МАТЕМАТИКА

УДК 517.97 MSC 35L20, 49K20
DOI 10.17223/19988621/54/1

Г.Ф. Кулиев, В.Н. Насибзаде

ПРИВЕДЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ АКУСТИКИ К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ЕЁ ИССЛЕДОВАНИЕ

Для одномерного уравнения акустики рассматривается коэффициентная обратная задача, которая сводится к задаче оптимального управления, где доказываются теоремы существования оптимального управления, выводятся необходимые условия оптимальности, вычисляется градиент функционала и предлагается итерационный алгоритм нахождения решения задачи оптимального управления с помощью метода проекции градиента.

Ключевые слова: *коэффициентная обратная задача*, *оптимальное управление*, *необходимые условия*, *градиент функционала.*

В прямых задачах математической физики стремятся найти функции, описывающие различные физические явления. При этом свойства исследуемой среды предполагаются известными. Однако свойства изучаемой среды часто являются неизвестными. Тогда возникают обратные задачи, в которых по информации о решении прямой задачи требуется определить коэффициенты уравнений. Эти задачи в большинстве случаев некорректны. С другой стороны, искомые коэффициенты уравнений являются важными характеристиками изучаемых сред. Поэтому исследование таких обратных задач математической физики очень важно как с теоретической, так и с практической точки зрения [1–5]. Для изучения обратных задач одним из мощных средств является оптимизационный метод [1]. Идея использования методов теории оптимального управления для решения обратных задач принадлежит А.Н.Тихонову [6]. С библиографией работ, посвященных оптимизационному методу решения обратных задач, можно ознакомиться в работах В.Г.Романова, С.И. Кабанихина [7, 8].

Одной из важных обратных задач является обратная задача акустики [2, 9]. В работе [2] одномерная обратная задача акустики сводится к нахождению решения системы интегральных уравнений. В данной работе для одномерного уравнения акустики ставится коэффициентная обратная задача, которая сводится к задаче оптимального управления и далее исследуется методами теории оптимального управления.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу определения пары функций $(u(x,t),\upsilon(x))$ из следующих соотношений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\upsilon(x)\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,t),(x,t)\in Q\equiv(0,\ell)\times(0,T); \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u_1(x),\ 0\le x\le\ell; \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\ell}=0,\ 0\le t\le T; \tag{3}$$

$$u(x,T)=g(x),\ 0\le x\le\ell, \tag{4}$$

где $\ell>0, T>0$ – заданные числа, $u(x,t)$ – акустическое давление, $\upsilon(x)$ – функция, которая выражена через функции плотности среды и скорости распространения волн в среде [2].

Если функции $\upsilon(x),f(x,t),u_0(x),u_1(x)$ заданы, то получаем прямую задачу $(1)-(3)$ определения функции $u(x,t)$. Если $\upsilon(x)$ – неизвестная функция, мы дополнительно зададим условие (4). Тогда получается обратная задача $(1)-(4)$ определения пары функций $(u(x,t),\upsilon(x))$.

Предположим, что $f\in L_2(Q), u_0\in W_2^1[0,\ell], u_1\in L_2(0,\ell), g\in W_2^1[0,\ell]$ – заданные функции.

Задачу $(1)-(4)$ приводим к следующей задаче оптимального управления: найти такую функцию $\upsilon(x)$ из множества:

$$V=\left\{\upsilon(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1[0,\ell]:|\upsilon(x)|\le M_1,|\upsilon'(x)|\le M_2 \text{ почти всюду на } [0,\ell]\right\}, \tag{5}$$

которая доставляет минимум функционалу

$$J(\upsilon)=\frac{1}{2}\int_0^\ell[u(x,T;\upsilon)-g(x)]^2dx \tag{6}$$

при ограничениях (1) – (3), где $u(x,t;\upsilon)$ – решение задачи (1) – (3) при $\upsilon=\upsilon(x)$, $M_1,M_2>0$ – заданные числа. Эту задачу назовем задачей $(1)-(3),(5),(6)$.

Функцию $\upsilon(x)$ назовем управлением, а V – классом допустимых управлений. Отметим, что если $\min\limits_{\upsilon\in V}J(\upsilon)=0$, то дополнительное условие (4) выполняется.

Под решением краевой задачи $(1)-(3)$ при каждом фиксированном управлении $\upsilon\in V$ будем понимать функцию из $W_2^1(Q)$, равную $u_0(x)$ при $t=0$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_Q\left[-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial x}\eta\right]dx\,dt-\int_0^\ell u_1(x)\eta(x,0)\,dx=\int_Q f\eta\,dx\,dt \tag{7}$$

при всех $\eta=\eta(x,t)$ из $W_2^1(Q)$, равных нулю при $t=T$.

