменения коэффициентов демпфирования представлен на рис. 8. В случае если после перерасчета разница нового и старого значения DMPR будет больше некоего значения d_{crit} , то старое значение просто увеличивается или уменьшается на это значение. Значение d_{crit} в процессе вычисления уменьшается для уменьшения количества расчетов.

Критерий сходимости описывается следующим уравнением:

$$\left(\Delta_i / \sigma_i^{\text{new}} + \Delta_i / \sigma_i^{\text{old}} \right) / 2 \leq \Delta_{\text{cr}}, \quad (20)$$

$$\Delta_i = \left| \sigma_i^{\text{new}} - \sigma_i^{\text{old}} \right|,$$

где Δ_{cr} – критерий сходимости; σ_i^{new} – значения амплитуд эквивалентных напряжений из последнего расчета; σ_i^{old} – значения амплитуд эквивалентных напряжений из предыдущего расчета.

Заключение

Коэффициенты демпфирования, полученные по усреднённой амплитуде при анализе результатов затухающего процесса колебаний и при анализе АЧХ вынужденных колебаний образца, являются интегральными, иными словами, складываются из суммы «мгновенных», переменных в процессе колебаний коэффициентов демпфирования. Существующие способы обработки экспериментальных данных предлагают решения для определения этих «интегральных» коэффициентов демпфирования в зависимости от уровней напряжений в материале. Однако применение данных зависимостей сильно осложнено тем, что коэффициенты демпфирования получаются связанными с деформациями/перемещениями, что делает решение задачи нелинейным и требует применения итерационных методов решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никоноров А., Шишмарев А. Цифровой двойник // Сибирская нефть. 2017. № 3/140. С. 44–49. URL: <http://www.gazprom-neft.ru/press-center/sibneft-online/archive/2017-april/1119180/> (дата обращения: 10.05.2018).
2. Цифровой двойник – элемент, которого так не хватало! // CAD/CAM/CAE Observer. 2017. № 6(114). С. 56. URL: <http://www.cadcamcae.lv/N114/56.pdf> (дата обращения: 10.05.2018).
3. Виброиспытания космических аппаратов / Б.П. Соустин, Н.А. Тестоедов, А.Г. Рудомёткин, А.В. Алькин. Новосибирск: Наука, 2000. 175 с.
4. ANSYS® Mechanical APDL, Release 18.1, Help System, Structural Analysis Guide, ANSYS, Inc.
5. Давиденков Н.Н. О рассеянии энергии при вибрациях // Журн. техн. физики. 1938. Т. 8. Вып. 6. С. 438–499.

6. Писаренко Г.С. Рассеяние энергии при механических колебаниях. Киев: Изд-во АН УССР, 1962. 436 с.
7. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: справочник / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. Киев: Наукова думка, 1971. 375 с.
8. Khan S.U., Li C.Y., Siddiqui N.A., Kim J.-K. Vibration damping characteristics of carbon fiber-reinforced composites containing multi-walled carbon nanotubes // Compos. Sci. Technol. 2011. V. 71. P. 1486–1494. DOI: 10.1016/j.compscitech.2011.03.022.
9. Elliott S.J., Ghandchi Tehrani M., Langley R.S. Nonlinear damping and quasi-linear modeling // Philos. Trans. R. Soc. A-Math. Phys. Eng. Sci. 2015. V. 373. No. 20140402. P. 1–30. DOI: 10.1098/rsta.2014.0402.
10. Вибрации в технике: Справочник: в 6 т. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / под ред. И.И. Блехмана. М.: Машиностроение, 1979. 351 с.
11. Матвеев В.В. Демпфирование колебаний деформируемых тел. Киев: Наукова думка, 1985. 264 с.
12. Шопр Б.Ф., Серебряков Н.Н. Расчетно-экспериментальный анализ амплитудно-зависимых характеристик демпфирования в деталях и материалах // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011. № 3. С. 91–99.

Статья поступила 01.06.2018г.

Kazakova O. I., Smolin I. Yu., Bezmozgiy I. M. (2018) ANALYSIS OF AMPLITUDE-DEPENDENT DAMPING AND ITS APPLICATION IN NUMERICAL CALCULATIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 54. pp. 66–78

DOI 10.17223/19988621/54/6

Keywords: vibration, stress state, amplitude-dependent damping, finite element modeling.

Digital twins are becoming an essential part of the product designing. In the rocket and space technology, a dynamic finite element model represents the important component of the digital twin. This model is required to be capable of predicting behavior of the structure under dynamic load with a reliable accuracy. At the same time, calculations of the design response with allowance for amplitude-dependent damping are impossible by the modern finite element software.

This article presents the test results of flat aluminum alloy samples which are the time characteristics of free damped oscillations and amplitude-frequency characteristics of forced oscillations of samples. An analysis of test results was carried out using the existing methods for obtaining dependences of the dumping on the equivalent (von Mises) stress in the material.

The paper describes a damping matrix formation for numerical calculations using constant damping coefficients. Also, the article proposes an iterative algorithm, which enables the application of amplitude-dependent damping coefficients in the harmonic analysis.

KAZAKOVA Olga Igorevna (S.P. Korolev Rocket and Space Corporation «Energia», Korolev, Russian Federation, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: okazakova.rsc@gmail.com

SMOLIN Igor Yurievich (Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS (ISPMS), Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: smolin@ispms.ru

BEZMOZGIY Iosif Mendelevich (S.P. Korolev Rocket and Space Corporation «Energia», Korolev, Russian Federation, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). Email: ibezmozgiy@yandex.ru

REFERENCES

1. Nikonorov A., Shishmarev A. (2017) Tsifrovoy dvoynik [Digital twin]. *Sibirskaya nef't – Siberian Oil*. 140(3). pp. 44–49. Access mode: <http://www.gazprom-neft.ru/press-center/sibneft-online/archive/2017-april/1119180/>.
2. (2017) Tsifrovoy dvoynik – element, kotorogo ne khvatalo [Digital twin is an element that has been missing]. *CAD/CAM/CAE Observer*. 114(6). P. 56. Access mode: <http://www.cadcamcae.lv/N114/56.pdf>.
3. Soustin B.P., Testodov N.A., Rudometkin A.G., Al'kin A.V. (2000) *Vibroispytaniya kosmicheskikh apparatov* [Vibration tests of space vehicles]. Novosibirsk: Nauka.
4. ANSYS® Mechanical APDL, Release 18.1, Help System, Structural Analysis Guide, ANSYS, Inc.
5. Davidenkov N.N. (1938) O rasseyanii energii pri vibratsiyakh [On energy dissipation during vibrations]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki – Journal of Technical Physics*. 8(6). pp. 438–499.
6. Pisarenko G.S. (1962) *Rasseyanie energii pri mekhanicheskikh kolebaniyakh* [Energy dissipation during mechanical oscillations]. Kiev: Izd. AN USSR.
7. Pisarenko G.S., Yakovlev A.P., Matveev V.V. (1971) *Vibropogloshchayushchie svoystva konstruksionnykh materialov: Spravochnik* [Vibration-absorbing properties of structural materials. Handbook]. Kiev: Naukova dumka.
8. Khan S.U., Li C.Y., Siddiqui N.A., Kim J.-K. (2011) Vibration damping characteristics of carbon fiber-reinforced composites containing multi-walled carbon nanotubes. *Compos. Sci. Technol*. 71. pp. 1486–1494. DOI: 10.1016/j.compscitech.2011.03.022.
9. Elliott S.J., Ghandchi Tehrani M., Langley R.S. (2015) Nonlinear damping and quasi-linear modeling. *Philos. Trans. R. Soc. A-Math. Phys. Eng. Sci*. 373(20140402). pp. 1–30. DOI: 10.1098/rsta.2014.0402.
10. Chelomey V.N., Blekhman I.I. (1979) *Vibratsii v tekhnike: spravochnik. T. 2. Kolebaniya nelineynykh mekhanicheskikh sistem* [Vibrations in engineering: Handbook. Vol. 2. Oscillations of nonlinear mechanical systems]. Moscow: Mashinostroenie.
11. Matveev V.V. (1985) *Dempfirovanie kolebaniy deformiruemyykh tel* [Damping of oscillations of deformable bodies]. Kiev: Naukova dumka.
12. Shorr B.F., Serebryakov N.N. (2011) Numerical-experimental analysis of amplitude-dependent damping performances in components and materials. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 40(3) pp. 272–279. DOI: 10.3103/S1052618811020166.

УДК 533.1

DOI 10.17223/19988621/54/7

К.В. Костюшин, В.А. Шуварики

**СРАВНЕНИЕ СХЕМ ТИПА «MUSCL» ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ
ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В СОПЛАХ ЛАВАЛЯ¹**

Проведено сравнение схем типа «MUSCL» при расчете одномерного течения идеального газа в сопловом блоке ракетного двигателя. Сравнение проводилось путем определения коэффициента расхода. При проведении расчетов использовались схема Годунова первого порядка точности, схемы «MUSCL» второго и третьего порядков точности, схема «MUSCL-Hancock» третьего порядка точности в комбинации с функциями-ограничителями «MINMOD», «Van Albada», «Van Leer», «Superbee». При определении потоков через грани расчетной ячейки использовались точное решение задачи о распаде произвольного разрыва, метод Роя или метод HLLC. Показано, что на точность определения интегральных характеристик основное влияние оказывает выбор базовой схемы.

Ключевые слова: сопло Лаваля, газовая динамика, коэффициент расхода, математическое моделирование, схемы типа Годунова, схема MUSCL, точное решение задачи Римана, метод Роя, метод HLLC.

При моделировании течений продуктов сгорания в газодинамических трактах ракетных двигателей широко применяются численные методы повышенного порядка точности, основанные на схеме Годунова [1–3]. Методы такого типа развиваются уже на протяжении более сорока лет, и существует огромное множество их вариантов и реализаций [4]. Впервые схема второго порядка точности по пространству, основанная на методе Годунова была предложена Колганом в 1972 году [5, 6]. Основная идея схемы Годунова–Колгана заключалась в замене кусочно-постоянного распределения функции внутри ячейки на кусочно-линейное распределение. Для удовлетворения условиям сохранения полной вариации (Total Variation Diminishing, TVD) Колган предложил использовать принцип минимального значения производной. В 1979 году подход, предложенный Колганом, получил свое развитие в работе Ван Лира [7, 8], в которой была предложена схема MUSCL (Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws). Схема приобрела большую популярность, и в результате её развития родилось большое семейство схем типа MUSCL [9].

Схемы типа MUSCL хорошо протестированы на течениях с разрывами (задачи: «Сода», «Лакса», «Mach 3», «Supersonic shock tube», «1-2-3», «High Mach», «Сильная ударная волна», «Подвижный контактный разрыв») [10]. Однако для решения инженерных задач газовой динамики ракетных двигателей, помимо определения структуры течения, важнейшей задачей является определение интегральных характеристик. В связи с этим требуется проведение исследований и определение комбинаций базовых схем, функций ограничителей и методов опре-

¹ Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России, проект № 9.9063.2017/8.9.

деления потоков через грани расчетных ячеек, позволяющих с высокой точностью определять энерго-тяговые характеристики двигателей.

Математическая постановка

Система уравнений Эйлера, описывающая нестационарное течение сжимаемого невязкого газа в одномерном приближении имеет вид [11, 12]

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{Q}$ – вектор консервативных переменных, $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$ – вектор потоков:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (e + p)u \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь ρ – плотность; t – время; p – давление; u – скорость движения газа; $e = \rho \varepsilon + \rho u^2 / 2$ – полная энергия единицы объема; ε – удельная внутренняя энергия. Система замыкается уравнением состояния идеального газа: $\varepsilon = p / (\gamma - 1) \rho$, где γ – показатель адиабаты.

Схема «Годунова»

Для системы уравнений (1) схема Годунова имеет вид [12]

$$\frac{\mathbf{Q}_i^{n+1} - \mathbf{Q}_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x} = 0, \quad (3)$$

где Δt – шаг по времени, Δx – шаг по пространству; $\mathbf{Q}_i^n$ и $\mathbf{Q}_i^{n+1}$ – значения вектора консервативных переменных на текущем и следующем шаге по времени соответственно, $\mathbf{F}_{i+1/2}$ и $\mathbf{F}_{i-1/2}$ – потоки через правую и левую грани расчетной ячейки.

Для расчета потоков может быть использовано точное решение задачи о распаде произвольного разрыва (определение потоков по методу Годунова) [12] либо другие методы, основанные на приближенных решениях задачи Римана: Рое, Ошера, HLL, HLLC, HLLC и другие [10]. Таким образом реализация шага по времени в схеме Годунова проводится в два этапа:

Этап 1 – «Решение задачи Римана». На данном этапе по известным значениям $\mathbf{Q}_i^n$, с использованием точного или приближенного решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва, определяются потоки $\mathbf{F}_{i+1/2}$ и $\mathbf{F}_{i-1/2}$ через грани расчетной ячейки:

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \text{RimmanSolver}(\mathbf{Q}_i^n, \mathbf{Q}_{i+1}^n). \quad (4)$$

Этап 2 – «Вычисление параметров на новом временном слое». На этом этапе по известным значениям $\mathbf{Q}_i^n$, $\mathbf{F}_{i+1/2}$ и $\mathbf{F}_{i-1/2}$ с использованием (3) определяются параметры газа $\mathbf{Q}_i^{n+1}$ на новом временном слое.

Схема «MUSCL»

Для повышения порядка точности по пространству часто используется техника квазимоноотонной интерполяции сеточных решений (MUSCL) [8, 13, 14], удовлетворяющая условию TVD. Основная идея схем MUSCL состоит в повышении точности схемы за счет изменения порядка интерполяции в пределах ячейки. В общем случае для большинства схем типа MUSCL параметры на гранях расчетных ячеек могут быть определены с использованием следующих соотношений [10]:

$$\mathbf{Q}_{i+1/2}^L = \mathbf{Q}_i^n + \frac{1}{4}[(1-k)(\nabla_i \mathbf{Q}) + (1+k)(\Delta_i \mathbf{Q})]; \quad (5)$$

$$\mathbf{Q}_{i-1/2}^R = \mathbf{Q}_i^n - \frac{1}{4}[(1+k)(\nabla_i \mathbf{Q}) + (1-k)(\Delta_i \mathbf{Q})]; \quad (6)$$

$$\Delta_i \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{i+1}^n - \mathbf{Q}_i^n;$$

$$\nabla_i \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_i^n - \mathbf{Q}_{i-1}^n,$$

где $\mathbf{Q}_{i+1/2}^L$ – параметр на левой границе ячейки; $\mathbf{Q}_{i-1/2}^R$ – параметр на правой границе ячейки; $\mathbf{Q}^n$ – параметры в центрах ячеек; k – коэффициент схемы.

Возможные варианты реализации схем типа MUSCL представлены в табл. 1. Значения коэффициента схемы $k = -1, 0, 1$ соответствуют схемам с линейной интерполяцией величин, а $k = 1/3$ – схеме третьего порядка точности с параболической интерполяцией.

Таблица 1

Типы схем MUSCL

Название схемы	Коэффициент схемы	Тип реконструкции	Порядок точности
MUSCL-Upwind	-1	Линейная	2-й
MUSCL-Fromm	0	Линейная	2-й
MUSCL-CDS	1	Линейная	2-й
MUSCL-CUS	1/3	Параболическая	3-й

Для выполнения условий сохранения полной вариации (TVD) схема (5), (6) должна быть дополнена функцией ограничителем наклона [15, 16]:

$$\mathbf{Q}_{i+1/2}^L = \mathbf{Q}_i^n + \frac{1}{4} \left[(1-k) \psi \left(\frac{\Delta_i \mathbf{Q}}{\nabla_i \mathbf{Q}} \right) \nabla_i \mathbf{Q} + (1+k) \psi \left(\frac{\nabla_i \mathbf{Q}}{\Delta_i \mathbf{Q}} \right) \Delta_i \mathbf{Q} \right]; \quad (7)$$

$$\mathbf{Q}_{i-1/2}^R = \mathbf{Q}_i^n - \frac{1}{4} \left[(1+k) \psi \left(\frac{\Delta_i \mathbf{Q}}{\nabla_i \mathbf{Q}} \right) \nabla_i \mathbf{Q} + (1-k) \psi \left(\frac{\nabla_i \mathbf{Q}}{\Delta_i \mathbf{Q}} \right) \Delta_i \mathbf{Q} \right], \quad (8)$$

где $\psi(r)$ – функция-ограничитель.

Для семейства схем MUSCL могут быть использованы следующие ограничители: MINMOD – $\psi(r) = \min \left(1, \frac{3-k}{1-k} r \right)$; Van Albada – $\psi(r) = \left(\frac{r+r^2}{1+r^2} \right)$; Van Leer – $\psi(r) = \left(\frac{2r}{1+r} \right)$; Superbee – $\psi(r) = \max [0, \min (2r, 1), \min (r, 2)]$ и другие [9].

Таким образом реализация шага по времени в схеме MUSCL проводится в три этапа:

Этап 1 – «Реконструкция». На этом этапе по известным значениям Q_i^n , с использованием соотношений (7), (8) определяются параметры Q^L , Q^R для каждой грани расчетной ячейки.

Этап 2 – «Решение задачи Римана». На данном этапе по известным значениям Q^L , Q^R с использованием точного или приближенного решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва определяются потоки $F_{i+1/2}$ и $F_{i-1/2}$ через грани расчетной ячейки:

$$F_{i+1/2} = \text{RimmanSolver}(Q_{i+1/2}^L, Q_{i+1/2}^R). \quad (9)$$

Этап 3 – «Вычисление параметров на новом временном слое». На этом этапе по известным значениям Q_i^n , $F_{i+1/2}$ и $F_{i-1/2}$ с использованием (3) определяются параметры газа Q_i^{n+1} на новом временном слое.

С х е м а « M U S C L - H a n c o c k »

Одним из простых способов повышения порядка точности по времени является использование схемы MUSCL-Hancock [17,18]. Идея схемы заключается в том, что потоки $F_{i+1/2}$ и $F_{i-1/2}$ через грани расчетной ячейки определяются на половинном шаге по времени $(t + \Delta t/2)$, а затем эти значения используются для определения решения на следующем временном слое $(t + \Delta t)$. Реализация шага по времени в схеме MUSCL-Hancock проводится в четыре этапа:

Этап 1 – «Реконструкция». На этом этапе по известным значениям Q_i^n , с использованием соотношений (7), (8) определяются параметры Q^L , Q^R для каждой грани расчетной ячейки.

Этап 2 – «Эволюция». На данном этапе по известным значениям Q^L , Q^R , определяются параметры $\bar{Q}^L$, $\bar{Q}^R$ на гранях расчетных ячеек для момента времени $(t + \Delta t/2)$:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{i+1/2}^L &= Q_{i+1/2}^L + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(Q_{i+1/2}^L) - F(Q_{i+1/2}^R)]; \\ \bar{Q}_{i+1/2}^R &= Q_{i+1/2}^R + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(Q_{i+1/2}^L) - F(Q_{i+1/2}^R)], \end{aligned}$$

где $F(Q_{i+1/2}^L)$ и $F(Q_{i+1/2}^R)$ определяются с использованием (2).

Этап 3 – «Решение задачи Римана». На данном этапе по известным значениям $\bar{Q}^L$ и $\bar{Q}^R$, с использованием точного или приближенного решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва, определяются потоки $F_{i+1/2}$ и $F_{i-1/2}$ через грани расчетной ячейки:

$$F_{i+1/2} = \text{RimmanSolver}(\bar{Q}_{i+1/2}^L, \bar{Q}_{i+1/2}^R) \quad (10)$$

Этап 4 – «Вычисление параметров на новом временном слое». На этом этапе по известным значениям Q_i^n , $F_{i+1/2}$ и $F_{i-1/2}$ с использованием (3) определяются параметры газа Q_i^{n+1} на новом временном слое.

Численные исследования

Проведена серия расчетов квазиодномерного течения идеального газа в сопле Лавала [12] с использованием комбинаций схем «Годунова», «MUSCL», «MUSCL-Hancock», с функциями-ограничителями: «MINMOD», «Van Albada», «Van Leer», «Superbee» и методами нахождения потоков: «Роя», «HLLC», «Точное решение задачи Римана». Сравнительный анализ проводился по результатам определения коэффициента расхода. В качестве тестовой геометрии использовано сопло JPL (рис. 1), где R – радиус минимального сечения.

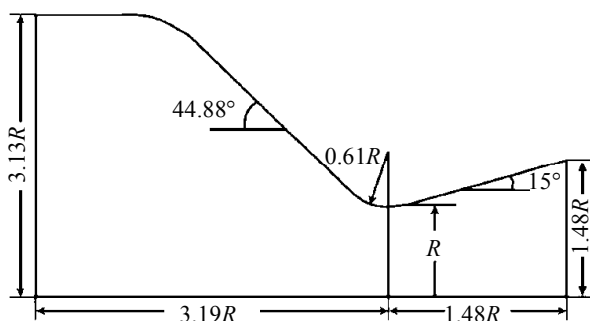


Рис. 1. Геометрия сопла JPL

Fig. 1. JPL nozzle geometry

На входе в сопло ставились граничные условия – постоянство энтальпии и энтропии, на срезе сопла – сверхзвуковое истечение. Рабочее тело: воздух. Расчет проводился методом установления. Количество узлов расчетной сетки: 500.

Коэффициент расхода определяется как

$$\varphi = \frac{G_*}{G_g},$$

где G_* – расчетный расход газа через критическое сечение сопла, G_g – теоретический расход, определенный для адиабатического течения.

Результаты численных исследований по определению коэффициентов расхода для различных комбинаций базовых схем, функций ограничителей и методов определения потоков через грани расчетных ячеек представлены в табл. 2.

Сравнение по базовым схемам. Для схемы «Годунова» первого порядка точности по пространству, расход газа через критическое сечение сопла отличается от теоретического на 1.33 – 1.34 %. Для схем второго порядка точности по пространству («MUSCL-Upwind», «MUSCL-Fomm», «MUSCL-CDS») – на 0.017–0.08 %. Схема «MUSCL-CUS» третьего порядка точности по пространству дает значения расхода газа, отличающиеся от теоретического на 0.017–0.07 %, а схема «MUSCL-Hancock» второго порядка точности по времени и третьего по пространству – на 0.07–0.17 %.