Из результатов работ [10, 11] следует, что при принятых условиях краевая задача $(1)-(3)$ при каждом фиксированным $\upsilon \in V$ имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(Q)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^1(Q)} \le c\left[\|u_0\|_{W_2^1[0,\ell]} + \|u_1\|_{L_2(0,\ell)} + \|f\|_{L_2(Q)}\right]. \tag{8}$$

Кроме того, это решение обладает свойствами

$$u \in C\left([0,T];W_2^1[0,\ell]\right),\ \frac{\partial u}{\partial t} \in C\left([0,T];L_2(0,\ell)\right).$$

Здесь и в дальнейшем через c будем обозначать различные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и допустимых управлений.

2. О разрешимости задачи (1) – (3), (5), (6)

Теорема 1. Пусть выполнены условия, принятые при постановке задачи $(1)-(3),(5),(6)$. Тогда множество оптимальных управлений этой задачи $V_* = \left\{\upsilon_* \in V : J(\upsilon_*) = \min\limits_{\upsilon\in V} J(\upsilon)\right\}$ непусто, слабо компактно в $W_2^1[0,\ell]$ и любая минимизирующая последовательность $\{\upsilon_n\}$ слабо в $W_2^1[0,\ell]$ сходится к множеству V_*.

Доказательство. Ясно, что множество V, определяемое соотношением (5), слабо компактно в пространстве $W_2^1[0,\ell]$. Покажем, что функционал (6) слабо в $W_2^1[0,\ell]$ непрерывен на множестве V. Пусть $\upsilon \in V$ – некоторый элемент, $\{\upsilon_n\} \subset V$ – произвольная последовательность, такая, что $\upsilon_n \to \upsilon$ слабо в $W_2^1[0,\ell]$ при $n \to \infty$. Отсюда из компактности вложения $W_2^1[0,\ell] \to C[0,\ell]$ [10, с. 84] следует, что

$$\upsilon_n \to \upsilon \text{ сильно в } C[0,\ell]. \tag{9}$$

В силу однозначной разрешимости краевой задачи $(1)-(3)$ каждому управлению $\upsilon_n \in V$ соответствует единственное решение $u_n = u(x,t;\upsilon_n)$ задачи $(1)-(3)$ и справедлива оценка $\|u_n\|_{W_2^1(Q)} \le c, \forall n = 1,2,...,$ т.е. последовательность $\{u_n\}$ равномерно ограничена по норме пространства $W_2^1(Q)$. Тогда из теорем вложения [10, с. 64, 71] следует, что из последовательности можно выделить подпоследовательность $\left\{u_{n_k}\right\}$, такую, что при $k \to \infty$

$$u_{n_k} \to u \text{ сильно в } L_2(Q); \tag{10}$$

$$\frac{\partial u_{n_k}}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u_{n_k}}{\partial x} \to \frac{\partial u}{\partial x} \text{ слабо в } L_2(Q); \tag{11}$$

$$u_{n_k}\big|_{t=0} \to u\big|_{t=0}, u_{n_k}\big|_{t=T} \to u\big|_{t=T} \text{ сильно в } L_2(0,\ell), \tag{12}$$

где $u = u(x,t) \in W_2^1(Q)$ – некоторый элемент. Покажем, что $u(x,t) = u(x,t;\upsilon)$, т.е. функция является обобщенным решением задачи $(1)-(3)$, соответсвующим управлению $\upsilon \in V$. Ясно, что справедливы тождества

$$\int_Q \left[-\frac{\partial u_{n_k}}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u_{n_k}}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \upsilon_{n_k}(x)\frac{\partial u_{n_k}}{\partial x}\eta \right] dxdt - \int_0^{\ell} u_1(x)\eta(x,0)\,dx = \int_Q f\eta\, dxdt \quad (13)$$

при всех $\eta = \eta(x,t)$ из $W_2^1(Q)$, равных нулю при $t = T$.

Переходя к пределу в (13) при $k \to \infty$ и используя $(9)-(12)$, получим, что функция $u(x,t)$ равна $u_0(x)$ при $t=0$ и удовлетворяет тождеству (7). Отсюда и из единственности решения задачи $(1)-(3)$, соответствующего управлению $\upsilon \in V$, следует, что $u(x,t) = u(x,t;\upsilon)$.

Используя единственность решения задачи $(1)-(3)$, соответствующего управлению $\upsilon \in V$, легко проверить, что соотношения $(10)-(12)$ справедливы не только для подпоследовательности $\{u_{n_k}\}$, но и для всей последовательности $\{u_n\}$. Следовательно, в частности, справедливо предельное соотношение

$$u_n\big|_{t=T} \to u\big|_{t=T} \text{ сильно в } L_2(0,\ell)$$

при $n \to \infty$.

Используя это соотношение, из (6) получаем, что $J(\upsilon_n) \to J(\upsilon)$ при $n \to \infty$, т.е. $J(\upsilon)$ слабо в $W_2^1[0,\ell]$ непрерывен на множестве V. Тогда в силу теорем 2 и 4 из [12, с. 49, 51] получаем, что справедливы все утверждения теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Для обеспечения единственности решения задачи оптимального управления вместо функционала (6) можно рассматривать функционал вида

$$I(\upsilon) = J(\upsilon) + \alpha \|\upsilon - \omega\|^2_{W_2^1[0,\ell]}, \quad (14)$$

где $J(\upsilon)$ определен равенством (6), $\alpha > 0$ – заданное число, $\omega \in \overset{0}{W_2^1}[0,\ell]$ – заданная функция.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $\alpha > 0$. Тогда существует плотное подмножество G пространства $W_2^1[0,\ell]$, такое, что для любой $\omega \in G$ задача минимизации функционала (14) на множестве при условиях $(1)-(3)$ имеет единственное решение.

Доказательство. Функционал $J(\upsilon)$ ограничен снизу и в силу теоремы 1 непрерывен на V. Кроме того, множество V замкнуто и ограничено в равномерно выпуклом банаховом пространстве $W_2^1[0,\ell]$. Тогда из результатов работы [13, с. 372–373] следует утверждение теоремы 2. Теорема 2 доказана.

3. Дифференцируемость функционала (6)

Теперь исследуем дифференцируемость функционала (6). Пусть $\psi = \psi(x,t;\upsilon)$ – обобщенное решение из $W_2^1(Q)$ сопряженной задачи

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(\upsilon\psi) = 0, (x,t) \in Q, \quad (15)$$

$$\psi|_{t=T} = 0,\ \frac{\partial\psi}{\partial t}|_{t=T} = u(x,T;\upsilon) - g(x),\ 0 \le x \le \ell\,; \tag{16}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}|_{x=0} = 0,\ \frac{\partial\psi}{\partial x}|_{x=\ell} = 0,\ 0 \le t \le T. \tag{17}$$

Под обобщенным решением краевой задачи $(15)-(17)$ при каждом фиксированном управлении $\upsilon \in V$ будем понимать функцию $\psi = \psi(x,t;\upsilon)$ из $W_2^1(Q)$, равную нулю при $t = T$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_Q \left[-\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial x} + \upsilon\psi\frac{\partial\mu}{\partial x} \right] dxdt = -\int\limits_0^\ell [u(x,T;\upsilon) - g(x)]\mu(x,T)\,dx \tag{18}$$

при всех $\mu = \mu(x,t)$ из $W_2^1(Q)$, равных нулю при $t = 0$.

Из результатов работ [10, 11] следует, что краевая задача $(15)-(17)$ при каждом фиксированном $\upsilon \in V$ имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(Q)$ и справедлива оценка

$$\|\psi\|_{W_2^1(Q)} \le c\|u|_{t=T} - g\|_{L_2(0,\ell)}.$$

Учитывая здесь оценку (8) и неравенство $\|u|_{t=T}\|_{L_2(0,\ell)} \le c\|u\|_{W_2^1(Q)}$ $[10, \text{с. } 70]$, получим

$$\|\psi\|_{W_2^1(Q)} \le c\left[\|u_0\|_{W_2^1[0,\ell]} + \|u_1\|_{L_2(0,\ell)} + \|f\|_{L_2(Q)} + \|g\|_{W_2^1[0,\ell]} \right]. \tag{19}$$

Теорема 3. Пусть выполнены предполагаемые выше условия на данные задачи $(1)-(3),(5),(6)$. Тогда функционал (6) непрерывно дифференцируем по Фреше на V и его дифференциал в точке $\upsilon \in V$ при приращении $\delta\upsilon \in \overset{0}{W}{}_2^1[0,\ell]$ определяется выражением

$$\langle J'(\upsilon), \delta\upsilon \rangle = \int\limits_Q \frac{\partial u}{\partial x}\psi\delta\upsilon\,dxdt. \tag{20}$$

Доказательство. Рассмотрим приращение функционала (6):

$$\Delta J(\upsilon) = J(\upsilon + \delta\upsilon) - J(\upsilon) = \int\limits_0^\ell [u(x,T;\upsilon) - g(x)]\delta u(x,T)\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^\ell (\delta u(x,T))^2 dx, \tag{21}$$