Таблица 2

Коэффициенты расходов для различных комбинаций схем типа «MUSCL»

№	Базовая схема	Порядок схемы	Ограничитель	Метод решения задачи Римана	Коэффициент расхода
1	Годунов	1	-	Точное решение	0.986510
2	Годунов	1	-	Рое	0.986682
3	Годунов	1	-	HLLC	0.986602
4	MUSCL-Upwind	2	minmod	Точное решение	0.999138
5	MUSCL-Upwind	2	Superbee	Точное решение	1.000170
6	MUSCL-Upwind	2	VanAlbda	Точное решение	0.999558
7	MUSCL-Upwind	2	VanLear	Точное решение	0.999637
8	MUSCL-Upwind	2	VanLear	Рое	0.999636
9	MUSCL-Upwind	2	VanLear	HLLC	0.999662
10	MUSCL-Fomm	2	minmod	Точное решение	0.999138
11	MUSCL-Fomm	2	Superbee	Точное решение	1.000171
12	MUSCL-Fomm	2	VanAlbda	Точное решение	0.999558
13	MUSCL-Fomm	2	VanLear	Точное решение	0.999637
14	MUSCL-Fomm	2	VanLear	Рое	0.999636
15	MUSCL-Fomm	2	VanLear	HLLC	0.999662
16	MUSCL-CDS	2	minmod	Точное решение	0.999138
17	MUSCL-CDS	2	Superbee	Точное решение	1.000173
18	MUSCL-CDS	2	VanAlbda	Точное решение	0.999558
19	MUSCL-CDS	2	VanLear	Точное решение	0.999637
20	MUSCL-CDS	2	VanLear	Рое	0.999636
21	MUSCL-CDS	2	VanLear	HLLC	0.999662
22	MUSCL-CUS	3	minmod	Точное решение	0.999138
23	MUSCL-CUS	3	Superbee	Точное решение	1.000170
24	MUSCL-CUS	3	VanAlbda	Точное решение	0.999558
25	MUSCL-CUS	3	VanLear	Точное решение	0.999637
26	MUSCL-CUS	3	VanLear	Рое	0.999636
27	MUSCL-CUS	3	VanLear	HLLC	0.999662
28	MUSCL-Hancock	3	minmod	Точное решение	0.998236
29	MUSCL-Hancock	3	Superbee	Точное решение	0.999213
30	MUSCL-Hancock	3	VanAlbda	Точное решение	0.998637
31	MUSCL-Hancock	3	VanLear	Точное решение	0.998710
32	MUSCL-Hancock	3	VanLear	Рое	0.998710
33	MUSCL-Hancock	3	VanLear	HLLC	0.998733

Сравнение по функциям-ограничителям. Использование ограничителя «minmod» дает значения расхода газа, отличающиеся от теоретического на 0.086 % (для схем «MUSCL-Upwind», «MUSCL-Fomm», «MUSCL-CDS», «MUSCL-CUS») и 0.176 % (для схемы «MUSCL-Hancock»). Ограничитель «Superbee» дает значения расхода газа, отличающиеся от теоретического на 0,017 % (для схем «MUSCL-Upwind», «MUSCL-Fomm», «MUSCL-CDS») и 0.078 % (для схемы «MUSCL-Hancock»), ограничитель «VanAlbda» – 0.044 и 0.136 %, а ограничитель «VanLear» – 0.036 и 0.129 % соответственно.

Сравнение по методам решения задачи Римана. Коэффициент расхода, вычисленный по схеме «Годунова» с использованием приближенных методов решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва (метод Роя, метод HLLC) отличается от коэффициента расхода, вычисленного с использованием точного ме-

тогда решения задачи Римана на 0.009 – 0.071%. Коэффициент расхода, вычисленный по схемам «MUSCL» второго и третьего порядка точности по пространству, с использованием приближенных методов решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва отличается от коэффициента расхода, вычисленного с использованием точного метода решения задачи Римана на 0 – 0.002 %

Заключение

По результатам расчетов локальных и интегральных характеристик в сопле Лавала, можно сделать следующие выводы. Схема «Годунова» первого порядка точности по пространству дает достаточно высокую погрешность при определении коэффициента расхода (1.4 %). Схемы «MUSCL» второго и третьего порядка точности по пространству дают достаточно низкую погрешность при определении коэффициента расхода (0.017–0.17 %) вне зависимости от функции ограничителя. Следует отметить, что результаты, полученные с использованием схем второго порядка точности по пространству, незначительно отличаются от результатов, полученных с использованием схем третьего порядка точности. Выбор функции-ограничителя и метода решения задачи Римана (точное решение задачи Римана, метод Роя, метод HLLC) влияют на точность определения интегральных характеристик в пределах сотых долей процента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vasin I.M., Shrager E.R., Glazunov A.A., et al. Modeling of the Process of Motion of a Scramjet in the Atmosphere // Russ. Phys. J. 2013. V. 56. P. 908 – 913. DOI: 10.1007/s11182-013-0117-2
2. Буркин В.В., Дьячковский А.С., Ищенко А.Н. и др. Исследование газодинамических особенностей ствольного старта модели с импульсным реактивным двигателем // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 3(35). С. 45–51. DOI: 10.17223/19988621/35/6.
3. Minkov L.L., Shrager E.R., Kiryushkin A.E. Two Approaches for Simulating the Burning Surface in Gas Dynamics // Key Engineering Materials. 2016. V. 685. P. 114–118. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.685.114.
4. Родионов А.В. О взаимосвязи разрывного метода Галёркина со схемами MUSCL-типа // Математическое моделирование. 2015. Т. 27. № 10. С. 96–116.
5. Колган В.П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчёта разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
6. Kolgan V.P. Application of the principle of minimizing the derivative to the construction of finite difference schemes for computing discontinuous solutions of gas dynamics // J. Comput. Phys. 2011. V. 230. Iss. 7. P. 2384–2390. DOI: 10.1016/j.jcp.2010.12.033.
7. B. van Leer. A historical oversight: Vladimir P. Kolgan and his high-resolution scheme // J. Comp. Phys. 2011. V. 230. Iss. 7. P. 2378–2383. DOI: 10.1016/j.jcp.2010.12.032.
8. B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comp. Phys. 1979. V. 32. P. 101–136. DOI: 10.1016/0021-9991(79)90145-1.
9. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Third Edition. Berlin; Heidelberg: Springer Verlag, 2009. 724 p. DOI: 10.1007/b79761.
10. Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н. и др. Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2015. 416 с.
11. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 607 с.
12. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.

13. *B. van Leer*. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme III. Upstream-Centered Finite Difference Schemes for Ideal Compressible Flow // *J. Comput. Phys.* 1977. V. 23. Iss. 3. P. 263–275. DOI: 10.1016/0021-9991(77)90094-8.
14. *B. van Leer*. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme IV. A New Approach to Numerical Convection. // *J. Comput. Phys.* 1977. V. 23. Iss. 3. P. 276–299. DOI: 10.1016/0021-9991(77)90095-X.
15. *Sweby P.K.* High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws // *SIAM J. Numer. Anal.* V. 21. Iss. 5. P. 995–1011. DOI: 10.1137/0721062.
16. *Sweby P.K.* TVD Schemes for Inhomogeneous Conservation Laws. In *Notes on Numerical Fluid Mechanics // Non-Linear Hyperbolic Equations – Theory, Computation Methods and Applications*. 1989. V. 24. P. 599–607. DOI: 10.1007/978-3-322-87869-4_58.
17. *Quirk J.J.* An alternative to unstructured grids for computing gas dynamic flows around arbitrarily complex two dimensional bodies // *Computers and Fluids*. 1994. V. 23. Iss. 1. P. 125–142. DOI: 10.1016/0045-7930(94)90031-0.
18. *B. van Leer*. On the Relation Between the Upwind-Differencing Schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1985. V. 5. Iss. 1. P. 1–20. DOI: 10.1137/0905001.

Статья поступила 03.05.2018 г.

Kostyushin K.V., Shuvarikov V.A. (2018) Comparison of the MUSCL-type schemes for a gas flow calculation in de Laval nozzles. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 54. pp. 79–87

DOI 10.17223/19988621/54/7

Keywords: de Laval nozzle, gas dynamics, mass flow rate, mathematical modeling, Godunov-type schemes, MUSCL-type schemes, exact solution of the Riemann problem, Roe's Riemann solver, HLLC Riemann solver.

In this paper, MUSCL-type schemes applied for the calculation of a one-dimensional inviscid flow of ideal gas in the JPL nozzle of rocket engine are compared. The comparison was carried out on the basis of determined mass flow coefficient. The calculations were performed using the first-order Godunov scheme, the second- and third-order MUSCL schemes, and the third-order MUSCL-Hancock scheme in a combination with the slope limiters such as MINMOD, Van Albada, Van Leer, and Superbee. The Godunov method, the Roe approximate Riemann solver, and the HLLC Riemann solver were used to calculate the numerical fluxes. The Godunov scheme, which is first order accurate in space, leads to a high error in the mass flow rate (1.4%). The MUSCL schemes, which are second and third order accurate in space, give a low error in the mass flow rate (0.017–0.17%). Both the limiter function and the method of solving the Riemann problem (an exact solution of the Riemann problem, the Roy method, and the HLLC method) affect the accuracy in determination of integral characteristics within the limits of hundredths of a percent.

KOSTYUSHIN Kirill Vladimirovich (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kostushin@niipmm.tsu.ru

SHUVARIKOV Vladimir Andreevich (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: shuvaa@niipmm.tsu.ru

REFERENCES

1. Vasenin I.M., Shrager E.R., Glazunov A.A., Krainov A.Yu., Krainov D.A. (2013) Modeling of the process of motion of a scramjet in the atmosphere. *Russ. Phys. J.* 56. pp. 908–913. DOI: 10.1007/s11182-013-0117-2.
2. Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z., Rogaev K.S. (2015) Issledovanie gazodinamicheskikh osobennostey stvol'nogo starta modeli s impul'snym

- reaktivnym dvigatelem [Investigation of gas-dynamic features of a moving model with a pulse jet engine (CPJE) inside a barrel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(35). pp. 45–51. DOI 10.17223/19988621/35/6.
3. Minkov L.L., Shrager E.R., Kiryushkin A.E. (2016) Two approaches for simulating the burning surface in gas dynamics. *Key Engineering Materials*. 685. pp. 114–118. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.685.114.
 4. Rodionov A.V. (2016) Correlation between the discontinuous Galerkin method and MUSCL-type schemes. *Math Models Comput Simul.* 8(3). pp. 285–300. DOI: 10.1134/S207004821603008X.
 5. Kolgan V.P. (1972) Primenenie printsipa minimal'nykh znacheniy proizvodnoy k postroeniyu konechnoraznostnykh skhem dlya rascheta razryvnykh resheniy gazovoy dinamiki [Application of the principle of minimizing the derivative to the construction of finite difference schemes for computing discontinuous solutions of gas dynamics]. *Uchenye zapiski TsAGI – TsAGI Science Journal*. 3(6). pp. 68–77.
 6. Kolgan V.P. (2011) Application of the principle of minimizing the derivative to the construction of finite difference schemes for computing discontinuous solutions of gas dynamics. *J. Comput. Phys.* 230(7). pp. 2384 – 2390. DOI: 10.1016/j.jcp.2010.12.033.
 7. B. van Leer. (2011) A historical oversight: Vladimir P. Kolgan and his high-resolution scheme. *J. Comp. Phys.* 230(7). pp. 2378 – 2383. DOI: 10.1016/j.jcp.2010.12.032.
 8. B. van Leer. (1979) Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method. *J. Comp. Phys.* 32. pp. 101–136. DOI: 10.1016/0021-9991(79)90145-1.
 9. Toro E.F. (2009) *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. 3d Edition. Berlin: Springer-Verlag. DOI: 10.1007/b79761.
 10. Volkov K.N., Deryugin Yu.N., Emel'yanov V.N., Kozelkov A.S., Karpenko A.G., Teterina I.V. (2015) *Raznostnye skhemy v zadachakh gazovoy dinamiki na nestruturirovannykh setkakh* [Difference schemes in the problems of gas dynamics using unstructured grids]. Moscow: Fizmatlit.
 11. Kulikovskiy A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. (2000) *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems*. Boca Raton: CRC Press.
 12. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya., Krayko A.N., Prokopov G.P. (1976) *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution of multi-dimensional problems of gas dynamics]. Moscow: Nauka.
 13. B. van Leer. (1977) Towards the ultimate conservative difference scheme III. Upstream-centered finite difference schemes for ideal compressible flow. *J. Comput. Phys.* 23(3). pp. 263–275. DOI: 10.1016/0021-9991(77)90094-8.
 14. B. van Leer. (1977) Towards the ultimate conservative difference scheme IV. A new approach to numerical convection. *J. Comput. Phys.* 23(3). pp. 276–299. DOI: 10.1016/0021-9991(77)90095-X.
 15. Sweby P.K. (1984) High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.* 21(5). pp. 995–1011. DOI: 10.1137/0721062.
 16. Sweby P.K. (1989) “TVD” schemes for inhomogeneous conservation laws. In notes on numerical fluid mechanics. *Non-Linear Hyperbolic Equations–Theory, Computation Methods and Applications*. 24. pp. 599–607. DOI: 10.1007/978-3-322-87869-4_58.
 17. Quirk J.J. (1994) An alternative to unstructured grids for computing gas dynamic flows around arbitrarily complex two dimensional bodies. *Computers and Fluids*. 23(1). pp. 125–142. DOI: 10.1016/0045-7930(94)90031-0.
 18. B. van Leer. (1985) On the relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Enguist-Osher and Roe. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 5(1). pp. 1–20. DOI: 10.1137/0905001.

УДК 539.375

DOI 10.17223/19988621/54/8

А.В. Малик, И.М. Лавит

МЕТОД РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТА ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ НЕПОДВИЖНОЙ ТРЕЩИНЫ НОРМАЛЬНОГО РАЗРЫВА ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ¹

Предлагаемый метод представляет собой модификацию метода прямых. Интегрирование по времени выполняется методом конечных разностей. Краевые задачи, которые получаются на каждом шаге интегрирования по времени, решаются методом конечных элементов. Используются когезионные конечные элементы, обеспечивающие отсутствие сингулярности напряжений в кончике трещины. Результаты расчетов сопоставляются с экспериментальными данными и результатами других исследователей.

Ключевые слова: динамическая механика разрушения, метод прямых, когезионные конечные элементы.

Главным результатом экспериментального исследования динамического разрушения является определение зависимости $K_I(t)$ [1], где K_I – коэффициент интенсивности напряжений, t – время. Поэтому сопоставление теории динамического разрушения с экспериментом – это, фактически, сопоставление расчетной и экспериментальной зависимостей $K_I(t)$.

Методам теоретического определения функции $K_I(t)$ посвящено немало исследований. Аналитические методы ее вычисления [2] применимы только для бесконечных областей. Численные методы представляют собой, как правило, какую-либо модификацию метода конечных элементов или метода граничных элементов. Известно, что высокая точность вычислений достигается при использовании специальных элементов, моделирующих сингулярность напряжений в окрестности кончика трещины [3]. Это усовершенствование сопряжено, однако, с рядом недостатков. Во-первых, сингулярное поле напряжений в окрестности кончика трещины возникает, как правило, через некоторое время после начала процесса динамического нагружения. В течение этого времени сингулярный элемент вынужденно моделирует то, чего на самом деле нет. Это, безусловно, является источником погрешности, которую невозможно оценить заранее.

Второй недостаток обусловлен отличием сингулярных элементов от окружающих их обычных элементов. Для того чтобы сингулярный элемент не вносил погрешность в решение задачи, он должен обеспечивать межэлементную непрерывность перемещений [4]. Такой элемент, моделирующий корневую особенность напряжений в кончике трещины и совместный с четырехугольными изопараметрическими элементами второго порядка [4], был сконструирован и успешно применен Барсоумом [5] к решению статических задач. Конечные элементы Барсоума применены к решению задач динамической механики разрушения в работе [6]. Показано, что их использование позволяет получить достаточно точное реше-

¹ Результаты исследований опубликованы при финансовой поддержке ТулГУ в рамках научного проекта № 2017-38ПУБЛ.

ние. Однако подход работы [6] сложен, поэтому в других исследованиях ([3, 7–9] и др.), ориентированных на исследование не только неподвижных, но и растущих трещин, использовались более простые несовместные элементы. Это обусловлено тем, что при моделировании роста трещины с использованием сингулярных элементов приходится перестраивать конечно-элементную сетку. Этот процесс предполагает многократную интерполяцию, что снижает точность расчетов. Погрешность решения, очевидно, тем выше, чем сложнее элементы.

Предложены также методы [10–12], общей чертой которых является отсутствие требования совпадения траектории трещины с границами конечных элементов, а ее вершины – с каким-либо узлом конечно-элементной сетки. Неясно, как можно обосновать сходимость получаемых решений к точным с увеличением числа варьируемых параметров, так как, в отличие от метода конечных элементов, здесь нет непрерывности перемещений и невозможно удовлетворить главным граничным условиям задачи.

Наряду с численными методами, позволяющими непосредственно вычислять коэффициенты интенсивности напряжений, в динамике разрушения используются методы, основанные на представлении о силах сцепления. Первый такой метод был предложен Ксу и Нидлманом [13] и применен к проблеме математического моделирования ветвления трещин. О дальнейшем развитии этого направления можно узнать из обзоров [14–16]. В этих методах удельная высвобожденная энергия представляется как работа сил сцепления. Эту величину можно связать с коэффициентом интенсивности напряжений, если распределение сил сцепления подчинить условиям отсутствия сингулярности поля напряжений в кончике трещины и малости длины зоны сцепления по сравнению с длиной трещины [17, 18]. В упомянутых методах эти условия не выполняются. Исключение составляет метод работы [19]. В нем отсутствие сингулярности удовлетворяется с помощью итерационной процедуры, что является существенным ограничением. Метод был применен [19] лишь к решению квазистатических задач при однопараметрическом (простом) нагружении. Решения этим методом задач динамической механики разрушения неизвестны.

Представляет интерес разработка метода, который по точности сопоставим с методами, использующими сингулярные элементы, и обладает простотой и универсальностью методов, основанных на концепции сил сцепления. Такой метод представлен ниже. Он был разработан [20] для решения квазистатических упругопластических задач механики разрушения. Его приложение к решению динамических задач не вызвало принципиальных затруднений. Суть метода состоит в использовании специальных когезионных конечных элементов, которые автоматически обеспечивают отсутствие сингулярности напряжений в кончике трещины. Эти элементы таковы, что если не накладывать ограничений на их степени свободы, силы сцепления в пределах элемента будут равны нулю. Поэтому эти элементы можно использовать для расчета напряженного состояния не только в окрестности кончика трещины, но и для всего тела. В этом случае метод приобретает общность, позволяющую решать задачи, рассмотренные Ксу и Нидлманом [13].

Отличие предлагаемого метода от предшествующих заключается также в способе дискретизации задачи. При обычном подходе к решению динамических задач методом конечных элементов перемещения узлов конечно-элементной сетки предполагаются зависящими от времени. В результате после интегрирования по пространственным переменным получается система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно узловых неизвестных. В настоящем исследова-

нии использован другой подход, называемый методом прямых [21]. Преобразование континуальной задачи в дискретную осуществляется в два этапа. Вначале исходная начально-краевая задача преобразуется в конечно-разностную задачу по времени. В результате на каждом шаге интегрирования по времени получается краевая задача, решение которой находится методом конечных элементов. Матрица коэффициентов разрешающей системы линейных алгебраических уравнений для всех этих краевых задач одна и та же (задачи отличаются одна от другой за счет правых частей разрешающей системы уравнений), и эта матрица – ленточная. Это свойство удается использовать только в методе прямых.

Постановка задачи

Рассматривается плоская деформация линейно упругого тела. Поперечное сечение тела S , ограниченное контуром L , изображено на рис. 1. Сечение ослаблено прямолинейной трещиной длиной a . К контуру сечения приложена распределенная нагрузка $p(t)$. Сечение и нагрузка симметричны относительно оси абсцисс. Таким образом, исследуемая трещина относится к типу трещин нормального разрыва. Так как ось абсцисс является осью симметрии задачи, ниже рассматривается только верхняя часть поперечного сечения.

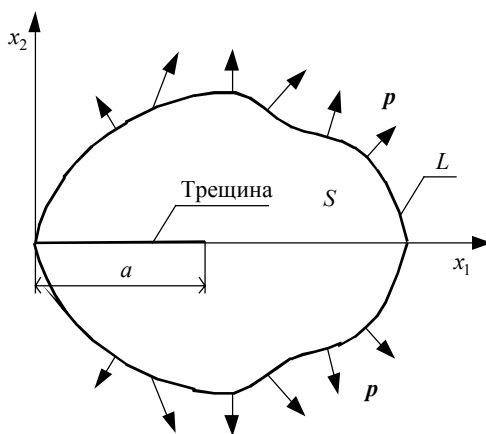


Рис. 1. Поперечное сечение тела

Fig. 1. Cross-section of the body

Математическая модель основана на соотношениях теории упругости [22]:

$$\varepsilon_{km} = (\partial_k u_m + \partial_m u_k)/2; \quad \sigma_{km} = \lambda \varepsilon_{ii} \delta_{km} + 2\mu \varepsilon_{km};$$

$$\partial_k = \partial/\partial x_k, \quad \lambda = vE/[(1+v)(1-2v)], \quad \mu = E/[2(1+v)], \quad i, k, m = 1, 2, \quad (1)$$

где $u_k(x_m, t)$ – поле перемещений; ε_{km} – тензор деформаций; σ_{km} – тензор напряжений; λ, μ – параметры Ламе; E – модуль Юнга; v – коэффициент Пуассона; δ_{km} – символ Кронекера; ρ – плотность. В области S справедливо уравнение движения [22]

$$\partial_m \sigma_{km} = \rho \partial_t v_k; \quad v_k = \partial_t u_k; \quad \partial_t = \partial/\partial t, \quad (2)$$

где v_k – поле скоростей. Решение уравнения (2) должно удовлетворять начальным

и граничным условиям. Начальные условия предполагаются нулевыми. Граничные условия могут быть либо главными (кинематическими), либо естественными (динамическими) [23]. Трещина считается неподвижной. Требуется определить зависимость $K_I(t)$.