где $\delta u(x,t) \equiv u(x,t;\upsilon + \delta\upsilon) - u(x,t;\upsilon)$, а $u(x,t;\upsilon + \delta\upsilon)$ и $u(x,t;\upsilon)$ – решения задачи $(1)-(3)$, соответствующие управлениям $\upsilon + \delta\upsilon, \upsilon \in V$. Ясно, что функция $\delta u(x,t)$ является обобщенным решением из $W_2^1(Q)$ краевой задачи

$$\frac{\partial^2\delta u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\delta u}{\partial x^2} + (\upsilon + \delta\upsilon)\frac{\partial\delta u}{\partial x} = -\delta\upsilon\frac{\partial u}{\partial x},\ (x,t) \in Q\,; \tag{22}$$

$$\delta u|_{t=0} = 0,\ \frac{\partial\delta u}{\partial t}|_{t=0} = 0,\ 0 \le x \le \ell; \tag{23}$$

$$\frac{\partial\delta u}{\partial x}|_{x=0} = 0,\ \frac{\partial\delta u}{\partial x}|_{x=\ell} = 0,\ 0 \le t \le T. \tag{24}$$

Обобщенное решение из $W_2^1(Q)$ задачи $(22)-(24)$ равно нулю при $t=0$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q \left[\frac{\partial \delta u}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t}-\frac{\partial \delta u}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}-(\upsilon+\delta\upsilon)\frac{\partial \delta u}{\partial x}\eta\right]dxdt=\int_Q \delta\upsilon\frac{\partial u}{\partial x}\eta dxdt \qquad (25)$$

при всех $\eta=\eta(x,t)\in W_2^1(Q)$, равных нулю при $t=T$. Как для решения задачи $(1)-(3)$, для решения задачи $(22)-(24)$ справедлива оценка

$$\|\delta u\|_{W_2^1(Q)}\le c\left\|\delta\upsilon\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L_2(Q)}\le c\|u\|_{W_2^1(Q)}\|\delta\upsilon\|_{W_2^1[0,\ell]}. \qquad (26)$$

Если в (18) положим $\mu=\delta u(x,t)$, а в (25) – $\eta=\psi(x,t;\upsilon)$ и сложим полученные соотношения, то имеем

$$\int_0^\ell [u(x,T;\upsilon)-g(x)]\delta u(x,T)dx=\int_Q \frac{\partial u}{\partial x}\psi\delta\upsilon dxdt+\int_Q \psi\frac{\partial \delta u}{\partial x}\delta\upsilon dxdt.$$

Учитывая это равенство в (21), имеем

$$\Delta J(\upsilon)=\int_Q \frac{\partial u}{\partial x}\psi\delta\upsilon dxdt+R, \qquad (27)$$

где $R=\int_Q \psi\frac{\partial \delta u}{\partial x}\delta\upsilon dxdt+\frac{1}{2}\int_0^\ell (\delta u(x,T))^2 dx$ – остаточный член.

Ясно, что выражение в правой части (20) при заданном $\upsilon\in V$ определяет линейный функционал от $\delta\upsilon$. Кроме того,

$$\left|\int_Q \frac{\partial u}{\partial x}\psi\delta\upsilon dxdt\right|\le c\|u\|_{W_2^1(Q)}\|\psi\|_{W_2^1(Q)}\|\delta\upsilon\|_{W_2^1[0,\ell]}.$$

Учитывая здесь оценки $(8),(19)$, получим ограниченность по $\delta\upsilon$ функционала в правой части (20).

Теперь проведем оценку остаточного члена R, входящего в (27). Используя неравенство Коши – Буняковского получим

$$|R|\le\|\psi\|_{L_2(Q)}\left\|\frac{\partial \delta u}{\partial x}\right\|_{L_2(Q)}\|\delta\upsilon\|_{W_2^1[0,\ell]}+\frac{1}{2}\|\delta u(x,T)\|_{L_2(0,\ell)}^2.$$

Учитывая здесь теоремы вложения $W_2^1(Q)\to L_2(0,\ell)$ [10, с. 70], т.е. оценку $\|\delta u(x,T)\|_{L_2(0,\ell)}\le c\|\delta u\|_{W_2^1(Q)}$ и оценку (26), получим, что $R=o\left(\|\delta\upsilon\|_{W_2^1[0,\ell]}\right)$.

Тогда из (27) следует, что функционал (6) дифференцируем по Фреше на V и справедлива формула (20). Покажем, что отображение $\upsilon\to J'(\upsilon)$, определяемое равенством (20), непрерывно действует из V в сопряженное к $\overset{0}{W_2^1}[0,\ell]$ пространство $W_2^{-1}(0,\ell)$.

Пусть $\delta\psi(x,t)=\psi(x,t;\upsilon+\delta\upsilon)-\psi(x,t;\upsilon)$. Из $(15)-(17)$ следует, что $\delta\psi(x,t)$ является обобщенным решением из $W_2^1(Q)$ краевой задачи

$$\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial x}[(\upsilon+\delta\upsilon)\psi]=\frac{\partial}{\partial x}(\psi\delta\upsilon),\ (x,t)\in Q,$$
$$\delta\psi|_{t=T}=0,\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}|_{t=T}=\delta u(x,T),\ 0\le x\le\ell,$$
$$\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}|_{x=0}=0,\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}|_{x=\ell}=0,\ 0\le t\le T.$$

Аналогично (19), для решения этой задачи справедлива оценка

$$\|\delta\psi\|_{W_2^1(Q)}\le c\Big[\|\delta u(x,T)\|_{L_2(0,\ell)}+\|\delta\upsilon\|_{W_2^1[0,\ell]}\Big].$$

В силу ограниченности вложения $W_2^1(Q)\to L_2(0,\ell)$ [10, с. 70] из последнего неравенства получим, что

$$\|\delta\psi\|_{W_2^1(Q)}\le c\Big[\|\delta u\|_{W_2^1(Q)}+\|\delta\upsilon\|_{W_2^1[0,\ell]}\Big]. \tag{28}$$

Тогда из (26) и (28) следует оценка

$$\|\delta\psi\|_{W_2^1(Q)}\le c\|\delta\upsilon\|_{W_2^1[0,\ell]}. \tag{29}$$

Используя (20) и неравенство Коши – Буняковского, имеем

$$\|J'(\upsilon+\delta\upsilon)-J'(\upsilon)\|_{W_2^{-1}(0,\ell)}\le$$
$$\le c\left[\left\|\frac{\partial\delta u}{\partial x}\right\|_{L_2(Q)}\|\psi\|_{L_2(Q)}+\|\delta\psi\|_{L_2(Q)}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L_2(Q)}+\left\|\frac{\partial\delta u}{\partial x}\right\|_{L_2(Q)}\|\delta\psi\|_{L_2(Q)}\right].$$

В силу (26) и (29) отсюда получаем оценку

$$\|J'(\upsilon+\delta\upsilon)-J'(\upsilon)\|_{W_2^{-1}(0,\ell)}\le L\|\delta\upsilon\|_{W_2^1[0,\ell]}, \tag{30}$$

где $L-$ констата Липшица. Отсюда следует, что $\upsilon\to J'(\upsilon)$ есть непрерывное отображение из V в $W_2^{-1}(0,\ell)$. Теорема 3 доказана.

4. Необходимые условия оптимальности и формула для градиента функционала (6)

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда для оптимальности управления $\upsilon_*(x)\in V$ в задаче $(1)-(3),(5),(6)$ необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_Q\frac{\partial u_*(x,t)}{\partial x}\psi_*(x,t)(\upsilon(x)-\upsilon_*(x))dxdt\ge 0 \tag{31}$$

для любого $\upsilon=\upsilon(x)\in V$, где $u_*(x,t)=u(x,t;\upsilon_*),\psi_*(x,t)=\psi(x,t;\upsilon_*)$ – решения задач $(1)-(3)$ и $(15)-(17)$ соответственно при $\upsilon=\upsilon_*(x)$.

Доказательство. Множество V, определяемое соотношением (5), выпукло в $\overset{0}{W}{}_2^1[0,\ell]$. Кроме того, согласно теореме 3, функционал $J(\upsilon)$ непрерывно дифференцируем по Фреше на V и его дифференциал в точке $\upsilon \in V$ определяется равенством (20). Тогда в силу теоремы 5 из [12, с. 28] на элементе $\upsilon_* \in V$ необходимо выполнение неравенства $\langle J'(\upsilon_*), \upsilon - \upsilon_* \rangle \geq 0$ при всех $\upsilon \in V$. Отсюда и из (20) следует справедливость неравенства (31) при всех $\upsilon \in V$. Теорема 4 доказана.

Теперь покажем, что можно получить формулу для градиента функционала (6). Введем следующую краевую задачу об определении функции $\psi_1 = \psi_1(x;\upsilon)$ из условий

$$-\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \psi_1 = f(x), 0 < x < \ell; \tag{32}$$

$$\frac{d\psi_1}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{d\psi_1}{dx}\Big|_{x=\ell} = 0, \tag{33}$$

где $f_1(x) = \int_0^T \frac{\partial u}{\partial x}\psi dt$ [4].

Под решением задачи $(32), (33)$ при заданном $\upsilon \in V$ будем понимать функцию $\psi_1 = \psi_1(x;\upsilon)$ из $W_2^1[0,\ell]$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_0^\ell \left[\frac{d\psi_1}{dx}\frac{d\eta}{dx} + \psi_1\eta \right] dx = \int_0^\ell f_1 \eta dx \tag{34}$$

при любой функци $\eta = \eta(x)$ из $W_2^1[0,\ell]$.