Метод прямых

Слабое решение задачи получается из принципа возможных перемещений

$$\int_S (\rho \partial_t v_k \delta u_k + \sigma_{km} \delta \varepsilon_{km}) dS = \int_L p_k \delta u_k dL, \quad (3)$$

где δ – символ вариации. Уравнение (3) эквивалентно уравнению движения (2) и естественным граничным условиям. Решение уравнения (3) разыскивается в классе функций, удовлетворяющих главным граничным условиям. При этом вариации перемещений на участках граничного контура, где заданы главные граничные условия, равны нулю.

Первый шаг решения задачи методом прямых – преобразование уравнения (3) к конечно-разностному уравнению по времени. Для этого в настоящем исследовании используется неявная схема Кранка – Николсон [4]. Пусть Δt – величина шага интегрирования по времени, n – номер шага интегрирования. Конечно-разностное представление производной по времени на n -м шаге имеет вид

$$\partial_t y = (y^n - y^{n-1}) / \Delta t, \quad (4)$$

где y^{n-1} , y^n – значения y на границах временного интервала. Величины, не содержащие производных по времени, представляются на n -м шаге интегрирования по времени в виде

$$y = (y^n + y^{n-1}) / 2. \quad (5)$$

Уравнение (3) с учетом выражения для скорости (2) преобразуется к виду

$$\left\{ \begin{aligned} \int_S \left[\rho \frac{v_k^n - v_k^{n-1}}{\Delta t} \delta u_k + \frac{1}{2} (\sigma_{km}^n + \sigma_{km}^{n-1}) \delta \varepsilon_{km} \right] dS &= \frac{1}{2} \int_L (p_k^n + p_k^{n-1}) \delta u_k dL, \\ \frac{1}{2} (v_k^n + v_k^{n-1}) &= \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\Delta t}. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Величины с индексами $n-1$ известны из решения для предыдущего шага. Система (6) распадается на два уравнения:

$$\begin{aligned} \int_S \left[\frac{4\rho}{(\Delta t)^2} u_k^n \delta u_k + \sigma_{km}^n \delta \varepsilon_{km} \right] dS &= \int_L (p_k^n + p_k^{n-1}) \delta u_k dL + \\ &+ \int_S \left[\frac{4\rho}{\Delta t} \left(\frac{u_k^{n-1}}{\Delta t} + v_k^{n-1} \right) \delta u_k - \sigma_{km}^{n-1} \delta \varepsilon_{km} \right] dS; \end{aligned} \quad (7)$$

$$v_k^n = \frac{2}{\Delta t} (u_k^n - u_k^{n-1}) - v_k^{n-1}. \quad (8)$$

Вначале из уравнения (7) определяются перемещения u_k^n , затем из уравнения (8) – скорости v_k^n .

На каждом шаге интегрирования по времени уравнение (7) решается методом конечных элементов. Легко видеть, что и матрица жесткости, и матрица масс на каждом шаге интегрирования по времени будет одна и та же. Пусть U – матрица-столбец узловых неизвестных, V – матрица-столбец их скоростей, E – матрица жесткости, M – матрица масс, P – матрица-столбец нагрузок, обусловленная первым слагаемым в правой части уравнения (7). Система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных U^n , эквивалентная вариационному уравнению (7), записывается в виде

$$\left[\frac{4}{(\Delta t)^2} M + E \right] U^n = P^n + P^{n-1} + \frac{4}{(\Delta t)^2} M (U^{n-1} + \Delta t V^{n-1}) - E U^{n-1}. \quad (9)$$

Узловые скорости определяются формулой, следующей из равенства (8):

$$V^n = \frac{2}{\Delta t} (U^n - U^{n-1}) - V^{n-1}. \quad (10)$$

Если пространственное распределение нагрузки неизменно, то уравнение (9) еще больше упрощается, так как можно записать

$$P^n + P^{n-1} = [f(t^n) + f(t^{n-1})] P_1, \quad (11)$$

где $f(t)$ – заданная функция – параметр нагружения, P_1 – матрица-столбец нагрузок при $f = 1$. Ее, так же как и матрицы жесткости и масс, необходимо вычислять только один раз.

Конечные элементы

Сетка конечных элементов состоит из элементов двух типов. Первый из них – это обычные изопараметрические элементы [4]. Второй тип – это специальные когезионные элементы [20]. Они позволяют учитывать специфику, вносимую трещиной в краевые задачи теории упругости. К линии трещины примыкает слой когезионных конечных элементов (рис. 2). Остальная часть сечения покрывается сеткой изопараметрических конечных элементов.

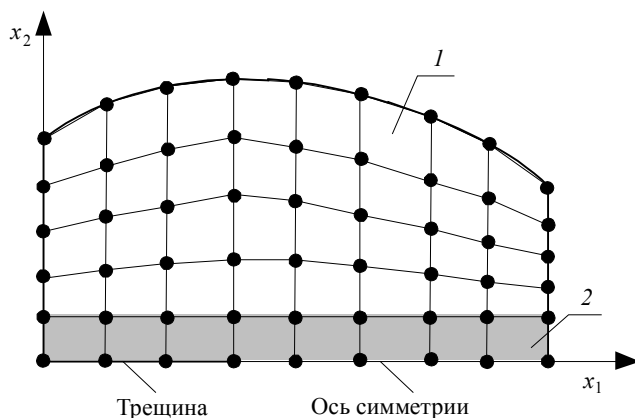


Рис. 2. Сетка конечных элементов (принципиальная схема).
1 – изопараметрические элементы, 2 – когезионные элементы

Fig. 2. Finite element mesh (basic scheme).

1, isoparametric elements and 2, cohesive elements

В данном исследовании использовались изопараметрические конечные элементы первого порядка. Каждый элемент в локальных координатах представляет собой квадрат (рис. 3).

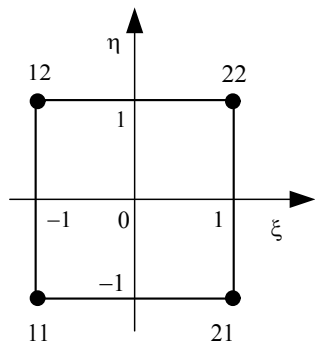


Рис. 3. Конечный элемент в локальных координатах.

Узлы имеют двойную нумерацию

Fig. 3. Finite element in the local coordinates.

The nodes have double indexing

Глобальные координаты точек элемента и перемещения в этих точках определяются формулами [4]:

$$x_k = L_I(\xi)L_J(\eta)X_{k,IJ}; \quad u_k = L_I(\xi)L_J(\eta)U_{k,IJ};$$

$$I, J = 1, 2; \quad \xi, \eta \in [-1, 1], \quad (12)$$

где $X_{k,IJ}$ – глобальные координаты узла с номером IJ , $U_{k,IJ}$ – перемещения узла с номером IJ , $L_I(z)$ – интерполяционные полиномы Лагранжа, которые в данном случае имеют вид

$$L_1(z) = 0.5(1 - z); \quad L_2(z) = 0.5(1 + z). \quad (13)$$

Глобальные узловые координаты задаются. Узловые перемещения $U_{k,IJ}$ – это основные неизвестные задачи.

Предполагается, что в окрестности кончика трещины существует зона сцепления длиной Δ , в пределах которой противоположные кромки трещины притягиваются друг к другу [17]. Силы этого притяжения называются силами сцепления. На рис. 4 изображена верхняя кромка трещины в деформированном состоянии. Картина для нижней кромки симметрична.

Излагаемая теория строится на основе постулатов Баренблатта. Согласно первому из них, распределение сил сцепления обеспечивает отсутствие сингулярности поля напряжений в окрестности кончика трещины. Это эквивалентно требованию плавного смыкания кромок трещины в ее кончике (рис. 4), которое записывается в виде

$$x_1 = a, \quad x_2 = 0: \quad \partial_1 u_2 = 0. \quad (14)$$

Второй постулат утверждает, что длина зоны сцепления намного меньше длины трещины. Третий постулат предполагает, что при продвижении кончика трещины напряженное состояние его ближайшей окрестности не изменяется. Из этих постулатов следует, что и при квазистатическом [17], и при динамическом [18]

нагружении удельная высвобожденная энергия при продвижении кончика трещины и ее связь с коэффициентом интенсивности напряжений определяется формулой [2]:

$$G = 2 \int_{a-\Delta}^a q_2 \partial_1 u_2 dx_1 = \frac{1-v^2}{E} K_I^2. \quad (15)$$

При выполнении постулатов Баренблатта величина G не зависит от закона изменения сил сцепления вдоль кромки трещины $q_2(x_1)$ [17, 18]. Предполагается, что в начальный момент роста трещины скорость движения ее кончика близка к нулю.

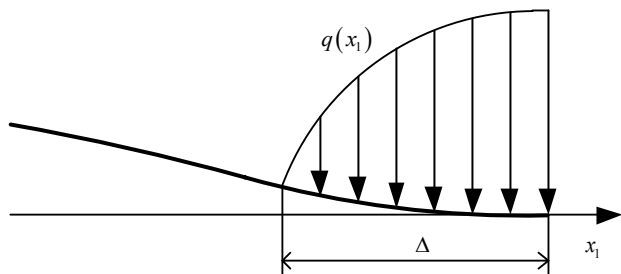


Рис. 4. Верхняя кромка трещины при деформации

Fig. 4. Top edge of the crack under deformation

Когезионные конечные элементы обеспечивают плавное смыкание кромок трещины в ее кончике и, тем самым, отсутствие сингулярности полей напряжений и деформаций. Когезионные элементы не являются изопараметрическими, и в глобальных координатах представляют собой прямоугольники. При этом формулы связи локальных и глобальных координат упрощаются:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + b_1 \xi; & x_2 &= a_2 + b_2 \eta; & a_k &= 0.5(X_{k,22} + X_{k,11}); \\ b_k &= 0.5(X_{k,22} - X_{k,11}); & X_{1,I1} &= X_{1,I2}; & X_{2,IJ} &= X_{2,2J}. \end{aligned} \quad (16)$$

Перемещения точек когезионного конечного элемента определяются формулами [20]:

$$\begin{aligned} u_1 &= L_I(\xi) L_J(\eta) U_{1,IJ}; \\ u_2 &= H_I(\xi) L_1(\eta) U_{2,I1} + L_I(\xi) L_2(\eta) U_{2,I2} + 0.5 \Delta x_1 H_{I+2}(\xi) L_1(\eta) U_{3,I1}, \end{aligned} \quad (17)$$

где Δx_1 – размер элемента по оси абсцисс, $U_{3,I1}$ – значения производной $\partial_1 u_2$ в Π -м узле (эти величины определяются только для узлов, лежащих на оси абсцисс – прямой, на которой расположена трещина), $H_m(z)$ – интерполяционные полиномы Эрмита, определяемые формулами [4]:

$$\begin{aligned} H_1(z) &= 0.25(2 - 3z + z^3); & H_2(z) &= 0.25(2 + 3z - z^3); \\ H_3(z) &= 0.25(1 - z - z^2 + z^3); & H_4(z) &= 0.25(-1 - z + z^2 + z^3). \end{aligned} \quad (18)$$

Кончик трещины обязательно должен совпадать с каким-либо узлом конечно-элементной сетки. В этом узле полагается не только $u_2 = 0$, но и $\partial_1 u_2 = 0$, что

обеспечивает плавность смыкания кромок трещины в ее кончике. Если не накладывать ограничений на узловое перемещение когезионного конечного элемента, то никаких сил сцепления на его контуре не возникнет. Поэтому область действия сил сцепления (зона сцепления) локализована в пределах конечного элемента, прилегающего к кончику трещины. Таким образом, чем мельче сетка конечных элементов, тем точнее удовлетворяется требование теории Баренблатта о малости длины зоны сцепления по сравнению с длиной трещины.

Далее применяется обычная конечно-элементная процедура, позволяющая свести решение поставленной задачи к решению системы линейных алгебраических уравнений [4]. Главные (кинематические) граничные условия (в рассматриваемом классе задач они могут быть только нулевыми) учитываются следующим образом [4]. Пусть j – номер узлового перемещения (в глобальной нумерации), которое должно быть равно нулю. Обнуляются j -я строка и j -й столбец матрицы коэффициентов разрешающей системы уравнений (последнее – для сохранения симметрии матрицы) за исключением диагонального элемента; обнуляется также j -й элемент столбца свободных членов.

Для вычисления удельной высвобожденной энергии при продвижении трещины используется более простой, чем в работе [20], и, как показывают сравнительные расчеты, более точный подход. Упомянутые граничные условия в кончике трещины представляют собой, с механической точки зрения, связи. Реакции этих связей, Q_B и M_B (рис. 5) легко подсчитать, подставляя значения узловых перемещений в соответствующие непроброзованные уравнения разрешающей системы. При продвижении трещины на длину конечного элемента Δx_1 эти реакции связей уменьшаются (по модулю) до нуля, а соответствующие им перемещения u_2 и угол поворота $\partial_1 u_2$ приобретают конечные значения.

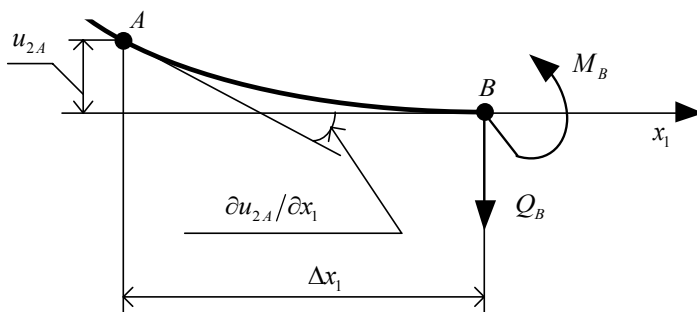


Рис. 5. Деформирование окрестности кончика трещины. Кончик трещины расположен в узле B . Δx_1 – расстояние между соседними узлами, расположенными на линии трещины

Fig. 5. Deformation of the crack tip. The crack tip is located in node B . Δx_1 is the distance between adjacent nodes arranged along the crack line

Согласно третьему постулату Баренблатта, при росте трещины конфигурация концевой области не изменяется. Это значит, что перемещения, которые получит узел B при продвижении трещины на величину Δx_1 , будут равны перемещениям

узла A при совпадении кончика трещины с узлом B . При этом величина удельной высвобожденной энергии определяется очевидной формулой:

$$G = -\frac{1}{\Delta x_1} (Q_B u_{2A} + M_B \partial_1 u_{2A}). \quad (19)$$

Формула (19) учитывает наличие у трещины двух кромок. Коэффициент интенсивности напряжений вычисляется по формуле, следующей из выражения (15):

$$K_I = \pm \sqrt{\frac{EG}{1-\nu^2}}. \quad (20)$$

Если из формулы (19) следует, что $G < 0$, то это значит, что корневая асимптотика еще не установилась и следует считать $K_I = 0$. Знак минус в формуле (20) соответствует случаю, когда $u_{2A} < 0$. При этом трещина не обязательно закрывается и теория становится неприменимой. Разрез, не имеющий ширины, как модель трещины – это удобная абстракция. В реальных трещинах расстояние между кромками всегда конечно. Отрицательное значение u_{2A} приводит к уменьшению этого расстояния, но не обязательно к смыканию кромок.

Необходимость введения целого ряда когезионных элементов обусловлена требованием межэлементной непрерывности перемещений, как между когезионными элементами, так и между когезионными и обычными изопараметрическими элементами [20].

Численные примеры

Сходимость численных решений исследовалась на различных конечно-элементных сетках при различном количестве шагов по времени N . Относительная погрешность приведенных ниже результатов не превышает 3 %.

Пусть рассматриваемое тело – полоса с центральной трещиной, находящаяся в состоянии плоской деформации. Поперечное сечение полосы изображено на рис. 6. В начальный момент времени к двум противоположным сторонам прямоугольника, параллельным трещине, мгновенно прикладывается равномерно распределенная нагрузка величиной q , далее остающаяся неизменной. Задача имеет две оси симметрии, проходящие через середины противоположных сторон прямоугольника. Поэтому расчетная схема – это четверть сечения, вырезанная осями симметрии (рис. 7).

Граничные условия записываются следующим образом. На участке контура AB : $u_1 = 0$, $p_2 = 0$ – условия симметрии; на участке BC : $p_1 = 0$, $p_2 = q$; на участке CD : $p_1 = 0$, $p_2 = 0$; на участке DE : $u_2 = 0$, $p_1 = 0$ – условия симметрии; на участке EA (кромка трещины): $p_1 = 0$, $p_2 = 0$.

Эта задача решалась в работах [6, 24, 25] при следующих исходных данных: $\nu = 0.286$, $H/W = 0.385$, $a/W = 0.23$. Рассматриваемый интервал времени равен $t_{\max} = 20$ мкс. Результаты расчета разработанным методом при $N = 220$, $n_1 = 100$, $n_2 = 40$ (квадратная сетка), сопоставляемые с результатами других исследователей [6, 24, 25], приведены на рис. 8. Можно сделать вывод об удовлетворительном согласовании решений всеми четырьмя методами.

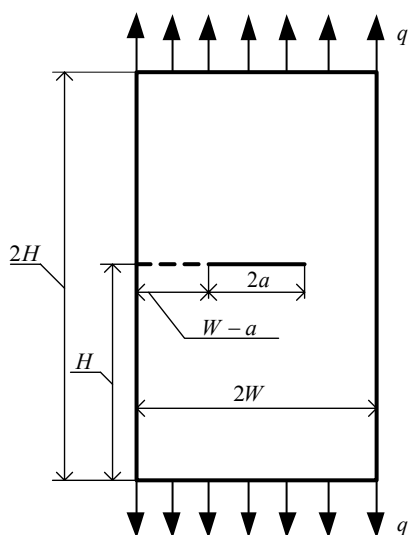


Рис. 6. Прямоугольная область с центральной трещиной
Fig. 6. Rectangular domain with a central crack

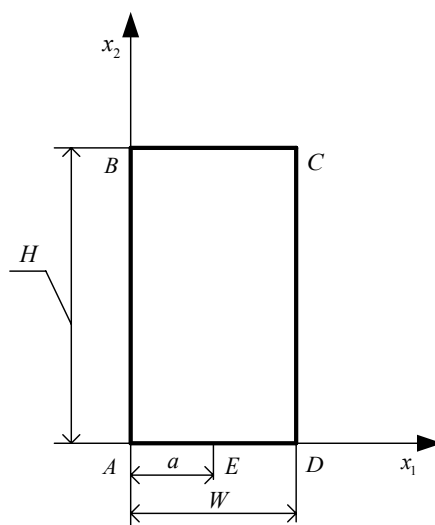


Рис. 7. Расчетная схема
Fig. 7. Computational domain

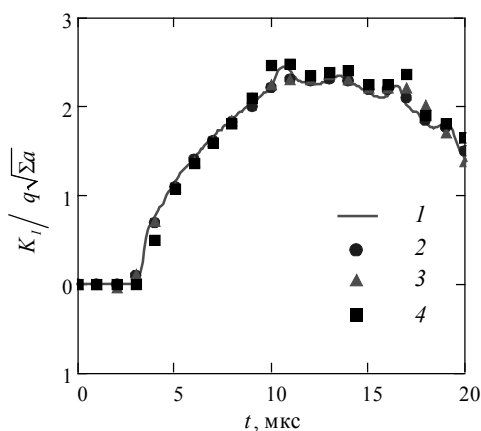


Рис. 8. Результаты решения задачи для прямоугольной области с центральной трещиной. 1 – разработанный метод, 2 – данные работы [24], 3 – данные работы [25], 4 – данные работы [6]
Fig. 8. Solution of the problem for a rectangular domain with a central crack. 1, developed method, 2, data from [24], 3, data from [25], and 4, data from [6]

Рассмотрим теперь задачу о полосе с краевой трещиной. Поперечное сечение полосы изображено на рис. 9. Задача имеет ось симметрии, поэтому расчетная схема – это половина сечения (рис. 7).

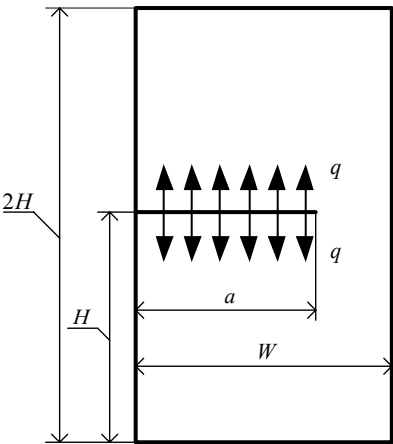


Рис. 9. Прямоугольная область с краевой трещиной
Fig. 9. Rectangular domain with an edge crack

Граничные условия записываются следующим образом. На участках контура AB , BC и CD : $p_1 = 0$, $p_2 = 0$; на участке DE : $u_2 = 0$, $p_1 = 0$ – условия симметрии; на участке EA (кромка трещины): $p_1 = 0$, $p_2 = q$. Такая расчетная схема моделирует эксперименты Рави-Чандара и Кнаусса [26]. Экспериментальные образцы изготавливались из оптически прозрачного полимера Nomalite-100. Его механические характеристики [1]: $E = 4550$ МПа, $\nu = 0.31$, $\rho = 1230$ кг/м³. Размеры образцов: $W = 500$ мм, $H = 150$ мм, $a/W = 0.5$. Нагрузка $q(t)$ вначале возрастает по линейному закону до значения q_M (при $t = t_M$) и далее остается постоянной. Помимо динамической нагрузки образцы нагружались квазистатически, так как было необходимо несколько раскрыть кромки трещины, чтобы разместить между ними электроды, создающие динамическую нагрузку. В силу линейности задачи коэффициент интенсивности напряжений от статической нагрузки просто прибавлялся к коэффициенту интенсивности напряжений, обусловленному динамической нагрузкой. Расчеты проводились при $n_1 = 100$, $n_2 = 30$. Шаг по времени составлял $\Delta t = 10^{-3} W \sqrt{\rho/E}$. Рассмотрены четыре расчетных случая, отличающиеся величиной q_M и величиной временного интервала $t_{\max}$, которая соответствовала экспериментально определенному моменту начала роста трещины (таблица). Величина $t_M = 25$ мкс для всех расчетных случаев.