Отметим, что решение задачи $(15)-(17)$ при фиксированном $\upsilon \in V$ обладает свойством $\psi \in C\left([0,T]; W_2^1[0,\ell]\right)$, поэтому она эквивалентна непрерывной функции и, следовательно, ограничена на Q. Тогда правая часть уравнения (32) принадлежит $L_2(0,\ell)$ и краевая задача (32), (33) однозначно разрешима в $W_2^1[0,\ell]$ [14, с. 184].

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда градиент функционала (6) в произвольной точке $\upsilon \in V$ определяется выражением

$$J'(\upsilon) = \psi_1(x;\upsilon). \tag{35}$$

Доказательство. Пусть $\upsilon, \upsilon + \delta\upsilon \in V$ – произвольные управления, где $\delta\upsilon \in W_2^1[0,\ell]$ – приращение управления на элементе $\upsilon \in V$. Полагая в тождестве (34) $\eta = \delta\upsilon$, получим

$$\int_0^\ell \left[\frac{d\psi_1}{dx}\frac{d\delta\upsilon}{dx} + \psi_1\delta\upsilon \right] dx = \int_0^\ell f_1(x)\delta\upsilon dx = \int_Q \frac{\partial u}{\partial x}\psi\delta\upsilon dx dt.$$

Учитывая это равенство в (20), будем иметь

$$\langle J'(\upsilon), \delta\upsilon \rangle = \int_0^\ell \left[\psi_1\delta\upsilon + \frac{d\psi_1}{dx}\frac{d\delta\upsilon}{dx} \right] dx.$$

Отсюда следует, что градиент функционала (6) определяется равенством (35). Теорема 5 доказана.

Следующая теорема выражает необходимое условие оптимальности в задаче $(1)-(3),(5),(6)$ с использованием градиента функционала (6).

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда для оптимальности управления $\upsilon_* = \upsilon_*(x) \in V$ в задаче $(1)-(3),(5),(6)$ необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_0^{\ell}\left[\psi_{1*}(x)(\upsilon(x)-\upsilon_*(x))+\frac{d\psi_{1*}(x)}{dx}\left(\frac{d\upsilon(x)}{dx}-\frac{d\upsilon_*(x)}{dx}\right)\right]dx \ge 0$$

для любой $\upsilon = \upsilon(x) \in V$, где $\psi_{1*}(x) = \psi_1(x;\upsilon_*)$ – решение задачи $(32),(33)$ при $\upsilon = \upsilon_*(x)$.

Доказательство теоремы 6 проводится вполне анологично доказательству теоремы 4 с использованием формулы (35).

5. Алгоритм нахождения приближенного решения задачи (1) – (3), (5), (6)

Множество V выпукло и замкнуто в $\overset{0}{W}{}_2^1[0,\ell]$, и мы выше доказали, что функционал $J(\upsilon) \in C^{1,1}(V)$ [см. формулу (30)]. Тогда метод проекции градиента может применяться для приближенного решения задачи $(1)-(3),(5),(6)$. В этом случае метод заключается в построении последовательности $\{\upsilon_k\}$ по правилу

$$\upsilon_{k+1} = P_V(\upsilon_k - \alpha_k J'(\upsilon_k)), k = 0,1,..., \tag{36}$$

где α_k – положительная величина, $P_V(\upsilon)$ – проекция точки υ на множество V, α_k выбирается из условия

$$0 < \varepsilon_0 \le \alpha_k \le \frac{2}{L+2\varepsilon}, \tag{37}$$

а $\varepsilon_0, \varepsilon$ – положительные числа, являющиеся параметрами метода [12, с. 73], L – константа Липшица для градиента $J'(\upsilon)$. В [12] в общем случае доказано, что при произвольном начальном приближении $\upsilon_0 \in V$ последовательность $\{J(\upsilon_k)\}$ монотонно убывает и $\lim\limits_{k\to\infty}\|\upsilon_k - \upsilon_{k+1}\|_H = 0$, где $\{\upsilon_k\}$ – последовательность, полученная методом $(36),(37)$.

В нашей задаче $(1)-(3),(5),(6)$ за пространство H можно взять $\overset{0}{W}{}_2^1[0,\ell]$.