Максимальные значения нагрузки и временные интервалы [27]

Расчетные случаи	q_M , МПа	$t_{\max}$, мкс
Рис. 10, a	0.63	102
Рис. 10, b	1.10	56
Рис. 10, c	5.55	18
Рис. 10, d	10.4	17

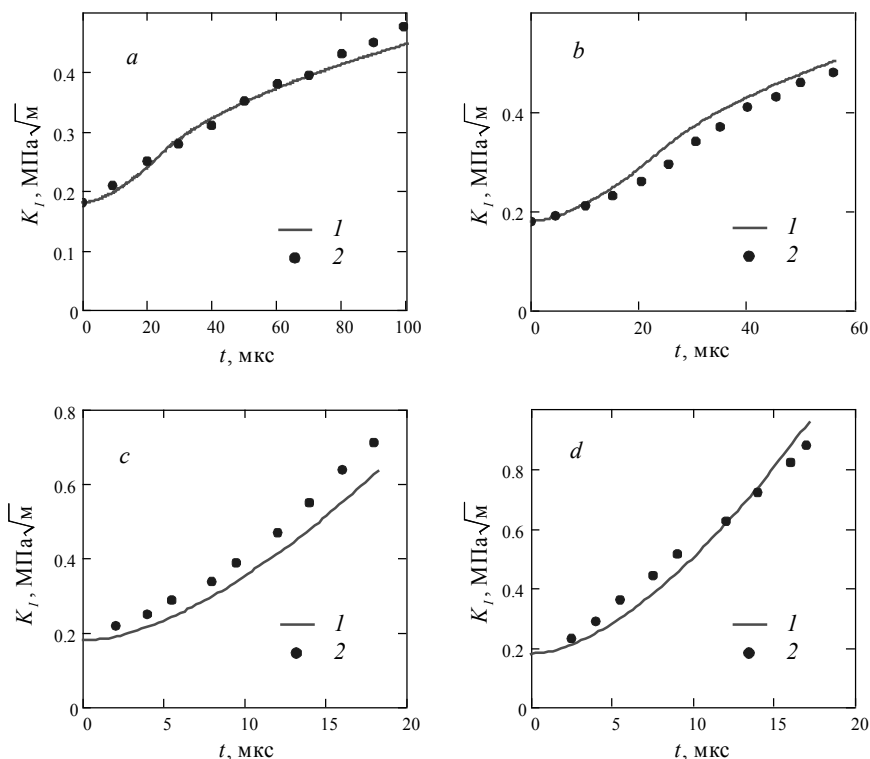


Рис. 10. Результаты решения задачи и экспериментальные данные для прямоугольной области с краевой трещиной. 1 – разработанный метод, 2 – эксперименты Рави-Чандара и Кнаусса [26, 27]

Fig. 10. Problem solution and experimental data for a rectangular domain with an edge crack. 1, developed method and 2, experiments by Ravi-Chandar and Knauss [26, 27]

Сопоставление результатов расчетов с экспериментальными данными приведено на рис. 10. Можно сделать вывод об удовлетворительном согласовании теории с экспериментом.

Заключение

Предложен новый метод решения задач динамической механики разрушения. Метод позволяет вычислять зависимость коэффициента интенсивности напряжений от времени для плоскодеформированного тела с неподвижной трещиной нормального разрыва. Суть метода состоит в использовании специальных когезионных элементов [20]. Эти элементы позволяют получить решение задачи механики разрушения для модели когезионной трещины Баренблатта. По силам реакции связей и узловым параметрам находится удельная высвобожденная энергия и по ней, вследствие эквивалентности теорий Гриффитса и Баренблатта [18], определяется коэффициент интенсивности напряжений. Когезионные элементы удовлетворяют требованиям межэлементной непрерывности перемещений и полноты. Другая важная особенность предложенного метода – это получение решения динамической задачи методом прямых.

Возможности метода продемонстрированы на решении двух задач для прямоугольных областей с трещинами. Решения сопоставлялись с решениями других авторов и с экспериментальными данными. Можно отметить их удовлетворительное согласование.

К достоинствам метода можно отнести также его простоту и отсутствие необходимости перестраивать конечно-элементную сетку при росте трещины. Это дает принципиальную возможность использовать метод для математического моделирования роста трещин.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ravi-Chandar K.* Dynamic fracture. Oxford: Elsevier, 2004.
2. *Freund L.B.* Dynamic fracture mechanics. New York: Cambridge University Press, 1998.
3. *Нусиока Т., Амлюри С.* Вычислительные методы в динамике разрушения // Вычислительные методы в механике разрушения. М.: Мир, 1990. С. 267–321.
4. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The finite element method. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.
5. *Barsoum R.S.* Application of quadratic isoparametric finite elements in linear fracture // Int. J. Fract. 1974. V. 10. P. 603–605.
6. *Murti V., Valliappan S.* The use of quarter point element in dynamic crack analysis // Eng. Fract. Mech. 1986. V. 23. P. 585–614.
7. *Liu P., Bui T.Q., Zhang C., Yu T.T., Liu G.R., Golub M.V.* The singular edge-based smoothed finite element method for stationary dynamic crack problems in 2D elastic solids // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2012. V. 233–236. P. 68–80.
8. *Wu L., Liu P., Shi C., Zhang Z., Bui T.Q., Jiao D.* Edge-based smoothed extended finite element method for dynamic fracture analysis // Appl. Math. Modelling. 2016. V. 40. P. 8564–8579.
9. *Yao W., Cai Z., Hu X.* A new symplectic analytical singular element for crack problems under dynamic loading condition // Eng. Fract. Mech. 2018. V. 188. P. 431–447.
10. *Menouillard T., Belytschko T.* Dynamic fracture with meshfree enriched XFEM // Acta Mech. 2010. V. 213. P. 53–69.
11. *Kumar S., Singh I.V., Mishra B.K., Singh A.* New enrichments in XFEM to model dynamic crack response of 2-D elastic solids // Int. J. Impact Engrg. 2016. V. 87. P. 198–211.
12. *Li W., Zheng H., Sun G.* The moving least squares based numerical manifold method for vibration and impact analysis of cracked bodies // Eng. Fract. Mech. 2018. V. 190. P. 410–434.
13. *Xu X.P., Needleman A.* Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids // J. Mech. Phys. Solids. 1994. V. 42. P. 1397–1434.
14. *de Borst R., Remmers J.J.C., Needleman A.* Mesh-independent discrete numerical representations of cohesive-zone models // Eng. Fract. Mech. 2006. V. 73. P. 160–177.
15. *Song J.H., Wang H., Belytschko T.* A comparative study on finite element methods for dynamic fracture // Comput. Mech. 2008. V. 42. P. 239–250.
16. *Sukumar N., Dolbow J.E., Moës N.* Extended finite element method in computational fracture mechanics: a retrospective examination // Int. J. Fract. 2015. V. 196. P. 189–206.
17. *Баренблатт Г.И.* Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // Журн. прикл. мех-ки и техн. физики. 1961. № 4. С. 3–56.
18. *Willis J.R.* A comparison of the fracture criteria of Griffith and Barenblatt // J. Mech. Phys. Solids. 1967. V. 15. P. 151–162.
19. *Moës N., Belytschko T.* Extended finite element method for cohesive crack growth // Eng. Fract. Mech. 2002. V. 69. P. 813–833.
20. *Лавит И.М.* Об устойчивом росте трещины в упругопластическом материале // Проблемы прочности. 1988. № 7. С. 18–23.
21. *Ладъженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
22. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.

23. Мухлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
24. Nishioka T., Atluri S.N. Numerical modeling of dynamic crack propagation in finite bodies, by moving singular elements. Part 2: Results // J. Appl. Mech. 1980. V. 47. P. 577–582.
25. Fedelinski P., Aliabadi M.H., Rooke D.P. The dual boundary element method: $\bar{J}$ -integral for dynamic stress intensity factor // Int. J. Fract. 1994. V. 65. P. 369–381.
26. Ravi-Chandar K., Knauss W.G. Dynamic crack-tip stresses under stress wave loading – a comparison of theory and experiment // Int. J. Fract. 1982. V. 20. P. 209–222.
27. Ma C.C., Freund L.B. The extent of the stress intensity factor field during crack growth under dynamic loading conditions // J. Appl. Mech. 1986. V. 53. P. 303–310.

Статья поступила 20.03.2018 г.

Malik A.V., Lavit I.M. (2018) ON THE COMPUTATION METHOD FOR THE STRESS INTENSITY FACTOR OF A STATIONARY CRACK IN MODE I UNDER DYNAMIC LOADING. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 54. pp. 88–102

DOI 10.17223/19988621/54/8

Keywords: dynamic fracture, method of lines, cohesive finite elements.

A method for calculating the time dependence of the stress intensity factor of a dynamic loaded body with a stationary crack in mode I is proposed. The method represents a modified method of lines developed for solving the problems of dynamic fracture mechanics. Time integration is performed using the finite difference method. The Crank-Nicolson implicit scheme is applied. Boundary problems obtained at each step of time integration are solved by the finite element method. For each time instant, the stress intensity factor is determined by the calculated value of specific energy release. For this purpose, the special cohesive finite elements ensured by the implementation of Barenblatt's postulates are used. Addition of the degrees of freedom for the mesh points arranged along the crack line enables to provide a smooth joining of the edges at the crack tip. This is equivalent to the absence of stress singularity in the tip of crack. The results of calculations are compared with those obtained by other researchers and with experimental data. A satisfactory agreement ensures the efficiency of the method applied. The latter can also be used to solve the problems of growing and branching cracks. Moreover, it admits taking into account plastic deformation.

MALIK Alexander Vasil'evich (Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: runer10@mail.ru

LAVIT Igor Mikhaylovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: IgorLavit@yandex.ru

REFERENCES

1. Ravi-Chandar K. (2004) *Dynamic Fracture*. Oxford: Elsevier.
2. Freund L.B. (1998) *Dynamic Fracture Mechanics*. New York: Cambridge University Press.
3. Nishioka T., Atluri S.N. (1986) Computational methods in dynamics fracture. *Computational Methods in the Mechanics of Fracture*. Amsterdam: Elsevier. pp. 335–383.
4. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. (2000) *The finite element method*. Oxford: Butterworth-Heinemann.
5. Barsoum R.S. (1974) Application of quadratic isoparametric finite elements in linear fracture. *Int. J. Fract.* 10. pp. 603–605. DOI: 10.1007/BF00155266.
6. Murti V., Valliappan S. (1986) The use of quarter point element in dynamic crack analysis. *Eng. Fract. Mech.* 23. pp. 585–614. DOI: 10.1016/0013-7944(86)90164-5.
7. Liu P., Bui T.Q., Zhang C., Yu T.T., Liu G.R., Golub M.V. (2012) The singular edge-based smoothed finite element method for stationary dynamic crack problems in 2D elastic solids. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 233–236. pp. 68–80. DOI: 10.1016/j.cma.2012.04.008.

8. Wu L., Liu P., Shi C., Zhang Z., Bui T.Q., Jiao D. (2016) Edge-based smoothed extended finite element method for dynamic fracture analysis. *Appl. Math. Modelling*. 40. pp. 8564–8579. DOI: 10.1016/j.apm.2016.05.027.
9. Yao W., Cai Z., Hu X. (2018) A new symplectic analytical singular element for crack problems under dynamic loading condition. *Eng. Fract. Mech.* 188. pp. 431–447. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.09.016.
10. Menouillard T., Belytschko T. (2010) Dynamic fracture with meshfree enriched XFEM. *Acta Mech.* 213. pp. 53–69. DOI: 10.1007/s00707-009-0275-z.
11. Kumar S., Singh I.V., Mishra B.K., Singh A. (2016) New enrichments in XFEM to model dynamic crack response of 2-D elastic solids. *Int. J. Impact Eng.* 87. pp. 198–211. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2015.03.005.
12. Li W., Zheng H., Sun G. (2018) The moving least squares based numerical manifold method for vibration and impact analysis of cracked bodies. *Eng. Fract. Mech.* 190. pp. 410–434. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.12.025.
13. Xu X.P., Needleman A. (1994) Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *J. Mech. Phys. Solids*. 42. pp. 1397–1434. DOI: 10.1016/0022-5096(94)90003-5.
14. De Borst R., Remmers J.J.C., Needleman A. (2006) Mesh-independent discrete numerical representations of cohesive-zone models. *Eng. Fract. Mech.* 73. pp. 160–177. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2005.05.007.
15. Song J.H., Wang H., Belytschko T. (2008) A comparative study on finite element methods for dynamic fracture. *Comput. Mech.* 42. pp. 239–250. DOI: 10.1007/s00466-007-0210-x.
16. Sukumar N., Dolbow J.E., Moës N. (2015) Extended finite element method in computational fracture mechanics: a retrospective examination. *Int. J. Fract.* 196. pp. 189–206. DOI: 10.1007/s1070.
17. Barenblatt G.I. (1962) The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.* 7. pp. 55–129. DOI: 10.1016/S0065-2156(08)70121-2.
18. Willis J.R. (1967) A comparison of the fracture criteria of Griffith and Barenblatt. *J. Mech. Phys. Solids*. 15. pp. 151–162. DOI: 10.1016/0022-5096(67)90029-4.
19. Moës N., Belytschko T. (2002) Extended finite element method for cohesive crack growth. *Eng. Fract. Mech.* 69. pp. 813–833. DOI: 10.1016/S0013-7944(01)00128-X.
20. Lavit I.M. (1988) Stable crack growth in an elastoplastic material. *Strength of Materials*. 20. pp. 854–860. DOI: 10.1007/BF01528695.
21. Ladyzhenskaya O.A. (1985) *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*. Berlin: Springer-Verlag.
22. Timoshenko S.P., Goodier J.N. (1970) *Theory of Elasticity*. New York: McGraw-Hill.
23. Mikhlin S.G. (1964) *Variational Methods in Mathematical Physics*. Oxford: Pergamon Press.
24. Nishioka T., Atluri S.N. (1980) Numerical modeling of dynamic crack propagation in finite bodies, by moving singular elements. Part 2: Results. *J. Appl. Mech.* 47. pp. 577–582. DOI: 10.1115/1.3153734.
25. Fedelinski P., Aliabadi M.H., Rooke D.P. (1994) The dual boundary element method: $\hat{J}$ -integral for dynamic stress intensity factor. *Int. J. Fract.* 65. pp. 369–381. DOI: 10.1007/BF00012375.
26. Ravi-Chandar K., Knauss W.G. (1982) Dynamic crack-tip stresses under stress wave loading – a comparison of theory and experiment. *Int. J. Fract.* 20. pp. 209–222. DOI: 10.1007/BF01140336.
27. Ma C.C., Freund L.B. (1986) The extent of the stress intensity factor field during crack growth under dynamic loading conditions. *J. Appl. Mech.* 53. pp. 303–310. DOI: 10.1115/1.3171756.

УДК 539.39:536-12:519.633
DOI 10.17223/19988621/54/9

Е.С. Парфенова, А.Г. Князева

НАЧАЛЬНАЯ СТАДИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ПЕРЕХОДНОГО СЛОЯ МЕЖДУ ПЛЕНКОЙ И ПОДЛОЖКОЙ ПРИ НАГРЕВЕ СИЛЬНОТОЧНЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ¹

Работа посвящена математическому моделированию начальной стадии формирования переходного слоя между пленкой и основным материалом при нагреве сильноточным электронным пучком. Подробно описаны математическая постановка задачи и переход к безразмерным переменным. Разработанный численный алгоритм основан на неявной разностной схеме. Приведены примеры решения связанной задачи для двух систем покрытие – подложка – Mo(Ni), Ni(Cu). Выявлены особенности взаимодействия процессов разной физической природы – распространение механических возмущений и диффузии материала пленки.

Ключевые слова: математическое моделирование, электронно-лучевой нагрев, диффузия, напряжения, деформация, время релаксации, покрытие.

В настоящее время активно исследуются процессы взаимодействия концентрированных потоков энергии с материалами. Эти методы обработки позволяют разрабатывать новые материалы с уникальными свойствами, которые отвечают современным технологическим требованиям. Наибольший интерес в этой области представляют низкоэнергетические сильноточные электронные пучки, с помощью которых можно формировать твердые растворы, интерметаллиды и нитриды в приповерхностном слое металлов и сплавов, что приводит к значительному улучшению физико-механических и эксплуатационных характеристик без существенного изменения геометрии деталей [1–5]. Кроме того, поверхностная обработка металлов электронными пучками часто используется для модификации предварительно нанесенного покрытия [6] и улучшения адгезии системы покрытие – подложка [1, 7]. Особый интерес сегодня вызывает использование ультратонких покрытий, которые зачастую находятся в наноструктурном состоянии [8, 9]. В основном обработка поверхностей металлических материалов с использованием импульсных низкоэнергетических сильноточных электронных пучков достигается быстрым нагревом до температур, превышающих температуру плавления материала, и быстрым охлаждением поверхностных слоев [3]. Но в работе [10] показано, что изменения в поверхностных слоях и объеме металлических материалов могут происходить и при воздействии на поверхность пучками электронов в режиме отсутствия плавления, т.е. при достаточно низких температурах. Однако при этом наблюдаются значительные изменения состава и структуры.

Установлено, что процесс поверхностной обработки, в частности потоком электронов, сопровождается многочисленными физико-химическими процессами [11]. Кроме таких процессов как нагрев, фазообразование, перемешивание и т.д., в момент взаимодействия потока электронов с поверхностью мишени происходит

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ, грант № 16-01-00603.

генерация упругих волн механических возмущений [12]. Все указанные процессы протекают одновременно, поэтому их экспериментальное исследование затруднено. Эксперимент ориентирован на конечный результат воздействия, на анализ структур, которые получаются в поверхностном слое шлифов, которые также есть результат дополнительного воздействия [13]. Известные методы не позволяют исследовать процессы, протекающие на достаточно малых временах. В отличие от экспериментальных работ, математическое моделирование позволяет детально исследовать процесс обработки на всех его стадиях, изучить роль каждого возникающего явления в отдельности и выявить взаимосвязь между интересующими процессами.

В литературе встречаются модели для исследования особенностей термоупругих волн, вызванных воздействием высокоэнергетических источников на поверхности материалов, но стоит отметить, что редко встречаются связанные модели электронно-лучевой обработки, в которых учитываются одновременно протекающие процессы разной физической природы. В работах [14–16], например, представлены математические модели, описывающие эволюцию механических возмущений, возникающих при взаимодействии пучков заряженных частиц с поверхностью металла, но собственно процесс внедрения частиц (начальная стадия обработки) не рассматривается. В [17, 18] обсуждаются механизмы формирования полей механических напряжений в облучаемой мишени, которые представляют собой распространяющуюся со скоростью звука ударную волну, а также локализованные вблизи облучаемой поверхности напряжения, обусловленные неоднородным по объему полем температур. Также показано, что плотность вложенной в мишень энергии и длительность облучения являются главными факторами, определяющими спектр протекающих в веществе процессов. В работе [19] учитывается только один перекрестный эффект – перенос массы под действием градиента температуры и исследуются вязкоупругие напряжения, однако процесс полагается квазистатическим. Без учета динамических эффектов анализируется процесс электронно-лучевого воздействия на систему покрытие – подложка в работах [20–22], где представлены результаты моделирования тепловых полей и формирования новых фаз в процессе обработки. Взаимосвязь разномасштабных процессов – диффузии примеси и распространения упругих волн – изучается в [23]. Показано, что взаимовлияние механических и диффузионных волн приводит не только к затуханию волны деформаций (и напряжений) и искажению ее профиля, но и дает распределение концентрации, не соответствующее чисто диффузионному процессу. Однако в этой работе не учитывается возможное изменение температуры в ходе обработки, а также наличие границ раздела материалов.

При разработке связанных моделей могут возникнуть трудности, связанные с разномасштабностью исследуемых процессов, что приводит к необходимости выбора подходящего метода решения. На примере связанной изотермической задачи термоупругой диффузии, этот вопрос проанализирован в [23–25].

В настоящей работе представлена математическая модель начальной стадии процесса взаимодействия потока электронов с поверхностью металла с предварительно нанесенной тонкой пленкой. Модель позволяет изучать взаимодействие нелинейных волн разной физической природы, распространяющихся совместно в неизотермических условиях. Предполагается, что частицы обладают энергией, достаточной для генерации упругих волн механических возмущений в поверхности мишени, и приводят к изменению температуры.

Математическая постановка задачи

Предположим, что возникающие напряжения – упругие, скорости, ускорения и деформации малы, тогда для описания взаимодействия волн концентрации, тепловых волн и волн напряжений (деформаций) при воздействии потока электронов материалов необходимы уравнение баланса массы, уравнение теплопроводности и уравнение движения. Определяющие соотношения соответствуют теории обобщенной термоупругой диффузии [26–28]. За основу возьмем разработанную ранее модель [25], описывающую процесс внедрения частиц в поверхность мишени с покрытием в приближении одноосного нагружения. Внутренняя граница разделяет материалы с разными свойствами (покрытие – A , подложки – B). Для каждой из областей необходимо записать свои уравнения:

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} + t_{Dk} \frac{\partial^2 C_k}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_k \frac{\partial C_k}{\partial x} - \frac{B_k C_k}{\rho_k} \frac{\partial \sigma_k}{\partial x} \right]; \quad (1)$$

$$\rho_k C_{\sigma k} \left[t_{qk} \frac{\partial^2 T_k}{\partial t^2} + \frac{\partial T_k}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_{Tk} \frac{\partial T_k}{\partial x} \right] - \alpha_{Tk} T_k \frac{\partial \sigma_k}{\partial t} - t_{qk} \frac{\partial}{\partial t} \left[\alpha_{Tk} T_k \frac{\partial \sigma_k}{\partial t} \right]; \quad (2)$$

$$\frac{\rho_k}{E_k} \frac{\partial^2 \sigma_k}{\partial t^2} + \rho_k \alpha_{Tk} \frac{\partial^2 T_k}{\partial t^2} + \rho_k \Delta \alpha_k \frac{\partial^2 C_k}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \sigma_k}{\partial x^2}, \quad (3)$$

где C_k – концентрация диффузанта в покрытии ($k = A$) и в подложке ($k = B$); ρ_k – плотности материалов, кг/м³; σ_k – компонента тензора напряжений в материалах $k = A$ и $k = B$ в направлении облучения; T_k – температура, К; α_{Tk} – коэффициенты теплового расширения, К⁻¹; $C_{\sigma k}$ – теплоемкость, Дж/(кг К); t_{Dk} – время релаксации потока массы к равновесному состоянию, с; t_{qk} – время релаксации потока тепла к равновесному состоянию, с; $B_k = D_k^0 m \Delta \alpha_k / RT_k$ – коэффициент переноса массы под действием напряжений; $D_k^0 = D_{0k} \exp(-E_{ak} / RT_k)$ – коэффициент самодиффузии, м²/с. Очевидно, что $D_A^0 = D_B^0 = D$, $D_{0A} = D_{0B} = D_0$; R – универсальная газовая постоянная, мольная масса, кг/моль; $D_k = D f(C_k)$ – коэффициент диффузии, м²/с; $f(C_k)$ – функция состава; λ_{Tk} – коэффициент теплопроводности, Вт/(м К); E_{ak} – энергия активации самодиффузии, $E_{aA} = E_{aB} = E_a$, Дж/моль; $\Delta \alpha_k = \alpha_k - \alpha_0$ – разность коэффициентов концентрационного расширения диффузанта α_k и основного α_0 материала; E_k – модуль упругости, Па; $k = A, B$.

Вид зависимости коэффициента диффузии от концентрации определяется типом твердого раствора (если он образуется), характером границ, типом примесей и т.п. Для большого класса материалов можно принять зависимость вида

$$f(C_k) = a + b C_k + d C_k^2 > 0.$$

Если b и d равны нулю, то приходим к задаче с коэффициентом диффузии, не зависящим от концентрации. В рамках данной работы принимаем $f(C_k) = 1$.

При записи (1) – (3) учтены (I) связь между деформациями и напряжениями, которая определяется соотношениями теории термоупругой диффузии [26], и (II) уравнения для потоков тепла и массы (учитывающие времена релаксации), которые получаются на основе термодинамики необратимых процессов [26, 29].

В случае одноосного нагружения имеем

$$\sigma_k = E_k (\varepsilon_k - \alpha_{Tk} (T_k - T_0) - \Delta \alpha_k (C_k - C_0)). \quad (4)$$

Для одномерного приближения находим

$$J_k = -\rho_k D_k \frac{\partial C_k}{\partial x} + B_k C_k \frac{\partial \sigma_k}{\partial x} - t_{Dk} \frac{\partial J_k}{\partial t}; \quad (5)$$

$$J_{qk} = -\lambda_{Tk} \frac{\partial T_k}{\partial x} - t_{qk} \frac{\partial J_{qk}}{\partial t}. \quad (6)$$

Граница раздела материала покрытия и подложки находится на расстоянии h от левой границы, соответствующей началу координат. Полагаем, что на границе раздела имеет место идеальный контакт, тогда

$$x = h: u_A = u_B, \sigma_A = \sigma_B, C_A = C_B, J_A = J_B, J_{qA} = J_{qB}, \quad (7)$$

где u_A, u_B – компоненты вектора перемещений в направлении Ox слева и справа от границы.

Оставшиеся граничные и начальные условия имеют вид

$$x = 0: J_A = 0, J_{qA} = q_0 \Phi(t), \sigma_A = \sigma_0 \Phi(t); \quad (8)$$

$$x \rightarrow \infty: C_B = 0, \sigma_B = 0; \quad (9)$$

$$t = 0: C_k = \begin{cases} 1.0, & 0 \leq x \leq h \\ 0.0, & x > h \end{cases}, \sigma_k = 0, T_k = T_0, \frac{\partial C_k}{\partial t} = 0, \frac{\partial \sigma_k}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

Для численной реализации модели (1) – (3), (8) – (11) удобнее перейти к безразмерным переменным. Это значительно сократит количество коэффициентов и позволит разработать подходящий алгоритм.

Безразмерные переменные

Используем следующие безразмерные переменные:

$$\tau = \frac{t}{t_*}, \xi = \frac{x}{x_*}, S = \frac{\sigma}{\sigma_*}, \Theta = \frac{T - T_0}{T_* - T_0}, e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*},$$

где масштабы включают свойства первого слоя A (слой, на который поток частиц действует непосредственно):

$$x_* = \sqrt{D(T_*)t_*}, \sigma_* = E_A \alpha_{TA} (T_* - T_0), t_* = \frac{\rho_A}{E_A} D(T_*),$$

$$\varepsilon_* = \alpha_{TA} (T_* - T_0), T_* = T_0 + \frac{q_0 x_*}{\lambda_{TA}}.$$

Тогда уравнения в первом материале (в пленке) принимают вид

$$\frac{\partial^2 S_A}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \Theta_A}{\partial \tau^2} + \gamma \frac{\partial^2 C_A}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 S_A}{\partial \xi^2}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial C_A}{\partial \tau} + \tau_{DA} \frac{\partial^2 C_A}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[F(\Theta_A) \frac{\partial C_A}{\partial \xi} \right] - M\omega\gamma \frac{\partial}{\partial \xi} \left(C_A \frac{F(\Theta_A)}{\Theta_A + \sigma_A} \cdot \frac{\partial S_A}{\partial \xi} \right); \quad (12)$$

$$\left[\tau_{qA} \frac{\partial^2 \Theta_A}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \Theta_A}{\partial \tau} \right] = \frac{1}{Le} \frac{\partial^2 \Theta_A}{\partial \xi^2} - \omega[\sigma_A + \Theta_A] \frac{\partial S_A}{\partial \tau} - \tau_{qA} \omega \frac{\partial}{\partial \tau} \left([\sigma_A + \Theta_A] \frac{\partial S_A}{\partial \tau} \right). \quad (13)$$

Уравнения для материала подложки B :

$$\frac{1}{K_E} \frac{\partial^2 S_B}{\partial \tau^2} + K_{\alpha T} \frac{\partial^2 \Theta_B}{\partial \tau^2} + K_{\alpha} \gamma \frac{\partial^2 C_B}{\partial \tau^2} = \frac{1}{K_p} \frac{\partial^2 S_B}{\partial \xi^2}; \quad (14)$$

$$\frac{\partial C_B}{\partial \tau} + \tau_{DB} \frac{\partial^2 C_B}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(F(\Theta_B) \frac{\partial C_B}{\partial \xi} \right) - \frac{M\omega\gamma K_{\alpha}}{K_p} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{C_B F(\Theta_B)}{[\Theta_B + \sigma_B]} \frac{\partial S_B}{\partial \xi} \right]; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{K_p K_C}{K_{\alpha T}} \tau_{qB} \frac{\partial^2 \Theta_B}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \Theta_B}{\partial \tau} = \\ & = \frac{K_{\lambda}}{Le K_{\alpha T}} \frac{\partial^2 \Theta_B}{\partial \xi^2} - [\Theta_B + \sigma_B] \omega \frac{\partial S_B}{\partial \tau} - \tau_{qB} \omega \frac{\partial}{\partial \tau} \left([\Theta_B + \sigma_B] \frac{\partial S_B}{\partial \tau} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Граничные и начальные условия:

$$\xi = 0: \bar{J}_A = 0, \bar{J}_q = \mu\varphi(\tau), S_A = S_0\varphi(\tau); \quad (17)$$

$$\xi \rightarrow \infty: C_k = 0, S_k = 0; \quad (18)$$

$$\tau = 0: C_k = \begin{cases} 1.0, & 0 \leq \xi \leq h \\ 0.0, & \xi > h \end{cases}, S_k = 0, \Theta_k = \Theta_0, \frac{\partial C_k}{\partial \tau} = 0, \frac{\partial S_k}{\partial \tau} = 0; \quad (19)$$

$$\xi = H: \bar{u}_A = \bar{u}_B, S_A = S_B, C_A = C_B, \bar{J}_A = \bar{J}_B, J_{qA} = J_{qB}. \quad (20)$$

В решении (в граничных условиях) используются соотношения (4) – (7), также записанные в безразмерных переменных:

$$S_A = (e_A - \Theta_A - \gamma(C_A - C_0)); \quad (21)$$

$$\bar{J}_{qA} = -D(T_*) \frac{\partial C_A}{\partial \xi} + \frac{D(T_*)}{[\Theta_A + \sigma_A]} \gamma C_A M \omega \frac{\partial S_A}{\partial \xi} - \tau_{DA} \frac{\partial J_A}{\partial \tau}; \quad (22)$$

$$S_B = K_E (e_B - K_{\alpha T} \Theta_B - \gamma K_{\alpha} (C_B - C_0)); \quad (23)$$

$$\bar{J}_B = -D(T_*) K_p \frac{\partial C_B}{\partial \xi} + \frac{D(T_*)}{[\Theta_B + \sigma_B]} \gamma C_B M \omega K_{\alpha} \frac{\partial S_B}{\partial \xi} - \tau_{DB} \frac{\partial J_B}{\partial \tau}. \quad (24)$$

Функция $F(\Theta_A) = \exp(-1/\beta(\sigma_k + \Theta_k))$ является фактически безразмерным коэффициентом диффузии. Здесь $\sigma_k = T_0 / (T_* - T_0)$, $\beta = R(T_* - T_0) / E_a$.

Наличие внутренней границы приводит к появлению параметров модели, характеризующих отношение свойств материала покрытия и основного материала:

$$K_E = \frac{E_B}{E_A}, K_{\alpha T} = \frac{\alpha_{TB}}{\alpha_{TA}}, K_{\alpha} = \frac{\Delta\alpha_B}{\Delta\alpha_A}, K_p = \frac{\rho_B}{\rho_A}, K_{\lambda} = \frac{\lambda_{TB}}{\lambda_{TA}}, K_C = \frac{C_{\sigma B}}{C_{\sigma A}}.$$

Все остальные параметры модели приведены в таблице.

Параметры модели

$\tau_{Dk} = \frac{t_{Dk} E_A}{D \rho_A}$	$M = \frac{m C_{\sigma A}}{R}$	$\omega = \frac{\alpha_{TA}^2 E_A}{\rho_A C_{\sigma A}} (T_* - T_0)$	$\mu = \frac{q_0 D(T_*)}{\rho_A} \sqrt{\frac{\rho_A}{E_A}}$
$\tau_{qk} = \frac{t_{qk} E_A}{D \rho_A}$	$\gamma = \frac{\alpha_A - \alpha_0}{\alpha_{TA} (T_* - T_0)}$	$Le = \frac{D(T_*)}{\lambda_{TA} / (\rho_A C_{\sigma A})}$	$S_0 = \frac{\sigma_0 D(T_*)}{\sigma_*} \frac{\rho_A}{E_A}$

В работе представлены варианты расчетов для системы покрытие – подложка: Ni(Cu), Mo(Ni). Используя известные свойства указанных материалов [30], можно определить область изменения параметров, входящих в таблицу: $\omega = [10^{-4}..10^{-1}]$, $\tau_{Dk} = [10^{-5}..10^2]$, $\tau_{qk} = [10^{-7}..10^1]$, $\gamma = [-10..10]$, $Le = [10^{-2}..10^2]$, $\mu = [10^{-4}..0.9]$, $S_0 = [10^{-7}..10^{-2}]$. Видим, что параметры модели варьируются в достаточно широком диапазоне.

Метод решения

Задача (12) – (21) была решена численно по неявной разностной схеме. Например, для уравнения диффузии

$$\frac{\partial C_A}{\partial \tau} + \tau_{DA} \frac{\partial^2 C_A}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[F(\Theta_A) \frac{\partial C_A}{\partial \xi} \right] - M \omega \gamma \frac{\partial W_A}{\partial \xi},$$

где $W_k = C_k \frac{F(\Theta_k)}{\Theta_k + \sigma_k} \frac{\partial S_k}{\partial \xi}$, разностная схема имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{C_{A(i)}^{j+1} - C_{A(i)}^j}{\Delta t} + \tau_{DA} \frac{C_{A(i)}^{j+1} - 2C_{A(i)}^j + C_{A(i)}^{j-1}}{\Delta t^2} = \\ & = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{F_{A(i+1)}^j + F_{A(i)}^j}{2} \frac{C_{A(i+1)}^{j+1} - C_{A(i)}^{j+1}}{\Delta x} - \frac{F_{A(i)}^j + F_{A(i-1)}^j}{2} \frac{C_{A(i)}^{j+1} - C_{A(i-1)}^{j+1}}{\Delta x} \right] - M \omega \gamma \frac{W_{A(i)}^j - W_{A(i-1)}^j}{\Delta x}. \end{aligned}$$

В уравнение движения удобнее перейти от напряжений к деформациям с помощью (21),(23), тогда имеем

$$\frac{\partial^2 e_A}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 e_A}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \Theta_A}{\partial \xi^2} - \gamma \frac{\partial^2 C_A}{\partial \xi^2}.$$

Разностная схема имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{e_{A(i)}^{j+1} - 2e_{A(i)}^j + e_{A(i)}^{j-1}}{\Delta t^2} = \\ & = \frac{e_{A(i-1)}^{j+1} - 2e_{A(i)}^j + e_{A(i+1)}^{j-1}}{\Delta x^2} - \frac{\Theta_{A(i+1)}^j - 2\Theta_{A(i)}^j + \Theta_{A(i-1)}^j}{\Delta x^2} - \gamma \frac{C_{A(i+1)}^j - 2C_{A(i)}^j + C_{A(i-1)}^j}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

Эти уравнения далее приводятся к виду, удобному для метода прогонки.

Граничные условия также аппроксимируем со вторым порядком аппроксимации. Для этого используем разложения величин в точке, ближайшей к границе, в ряд Тейлора относительно граничных точек. С условиями на границе раздела между материалами поступаем аналогично. Однако разложения в ряд Тейлора строим слева и справа от границы. Вторые производные при этом находим из соответствующих дифференциальных уравнений.

Разработанный численный алгоритм устойчив во всей области изменения параметров модели. Сходимость проверяли, используя экстраполяцию на нулевой шаг. Во всех расчетах контролировалось выполнение закона сохранения массы.

Анализ результатов

Полагаем, что граница раздела материалов соответствует точке $h = 0.025$; на поверхность мишени действует одиночный синусоидальный импульс:

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} 0.02 \sin\left(\frac{\pi\tau}{\tau_{\text{imp}}}\right), & \tau \leq \tau_{\text{imp}}, \\ 0.0, & \tau > \tau_{\text{imp}} \end{cases}, \quad \tau_{\text{imp}} = 0.025.$$

Для системы Mo(Ni) значения основных параметров модели фиксированы:

$$\tau_r^{\text{Ni}} = 0.03, \quad \tau_r^{\text{Mo}} = 0.015, \quad \tau_q^{\text{Ni}} = 0.0006, \quad \tau_q^{\text{Mo}} = 0.0001, \quad \omega = 0.001, \quad \gamma = -0.003.$$

$$Le = 40.7, \quad \mu = 0.5, \quad S_0 = 0.001, \quad K_{\alpha T} = 0.38, \quad K_{\alpha} = 1.42, \quad K_{\rho} = 1.15, \quad K_{\lambda} = 1.52,$$

$$K_C = 0.51, \quad K_E = 1.6.$$

На рис. 1 представлены распределения температуры и деформации для этой системы для времен, меньших и сравнимых с относительными временами релаксации теплового потока, которые являются минимальными из всех времен, характерных для задачи. Поведение кривых в окрестности границ выделено для наглядности. Видно, что начальный этап обработки (моменты времени, сравнимые с $\tau_q^{\text{Ni}} = 0.0006$ и $\tau_q^{\text{Mo}} = 0.0001$) сопровождается незначительным понижением температуры в области границы раздела материалов. Деформации повторяют температурные профили. Диффузии материала покрытия в материал основы на данном этапе не наблюдается. Аналогичная картина имеет место и для системы Ni(Cu). Перегиб в деформациях в первом слое для моментов, больших $\tau_q^{\text{Mo}} = 0.0001$, связан со взаимодействием тепловой и механических волн.

Рисунок 2 демонстрирует распределения температуры для более поздних времен (сравнимых со временами релаксации потока массы) для разных сочетаний свойств материала покрытия и подложки. Видно, что в момент времени t на границе раздела материалов все еще присутствует перегиб температуры: незначительное понижение для Mo(Ni) и повышение для Ni(Cu). В дальнейшем, температурные распределения выравниваются, но на границе имеется искажение. Искажение температурного профиля по сравнению с типичным для классических задач теплопроводности более выражено для системы Ni(Cu), так как различие в свойствах этих материалов более значительно, чем для системы Mo(Ni). Особенно это касается величин коэффициентов теплопроводности:

$$K_{\sigma}^{\text{Ni(Cu)}} = 0.23, \quad K_{\sigma}^{\text{Mo(Ni)}} = 1.52.$$

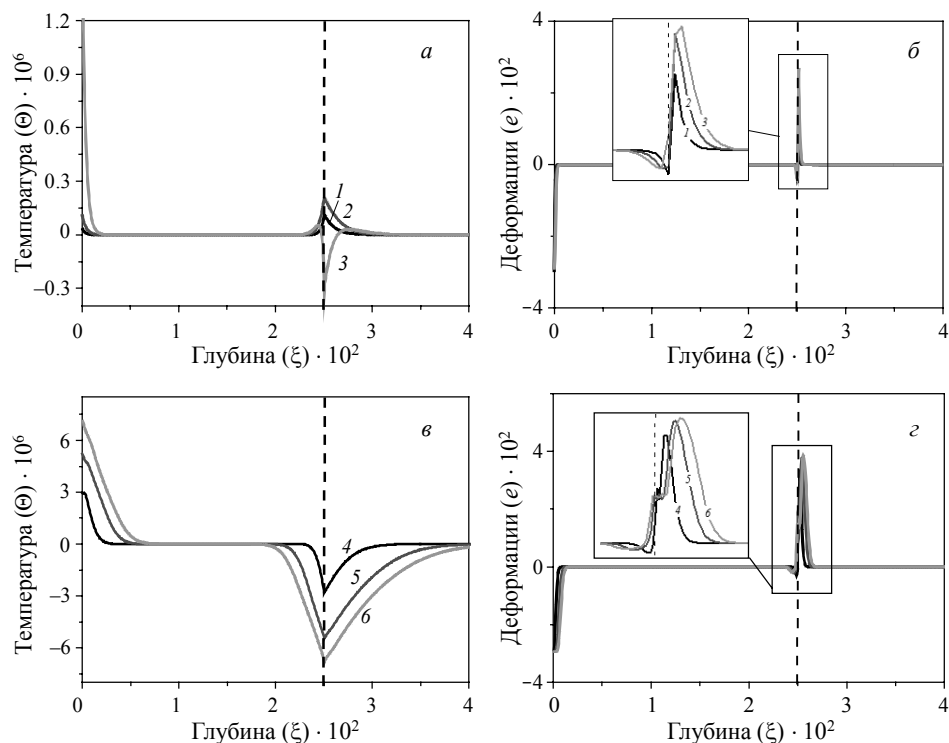


Рис. 1. Пример решения связанной задачи для системы Mo(Ni): а, в – профили распределения температуры; б, г – профили волн деформации. Моменты времени τ : 1 – 0.00005, 2 – 0.0001, 3 – 0.00015, 4 – 0.0003, 5 – 0.0006, 6 – 0.0008

Fig. 1. Example of coupled problem solution for a system Mo(Ni): (а), (в) profiles of the temperature distribution; (б), (г) profiles of the deformation waves. Time instants, $\tau = 1, 0.00005; 2, 0.0001; 3, 0.00015; 4, 0.0003; 5, 0.0006; \text{ and } 6, 0.0008$

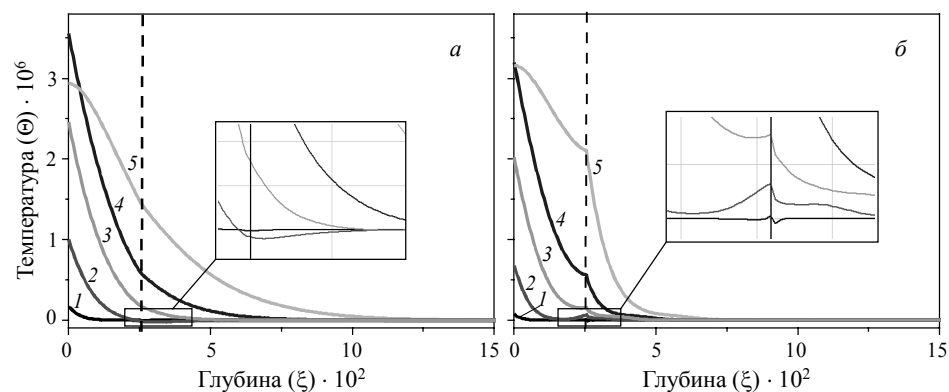


Рис. 2. Распределение температуры в разные моменты времени, большие, чем времена релаксации потока тепла: а – Mo(Ni); б – Ni(Cu). Моменты времени τ : 1 – 0.0015; 2 – 0.005; 3 – 0.01; 4 – 0.015, 5 – 0.025

Fig. 2. Temperature distribution at various time instants exceeding the heat flux relaxation time: (а) Mo(Ni) and (б) Ni(Cu). Time instants, $\tau = 1, 0.0015; 2, 0.005; 3, 0.01; 4, 0.015; \text{ and } 5, 0.025$

Для больших времен, когда начинается перераспределение концентраций, картина становится более сложной из-за взаимодействия волн разной физической природы. При выбранном наборе параметров время релаксации потока тепла много меньше всех других характерных времен. Поэтому гиперболический тип уравнения переноса тепла для времен, больших 0.001, не проявляется, чего нельзя сказать об уравнении диффузии. Примеры распределения концентраций и деформаций представлены на рис. 3 и 4.