Посмотрим, как выглядит метод проекции градиента для задачи $(1)-(3),(5),(6)$. Проекция любой точки $\upsilon(x) \in W_2^1[0,\ell]$ на множество V представляет собой функцию $P_V(\upsilon) = w(x), 0 \le x \le \ell,$ где

$$w(x)=\begin{cases}-M_1 \text{ при } \upsilon(x)<-M_1,\\ \upsilon(x) \text{ при } |\upsilon(x)|\le M_1,\\ M_1 \text{ при } \upsilon(x)>M_1;\end{cases} \quad w'(x)=\begin{cases}-M_2 \text{ при } \upsilon'(x)<-M_2,\\ \upsilon'(x) \text{ при } |\upsilon'(x)|\le M_2,\\ M_2 \text{ при } \upsilon'(x)>M_2.\end{cases}$$

Поэтому $(k+1)$-е приближение $\upsilon_{k+1}(x)$, $0 \le x \le \ell$, метода проекция градиента для задачи $(1)-(3),(5),(6)$ будет получаться по правилу

$$\upsilon_{k+1}(x)=\begin{cases}-M_1 \text{ } при \text{ } \upsilon_k(x)-\alpha_k\psi_1(x;\upsilon_k)<-M_1,\\ \upsilon_k(x)-\alpha_k\psi_1(x;\upsilon_k) \text{ } при \text{ } |\upsilon_k(x)-\alpha_k\psi_1(x;\upsilon_k)|\le M_1,\\ M_1 \text{ } при \text{ } \upsilon_k(x)-\alpha_k\psi_1(x;\upsilon_k)>M_1;\end{cases} \tag{38}$$

$$\upsilon'_{k+1}(x)=\begin{cases}-M_2 \text{ } при \text{ } \upsilon'_k(x)-\alpha_k\psi'_1(x;\upsilon_k)<-M_2,\\ \upsilon'_k(x)-\alpha_k\psi'_1(x;\upsilon_k) \text{ } при \text{ } |\upsilon'_k(x)-\alpha_k\psi'_1(x;\upsilon_k)|\le M_2,\\ M_2 \text{ } при \text{ } \upsilon'_k(x)-\alpha_k\psi'_1(x;\upsilon_k)>M_2,\end{cases} \tag{39}$$

причем при выборе α_k в $(38),(39)$ можно воспользоваться условием (37).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кабанихин С.И.*, *Искаков К.Т.* Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. Новосибирск: НГУ, 2001. 315 с.
2. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 457 с.
3. *Тагиев Р.К.* Об оптимальном управлении коэффициентами гиперболического уравнения // Автомат. и телемех. 2012. № 7. С. 40–54.
4. *Тагиев Р.К.* Задачи оптимального управления коэффициентами уравнений с частными производными: автореф. докт. дис. Баку, 2010.
5. *Li Bo.*, *Lou Hongwei.* Optimality conditions for semilinear hyperbolic equations with controls in coefficients // Applied Mathematics and Optimization. 2012. V. 65(3). P. 371–402.
6. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504.
7. *Романов В.Г.*, *Кабанихин С.И.* Обратные задачи геоэлектрики. М.: Наука, 1991.
8. *Kabanikhin S.I.* Numerical analysis of inverse problems // J. Inverse and ILL-Posed Problems. 1995. V. 3. № 4. P. 278–304.
9. *Искаков К.Т.*, *Кабанихин С.И.* Обобщенное решение обратной задачи для уравнения акустики. Новосибирск: Изд-во НИИ дискретной математики и информатики, 2000. 16 с.
10. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
11. *Лионс Ж.Л.*, *Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
12. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
13. *Экланд И.*, *Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.
14. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983. 424 с.

Статья поступила 12.01.2018 г.

Guliyev H.F., Nasibzadeh V.N. (2018) REDUCTION OF THE ACOUSTIC INVERSE PROBLEM TO AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM AND ITS INVESTIGATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 54. pp. 5–16

DOI 10.17223/19988621/54/1

Keywords: coefficient inverse problem, optimal control, necessary conditions, gradient of the functional.

In this paper, the coefficient inverse problem for the one-dimensional acoustic equation is considered. The problem is reduced to an optimal control problem. In the new problem, the existence theorems are proved, necessary conditions of optimality are derived, differentiability of the functional is shown, and an iteration algorithm for finding the solution of the optimal control problem based on the gradient projection method is proposed.

We consider the problem of determining a pair of functions $(u(x,t),\upsilon(x))$ under constraints

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\upsilon(x)\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,t),(x,t)\in Q\equiv(0,\ell)\times(0,T), \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u_1(x),0\le x\le\ell, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0}=0,\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=\ell}=0,0\le t\le T, \tag{3}$$

$$u(x,T)=g(x),0\le x\le\ell,$$

here, $f\in L_2(Q),u_0\in W_2^1[0,\ell],u_1\in L_2(0,\ell),g\in W_2^1[0,\ell]$ – are given functions.

This problem is reduced to the following optimal control problem: find a function belonging to the set

$$V=\left\{\upsilon(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1[0,\ell]:|\upsilon(x)|\le M_1,|\upsilon'(x)|\le M_2 \text{ a.e.on } [0,\ell]\right\}, \tag{4}$$

and minimizing the functional

$$J(\upsilon)=\frac{1}{2}\int_0^\ell[u(x,T;\upsilon)-g(x)]^2dx \tag{5}$$

under constraints (1)–(3), where $u(x,t;\upsilon)$ is a solution of problem (1)–(3) at a given $\upsilon(x)$, which is called a control. The solvability of problem (1)–(3), (4), (5) is proved.

Then, the differential of the functional is calculated and the following theorem is proved.

Theorem. Under the conditions considered above, the inequality

$$\int_Q\frac{\partial u_*(x,t)}{\partial x}\psi_*(x,t)(\upsilon(x)-\upsilon_*(x))dxdt\ge 0$$

where $\psi_*(x,t)$ is solution of the adjoint problem corresponding to the control $\upsilon_*=\upsilon_*(x)$:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial x}(\upsilon\psi)=0,(x,t)\in Q,$$

$$\psi|_{t=T}=0,\frac{\partial\psi}{\partial t}|_{t=T}=u(x,T;\upsilon)-g(x),0\le x\le\ell,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}|_{x=0}=0,\frac{\partial\psi}{\partial x}|_{x=\ell}=0,0\le t\le T$$

is a necessary condition for optimality of the control $\upsilon_*=\upsilon_*(x)\in V$ of the problem (1)–(3), (4), (5) if it is fulfilled for all $v\in V$.

AMS Mathematical Subject Classification: 35L20, 49K20

GULIYEV Hamlet Farman (Doctor of Physics and Mathematics, Baku State University, Baku, Azerbaijan). E-mail: hkuliyev@rambler.ru

NASIBZADEH Vusala Nazim (Sumgait State University, PhD candidate, Sumgait, Azerbaijan). E-mail: nasibzade1987@gmail.com

REFERENCES

1. Kabanikhin S.I., Iskakov K.T. (2001) *Optimizatsionnye metody resheniya koeffitsiyentnykh obratnykh zadach* [Optimization methods for solving coefficient inverse problems]. Novosibirsk: NSU Publ. 315 p.
2. Kabanikhin S.I. (2009) Obratnye i nekorrektnye zadachi [Inverse and ill-posed problems]. Novosibirsk: Sib. scient. Publ. 457 p.
3. Tagiev R.K. (2012) On optimal control of the hyperbolic equation coefficients. *Automation and Remote Control*. 73(7). pp 1145–1155. DOI: 10.1134/S0005117912070041.
4. Tagiev R.K. (2010) *Zadachi optimal'nogo upravleniya koeffitsiyentami uravneniy s chastnymi proizvodnymi* [Problems of Optimal Control for Coefficients of Partial Differential Equations]. Abstract of the doctoral dissertation. Baku.
5. Li Bo, Lou Hongwei (2012) Optimality conditions for semilinear hyperbolic equations with controls in coefficients. *Applied Mathematics and Optimization*. 65(3). pp. 371–402.
6. Tikhonov A.N. (1963) O reshenii nekorrektno postavlennykh zadach i metode regulyarizatsii [On the solution of ill-posed problems and the regularization method]. *Dokl. AN SSSR*. 151(3). pp. 501–504.
7. Romanov V.G., Kabanikhin S.I. (1991) *Obratnye zadachi geoelektriki* [Inverse problems of geoelectrics]. Moscow: Nauka.
8. Kabanikhin S.I. (1995) Numerical analysis of inverse problems. *J. Inverse and Ill-Posed Problems*. 3(4). pp. 278–304.
9. Iskakov K.T., Kabanikhin S.I. (2000) *Obobshchennoye resheniye obratnoy zadachi dlya uravneniya akustiki* [Generalized solution of the inverse problem for the acoustic equation]. Novosibirsk. Publishing House of Discrete Mathematics and Informatics Research Institute.
10. Ladyzhenskaya O.A. (1973) *Krayevye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary-value problems of mathematical physics]. Moscow: Nauka. 408 p.
11. Lions J.L, Magenes E. (1971) *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Nonhomogeneous boundary value problems and their applications]. Moscow: Mir.
12. Vasilyev F.P. (1981) *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach* [Methods for solving extremum problems]. Moscow: Nauka. 400 p.
13. Ekeland I., Temam R. (1979) *Vypuklyy analiz i variatsionnye problemy* [Convex analysis and Variational Problems]. Moscow: Mir. 399 p.
14. Mikhailov V.P. (1983) *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Differential equations in partial derivatives]. Moscow: Nauka. 424 p.