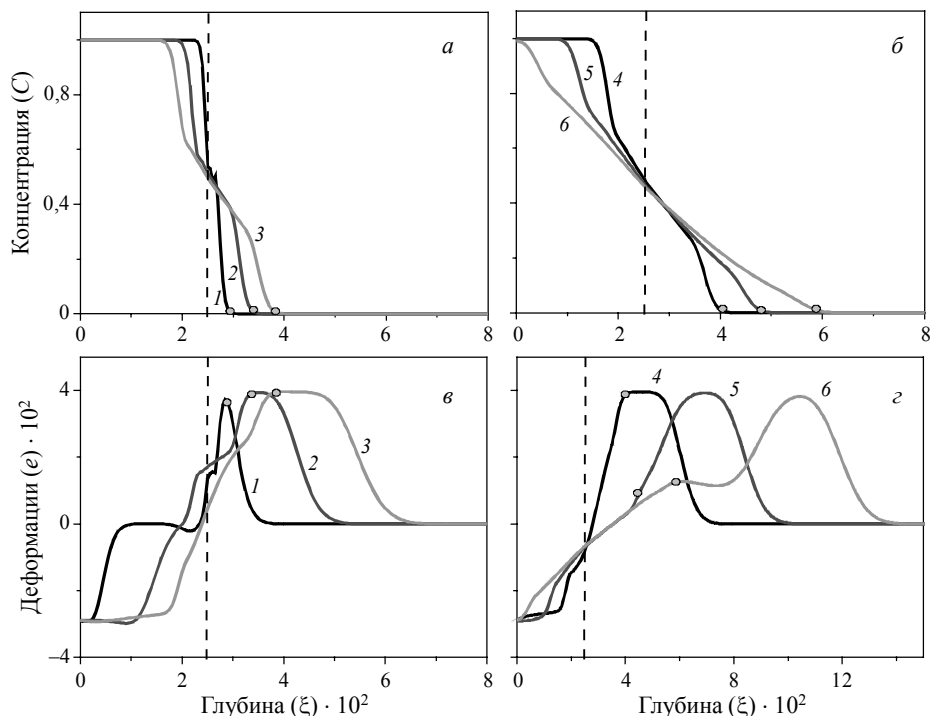


Рис. 3. Пример решения связанной задачи для системы Mo(Ni): а, б – распределения концентрации диффузанта Ni; в, г – распределения деформации. Моменты времени τ : 1 – 0.005, 2 – 0.015, 3 – 0.025, 4 – 0.03, 5 – 0.05, 6 – 0.08

Fig. 3. Example of coupled problem solution for a system Mo(Ni): (а), (б) profiles of the diffusant distribution Ni; (в), (г) profiles of the deformation waves. Time instants, $\tau = 1, 0.005; 2, 0.015; 3, 0.025; 4, 0.03; 5, 0.05; \text{ and } 6, 0.08$

Кривые на рисунках слева соответствуют моментам времени, меньшим или равным τ_{imp} . Для кривых справа – $\tau > \tau_{\text{imp}}$. Длительность импульса находится между диффузионными временами релаксации. На всех кривых четко виден передний фронт концентрационной волны. Ему соответствуют точки на профилях деформаций. После того, как волна деформаций доходит до границы раздела, что соответствует времени $\tau \approx 0.013$, она частично отражается от этой границы, а частично проходит во второй материал. С этими явлениями связаны смена знака деформаций и перегибы на кривых (рис. 3, в и г). Поскольку скорость механической волны выше, чем диффузионной, первая со временем убегает вперед.

Пока действует внешний импульс, продолжается нагрев, затем нагрев прекращается и материал покрытия проникает в материал подложки вследствие не диф-

фузионного механизма переноса, а из-за наличия градиента деформаций (напряжений) в окрестности границы раздела материалов. Для моментов времени, меньших, чем относительное время релаксации $\tau_r^{\text{Mo}} = 0.015$, точка положения переднего фронта волны концентрации соответствует экстремуму деформации. Далее в этих же точках, когда $\tau > \tau_r^{\text{Ni}} = 0.03$ (моменты времени 5, 6 на рис. 1), наблюдается искажение профиля упругой волны.

На рис. 4 представлены распределения концентраций и деформаций для системы Ni(Cu). Значения основных параметров модели в этом случае следующие:

$$\tau_r^{\text{Cu}} = 0.045, \tau_r^{\text{Ni}} = 0.03, \tau_q^{\text{Cu}} = 0.003, \tau_q^{\text{Ni}} = 0.0006, \omega = 0.001, \gamma = 0.003,$$

$$Le = 40.7, \mu = 0.5, S_0 = 0.001, K_{\alpha T} = 0.8, K_{\alpha} = 0.93, K_p = 0.99,$$

$$K_{\lambda} = 0.23, K_C = 0.9, K_E = 1.9.$$

Механизм взаимодействия двух волн: концентрации материала покрытия и упругой волны деформации, аналогичен предыдущему примеру. Основное отличие состоит в знаке генерируемых деформаций, что связано с другим знаком разности коэффициентов концентрационного расширения материалов покрытия и основы $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$. Т.е. параметр модели $\gamma = \Delta\alpha / \alpha_{TA} (T_* - T_0)$ тоже может менять знак для разных сочетаний материалов. Картина распространения деформационных волн в этом случае оказывается более сложной.

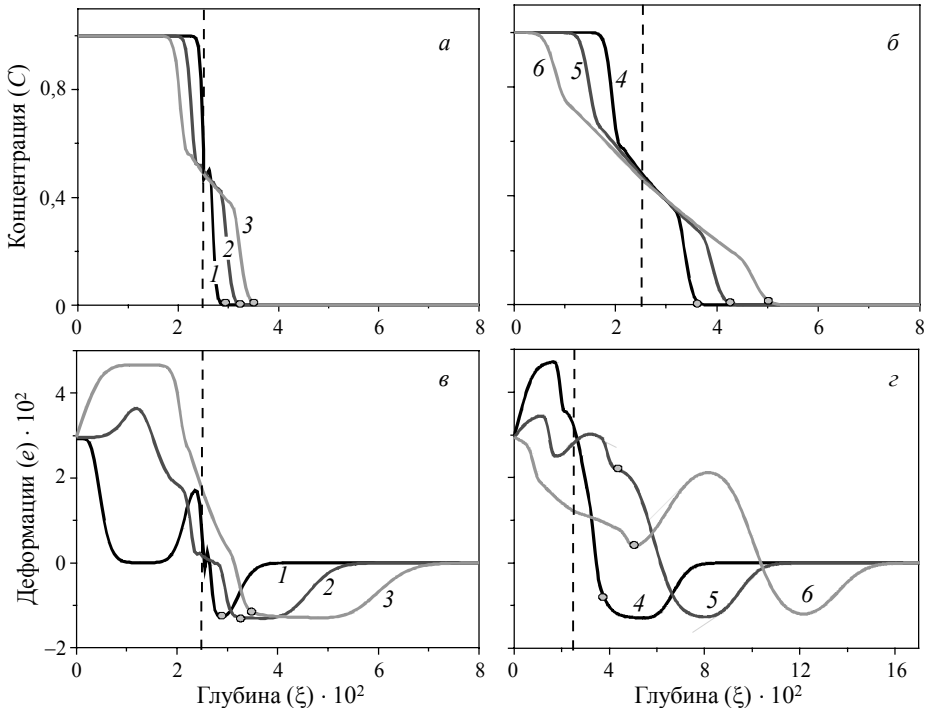


Рис. 4. Пример решения связанной задачи для системы Ni(Cu): а, б – профили распределения концентрации материала покрытия Ni; в, г – профили волн деформации. Моменты времени τ : 1 – 0.005, 2 – 0.015, 3 – 0.025, 4 – 0.03, 5 – 0.05, 6 – 0.08

Fig. 4. Example of coupled problem solution for a system Ni(Cu): (а), (б) profiles of the distribution of coating material concentration Ni; (в), (г) profiles of the deformation waves. Time instants, τ = 1, 0.005; 2, 0.015; 3, 0.025; 4, 0.03; 5, 0.05; and 6, 0.08

Заключение

Таким образом, в работе представлена связанная математическая модель для описания процесса перераспределения материалов в окрестности границы раздела при условии воздействия короткого теплового и механического импульса, соответствующего потоку электронов. Показано, что взаимодействие волн разной физической природы (концентрация материала покрытия, деформации) приводит к искажению волны деформации. Продемонстрировано, что после прекращения действия импульса перераспределение материалов происходит благодаря наличию градиента деформаций. В зависимости от соотношения свойств материалов (покрытие – основа) наблюдаются качественные изменения в распределениях концентраций и деформаций: изменяется знак деформаций, количество экстремумов, поведение тепловой волны в окрестности границы раздела на достаточно малых временах. Но механизмы взаимодействия волн для разных соотношений свойств подобны друг другу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Углов В.В., Квасов Н.Т., Петухов Ю.А. и др. Структурно-фазовые превращения в системе титан – кремний, модифицированной сильноточным электронными пучками и компрессионными плазменными потоками // Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед. 2012. № 4. С. 9–16.
2. Konovalov S.V. et al. Structure of titanium alloy, modified by electron beams and destroyed during fatigue // Letters on Materials. 2017. V. 7. No. 3. P. 266–271. DOI: 10.22226/2410-3535-2017-3-266-271.
3. Koval N.N., Ivanov Yu.F. Nanostructuring of surfaces of metalloceramic and ceramic materials by electron-beams // Russ. Phys. J. 2008. V. 51. No. 5. P. 505–516. DOI: 10.1007/s11182-008-9073-7.
4. Zhang K.M., Zou J.X., Bolle B., Grosdidier T. Evolution of residual stress states in surface layers of an AISI D2 steel treated by low energy high current pulsed electron beam // Vacuum. 2013. V. 87. P. 60–68. DOI: 10.1016/j.vacuum.2012.03.061.
5. Lu J., Wei D.Q., Wang R., Sui X.M., Yin J.W. Surface polishing and modification of 3Cr2Mo mold steel by electron beam irradiation // Vacuum. 2017. V. 143. P. 283–287. <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2017.06.010>.
6. Алонцева Д.Л., Красавин А.Л., Погребняк А.Д. и др. Модификация электронным облучением структурно-фазового состояния и свойств плазменно-детонационных покрытий на основе Ni-Cr // Перспективные материалы. 2013. № 1. С. 5–12.
7. Ласковнев А.П., Иванов Ю.Ф., Петрикова Е.А. и др. Модификация структуры и свойств эвтектического силумина электронно-ионно-плазменной обработкой. Минск: Беларус. навука, 2013. 287 с.
8. Смолин А.Ю., Еремина Г.М. Численное исследование влияния материала подложки на деформирование и разрушение системы покрытие – подложка // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 48. С. 91–106. DOI: 10.17223/19988621/48/9.
9. Смолин А.Ю., Аникеева Г.М., Шилько Е.В., Псахье С.Г. Моделирование деформации наноструктурных покрытий на титановой подложке при наноиндентировании // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 4(24). С. 111–125.
10. Степанова Е.Н., Грабовецкая Г.П., Тересов А.Д., Мишин И.П. Эволюция структуры и спектра разориентировок границ зерен субмикрористаллического молибдена при облучении импульсным электронным пучком // Изв. вузов. Физика. 2018. № 1. С. 3–8.
11. Бойко В.И., Евстигнеев В.В. Введение в физику взаимодействия сильноточных пучков заряженных частиц с веществом. М.: Энергоатомиздат, 1988. 136 с.
12. Бойко В.И., Скворцов В.А., Фортвов В.Е., Шаманин И.В. Взаимодействие импульсных пучков заряженных частиц с веществом. М.: Физматлит, 2003. 288 с.

13. Бойко В.И., Данейкин Ю.В., Хадкевич А.В., Юшицин К.В. Влияние механизмов генерации на профиль импульса механических напряжений в металлической мишени при воздействии мощных ионных пучков // Известия Томского политехнического университета. 2007. Т. 310. № 2. С. 87–93.
14. Амирханов И.В., Пузынин И.В., Пузынина Т.П., Сархадов И. Исследование термоупругих эффектов в металлах в рамках модифицированной модели термического пика // Вестник РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика. 2013. № 2. С. 77–84.
15. Амирханов И.В., Дидык А.Ю., Музафаров Д.З. и др. Модельное описание термоупругих напряжений в материалах при облучении тяжелыми ионами высоких энергий // Вестник РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика. 2010. Т. 2. № 3. С. 68–71.
16. Бойко В.И., Данейкин Ю.В., Пименов Э.Ю., Лисов В.И. Характеристики ударно-волнового возмущения в металлах при облучении ионными пучками // Изв. вузов. Физика. 2014. Т. 57. № 11/2. С. 151–156.
17. Лейви А.Я., Талала К.А., Красников В.С., Яловец А.П. Модификация свойств конструкционных материалов интенсивными потоками заряженных частиц и плазмы // Вестник ЮУрГУ. Сер. Машиностроение. 2016. Т. 16. № 1. С. 28–55. DOI: 10.14529/engin160103.
18. Волков Н.Б., Майер А.Е., Яловец А.П. О механизме кратерообразования на поверхности твердых тел при воздействии интенсивных пучков заряженных частиц // Журнал технической физики. 2002. Т. 72. Вып. 8. С. 34–43.
19. Chepak-Gizbrekht M., Knyazeva A.G. Stress Evaluation in the Surface Layer at the Condition of Particle Beam // Advanced Materials Research. 2014. V. 880. P. 259–264. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.880.259.
20. Kryukova O.N., Knyazeva A.G., Maslov A.L. Modeling of Phase Evolution in Coated Titanium Nikelide under Irreversible Action of Electron Beam // AIP Conference Proceedings. 2016. V. 1783. Article number 020119. <https://doi.org/10.1063/1.4966412>.
21. Sorokova S.N., Knyazeva A.G. Solid phase synthesis of coating on the base under the electron beam surfacing // Applied Mechanics and Materials. 2013. V. 379. P. 60–65. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.379.60.
22. Иванов Ю.Ф., Петрикова Е.А., Иванова О.В. и др. Модификация интенсивным импульсным электронным пучком системы покрытие (TiN) – подложка (BT1-0) // Изв. вузов. Физика. 2015. Т. 58. № 3. С. 75–81.
23. Демидов В.Н., Князева А.Г., Ильина Е.С. Особенности моделирования диффузионных процессов в упругом теле при его поверхностной модификации частицами // Вестник ПНИПУ. Механика. Сборник «Математическое моделирование систем и процессов». 2012. № 3. С. 25–49.
24. Kryukova O.N., Chepak-Gizbrekht M.V. Thermal Activated Elements Redistribution between Two-component Coating and Substrate // Key Engineering Materials. 2015. V. 685. P. 200–205. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.685.200.
25. Parfenova E.S. The Mathematical Modeling of the Initial Stage of Ion Implantation into the Target with Coating // Key Engineering Materials. 2017. V. 743. P. 138–141. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.743.138.
26. Князева А.Г. Нелинейные модели деформируемых сред с диффузией // Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. № 6. С. 35–51.
27. Sherief H.H., Hamza F., Saleh H. The Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion // Int. J. Eng. Sci. 2004. V. 42. P. 591–608.
28. Aouadi M. Generalized Theory of Thermoelastic Diffusion for Anisotropic Media // J. Thermal Stresses. 2008. V. 31. P. 1–16.
29. Князева А.Г. Диффузия и реология в локально-равновесной термодинамике // Вестник ПНИПУ. Сборник «Математическое моделирование систем и процессов» / под ред. П.В. Трусова. 2005. № 13. С. 45–60.
30. Физические величины: справочник / Н.А. Баби́чев [и др.]; под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.

Статья поступила 28.03.2018 г.

Parfenova E.S., Knyazeva A.G. (2018) THE INITIAL STAGE OF TRANSIENT LAYER FORMATION BETWEEN FILM AND SUBSTRATE DURING HEATING BY A HIGH-CURRENT ELECTRON BEAM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 54. pp. 103–117

DOI 10.17223/19988621/54/9

Keywords: mathematical modeling, electron-beam heating, diffusion, stress, deformation, relaxation time, coating

At the present time, the processes of interaction of the concentrated energy fluxes with materials are being widely studied. Of greatest interest in this area are the low-energy high-current electron beams, which are often used to modify the pre-applied coating and to improve the adhesion of the coating-substrate system.

Alongside with such processes as heating, phase formation, mixing, etc., at the moment of interaction between electron beam and target surface, the elastic waves of mechanical perturbations are generated. Experimental study of each process separately is difficult. However, mathematical modeling allows one both to study in details all the stages of processing, to evaluate the role of each arising phenomenon separately, and to reveal the relationship between the processes of interest.

The paper presents a mathematical model of the initial stage of transition layer formation between film and substrate when heated by a high-current electron beam. The system of mass balance equation, heat-transfer equation, and equation of motion is used to describe the interaction between the waves of coating material concentration, heat waves, and stress (strain) waves under the action of electron flux. Governing relations correspond to the theory of generalized thermoelastic diffusion. For numerical solving of the problem, a transition to dimensionless variables is carried out. The developed numerical algorithm is based on an implicit difference scheme.

The examples of coupled problem solution for two coating-substrate systems – Mo(Ni), Ni(Cu) are presented in the paper. It is shown that the interaction between waves of different physical nature leads to a distortion of strain wave. It was demonstrated that the action of momentum is followed by the material redistribution, which occurs due to the presence of strain gradient. For various ratios of material properties (coating-base), the qualitative changes in the distribution of concentration and deformations are observed, while the wave interaction mechanisms are similar.

PARFENOVA Elena Sergeevna (School of Advanced Manufacturing Technologies, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)

KNYAZEVA Anna Georgievna (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, School of Advanced Manufacturing Technologies, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)

REFERENCES

1. Uglov V.V., Kvasov N.T., Petukhov Yu.A., Kudaktin R.S., et al. (2012) Strukturno-fazovye prevrashcheniya v sisteme titan-kremniy, modifitsirovannoy sil'notochnym elektronnymi puchkami i kompressionnymi plazmennymi potokami [Structural phase transformations in a titanium–silicon system modified by a high-current electron beams and compression plasma fluxes]. *Poverkhnost'. Rentgen., sinkhrotr. i neytron. issled. – Journal of Surface Investigation: X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 4. pp. 9–16.
2. Konovalov S.V., et al. (2017) Structure of titanium alloy, modified by electron beams and destroyed during fatigue. *Letters on Materials*. 7(3). pp. 266–271. DOI: 10.22226/2410-3535-2017-3-266-271.
3. Koval N.N., Ivanov Yu.F. (2008) Nanostructuring of surfaces of metalloceramic and ceramic materials by electron-beams. *Russian Physics Journal*. 51(5). pp. 505–516. DOI: 10.1007/s11182-008-9073-7.

4. Zhang K.M., Zou J.X., Bolle B., Grosdidier T. (2013) Evolution of residual stress states in surface layers of an AISI D2 steel treated by low energy high current pulsed electron beam. *Vacuum*. 87. pp. 60–68. DOI: 10.1016/j.vacuum.2012.03.061.
5. Lu J., Wei D.Q., Wang R., Sui X.M., Yin J.W. (2017) Surface polishing and modification of 3Cr2Mo mold steel by electron beam irradiation. *Vacuum*. 143. pp. 283–287. DOI: 10.1016/j.vacuum.2017.06.010.
6. Alontseva D.L., Krasavin A.L., Pogrebnyak A.D., Rakhmetullina S.Zh., Rusakova A.V. (2013) Modifikatsiya elektronnykh oblucheniem strukturno-fazovogo sostoyaniya i svoystv plazmenno-detonatsionnykh pokrytiy na osnove Ni-Cr [Modification by e-beam irradiation of structure-phase composition and properties of plasma detonation coatings]. *Perspektivnye materialy – Journal of Advanced Materials*. 1. pp. 5–12.
7. Laskovnev A.P., Ivanov Yu.F., Petrikova E.A. et al (2013) *Modifikatsiya struktury i svoystv evtekticheskogo silumina elektronno-ionno-plazmennoy obrabotkoy* [Modification of the structure and properties of eutectic silumin by electron-ion-plasma processing]. Minsk: Belarus. navuka.
8. Smolin A.Yu., Eremina G.M. (2017) Chislennoe issledovanie vliyaniya materiala podlozhki na deformirovaniye i razrusheniye sistemy «pokrytie-podlozhka» [Numerical study of the influence of substrate material on deformation and fracture of the coating – substrate system]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 48. pp. 91–106. DOI: 10.17223/19988621/48/9.
9. Smolin A.Yu., Anikeeva G.M., Shil'ko E.V., Psakh'e S.G. (2013) Modelirovaniye deformatsii nanostrukturnykh pokrytiy na titanovoy podlozhke pri nanoindentirovaniy [Modeling deformation of nanostructured coatings on a titanium substrate under nanoindentation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(24). pp. 111–125.
10. Stepanova E.N., Grabovetskaya G.P., Teresov A.D., Mishin I.P. (2018) Evolyutsiya struktury i spektra razorientirovok granits zeren submikrokristallicheskogo molibdena pri obluchenii impul'snym elektronnykh puchkom [Evolution of the structure and spectrum of disordered grain boundaries of the submicrocrystalline molybdenum under irradiation by a pulsed electron beam]. *Izv. Vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*. 1. pp. 3–8.
11. Boyko V.I., Evstigneev V.V. (1988) *Vvedenie v fiziku vzaimodeystviya sil'notochnykh puchkov zaryazhennykh chastits s veshchestvom* [Introduction to physics of interaction between high-current beam of charged particles and matter]. Moscow: Energoatomizdat.
12. Boyko V.I., Skvortsov V.A., Fortov V.E., Shamanin I.V. (2003) *Vzaimodeystvie impul'snykh puchkov zaryazhennykh chastits s veshchestvom* [Interaction of pulsed beams of charged particles with matter]. Moscow: Fizmatlit.
13. Boyko V.I., Daneykin Yu.V., Khadkevich A.V., Yushitsin K.V. (2007) Influence of generation mechanisms on pulse profile of mechanical stress in metal target under the action of power ion beams. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*. 310(2). pp. 82–88.
14. Amirkhanov I.V., Puzinin I.V., Puzinina T.P., Sarkhadov I. (2013) Issledovanie termouprugikh effektiv v metallakh v ramkakh modifitsirovannoy modeli termicheskogo pika [Investigation of thermoelastic effects in metals in the frame of the modified thermal spike model]. *Vestnik RUDN. Seriya Matematika. Informatika. Fizika – RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics*. 2. pp. 77–84.
15. Amirkhanov I.V., Didyk A.Yu., Muzafarov D.Z., et al. (2010) Model'noe opisanie termouprugikh napryazheniy v materialakh pri obluchenii tyazhelymi ionami vysokikh energiy [Model description of thermoelastic tensions in materials exposed to high energy heavy ions]. *Vestnik RUDN. Seriya Matematika. Informatika. Fizika – RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics*. 2(3). pp. 68–71.
16. Boyko V.I., Daneykin Yu.V., Pimenov E.Yu., Lisov V.I. (2014) Kharakteristiki udarno-volnovogo vozmushcheniya v metallakh pri obluchenii ionnymi puchkami [characteristics of a shock wave perturbation in metals irradiated by ion beams]. *Izv. Vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*. 57(11/2). pp. 151–156.

17. Leyvi A.Ya., Talala K.A., Krasnikov V.S., Yalovets A.P. (2016) Modifikatsiya svoystv konstruktivnykh materialov intensivnymi potokami zaryazhennykh chastits i plazmy [Modification of the constructional material with the intensive charged particle beams and plasma flows]. *Vestnik YuUrGU. Seriya «Mashinostroyeniye» – Bulletin of SUSU, Series “Mechanical engineering industry”*. 16(1). pp. 28–55. DOI: 10.14529/engin160103.
18. Volkov N.B., Maier A.E., Yalovec A.P. (2002) On the mechanism of cratering on solid surfaces exposed to an intense charged particle beam. *Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics*. 47(8). pp. 968–977.
19. Chepak-Gizbrekht M., Knyazeva A.G. (2014) stress evaluation in the surface layer at the condition of particle beam. *Advanced Materials Research*. 880. pp. 259–264. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.880.259.
20. Kryukova O.N., Knyazeva A.G., Maslov A.L. (2016) Modeling of phase evolution in coated titanium nikelide under irreversible action of electron beam. *AIP Conference Proceedings*. 1783(020119). DOI: 10.1063/1.4966412.
21. Sorokova S.N., Knyazeva A.G. (2013) Solid phase synthesis of coating on the base under the electron beam surfacing. *Applied Mechanics and Materials*. 379. pp. 60–65. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.379.60.
22. Ivanov Yu.F., Petrikova E.A., Ivanova O.V., Ikonnikova I.A., Teresov A.D., Shugurov V.V., Krysina O.V. (2015) Modifikatsiya intensivnym impul'snym elektronnym puchkom sistemy pokrytie (TiN) – podlozhka (VT1-0) [Modification by an intense pulsed electron beam of the coating system (TiN) – base (BT1-0)]. *Izv. Vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*. 58(3). pp.75–81.
23. Demidov V.N., Knyazeva A.G., Ilina E.S. (2012) Osobennosti modelirovaniya diffuzionnykh protsessov v uprugom tele pri ego poverkhnostnoy modifikatsii chastitsami [The modeling features of diffusion processes in an elastic body during the surface treatment of particles]. *Vestnik PNPU. Mehanika. Sbornik «Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov» – PNRPU Mechanics Bulletin*. 3. pp. 25–49.
24. Kryukova O.N., Chepak-Gizbrekht M.V. (2015) Thermal activated elements redistribution between two-component coating and substrate. *Key Engineering Materials*. 685. pp. 200–205. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.685.200.
25. Parfenova E.S. (2017) The mathematical modeling of the initial stage of ion implantation into the target with coating. *Key Engineering Materials*. 743. pp. 138–141. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.743.138.
26. Knyazeva A.G. (2011) Nelineynye modeli deformiruemykh sred s diffuziey [Nonlinear models of deformable media with diffusion]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 14(6). pp. 35–51.
27. Sherief H.H., Hamza F., Saleh H. (2004) The theory of generalized thermoelastic diffusion. *Int. J. Eng. Sci.* 42. pp. 591–608.
28. Aouadi M. (2008) Generalized theory of thermoelastic diffusion for anisotropic media. *J. Thermal Stresses*. 31. pp. 1–16.
29. Knyazeva A.G. (2005) Diffuziya i reologiya v lokal'no-ravnovesnoy termodinamike [Diffusion and rheology in locally-equilibrium thermodynamics]. *Vestnik PNPU. Sbornik «Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov»– PNRPU Mechanics Bulletin*. 13. pp. 45–60.
30. Babichev N.A., et al. (1991) *Fizicheskie velichiny: spravochnik* [Physical Values: Handbook]. Moscow: Energoatomizdat.

УДК 533.69
DOI 10.17223/19988621/54/10

К.А. Степанов, С.В. Тимченко

АЭРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ИЗОЛИРОВАННОГО ТРЕХМЕРНОГО КРЫЛА БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА¹

Для аэродинамического проектирования трехмерного крыла беспилотного летательного аппарата среднего класса используется новая технология оптимального проектирования аэродинамических конфигураций на основе программного продукта нового поколения. Оптимальная форма крыла, обладающая минимальным полным сопротивлением при фиксированном коэффициенте подъемной силы и отвечающая заданным геометрическим и аэродинамическим ограничениям, определяется на основе глобального метода поиска и численных решений полных уравнений Навье – Стокса. Показано, что предложенный подход обеспечивает снижение сопротивления крыла в зоне крейсерского режима полета и позволяет значительно снизить материальные и временные затраты на аэродинамическое проектирование летательного аппарата.

Ключевые слова: *оптимальное проектирование, полные уравнения Навье – Стокса, нелинейные ограничения, коэффициент сопротивления, момент тангажа.*

При проектировании летательного аппарата весь процесс, как правило, делится на три последовательных этапа. На первом этапе (концептуального проектирования), после определения основных интегральных характеристик вновь создаваемого аппарата (таких, как дальность, грузоподъемность, крейсерская скорость, энергоэффективность и т.д.), принимается решение о характере компоновки (характер фюзеляжа, вариант расположения крыла по отношению к фюзеляжу, место расположения двигателя и его тип и т.д.) и о форме крыла в плане, включая относительные толщины его базовых секционных сечений и габаритные ограничения (например, для размещения бака для топлива).

На следующем этапе (предварительного проектирования), на первый план выходит задача аэродинамического проектирования аппарата, в ходе которого должна быть определена форма летательного аппарата, включая форму его ключевого элемента, а именно крыла. Эта форма должна отвечать целому ряду (зачастую противоречивых) требований к основным аэродинамическим интегральным характеристикам самолета (коэффициентам подъемной силы, полного сопротивления, моментам тангажа, рыскания и крена) и обеспечения устойчивости этих характеристик в достаточно широком диапазоне условий полета. Фактически по окончании этого этапа дается окончательный ответ на вопрос: удалось найти форму, которая гарантированно удовлетворяет всем требованиям к летательному аппарату по дальности, грузоподъемности и энергоэффективности или нет. Данный этап фактически является решающим, поскольку именно по его завершении

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке прикладных научных исследований Министерства образования и науки РФ: уникальный идентификатор работ RFMEFI57617X0094.

принимается окончательное решение о судьбе проекта. Если этап аэродинамического проектирования завершился успешно, то переходят к третьему, финальному этапу детального проектирования. Если же задачу аэродинамического проектирования решить не удастся, то на этом проект заканчивается. Поэтому понятно, что успешное завершение стадии предварительного проектирования и достижение всех целей, поставленных перед этой стадией проекта, является ключевым фактором для успеха проекта создания аппарата в целом.

Из чего же состоит в настоящее время технология аэродинамического проектирования? Фактически, она представляет собой растянутый на достаточно длительный срок итерационный процесс, основанный на методе «проб и ошибок». В силу «ручного» характера его реализации, существующая в настоящее время технология аэродинамического проектирования требует больших материальных ресурсов и значительного количества высококвалифицированных кадров.

В рамках этой технологии :

- Конструктор, базируясь на большой массив экспериментальных данных и с учетом своего опыта и интуиции, предлагает начальную форму летательного аппарата.

- Производится аэродинамический анализ предложенной конфигурации в широком диапазоне условий полета (чисел Маха, Рейнольдса, углов атаки, крена и рыскания). В рамках этого анализа (основанного на сочетании численных методов решения газодинамических уравнений различной степени точности, принятых в промышленности приближенных инженерных методик и экспериментальных продувок модели аппарата в аэродинамических трубах) определяется большой массив как интегральных (значения аэродинамических сил и моментов), так и локальных (распределения давления на поверхности, поведение линий тока на поверхности и т.д.) данных для так называемого «flight envelope».

- Третий шаг этого итерационного процесса связан с критическим анализом полученных данных. В рамках этого шага осуществляется проверка, насколько рассматриваемая геометрия удовлетворяет всем требованиям к самолету по дальности, грузоподъемности и энергоэффективности и т. д. Если всем требованиям данная геометрия удовлетворяет, то процесс аэродинамического проектирования успешно завершается. Если же всем необходимым требованиям и ограничениям данная проанализированная геометрия не отвечает, то конструктор, исходя из результатов анализа причин этого несоответствия, предлагает определенные модификации формы летательного аппарата и итерационный цикл процесса аэродинамического проектирования повторяется. При этом ключевым элементом определяющим, можно сказать успех проектирования, является значение коэффициента полного сопротивления C_X всего аппарата на крейсерских режимах полета, поскольку именно от него в основном зависит дальность полета и энергоэффективность летательного аппарата.

Основанный по большей части на опыте дизайнера и его интуиции, этот процесс, как уже говорилось, требует большого числа циклов дизайна (на практике достигающих до 6–7), а также больших временных и финансовых затрат. Таким образом, по-настоящему назревшими требованиями авиапромышленности является переход с «ручного» метода проб и ошибок на новый технологический подход, в основе которого лежат программные продукты нового поколения для автоматического оптимального аэродинамического проектирования летательных аппаратов с учетом конструктивных параметров и конструктивных ограничений.

Новая технология автоматического оптимального аэродинамического проектирования летательных аппаратов базируется на программных продуктах нового поколения на основе точных и вычислительно-эффективных алгоритмов аэродинамического анализа и глобальных методов автоматического оптимального поиска с использованием многоуровневой параллелизации вычислительного потока на суперкомпьютерных вычислительных кластерах.

Данная технология проектирования основана на системном применении:

- Математических моделей высокого уровня достоверности;
- Численных методов высокого порядка точности решения осредненных по числу Рейнольдса уравнений Навье – Стокса на структурированных вычислительных сетках;
- Вычислительно-эффективных глобальных методов оптимального поиска с учетом нелинейных ограничений на оптимальное решение различного типа;
- Глобальной аппроксимации оптимизируемых поверхностей летательного аппарата на основе кривых Безье и поверхностей Безье;
- Параллельных вычислений с высоким уровнем параллельной эффективности, позволяющих использовать наилучшим образом вычислительные мощности многопроцессорных суперкомпьютерных вычислительных кластеров.

В данной работе новая технология применена для оптимального аэродинамического проектирования беспилотного летательного аппарата (БЛА) самолетного типа среднего класса.

В результате, такой подход к аэродинамическому проектированию позволил:

- 1) сократить время цикла дизайна и число таких циклов (за счет эффективного использования вычислительных мощностей и суперкомпьютерных вычислительных технологий);
- 2) значительно уменьшить материальные затраты на дизайн (за счет сокращения количества персонала, занятого в проектировании и сокращения времени проектирования);
- 3) улучшить качество аэродинамического дизайна (за счет использования высокоточной математической модели для расчета основных аэродинамических характеристик);
- 4) уменьшить эксплуатационные расходы на БЛА (за счет улучшения его аэродинамических характеристик).

1. Постановка задачи

С математической точки зрения задача аэродинамического проектирования может быть сформулирована как задача определения оптимальной формы летательного аппарата, которая:

- Обладает минимально возможным сопротивлением на крейсерских режимах полета при заданном коэффициенте подъемной силы;
- Обладает достаточным для необходимой грузоподъемности самолета коэффициентом подъемной силы на режиме взлета;
- Отвечает заданным габаритным и аэродинамическим ограничениям.

Отметим, что используемая технология не имеет аналогов в мире, поскольку:

- Расчет основной целевой функции (полного аэродинамического сопротивления C_X) базируется на численном решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса с использованием конечно-разностной схемы повышенного порядка точности;

- Оптимальная форма ищется с использованием генетических алгоритмов, при этом количество учитываемых нелинейных ограничений на оптимальное решение произвольно;

- Технология обладает высокой вычислительной эффективностью, позволяющей получать решение в сжатые сроки.

Прежде чем сформулировать задачу оптимального аэродинамического проектирования БЛА среднего класса, отметим, что такие аппараты имеют взлетную массу около 500 кг и массу полезной нагрузки около 100 кг. Поскольку типичная высота полета составляет 5–6 км, скорость – 150–200 км/ч, а C_y крейсерского полета составляет порядка 1.0–1.2, тогда при $V = 50$ м/с и $H = 5000$ м имеем $G/S = 80$ кГ/м². Таким образом, при взлетной массе 500 кг площадь крыла должна составлять 5–6 м².

Основным требованием, определяющим эффективность БЛА такого класса, является большая продолжительность полета. Типовое полетное задание состоит: подготовка к полету, взлет/набор высоты, крейсерский полет, снижение, посадка, причем практически всё полетное время занимает именно крейсерский режим.

При установившемся горизонтальном полете сила тяжести уравновешена подъемной силой Y , сопротивление X – тягой двигателя, при этом потребная мощность определяется как произведение сопротивления на скорость полета. Отсюда получаем, что необходимая для полета мощность обратно пропорциональна величине $C_y^{3/2}/C_x$, так называемому планерному качеству. Соответственно для достижения максимальной продолжительности полета требуется увеличение данного параметра. Максимальный коэффициент подъемной силы крыла без механизации $C_{y_{\max}} \sim 1.7$ –1.8, с учетом запаса по скорости сваливания 1.2 получаем, что $C_{y_{\text{крей}}}$ имеет порядок 1.18–1.25.

При малых удлинениях крыла индуктивное сопротивление будет неприемлемо большим, поэтому удлинение необходимо делать как можно большим, насколько позволяет прочность конструкции. Оптимум по величине удлинения достаточно пологий, можно считать, что $\lambda = 20$ –25 – это вполне рациональное значение. Таким образом, для нашего аппарата можно принять значения $S = 5$ м² и размах $L = 10$ м.

Для облегчения конструкции необходимо иметь большую относительную толщину профилей крыла. Вес силовой конструкции обратно пропорционален толщине профиля. Следовательно, относительная толщина бортового профиля выбирается $c = 20$ % и больше, относительная толщина концевой профиля определяется несущими свойствами, оптимум которых приходится на 14–15 %.

Исходя из этого, при проведении оптимального аэродинамического проектирования, оптимизируемое крыло сохраняло постоянную форму в плане с постоянными углами скоса передней ($\gamma_{\text{LE}} = 2.3^\circ$) и задней ($\gamma_{\text{TE}} = -3.43^\circ$) кромок и было представлено пятью секциями по размаху крыла: бортовой секцией ($Z = 0.25$ м), тремя промежуточными ($Z = 1.2, 2.4$ и 3.6 м) и концевой секцией ($Z = 5.0$ м). Углы начальной крутки этих профилей составляли соответственно $\alpha = 1.495, 1.25, 0.72, -0.057$ и -1.972° , а их относительные толщины равнялись соответственно 20.7, 20.1, 19.2, 18.0 и 14.9 %.

Как известно, крыло является основным конструктивным элементом летательного аппарата, которое, с одной стороны, генерирует подъемную силу, а с другой – является основным источником его сопротивления. Именно поэтому целью оптимизации и является поверхность крыла. При параметризации поверхности крыла предполагается, что при заданной форме крыла в плане его поверхность явля-

ется линейной интерполяцией в направлении Z по размаху крыла между его соседними двумерными сечениями.

Основная проблема при параметризации поверхности состоит в необходимости найти разумный компромисс между количеством параметров, описывающих поверхность, и уровнем точности (детализации) ее аппроксимации. В принципе задача состоит в нахождении минимального числа параметров, позволяющих описать поверхность с заданной точностью.

В применяемой технологии аэродинамического проектирования для каждой базовой секции крыла безразмерная форма аэродинамического профиля (масштабированная соответствующей хордой) определяется в локальной декартовой системе координат (x, y) следующим образом:

- Координаты передней и задней кромки профиля задаются в точках $(0, 0)$ и $(1, 0)$ соответственно.
- Для аппроксимации верхней и нижней поверхностей аэродинамического профиля используется кривая Безье (одномерное представление Безье).

Кривая Безье порядка N определяется полиномами Бернштейна $B_{N,i}$ (C_N^i – биномиальные коэффициенты)

$$\vec{G}^k(t) = \sum_{i=0}^N B_{N,i} \vec{P}_i^k, B_{N,i} = C_N^i t^i (1-t)^{N-i}, C_N^i = \frac{N!}{i!(N-i)!}, \quad (1)$$

где t обозначает параметр кривой, принимающий значения в отрезке $[0, 1]$, P_i^k – контрольные точки и верхний индекс $k = \text{up, low}$ соответствует верхней и нижней поверхностям профиля.

Итак, как видно из (1), кривая Безье полностью определяется декартовыми координатами контрольных точек P_i^k . Дополнительными дизайн-параметрами являются углы крутки крыла $\{\alpha_i^{hw}\}$ и значения поперечного V крыла $\{\gamma_i^{dh}\}$.

В задачах оптимизации точность расчёта целевой функции (в данном случае полного сопротивления), а также дополнительных функционалов на решении является ключом к успеху. Как уже отмечалось, точный расчет сопротивления реальных конфигураций до сих пор является непростой задачей. Причина этого довольно тривиальна. В отличие от остальных интегральных аэродинамических характеристик (таких, как коэффициент подъемной силы, момент тангажа и т.д.), имеющих величину порядка $O(1)$, коэффициент полного аэродинамического сопротивления имеет величину на 2 порядка меньше (в районе 0.02). Поэтому, если не предпринимать специальных и весьма нетривиальных мер, численный метод, обеспечивающий точность 2-го знака после запятой, не в состоянии обеспечить расчет сопротивления с необходимой для практики точностью $10^{-4} - 10^{-5}$. В связи с этим правильный выбор численного метода решения осредненных по числу Рейнольдса полных уравнений Навье – Стокса вязкой сжимаемой жидкости в турбулентном режиме является одним из ключевых факторов успешного решения всей задачи оптимального проектирования.

Поэтому в основе выбранного нами надежного, высокоточного и вычислительно-эффективного численного метода лежала схема высокого порядка точности ENO (Essentially Non-Oscillatory Scheme) в сочетании с многосеточным подходом (multigrid approach) с использованием многоблочных структурированных вычислительных сеток. Основными характеристиками метода являются использование многоблочных структурированных сеток, многосеточного (многоуровневого) подхода, схемы высокого порядка точности, учёт турбулентности и глубокая па-

раллелизация. В алгоритме кода конвективная часть уравнений аппроксимируется характеристическим оператором первого порядка, который легко обращается. Эта схема применяется везде при многосеточной релаксации. При этом схема высокого порядка ENO/WENO определяет поправки в правую часть дискретного уравнения только на самом тонком сеточном уровне, а вязкие члены аппроксимируются обычным образом. Код обеспечивает точный расчет сопротивления для сложных аэродинамических конфигураций, достигая хорошей точности на грубых сетках. В нём отсутствуют искусственные параметры. Все эти качества делают код подходящим для промышленных приложений.

Для повышения точности расчётов и скорости сходимости численного алгоритма, при интерполяции численных потоков использовались множественные численные шаблоны, что давало возможность достигнуть максимальной точности. При этом устойчивость численной схемы достигалась посредством регулировки весовых коэффициентов интерполяции в зависимости от оценки текущего итеративного решения

Причиной для улучшения являлось нижеследующее. Изменение в численном шаблоне ENO может быть результатом ошибки округления в районе обнуления решения или его производных. Это означает, что небольшое изменение может переориентировать шаблон. Такого рода изменения в составе шаблона контрпродуктивны в гладких областях течения и вызывают потерю точности. Кроме того, численные потоки, интерполированные на основе ENO, часто оказываются негладкими, так как шаблоны в соседних точках могут различаться.

Это может быть исправлено при использовании метода WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory), в котором используются комбинации всех шаблонов, служивших кандидатами для шаблона ENO. Это может быть проиллюстрировано следующим образом:

Предположим, что, при интерполяции «в направлении ветра» в точке интерполяции $i+0.5$ потока имеются три следующих кандидата в шаблоны ENO:

$$S_0(i) = \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\},$$

$$S_1(i) = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\},$$

$$S_2(i) = \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\},$$

которые в совокупности дают три значения для интерполируемого значения потока:

$$V_{i+0.5}^{(0)}, V_{i+0.5}^{(1)}, V_{i+0.5}^{(2)}.$$

Интерполяция WENO образует выпуклую комбинацию этих трёх значений:

$$V_{i+0.5} = w_0 V_{i+0.5}^{(0)} + w_1 V_{i+0.5}^{(1)} + w_2 V_{i+0.5}^{(2)}.$$

Положительные весовые коэффициенты w_0 , w_1 и w_2 (в сумме составляющие 1.0) выбираются на основе значений в близлежащих точках сетки таким образом, чтобы, с одной стороны, обеспечить высокую точность в гладких областях и, с другой стороны, эмулировать интерполяцию ENO в негладких областях. Для расчёта весовых коэффициентов используются нелинейные формулы, использующие значения так называемых индикаторов гладкости решения. Индикаторы гладкости, которые образованы специально подобранными комбинациями конечных разностей текущего решения, входят в весовые коэффициенты таким образом, чтобы в областях гладкого поля скоростей интерполяционная формула обеспечивала максимально допустимую (при заданном порядке интерполяционного шаблона) точность интерполяции. С другой стороны, вблизи ударных волн и других разрывов течения, формулы WENO практически идентичны формулам ENO.

В качестве поисковой машины оптимизация использует генетический алгоритм. В качестве базового варианта используется ГА с плавающей точкой и следующие генетические операторы: турнирная селекция, оператор размножения, неравномерная мутация, принцип элитизма.

Для эффективного решения задачи многоточечной оптимизации был разработан алгоритм динамического генетического поиска – то есть поиска, в котором значения «генетических операторов» – воспроизведения, скрещивания и мутации – устанавливаются в зависимости от «времени» (номера поколения) и от сходимости процесса поиска.

Подверглись изменению следующие генетические операторы:

- Отбор (selection).

Генетическое население *pop_size* каждого поколения делится на две части. Первая часть состоит из *r* решений с высоким уровнем годности. Вторая часть состоит из *pop_size – r* всех остальных решений, выбранных случайным образом из всех *pop_size* решений, входящих в данное поколение; *r* решений с высоким уровнем годности переходят без изменений в следующее поколение, а *pop_size – r* решений участвуют в процессе воспроизведения. Таким образом, решения с высоким уровнем годности не только автоматически сохраняются в населении, но и активно участвуют в воспроизведении (reproduction).

Размер «элиты» *r* является динамическим параметром, который определяется следующим образом. В первых поколениях значение этого параметра остаётся относительно низким с тем, чтобы обеспечить большее разнообразие решений и не дать более «сильным» решениям уподобить себе всё население. По мере сходимости поиска, значение *r* возрастает. В случае замедления сходимости значение *r* резко снижается.

- Воспроизведение (reproduction).

В генетическом поиске происходит перекрёстный обмен информацией (crossover). Специфически, в алгоритме используется так называемый «multi-cut crossover», то есть хромосомы «разрезаются» на несколько частей, каждая из которых по очереди поставит информацию воспроизводимым решениям.

Размер «числа разрезов» *Nc* является динамическим параметром, который определяется следующим образом. В первых поколениях значение этого параметра устанавливается равным 5 для того, чтобы обеспечить высокую степень «перемешивания» решений и тем самым обеспечить их большее разнообразие. По мере сходимости поиска, значение *r* постепенно снижается до единицы.

- Мутация (mutation).

Мутация производится следующим образом: Если элемент v_k решения *v* был выбран для мутации, то результатом мутации является:

$$v_k(\text{mutated}) = v_k + \Delta(t, U_k - v_k)$$

(если случайным образом выбранный бит равняется 0),

$$v_k(\text{mutated}) = v_k + \Delta(t, v_k - L_k)$$

(если случайным образом выбранный бит равняется 1).

Функция $\Delta(t, y)$ возвращает случайную величину в диапазоне $[0, y]$ таким образом, что вероятность того, что значение $\Delta(t, y)$ близко к нулю возрастает по мере возрастания времени *t* (номера поколения). Специфически, мы используем функцию

$$\Delta(t, y): \Delta(t, y) = yr(1 - t/T)^b,$$

где *r* – случайное число из отрезка $[0, 1]$, *t* – номер поколения, *T* – максимальный номер поколения и *b* – параметр.

2. Результаты расчетов

Для проведения оптимального аэродинамического проектирования изолированного трехмерного крыла беспилотного летательного аппарата среднего класса использовался программный продукт OPTIMENGA_AERO. Прежде чем перейти к анализу полученных результатов, приведем последовательность шагов, которые были сделаны в рамках новой технологии проектирования на основе OPTIMENGA_AERO:

1) Из исходного файла (в формате *iges*), описывающего начальную конфигурацию летательного аппарата, были извлечены секционные сечения крыла в заданных значениях координаты Z по размаху крыла, включающие значения размерных координат X, Y, Z на поверхности профиля в каждом из заданных сечений

2) Для каждого сечения были определены значения хорды профиля (в метрах), крутки профиля относительно задней кромки профиля (в градусах), значения вертикального V задней кромки (в метрах) и размерные координаты X, Y, Z задней кромки профиля (в метрах)

3) По определенным значениям хорд, координат X, Y, Z задней кромки профиля и расстояниям между базовыми сечениями были определены углы скоса передней и задней кромки крыла между базовыми сечениями

4) По размерным координатам X, Y, Z на поверхности профиля в каждом из заданных сечений и значениям хорды каждого профиля были определены распределения безразмерных координат $x = X/C, y = Y/C$ на их поверхности

5) По полученным распределениям безразмерных координат $x = X/C, y = Y/C$ на поверхности базовых профилей были определены относительная толщина каждого профиля

6) По полученным распределениям безразмерных координат $x = X/C, y = Y/C$ на поверхности базовых профилей были определены значения относительные толщины каждого профиля в заданных двух значениях $x = X/C$, соответствующих безразмерным координатам бака для топлива

7) По результатам аэродинамических расчетов начального крыла были определены приблизительные значение углов атаки, соответствующих выбранным точкам проектирования, а также значения моментов тангажа в этих точках

Стартовой точкой для оптимизации служило описанное ранее базовое крыло. Была проведена двухточечная оптимизация со следующими точками проектирования:

- $C_Y = 1.2, M = 0.20$ (с весом 0.7),
- $C_Y = 1.8, M = 0.20$ (с весом 0.3).

Первая (основная) точка проектирования соответствовала крейсерскому режиму полета БЛА, а вторая (вспомогательная) была нужна, чтобы обеспечить крылу достаточно большое значение $C_{Y_{\max}}$.

Двухточечная оптимизация позволила снизить коэффициент сопротивления в точке оптимизации $C_Y = 1.20, M = 0.20$ на **24.3** каунта по сравнению с базовым крылом (с 400.7 до 376.4 каунта).

В точке $C_Y = 1.80, M = 0.20$ значение коэффициента сопротивления снизилось на **51.1** каунта по сравнению с базовым крылом (с 830.2 до 779.1 каунта).

Секционные аэродинамические профили крыла по результатам данной оптимизации в сравнении с профилями базового крыла приведены на рис. 1 – 2.

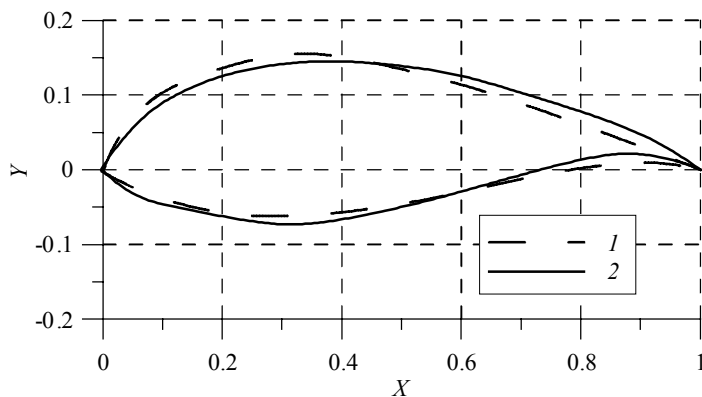


Рис. 1. Сравнение профилей бортовой секции базового (1) и оптимального (2) крыла

Fig. 1. Comparison of the root section profiles for the original (1) and optimal (2) wings

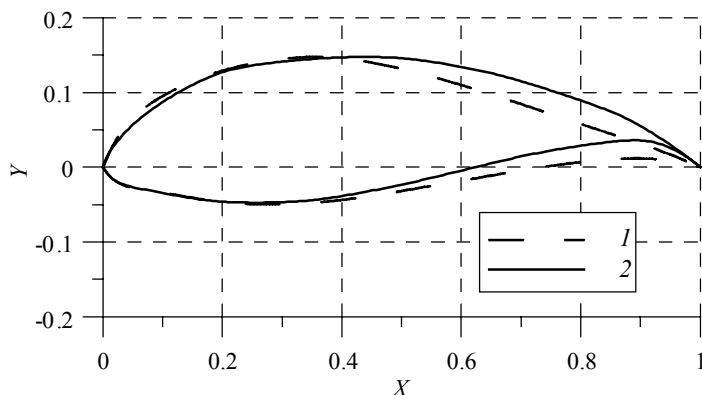


Рис. 2. Сравнение профилей 2-й промежуточной секции базового (1) и оптимального (2) крыла

Fig. 2. Comparison of the 2nd crank section profiles for the original (1) and optimal (2) wings

Дополнительная информация о локальных характеристиках течения около оптимального крыла может быть получена из рис. 3 и 4, на которых приведены сравнения секционных распределений коэффициента давления C_p для начального и оптимального крыла для различных сечений в различных точках полета.

Из анализа сравнений соответствующих распределений давления между начальным и оптимальным крылом видно, что изменение формы крыла привело к благоприятному в аэродинамическом смысле перераспределению нагрузки по всему размаху крыла и значительному улучшению интегральных аэродинамических характеристик.

Это благоприятно отразилось на значении коэффициента сопротивления крыла при значении $C_y = 1.20$, причем сопротивление понизилось для достаточно большой окрестности основной точки проектирования как по числу Маха, так и по коэффициенту подъемной силы.

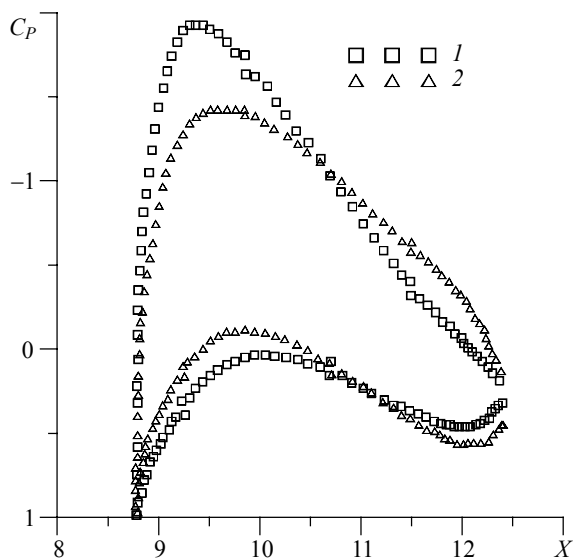


Рис. 3. Сравнение распределений давления в бортовом сечении $Z = 0.0$ м по размаху крыла при $C_Y = 1.20$ для $M = 0.20$ для базового (1) и оптимального (2) крыла

Fig. 3. Comparison of the pressure distributions in the cross section $Z = 0.0$ m over the wingspan at $C_Y = 1.20$ and $M = 0.20$ for the original (1) and optimal (2) wings

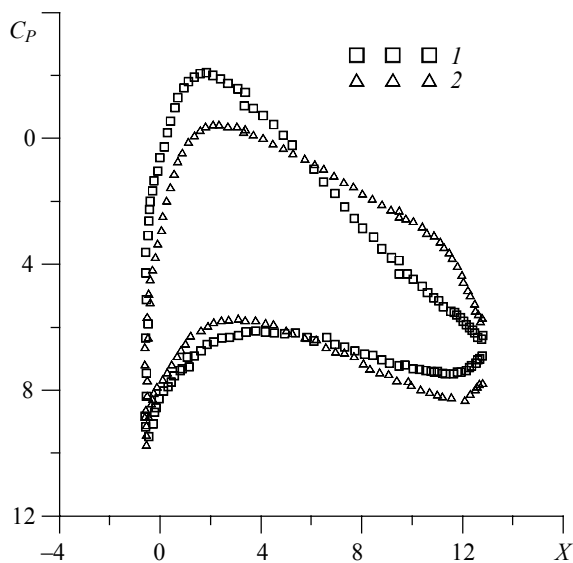


Рис. 4. Сравнение распределений давления в сечении $Z = 2.15$ м по размаху крыла при $C_Y = 1.20$ для $M = 0.20$ для базового (1) и оптимального (2) крыла

Fig. 4. Comparison of the pressure distributions in the cross section $Z = 2.15$ m over the wingspan at $C_Y = 1.20$ and $M = 0.20$ for the original (1) and optimal (2) wings

Это означает, что улучшения, полученные при проектировании, носят не локальный характер и устойчивы к малым изменениям условий полета, что является необходимым условием для практического использования этих результатов.

В заключение приведем сравнения поляра сопротивления между начальным и оптимальным крылом (рис. 5), а также соответствующие сравнения зависимости коэффициента подъемной силы от угла атаки (рис. 6).

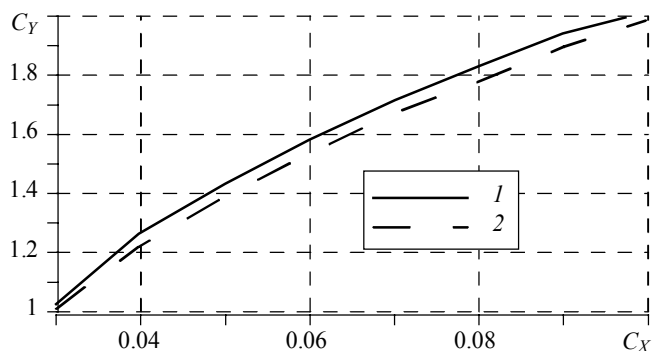


Рис. 5. Сравнение поляры сопротивления базового (1) и оптимального (2) крыла БЛА для $M = 0.20$

Fig. 5. Comparison of the drag polars for the original (1) and optimal (2) UAV wings at $M = 0.20$

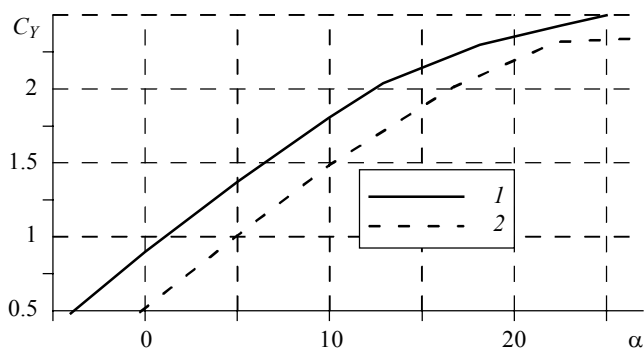


Рис. 6. Сравнение зависимости коэффициента подъемной силы от угла атаки базового (1) и оптимального (2) крыла БЛА для $M = 0.20$

Fig. 6. Comparison of the dependence of lift coefficient on the angle of attack for the original (1) and optimal (2) UAV wings at $M = 0.20$

Заключение

В заключение отметим, что детальный анализ полученных аэродинамических характеристик оптимального крыла показывает, что двухточечная оптимизация позволила успешно решить задачу оптимального проектирования крыла, поскольку:

- Оптимальное крыло обладает значительно меньшим сопротивлением в основной точке проектирования $C_Y = 1.20$, $M = 0.20$ ($C_X = 376.2$ каунта) и может эксплуатироваться при крейсерском полете при $M = 0.20$ и его окрестностях;
- Оптимизация позволила улучшить планерное качество крыла на 7 %;

- Оптимальное крыло обладает лучшими аэродинамическими характеристиками в широкой окрестности точки проектирования по числам Маха и коэффициента подъемной силы и устойчиво к малым изменениям условий полета;
- Оптимальное крыло отвечает всем заданным геометрическим и аэродинамическим ограничениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Michalewicz Z. Genetic algorithms + data structures = evolution programs. New York: Springer-Verlag, 1992, Artificial Intelligence.
2. Пейгин С.В., Periaux J., Тимченко С.В. Применение генетических алгоритмов для оптимизации формы тела по тепловому потоку // Математическое моделирование. 1998. Т. 10. № 9. С. 111–122.
3. Казаков В.Ю., Пейгин С.В., Тимченко С.В. Оптимизация траектории входа в атмосферу Земли по интегральному тепловому потоку // Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т. 41. № 4. С. 112–121.
4. Орлов С.А., Пейгин С.В., Степанов К.А., Тимченко С.В. Эффективная реализация нелинейных ограничений при оптимизации трехмерных трансзвуковых крыльев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 1. С. 72–81.
5. Epstein B., Peigin S., Bolsunovskiy A., Timchenko S.V. Aerodynamic shape optimization by automatic hybrid genetic tool OPTIMENGA AERO // Source of the Document 52nd AIAA Aerospace Sciences Meeting AIAA Science and Technology Forum and Exposition, SciTech 2014.
6. Тимченко С.В. Параллельный генетический алгоритм для решения задач многокритериальной оптимизации // Ползуновский вестник. 2012. № 2/1. С. 103–107.
7. Epstein B., Averbuch A. and Yavneh I. An accurate ENO driven multigrid method applied to 3D turbulent transonic flows // J. Computational Physics. 2001. V. 168. P. 316–328.
8. Epstein B., Peigin S.V. Implementation of WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory) Approach to Navier – Stokes Computations // International J. CFD. 2004. V. 18. No. 3.

Статья поступила 03.05.2018 г.

Stepanov K.A., Timchenko S.V. (2018) AERODYNAMIC DESIGN FOR AN ISOLATED THREE-DIMENSIONAL WING OF AN UNMANNED AERIAL VEHICLE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 54. pp. 118–130

DOI 10.17223/19988621/54/10

Keywords: optimal design, full Navier – Stokes equations, non-linear constraints, drag coefficient, pitch moment.

A new technology of the optimal design of aerodynamic configurations based on a new generation software product is used for aerodynamic design of a three-dimensional wing of the middle class unmanned aerial vehicle. The optimal shape of the wing, which is characterized by minimum total drag at a fixed lift coefficient and corresponding to the specified geometric and aerodynamic constraints, is determined on the basis of the global search method and numerical solutions of the complete Navier – Stokes equations. It is shown that the proposed approach provides reduction in a wing drag in the cruise flight zone and significantly reduces the material and time costs for aerodynamic aircraft design. An optimal wing has a significantly lower drag at the main design point, and it can be used during cruising and in its vicinity. Optimization allows improving of the glider wing quality. An optimal wing is distinguished by better aerodynamic characteristics in the wide vicinity of design point in terms of the Mach numbers and lift coefficient. Such wing is resistant to small changes in the flight conditions and it meets all given geometric and aerodynamic constraints.

STEPANOV Kirill Aleksandrovich (Tomsk State University, Tomsk, Innovation Center "SKOLKOVO", Moscow, Russian Federation). E-mail: kirill.stepanov.90@mail.ru

TIMCHENKO Sergey Viktorovich (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Innovation Center "SKOLKOVO", Moscow, Russian Federation). E-mail: tsv@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Michalewicz Z. (1992) *Genetic algorithms + Data structures = Evolution programs*. New York: Springer-Verlag.
2. Peygin S.V., Periaux J., Timchenko S.V. (1998) Primenenie geneticheskikh algoritmov dlya optimizatsii formy tela po teplovomu potoku [Application of genetic algorithms in a body shape optimization in terms of a heat flux]. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Models and Computer Simulations*. 10(9). pp. 111–122.
3. Kazakov V.Yu., Peygin S.V., Timchenko S.V. (2000) Optimizatsiya traektorii vkhoda v atmosferu Zemli po integral'nomu teplovomu potoku [Optimization of the trajectory of the earth atmosphere entry according to the integral heat flux]. *Prikladnaya matematika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 41(4). pp. 112–121.
4. Orlov S.A., Peygin S.V., Stepanov K.A., Timchenko S.V. (2015) Effektivnaya realizatsiya nelineynykh ogranicheniy pri optimizatsii trekhmernykh transzvukovykh kryl'ev [Effective implementation of nonlinear constraints in optimization of three-dimensional transonic wings]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(33). pp. 72–81. DOI: 10.17223/19988621/33/7.
5. Epstein B., Peigin S., Bolsunovskiy A., Timchenko S.V. (2014) Aerodynamic shape optimization by automatic hybrid genetic tool OPTIMENGA AERO. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*. DOI: 10.2514/6.2014-0569.
6. Timchenko S.V. (2012) Parallel'nyy geneticheskiy algoritm dlya resheniya zadach mnogokriterial'noy optimizatsii [A parallel genetic algorithm for solving multicriterion optimization problems]. *Polzunovskiy vestnik*. 2(1). pp. 103–107.
7. Epstein B., Averbuch A., Yavneh I. (2001) An accurate ENO driven multigrid method applied to 3D turbulent transonic flows. *Journal of Computational Physics*. 168(2). pp. 316–328. DOI: 10.1006/jcph.2001.6698.
8. Epstein B., Peigin S.V. (2004) Application of WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory) Approach to Navier – Stokes Computations. *International Journal of CFD*. 18(3). pp. 289–293. DOI: 10.1080/1061-8560310001621243.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕЗМОЗГИЙ Иосиф Менделевич – кандидат технических наук, начальник отдела, ПАО «Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва», г. Королёв; инженер Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: ibezmozgiy@yandex.ru

БИМАТОВ Владимир Исмагилович – доктор физико-математических наук, зав. кафедрой физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: vbimатов@mail.ru

БОРОДАЧЕВА Ирина Александровна – аспирантка физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: vbimатов@mail.ru

КАЗАКОВА Ольга Игоревна – аспирантка физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск; ведущий инженер-конструктор, ПАО «Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва», г. Королев. E-mail: okazakova.rsc@gmail.com

КНЯЗЕВА Анна Георгиевна – доктор физико-математических наук, профессор, зав. лабораторией НПЛ МТП, профессор ОМ ИШНПТ Томского политехнического университета, г.н.с. ЛКМ ИФПМ СО РАН, г. Томск. E-mail: anna-knyazeva@mail.ru

КОСТЮШИН Кирилл Владимирович – аспирант физико-технического факультета; младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: kostushin@niipmm.tsu.ru

КУЛИЕВ Гамлет Фарман – доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета Бакинского государственного университета, г. Баку, Азербайджан. E-mail: hkuliyev@rambler.ru

ЛАВИТ Игорь Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор Тульского государственного университета, г. Тула. E-mail: IgorLavit@yandex.ru

ЛАВРОВИЧ Алексей Николаевич – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: vbimатов@mail.ru

МАЛИК Александр Васильевич – инженер-исследователь 3 категории, филиал АО КБП – ЦКИБ СОО, г. Тула. E-mail: guner10@mail.ru

МАНСИМОВ Камил Байрамали оглы – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическая кибернетика» Бакинского государственного университета, руководитель лаборатории «Управление в сложных динамических системах» Института систем управления НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан. E-mail: kamilbmansimov@gmail.com, kmansimov@mail.ru

НАСИБЗАДЕ Вусале Назим – аспирант Сумгаитского государственного университета, г. Сумгаит, Азербайджан. E-mail: nasibzade1987@gmail.com

ПАРФЕНОВА Елена Сергеевна – инженер НПЛ МТП, ассистент ОМ ИШНПТ Томского политехнического университета, г. Томск. E-mail: linasergg@mail.ru

РАСУЛОВА Шахла Маджид кызы – преподаватель Азербайджанского государственного педагогического университета, аспирантка Института систем управления НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан.

СЛАВОЛЮБОВА Ярославна Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных технологий и прикладной математики Кемеровского института (филиала) РЭУ им. Г.В. Плеханова, г. Кемерово. E-mail: jar1984@mail.ru

СМОЛИН Игорь Юрьевич – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения СО РАН, профессор Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: smolin@ispms.ru

СТЕПАНОВ Кирилл Александрович – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета, специалист ООО «Оптименга – 777», г. Москва. E-mail: kirill.stepanov.90@mail.ru

ТИМЧЕНКО Сергей Викторович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета, ведущий специалист ООО «Оптименга – 777», г. Москва. E-mail: tsv@ftf.tsu.ru

ТУРСУНОВ Дилмурат Абдиллажанович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры информатики Ошского государственного университета, г. Ош, Кыргызстан. E-mail: tdaosh@gmail.com

ШУВАРИКОВ Владимир Андреевич – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: shuvaa@niipmm.tsu.ru

Оригинал-макет подготовлен
ООО «Издательство научно-технической литературы»
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. (3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.
Подписано к печати 15.06.2018. Выпуск в свет 31.08.2018.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 10.64. Уч.-изд. л. 11.92. Тираж 250 экз. Заказ № 19. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 3337.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru