УДК 517.977.56 MSC 49K20
DOI 10.17223/19988621/54/2

К.Б. Мансимов, Ш.М. Расулова

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается одна задача оптимального управления, занимающая промежуточное положение между задачами оптимального управления системами с сосредоточенными и с распределенными параметрами. Установлены необходимые условия оптимальности особых управлений в смысле принципа максимума Понтрягина.

Ключевые слова: *принцип максимума Понтрягина, необходимое условие оптимальности особых управлений, формула приращения.*

Исследуется ряд задач оптимального управления [1, 2], занимающих промежуточное место между задачами оптимального управления системами с сосредоточенными и с распределенными параметрами.

Как отмечано в [1], эти задачи тесно связаны с задачами оптимального управления с сосреточечными параметрами, но вместе с тем могут быть интерпретированы так же, как задачи оптимального управления для уравнений в частных производных, с управлением на границе (граничная задача оптимального управления для одной системы с распределенными параметрами).

В [1, 2] для подобных задач получены необходимые условия оптимальности типа принципа максимума Л.С. Понтрягина и достаточные условия оптимальности типа В.Ф. Кротова.

В предлагаемой работе исследуется задача оптимального управления типа [1, 2] с несколько иным критерием качества. При помощи метода приращений сначала установлены необходимые условия оптимальности первого порядка в форме принципа максимума Понтрягина (см., напр., [3, 4]).

Заметим, что принцип максимума Понтрягина, являясь необходимым условием оптимальности первого порядка, нередко вырождается, становясь неэффеективным. Такие случаи называют особыми а соответствующие управления – особыми управлениями. Для исследования на оптимальность особых управлений надо иметь новые необходимые условия оптимальности.

В работе, применяя методику, предложенную и развитую авторами [5–11] и др., исследуются также особые случаи. Суть применяемой схемы заключается в построении новых формул приращения второго порядка критерия качества, позволяющие получить необходимые условия оптимальности первого и второго порядков с единых позиций.

Для задачи, рассматриваемой в статье, особые управления исследуются впервые.

Заметим,что особые управления возникают во многих прикладных задачах оптимального управления (см., напр., [12–14]).

2. Постановка задачи

Допустим, что управляемый процесс в области $D = T \times X$ $(T = [t_0, t_1],\ X = [x_0, x_1])$ описывается системой дифференциальных уравнений

$$z_t(t,x) = f(t,x,z(t,x),u(t,x)),\ (t,x) \in D\ , \tag{1}$$

с начальным условием

$$z(t_0,x) = y(x), \quad x \in X. \tag{2}$$

Здесь $f(t,x,z,u)$ – заданная n-мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z до второго порядка включительно, t_0, t_1, x_0, x_1 – заданы, $u(t,x)$ – r-мерная кусочно-непрерывная по t (с конечным числом точек разрыва первого рода) при всех $x \in X$ и непрерывная по x при всех $t \in T$ управляющая вектор-функция со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U \subset R^r$, т.е.

$$u(t,x) \in U \subset R^r,\ (t,x) \in D\ . \tag{3}$$

а $y(x)$ – управляемая начальная вектор-функция, определяемая из уравнения

$$\dot{y} = g(x,y,v),\ x \in X\ , \tag{4}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0\ , \tag{5}$$

где $g(x,y,v)$ – заданная n-мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по y до второго порядка включительно, y_0 – заданный постоянный вектор, $v(x)$ – q-мерный кусочно-непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $V \subset R^q$,т.е.

$$v(x) \in V \subset R^q,\ x \in X\ . \tag{6}$$

Пару $(u(t,x), v(x))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Под решением задачи (1), (2), (4), (5), соответствующем допустимому управлению $(u(t,x), v(x))$, понимается пара $(z(t,x), v(x))$ функций $z(t,x)$, $y(x)$, непрерывных по совокупности переменных, при этом $z(t,x)$ и $y(x)$ – кусочно гладкие по t и x (с конечным числом точек разрыва первого рода) соответственно и удовлетворяющие соотношениям (1), (2), (4), (5).

На решениях задачи (1), (2), (4), (5), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим функционал

$$S(u,v) = \varphi(y(x_1)) + \int_{x_0}^{x_1} G(x,z(t_1,x))dx\ . \tag{7}$$

Здесь $\varphi(y)$, $G(x,z)$ – заданные скалярные функции непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по y, z соответственно до второго порядка включительно.

Допустимое управление $\left(u^{\circ}(t,x),\, v^{\circ}(x)\right)$, доставляющее минимум функционалу (7) при ограничениях (1) – (6), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $\left(u^{\circ}(t,x),\, v^{\circ}(x),\, z^{\circ}(t,x),\, y^{\circ}(x)\right)$ – оптимальным процессом.

Нашей целью является вывод необходимых условий оптимальности.

3. Формула для приращения второго порядка критерия качества

Пусть $(u(t,x),v(x))$ – фиксированное, а $(\bar{u}(t,x)=u(t,x)+\Delta u(t,x),$ $\bar{v}(x)=v(x)+\Delta v(x))$ – произвольные допустимые управления.

Через $(z(t,x),y(t))$, $(\bar{z}(t,x)=z(t,x)+\Delta z(t,x),\ \bar{y}(t)=y(t)+\Delta y(t))$ обозначим соответствующие им решения задач (1), (2), (4), (5) и запишем приращение функционала (7), соответствующее этим допустимым управлениям

$$\Delta S\left(u^{\circ},v^{\circ}\right)=S(\bar{u},\bar{v})-S\left(u^{\circ},v^{\circ}\right)=$$

$$=\left[\varphi(\bar{y}(x_1))-\varphi\left(y^{\circ}(x_1)\right)\right]+\int_{x_0}^{x_1}\left[G(x,\bar{z}(t_1,x))-G\left(x,z^{\circ}(t_1,x)\right)\right]dx\,. \tag{8}$$

Далее, ясно, что приращение $(\Delta z(t,x),\Delta y(x))$ состояния $\left(z^{\circ}(t,x),y^{\circ}(x)\right)$ является решением системы дифференциальных уравнений

$$\Delta z_t\,(t,x)=f\left(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x)\right)-f\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x)\right); \tag{9}$$

$$\Delta z(t_0,x)=\Delta y(x),\quad x\in X\,; \tag{10}$$

$$\Delta\dot{y}(x)=g\left(x,\bar{y}(x),\bar{v}(x)\right)-g\left(x,y^{\circ}(x),v^{\circ}(x)\right); \tag{11}$$

$$\Delta y(x_0)=0\,. \tag{12}$$

Предположим, что $\psi^{\circ}(t,x)$ $\left(p^{\circ}(x)\right)$ – пока неизвестная n-мерная вектор-функция, удовлетворяющая тем условиям гладкости, которые нужны для корректности дальнейших рассуждений.

Умножая обе части соотношения (9) ((11)) слева скалярно на $\psi^{\circ}(t,x)$ $\left(p^{\circ}(x)\right)$, а затем интегрируя обе части полученного соотношения по области D (по t от t_0-го до t_1) и введя обозначения

$$H\left(t,x,z,u,\psi^{\circ}\right)=\psi^{\circ'}f(t,x,z,u),\quad M\left(x,y,v,p^{\circ}\right)=p^{\circ'}g(x,y,v),$$

получим

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi^{\circ'}(t,x)\Delta z_t\,(t,x)\,dx\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[H\left(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x),\psi^{\circ}(t,x)\right)-H\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi^{\circ}(t,x)\right)\right]dx\,dt; \tag{13}$$

$$\int_{x_0}^{x_1}p^{\circ'}(x)\Delta\dot{y}(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_1}\left[M\left(x,\bar{y}(x),\bar{v}(x),p^{\circ}(x)\right)-M\left(x,y^{\circ}(x),v^{\circ}(x),p^{\circ}(x)\right)\right]dx\,. \tag{14}$$

Далее, с учетом (10) и (12) имеем

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi^{o'}(t,x)\Delta z_t(t,x)\,dx\,dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1}\left[\psi^{o'}(t_1,x)\Delta z(t_1,x)-\psi^{o'}(t_0,x)\Delta y(x)\right]dx-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi_t^{o'}(t,x)\,dx\,dt; \qquad (15)$$

$$\int_{x_0}^{x_1}p^{o'}(x)\Delta\dot{y}(x)\,dx = p^{o'}(x_1)\Delta y(x_1)-\int_{x_0}^{x_1}\dot{p}^{o'}(x)\Delta y(x)\,dx\,. \qquad (16)$$

С учетом тождеств (13) – (16) формула приращения (8) записывается в виде

$$\begin{aligned}\Delta S\left(u^{o},v^{o}\right) &= \left[\varphi(\bar{y}(x_1))-\varphi\left(y^{o}(x_1)\right)\right]+\int_{x_0}^{x_1}\left[G(x,\bar{z}(t_1,x))-G\left(x,z^{o}(t_1,x)\right)\right]dx+\\ &+\int_{x_0}^{x_1}\psi^{o'}(t_1,x)\Delta z(t_1,x)\,dx-\int_{x_0}^{x_1}\psi^{o'}(t_0,x)\Delta y(x)\,dx-\\ &-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi_t^{o'}(t,x)\Delta z(t,x)\,dx\,dt+p^{o'}(x_1)\Delta y(x_1)-\int_{x_0}^{x_1}\dot{p}^{o'}(x)\Delta y(x)\,dx- \qquad (17)\\ &-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[H\left(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x),\psi^{o}(t,x)\right)-H\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi^{o}(t,x)\right)\right]dx\,dt-\\ &-\int_{x_0}^{x_1}\left[M\left(x,\bar{y}(x),\bar{v}(x),p^{o}(x)\right)-M\left(x,y^{o}(x),v^{o}(x),p^{o}(x)\right)\right]dx.\end{aligned}$$

Для простоты изложений в дальнейшем будут использованы следующего типа обозначения:

$$\Delta_{\bar{u}(t,x)}H(t,x)\equiv H\left(t,x,z^{o}(t,x),\bar{u}(t,x),\psi^{o}(t,x)\right)-H\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi^{o}(t,x)\right),$$

$$\Delta_{\bar{v}(x)}M(x)\equiv M\left(x,y^{o}(x),\bar{v}(x),p^{o}(x)\right)-M\left(x,y^{o}(x),v^{o}(x),p^{o}(x)\right),$$

$$f_z(t,x)\equiv f_z\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x)\right),$$

$$g_y(x)\equiv g_y\left(x,y^{o}(x),v^{o}(x)\right).$$

По предположению $f(t,x,z,u)$, $g(x,y,v)$, $\varphi(y)$ и $G(x,z)$ достаточно гладкие функции. Поэтому используя формулу Тейлора из (17), получим

$$\begin{aligned}\Delta S\left(u^{o},v^{o}\right) &= \varphi_y'\left(y^{o}(x_1)\right)\Delta y(x_1)+\int_{x_0}^{x_1}G_z'\left(x,z^{o}(t_1,x)\right)\Delta z(t_1,x)\,dx+\\ &+\int_{x_0}^{x_1}\psi^{o'}(t_1,x)\Delta z(t_1,x)\,dx+p^{o'}(x_1)\Delta y(x_1)-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi_t^{o'}(t,x)\Delta z(t,x)\,dx\,dt-\\ &-\int_{x_0}^{x_1}\dot{p}^{o'}(x)\Delta y(x)\,dx-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\bar{u}(t,x)}H(t,x)\,dx\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H_z'(t,x)\Delta z(t,x)\,dx\,dt-\end{aligned}$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\bar{u}(t,x)}H_z'(t,x)\Delta z(t,x)\,dx\,dt-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\Delta z(t,x)\,dx\,dt-$$
$$-\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\bar{v}(x)}M(x)\,dx-\int_{x_0}^{x_1}M_y'(x)\Delta y(x)\,dx-\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\bar{v}(x)}M_y'(x)\Delta y(x)\,dx-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta y'(x)M_{yy}(x)\Delta y(x)\,dx+\frac{1}{2}\Delta y'(x_1)\varphi_{yy}\left(y^{\circ}(x_1)\right)\Delta y(x_1)+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t_1,x)G_{zz}\left(x,z^{\circ}(t_1,x)\right)\Delta z(t_1,x)\,dx+\eta_1(\Delta u,\Delta v),\tag{18}$$

где по определению $\eta_1(\Delta u,\Delta v)$ остаток формулы приращения определяемая формулой

$$\eta_1(\Delta u,\Delta v)=o_1\left(\|\Delta y(x_1)\|^2\right)+\int_{x_0}^{x_1}o_2\left(\|\Delta z(t_1,x)\|^2\right)dx-\int_{x_0}^{x_1}o_3\left(\|\Delta y(x)\|^2\right)dx-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_4\left(\|\Delta z(t,x)\|^2\right)dx\,dt-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t,x)\Delta_{\bar{u}(t,x)}H_{zz}(t,x)\Delta z(t,x)\,dx\,dt-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta y'(x)\Delta_{\bar{v}(x)}M_{yy}(x)\Delta y(x)\,dx,\tag{19}$$

а величины $o_i(\cdot)$, $i=\overline{1,4}$, определяются из разложений

$$\varphi(\bar{y}(x_1))-\varphi\left(y^{\circ}(x_1)\right)=\varphi_y'\left(y^{\circ}(x_1)\right)\Delta y(x_1)+\frac{1}{2}\Delta y'(x_1)\varphi_{yy}\left(y^{\circ}(x_1)\right)\Delta y(x_1)+o_1\left(\|\Delta y(x_1)\|^2\right),$$

$$G(x,\bar{z}(t_1,x))-G\left(x,z^{\circ}(t_1,x)\right)=G_z'\left(x,z^{\circ}(t_1,x)\right)\Delta z(t_1,x)+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t_1,x)G_{zz}\left(x,z^{\circ}(t_1,x)\right)\Delta z(t_1,x)\,dx+o_2\left(\|\Delta z(t_1,x)\|^2\right),$$

$$M\left(x,\bar{y}(x),\bar{v}(x),p^{\circ}(x)\right)-M\left(x,y^{\circ}(x),\bar{v}(x),p^{\circ}(x)\right)=M_y'\left(x,y^{\circ}(x),\bar{v}(x),p^{\circ}(x)\right)\Delta y(x)+$$
$$+\frac{1}{2}\Delta y'(x)M_{yy}\left(x,y^{\circ}(x),\bar{v}(x),p^{\circ}(x)\right)\Delta y(x)+o_3\left(\|\Delta y(x)\|^2\right),$$

$$H\left(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x),\psi^{\circ}(t,x)\right)-H\left(t,x,z^{\circ}(t,x),\bar{u}(t,x),\psi^{\circ}(t,x)\right)=$$
$$=H_z\left(t,x,z^{\circ}(t,x),\bar{u}(t,x),\psi^{\circ}(t,x)\right)\Delta z(t,x)+$$
$$+\frac{1}{2}\Delta z'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),\bar{u}(t,x),\psi^{\circ}(t,x)\right)\Delta z(t,x)+o_4\left(\|\Delta z(t,x)\|^2\right).$$

Здесь и в дальнейшем $\|\alpha\|$ – норма вектора в R^n, а $o_i\left(\alpha^2\right)$ означает, что $o\left(\alpha^2\right)/\alpha^2\to 0$ при $\alpha\to 0$.

Если предполагать, что $\left(\psi^{\mathrm{o}}(t,x), p^{\mathrm{o}}(x)\right)$ есть решение задачи

$$\psi_t^{\mathrm{o}}(t,x) = -H_z(t,x); \tag{20}$$

$$\psi^{\mathrm{o}}(t_1,x) = -G_x\left(x, z^{\mathrm{o}}(t_1,x)\right); \tag{21}$$

$$\dot{p}^{\mathrm{o}}(x) = -M_y(x) - \psi^{\mathrm{o}'}(t_0,x); \tag{22}$$

$$p^{\mathrm{o}}(x_1) = -\varphi_y\left(y^{\mathrm{o}}(x_1)\right), \tag{23}$$

то формула приращения (18) примет вид

$$\begin{gathered}\Delta S\left(u^{\mathrm{o}}, v^{\mathrm{o}}\right) = -\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\overline{u}(t,x)} H(t,x)\,dx\,dt - \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\overline{v}(x)} M(x)\,dx + \\ +\frac{1}{2}\Delta y'(x_1)\varphi_{yy}\left(y^{\mathrm{o}}(x_1)\right)\Delta y(x_1) + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t_1,x) G_{zz}\left(x, z^{\mathrm{o}}(t_1,x)\right)\Delta z(t_1,x)\,dx - \\ -\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\overline{u}(t,x)} H_z'(t,x)\Delta z(t,x)\,dx\,dt - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t,x) H_{zz}(t,x)\Delta z(t,x)\,dx\,dt - \\ -\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\overline{v}(x)} M_y'(x)\Delta y(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \Delta y'(x) M_{yy}(x)\Delta y(x)\,dx + \eta_1(\Delta u, \Delta v).\end{gathered} \tag{24}$$

Далее, из (9) – (12) получаем, что $\left(\Delta z(t,x), \Delta y(x)\right)$ является решением линеаризованной задачи

$$\Delta z_t(t,x) = f_z(t,x) - \Delta_{\overline{u}(t,x)} f(t,x) + \eta_2(t,x,\Delta u), \quad (t,x) \in D; \tag{25}$$

$$\Delta z(t_0,x) = \Delta y(x), \quad x \in X; \tag{26}$$

$$\Delta \dot{y}(x) = g_y(x) + \Delta_{\overline{v}(x)} g(x) + \eta_3(x,\Delta v); \tag{27}$$

$$\Delta y(x_0) = 0, \tag{28}$$

где по определению

$$\eta_2(t,x,\Delta u) = \Delta_{\overline{u}(t,x)} f_z(t,x)\Delta z(t,x) + o_5\left(\|\Delta z(t,x)\|\right),$$

$$\eta_1(x,\Delta v) = \Delta_{\overline{v}(x)} g_y(x)\Delta y(x) + o_6\left(\|\Delta y(x)\|\right).$$

Здесь величины $o_i(\cdot)$, $i = 5,6$, находятся из разложений

$$\begin{gathered}f\left(t,x,\overline{z}(t,x),\overline{u}(t,x)\right) - f\left(t,x,z(t,x),\overline{u}(t,x)\right) = \\ = f\left(t,x,z(t,x),\overline{u}(t,x)\right)\Delta z(t,x) + o_5\left(\|\Delta z(t,x)\|\right),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}g\left(x,\overline{y}(x),\overline{v}(x)\right) - g\left(x,y^{\mathrm{o}}(x),\overline{v}(x)\right) = \\ = g_y\left(x,y^{\mathrm{o}}(x),\overline{v}(x)\right)\Delta y(x) + o_6\left(\|\Delta y(x)\|\right).\end{gathered}$$

Интерпретируя уравнения (25), (27) как линейные дифференциальные уравнения относительно $\Delta z(t,x)$ и $\Delta y(x)$ соответственно, на основе формулы Коши о представлении решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений (см., напр., [15–17]) получаем, что решения задач (25) – (28) допускают соответственно представления в виде

$$\Delta z(t,x) = F(t,t_0\, x)\Delta y(x) + \int_{t_0}^{t} F(t,\tau,x)\Delta_{\overline{u}(\tau,x)} f(\tau,x)\,d\tau + \eta_4(t,x,\Delta u); \qquad (29)$$

$$\Delta y(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi(x,s)\Delta_{\overline{v}(s)} g(s)\,ds + \eta_5(x,\Delta v). \qquad (30)$$

Здесь, по определению,

$$\eta_4(t,x,\Delta u) = \int_{t_0}^{t} F(t,\tau\, x)\eta_2(\tau,x,\Delta u)\,d\tau ,$$

$$\eta_5(x,\Delta v) = \int_{x_0}^{x} \Phi(x,s)\eta_3(s,\Delta v)\,ds .$$

Далее, учитывая (30) в (29), получим

$$\Delta z(t,x) = \int_{x_0}^{x} F(t,t_0\, x)\Phi(x,s)\Delta_{\overline{v}(s)} g(s)\,ds +$$

$$+\int_{t_0}^{t} F(t,x,\tau)\Delta_{\overline{u}(\tau,x)} f(\tau,x)\,d\tau + \eta_6(t,x,\Delta u,\Delta v), \qquad (31)$$

где по определению

$$\eta_6(t,x,\Delta u,\Delta v) = \eta_4(t,x,\Delta u) + F(t,t_0\, x)\eta_5(x,\Delta v). \qquad (32)$$

Используя независимость и произвольность допустимых управлений $u(t,x)$ и $v(x)$, положим $\Delta u(t,x) \neq 0$, а $\Delta v(x) = 0$.

Тогда представление (31) примет вид

$$\Delta z(t,x) = \int_{t_0}^{t} F(t,\tau,x)\Delta_{\overline{u}(\tau,x)} f(\tau,x)\,d\tau + \eta_6(t,x,\Delta u,0), \qquad (33)$$

а из формулы приращения (24) критерия качества (7) будем иметь

$$\Delta_{\overline{u}} S\left(u^{\circ},v^{\circ}\right) = -\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\overline{u}(t,x)} H(t,x)\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t_1,x) G_{zz}(x,z(t_1,x))\Delta z(t_1,x)\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t,x) H_{zz}(t,x)\Delta z(t,x)\,dx\,dt - \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\overline{u}(t,x)} H_z'(t,x)\Delta z(t,x)\,dx\,dt + \eta_1(\Delta u,0). \qquad (34)$$

Займемся преобразованием отдельных слагаемых в формуле (34), используя представление (33).

Имеем

$$\int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t_1,x) G_{zz}\left(x,z^{\circ}(t_1,x)\right)\Delta z(t_1,x)\,dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t} \Delta_{\overline{u}(\tau,x)} f'(\tau,x) F'(t_1,\tau,x) G_{zz}\left(x,z^{\circ}(t_1,x)\right) F(t_1,s,x)\Delta_{\overline{u}(s,x)} f(s,x)\,d\tau\,ds\,dx +$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1}\Delta_{\overline{u}(\tau,x)}f'(\tau,x)F'(t_1,\tau,x)G_{zz}\left(x,z^{o}(t_1,x)\right)\eta_6(t_1,x,\Delta u,0)\,d\tau\,dx+$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\eta_6'(t_1,x,\Delta u,0)G_{zz}\left(x,z^{o}(t_1,x)\right)\Delta z(t_1,x)\,dx, \tag{35}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}(t,x)}H_z'(t,x)\Delta z(t,x)\,dx\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_1}\Delta_{\overline{u}(\tau,x)}H_z'(\tau,x)F(\tau,t,x)\,d\tau\right]\Delta_{\overline{u}(t,x)}f(t,x)\,dx\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}(t,x)}H_z'(t,x)\eta_6(t,x,\Delta u,0)\,dx\,dt. \tag{36}$$

По аналогии с [5–11] и др. получаем, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\Delta z(t,x)\,dx\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1}\Delta_{\overline{u}(\tau,x)}f'(\tau,x)\left\{\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}F'(t,\tau,x)H_{zz}(t,x)F(t,s,x)\,dt\right\}\Delta_{\overline{u}(s,x)}f(s,x)\,dx\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t_0}^{t}F(t,\tau,x)\Delta_{\overline{u}(\tau,x)}f(\tau,x)\,d\tau\right)H_{zz}(t,x)\eta_6(t,x,\Delta u,0)\,dx\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\eta_6(t,x,\Delta u,0)H_{zz}(t,x)\Delta z(t,x)\,dx\,dt. \tag{37}$$

Положим по определению

$$K(x,\tau,s)=\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}F'(t,\tau,x)H_{zz}(t,x)F(t,s,x)\,dt-$$

$$-F'(t_1,\tau,x)G_{zz}\left(x,z^{o}(t_1,x)\right)F(t_1,s,x). \tag{38}$$

Теперь, учитывая тождества (35) – (37), в формуле приращения (34) получим

$$\Delta_{\overline{u}}S\left(u^{o},v^{o}\right)=-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}(t,x)}H(t,x)\,dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}(\tau,x)}f'(\tau,x)K(x,\tau,s)\Delta_{\overline{u}(s,x)}f(s,x)\,d\tau\,ds\,dx+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t_0}^{t}\Delta_{\overline{u}(t,x)}H_z'(t,x)F(\tau,t,x)\,d\tau\right]\Delta_{\overline{u}(t,x)}f(t,x)\,ds\,dx+\eta_7(\Delta u). \tag{39}$$

Здесь по определению

$$\eta_7(\Delta u)=\eta_1(\Delta u)+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\eta_6(t_1,x,\Delta u,0)G_{zz}\left(x,z^{\mathrm{o}}(t_1,x)\right)\Delta z(t_1,x)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1}\Delta_{\overline{u}(\tau,x)}f'(\tau,x)F'(t_1,\tau,x)G_{zz}\left(x,z^{\mathrm{o}}(t_1,x)\right)\eta_6(t_1,x,\Delta u,0)d\tau dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t_0}^{t}F(t,\tau,x)\Delta_{\overline{u}(\tau,x)}f(\tau,x)d\tau\right)'H_{zz}(t,x)\eta_6(t,x,\Delta u,0)dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\eta_6'(t,x,\Delta u,0)H_{zz}(t,x)\Delta z(t,x)dx\,dt.$$

Если предполагать, что $\Delta u(t,x)=0$, $\Delta v(x)\neq 0$, то представление (31) примет вид

$$\Delta z(t,x)=\int_{x_0}^{x}F(t,t_0,x)\Phi(x,s)\Delta_{\overline{v}(s)}g(s)ds+\eta_6(t,x,0,\Delta v),\tag{40}$$

а из формулы приращения (34) получим

$$\Delta_{\overline{v}}\mathrm{S}\left(\mathrm{u}^{\mathrm{o}},\mathrm{v}^{\mathrm{o}}\right)=\mathrm{S}\left(\mathrm{u}^{\mathrm{o}},\overline{\mathrm{v}}\right)-\mathrm{S}\left(\mathrm{u}^{\mathrm{o}},\mathrm{v}^{\mathrm{o}}\right)=$$

$$=-\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{v}(x)}M(x)dx+\frac{1}{2}\Delta y'(x_1)\varphi_{yy}\left(y^{\mathrm{o}}(x_1)\right)\Delta y(x_1)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t_1,x)G_{zz}\left(x,z^{\mathrm{o}}(t_1,x)\right)\Delta z(t_1,x)dx-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta y'(x)M_{yy}(x)\Delta y(x)dx-$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{v}(x)}M_y'(x)\Delta y(x)dx-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\Delta z(t,x)dx\,dt+\eta_1(0,\Delta v).\tag{41}$$

При помощи представлений (30) доказывается справедливость соотношений

$$\Delta y'(x_1)\varphi_{yy}\left(y^{\mathrm{o}}(x_1)\right)\Delta y(x_1)=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{v}(m)}g'(m)\Phi'(x_1,m)\varphi_{yy}\left(y^{\mathrm{o}}(x_1)\right)\Phi(x_1,\ell)\Delta_{\overline{v}(\ell)}g(\ell)dm\,d\ell+$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{v}(m)}g'(m)\Phi'(x_1,m)\varphi_{yy}\left(y^{\mathrm{o}}(x_1)\right)\eta_5(x_1,\Delta v)dx+\eta_5'(x_1,\Delta v)\varphi_{yy}\left(y^{\mathrm{o}}(x_1)\right)\Delta y(x_1),\tag{42}$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{v}(x)}M_y'(x)\Delta y(x)dx=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{v}(m)}M_y(m)\Phi(x,m)dm\right]'\Delta_{\overline{v}(x)}g(x)dx+\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{v}(x)}M_y'(x)\eta_5(x,\Delta v)dx,\tag{43}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \Delta y'(x) M_{yy}(x) \Delta y(x) dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\overline{v}(m)} g'(m) \left\{ \int_{\max(m,\ell)}^{x_1} \Phi'(x,m) M_{yy}(x) \Phi(x,\ell) dx \right\} \Delta_{\overline{v}(\ell)} g(\ell) dm\, d\ell +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{x_0}^{x} \Phi(x,m) \Delta_{\overline{v}(m)} g(m) dm \right)' M_{yy}(x) \eta_5(x,\Delta v) dx + \int_{x_0}^{x_1} \eta_5'(x,\Delta v) M_{yy}(x) \Delta y(x) dx. \quad (44)$$

Далее, используя представление (40), получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t_1,x) G_{zz}\left(x, z^{\text{o}}(t_1,x)\right) \Delta z(t_1,x) dx = \int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\overline{v}(m)} g'(m) \times$$

$$\times \left\{ \int_{\max(m,\ell)}^{x_1} \Phi'(x,m) F'(t_1,t_0,x) G_{zz}\left(x, z^{\text{o}}(t_1,x)\right) F(t_1,t_0,x) \Phi(x,\ell) dx \right\} \Delta_{\overline{v}(\ell)} g(\ell) dm\, d\ell +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{x_0}^{x} F(t_1,t_0,x) \Phi(x,m) \Delta_{\overline{v}(m)} g(m) dm \right)' G_{zz}\left(x, z^{\text{o}}(t_1,x)\right) \eta_6(t_1,x,0,\Delta v) dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} \eta_6(t_1,x,0,\Delta v) G_{zz}\left(x, z^{\text{o}}(t_1,x)\right) \Delta z(t_1,x) dx, \quad (45)$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t,x) H_{zz}(t,x) \Delta z(t,x) dx\, dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\overline{v}(m)} g'(m) \times$$

$$\times \left\{ \int_{\max(m,\ell)}^{x_1} \Phi'(x,m) F'(t,t_0,x) H_{zz}(t,x) F(t,t_0,x) \Phi(x,\ell) dx \right\} \Delta_{\overline{v}(\ell)} g(\ell) dm\, d\ell +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{x_0}^{x} F(t,t_0,x) \Phi(x,m) \Delta_{\overline{v}(m)} g(m) dm \right)' H_{zz}(t,x) \eta_6(t,x,0,\Delta v) dx\, dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \eta_6'(t,x,0,\Delta v) H_{zz}(t,x) \Delta z(t,x) dx\, dt. \quad (46)$$

Полагая

$$J(m,\ell) = -\Phi'(x,m) \varphi_{yy}\left(y^{\text{o}}(x_1)\right) \Phi(x,\ell) -$$

$$- \int_{\max(m,\ell)}^{x_1} \Phi'(x,m) F'(t_1,t_0,x) G_{zz}\left(x, z^{\text{o}}(t_1,x)\right) F(t_1,t_0,x) \Phi(x,\ell) dx +$$

$$+ \int_{\max(m,\ell)}^{x_1} \Phi'(x,m) M_{yy}(x) \Phi(x,\ell) dx +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{\max(m,\ell)}^{x_1} \Phi'(x,m) F'(t,t_0,x) H_{zz}(t,x) F(t,t_0,x) \Phi(x,\ell) dxdt \quad (47)$$

и учитывая тождества (42) – (46) в (39), получим

$$\Delta_{\overline{v}(x)}S\left(u^{o},v^{o}\right)=S\left(u^{o},\overline{v}\right)-S\left(u^{o},v^{o}\right)=-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{v}(m)}g'(m)J(m,\ell)\Delta_{\overline{v}(\ell)}g(\ell)\,dm\,d\ell+$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{x}^{x_1}\Delta_{\overline{v}(m)}M'_y(m)\Phi(m,x)\,dm\right]\Delta_{v(x)}g(x)\,dx+\eta_8(\Delta v), \qquad (48)$$

где по определению

$$\eta_8(\Delta v)=\frac{1}{2}\eta'_5(x_1,\Delta v)\varphi_{yy}\left(y^{o}(x_1)\right)\Delta y(x_1)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x}^{x_1}\Delta_{\overline{v}(m)}g'(m)\Phi(x_1,m)\varphi_{yy}\left(y^{o}(x_1)\right)\eta_5(x_1,\Delta v)dm-\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{v}(x)}M'_y(x)\eta_5(x,\Delta v)dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{x}^{x_1}\eta'_5(x,\Delta v)M_{yy}(x)\Delta y(x)dx-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{x_0}^{x}\Phi(x,m)\Delta_{\overline{v}(m)}g(m)dm\right)'M_{yy}(x)\eta_5(x,\Delta v)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{x_0}^{x}F(t_1,t_0,x)\Phi(x,m)\Delta_{\overline{v}(m)}g(m)dm\right)'G_{zz}\left(x,z^{o}(t_1,x)\right)\eta_6(t_1,x,0,\Delta v)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\eta'_6(t_1,x,0,\Delta v)G_{zz}\left(x,z^{o}(t_1,x)\right)\Delta z(t_1,x)dx-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\eta'_6(t_1,x,0,\Delta v)H_{zz}(t,x)\Delta z(t,x)dxdt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{x_0}^{x}F(t_1,t_0,x)\Phi(x,m)\Delta_{\overline{v}(m)}g(m)dm\right)'H_{zz}(t,x)\eta_6(t_1,x,0,\Delta v)dxdt.$$

Как видно, главные члены в формулах приращения (39), (48) функционала качества явно от приращения $(\Delta z(t,x),\Delta y(x))$ состояния $\left(z^{o}(t,x),y^{o}(x)\right)$ не зависят. А это, в свою очередь, позволяет получить как необходимое условие оптимальности первого порядка, так и исследовать случай его вырождения с единых позиций.

Заметим, что матричные функции (38), (47) являются аналогами матричных функций, впервые введенных в рассмотрение в работах [5–11] и др. для исследования особых режимов и вывода необходимых условий оптимальности второго порядка.

4. Оценка нормы приращения состояния

Из (9), (11), переходя к эквивалентным интегральным уравнениями типа Вольтерра, будем иметь

$$\Delta z(t,x)=\Delta y(x)+\int_{t_0}^{t}\left[f\left(\tau,x,z^{o}(\tau,x)+\Delta z(\tau,x),u^{o}(\tau,x)+\Delta u(\tau,x)\right)-f\left(\tau,x,z^{o}(\tau,x),u^{o}(\tau,x)\right)\right]d\tau,$$

$$\Delta y(x)=\int_{x_0}^{x}\left[g\left(s,y^{o}(s)+\Delta y(s),v^{o}(s)+\Delta v(z)\right)-g\left(s,y^{o}(s),v^{o}(s)\right)\right]ds.$$

Отсюда, переходя к норме и используя условие Липшица, получим

$$\left\|\Delta z(t,x)\right\| \le \left\|\Delta y(x)\right\| + L_1 \int_{t_0}^{t} \Delta_{\overline{u}(\tau,x)} f\left(\tau, x, z^{\mathrm{o}}(\tau,x), u^{\mathrm{o}}(\tau,x)\right) d\tau + L_1 \int_{t_0}^{t} \left\|\Delta z(\tau,x)\right\| d\tau; \quad (49)$$

$$\left\|\Delta y(x)\right\| \le L_2 \int_{x_0}^{x} \left\|\Delta_{\overline{v}(s)} g\left(s, y^{\mathrm{o}}(s), v^{\mathrm{o}}(s)\right)\right\| ds + L_2 \int_{x_0}^{x} \left\|\Delta y(s)\right\| ds, \quad (50)$$

где $L_1, L_2 = \text{const} > 0$ – некоторые постоянные.

Применяя к неравенству (50) аналог леммы Гронуолла – Беллмана из [18] приходим к неравенству

$$\left\|\Delta y(x)\right\| \le L_3 \int_{x_0}^{x_1} \left\|\Delta_{\overline{v}(s)} g\left(s, y^{\mathrm{o}}(s), v^{\mathrm{o}}(s)\right)\right\| ds, \quad (51)$$

$(L_4 = \text{const} > 0)$.

Учитывая оценку (51) в неравенстве (49), а затем применяя к полученному неравенству леммы Гронуолла – Беллмана, приходим к оценке

$$\left\|\Delta z(t,x)\right\| \le L_5 \left[\int_{x_0}^{x_1} \left\|\Delta_{\overline{v}(s)} g\left(s, y^{\mathrm{o}}(s), v^{\mathrm{o}}(s)\right)\right\| ds + \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\overline{u}(\tau,x)} f\left(\tau, x, z^{\mathrm{o}}(\tau,x), u^{\mathrm{o}}(\tau,x)\right) d\tau \right], \quad (52)$$

где $L_5 = \text{const} > 0$ некоторое постоянное.

Оценки (51), (52) в дальнейшем будут использованы при выводе необходимых условий оптимальности.

5. Необходимые условия оптимальности

Специальное приращение управляющей функции $u^{\mathrm{o}}(t,x)$ определим по формуле

$$\Delta u_{\varepsilon}(t,x) = \begin{cases} u(x), & t \in [\theta, \theta+\varepsilon),\ x \in X, \\ 0, & t \in T \setminus [\theta, \theta+\varepsilon),\ x \in X. \end{cases} \quad (53)$$

Здесь $u(x) \in U$ – произвольная непрерывная функция, $\theta \in [t_0, t_1)$ – произвольная точка непрерывности управляющей функции $u^{\mathrm{o}}(t,x)$ по t, а $\varepsilon > 0$ произвольное малое число, такое, что $\theta + \varepsilon < t_1$.

Через $(\Delta z_{\varepsilon}(t,x), \Delta y_{\varepsilon}(x))$ обозначим специальное приращение состояния $\left(z^{\mathrm{o}}(t,x), y^{\mathrm{o}}(x)\right)$, соответствующее приращению (53) управления $u^{\mathrm{o}}(t,x)$.

Ясно, что $\left\|\Delta y_{\varepsilon}(x)\right\| = 0$, а

$$\left\|\Delta z_{\varepsilon}(t,x)\right\| \le L_6\, \varepsilon, \quad (t,x) \in D. \quad (54)$$

Учитывая (53), (54) в (39), получаем разложение

$$\Delta_{v(x)} S\left(u^{\mathrm{o}}, v^{\mathrm{o}}\right) = -\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{v(x)} H(\theta, x)\, dx + o(\varepsilon). \quad (55)$$

Теперь специальное приращение управляющей функции $v^{\mathrm{o}}(x)$ определим по формуле

$$\Delta v_{\mu}(x)=\begin{cases} v, & x\in[\xi,\xi+\mu), \\ 0, & x\in X\setminus[\xi,\xi+\mu), \end{cases} \tag{56}$$

где $v\in V$ – произвольный вектор, $\xi\in[x_0,x_1)$ – произвольная точка непрерывности $v^{\mathrm{o}}(x)$, а $\mu>0$ – произвольное достаточно малое число, такое, что $\xi+\mu<x_1$.

Через $\left(\Delta z_{\mu}(t,x),\Delta y_{\mu}(x)\right)$ обозначим специальное приращение состояния $\left(z^{\mathrm{o}}(t,x),y^{\mathrm{o}}(x)\right)$, отвечающее приращению (56) управляющей функции $\left(u^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(x)\right)$.

Из оценок (51), (52) следует, что

$$\begin{aligned} &\left\|\Delta z_{\mu}(t,x)\right\|\le L_7\,\mu,\ (t,x)\in D, \\ &\left\|\Delta y_{\mu}(x)\right\|\le L_8\,\mu,\ x\in X. \end{aligned} \tag{57}$$

Принимая во внимания (56), (57) в (48) приходим к разложению

$$\Delta_{v(x)}S\left(u^{\mathrm{o}},v^{\mathrm{o}}\right)=-\mu\,\Delta_v M(\xi)+o(\mu). \tag{58}$$

Из разложений (55), (58) следует справедливость утверждения.

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $\left(u^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(x)\right)$ необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{w(x)}H(\theta,x)\,dx\le 0 \tag{59}$$

для всех $u(x)\in U$, $x\in X$, $\theta\in[t_0,t_1)$,

$$\Delta_v M(\xi)\le 0 \text{ для всех } \xi\in[x_0,x_1). \tag{60}$$

Соотношения (59), (60) назовем принципом максимума Понтрягина для рассматриваемой задачи.

Изучим случай вырождения условия максимума Понтрягина.

Определение. Допустимое управление $\left(u^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(x)\right)$ назовем особым в смысле принципа максимума Понтрягина, если выполняются соотношения

$$\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{w(x)}H(\theta,x)\,dx=0, \text{ для всех } \theta\in[t_0,t_1) \text{ и } u(x)\in U,\ x\in X; \tag{61}$$

$$\Delta_v M(\xi)\equiv 0, \text{ для всех } \xi\in[x_0,x_1) \text{ и } v\in V. \tag{62}$$

Случай выполнения тождеств (61), (62) назовем особым.

Из определения ясно, что в особом случае условие максимума (59), (60) Понтрягина, вырождаясь, становится неэффективным [14].

Поэтому надо иметь новые необходимые условия оптимальности позволяющие распознать неоптимальность особых управлений.

Построенные формулы приращения (39), (48) позволяют получить такие необходимые условия оптимальности.

Предположим, что допустимое управление $\left(u^{\circ}(t,x), v^{\circ}(x)\right)$ является особым в смысле принципа максимума Понтрягина управлением. Тогда из формул приращения (39), (48) с учетом оценок для $\left\|\Delta z_{\varepsilon}(t,x)\right\|$, $\left\|\Delta y_{\mu}(x)\right\|$, $\left\|\Delta z_{\mu}(t,x)\right\|$, а также соотношений (56), (57), (61), (62) получаем справедливость разложений

$$\Delta_{u(x)} S\left(u^{\circ}, v^{\circ}\right) = -\frac{\varepsilon^2}{2}\left[\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{u(x)} f'(\theta,x) K(x,\theta,\theta) \Delta_{u(x)} f(\theta,x)\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{u(x)} H_z'(\theta,x) \Delta_{u(x)} f(\theta,x)\,dx\right] + o\left(\varepsilon^2\right), \tag{63}$$

$$\Delta_v S\left(u^{\circ}, v^{\circ}\right) = -\frac{\varepsilon^2}{2}\left[\Delta_v g'(\xi) J(\xi,\xi) \Delta_v g(\xi) + \Delta_v M_y'(\xi) \Delta_v g(\xi)\right] + o\left(\mu^2\right). \tag{64}$$

Из разложений (63), (64) в силу произвольности и достаточной малости ξ и μ следует

Теорема 2. Для оптимальности особого в смысле принципа максимума Понтрягина управления $\left(u^{\circ}(t,x), v^{\circ}(x)\right)$ необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{u(x)} f'(\theta,x) K(x,\theta,\theta) \Delta_{u(x)} f(\theta,x)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{u(x)} H_x'(\theta,x) \Delta_{u(x)} f(\theta,x)\,dx \le 0, \tag{65}$$

для всех $\theta \in [t_0, t_1)$, $u(x) \in U$, $x \in X$;

$$\Delta_v g'(\xi) J(\xi,\xi) \Delta_v g(\xi) + \Delta_v M_y'(\xi) \Delta_v g(\xi) \le 0, \tag{66}$$

для всех $\xi \in [x_0, x_1)$, $v \in V$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Москаленко А.И.* Об одном классе задач оптимального регулирования // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1969. № 1. С. 68–95.
2. *Москаленко А.И.* Некоторые вопросы теории оптимального управления: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 1971. 21 с.
3. *Габасов Р.*, *Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального упралвения. М.: URSS, 2011. 272 с.
4. *Габасов Р.*, *Кириллова Ф.М.*, *Альсевич В.В.* Методы оптимизации. Минск: Четыре четверты, 2011. 472 с.
5. *Мансимов К.Б.* Об одной схеме исследования особого случая в системах Гурса – Дарбу // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук. 1981. № 2. С. 100–104.
6. *Мансимов К.Б.* Особые управления в системах с запаздыванием. Баку: Изд-во ЭЛМ, 1999. 176 с.
7. *Мансимов К.Б.* Исследование особых процессов в задачах оптимального управления: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Баку: БГУ, 1994. 42 с.
8. *Мансимов К.Б.*, *Марданов М.Дж.* Качественная теория оптимального управления системами Гурса – Дарбу. Баку: Изд-во ЭЛМ, 2010. 360 с.

9. *Mardanov M.J.*, *Mansimov K.B.* Necessary optimality conditions of guasisingular controls in optimal control problem described by integro-differential equations // Proc. Inst. Mech.and Matem. ANAS. 2015. V. 41. № 1. P. 113–122.
10. *Марданов М.Дж.*, *Мансимов К.Б.*, *Меликов Т.К.* Исследование особых упралений и необходимые условия оптимальности второго порядка в системах с запаздыванием. Баку: Элм, 2013. 355 с.
11. *Абдуллаев А.А.*, *Мансимов К.Б.* Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра. Баку, 2013. 224 с.
12. *Параев Ю.И.*, *Грекова Т.И.*, *Данилюк Е.Ю.* Аналитическое решение задачи оптимального управления односекторной экономикой на конечном интервале времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4(17). С. 4–15.
13. *Параев Ю.И.* Оптимальное управления двухсекторный экономикой // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 3(28). С. 4–11.
14. *Габасов Р.*, *Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: URSS, 2013. 256 с.
15. *Алексеев В.М.*, *Фомин С.В.*, *Тихомиров В.М.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 429 с.
16. *Ащепков Л.Т.* Лекции по оптимальному управлению. Владивосток: Изд-во ДВУ, 1985. 165 с.
17. *Габасов Р.*, *Кириллова Ф.М.* Оптимизация линейных систем. Минск: Изд-во БГУ, 1973. 256 с.
18. *Плотников В.И.*, *Сумин В.И.* Проблема устойчивости нелинейных систем Гурса – Дарбу // Дифференц. уравнения. 1972. № 5. С. 845–856.

Статья поступила 07.01.2018 г.

Mansimov K.B., Rasulova Sh.M. (2018) ON OPTIMALITY OF SINGULAR CONTROLS IN AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 54. pp. 17–33

DOI 10.17223/19988621/54/2

Keywords: Pontryagin maximum principle, necessary condition for optimality of singular controls, formula of increment.

In this paper, a Moskalenko type optimal control problem is considered.

We consider the optimal control problem of minimizing the terminal type functional

$$\mathrm{S}(\mathrm{u},\mathrm{v}) = \varphi(y(x_1)) + \int_{x_0}^{x_1} G(x, z(t_1, x))\,dx,$$

under constraints

$$u(t,x) \in U \subset R^r, \ \ (t,x) \in D = [t_0,t_1] \times [x_0,x_1],$$

$$v(x) \in V \subset R^q, \ \ x \in X = [x_0,x_1],$$

$$z_t\,(t,x) = f(t,x,z(t,x),u(t,x)), \ (t,x) \in D,$$

$$z(t_0,x) = y(x), \quad x \in X,$$

$$y(x_0) = y_0.$$

Here, $f(t,x,z,u)$ $(g(x,y,v))$ is an n-dimensional vector function which is continuous on the set of variables, together with partial derivatives with respect to z (y) up to second order,

$t_0, t_1,\ x_0, x_1 (t_0 < t_1, x_0 < x_1)$ are given, $\varphi(y)$ $(G(x,z))$ is a given twice continuously differentiable with respect to y (z) scalar function, U (V) is a given nonempty bounded set, and $u(t,x)$ is an r-dimensional control vector function piecewise continuous with respect to t and continuous with respect to x, $v(x)$ is a q-dimensional piecewise continuous vector of control actions.

The necessary optimality conditions for singular controls in the sense of the Pontryagin maximum principle have been obtained.

AMS Mathematical Subject Classification: 49K20

MANSIMOV Kamil' Bayramali ogly (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Baku State University, Institute of Control Problems of the Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan). E-mail: kamilbmansimov@gmail.com, kmansimov@mail.ru

RASULOVA Shahla Macid gyzy (Institute of Control problems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan).

REFERENCES

1. Moskalenko A.I. (1969) Ob odnom klasse zadach optimal'nogo regulirovaniya [On a class of optimal control problems]. *Zhurn. vychisl. mat. i mat. fiziki.* 1. pp. 68–95.
2. Moskalenko A.I. (1971) *Nekotorye voprosy teorii optimal'nogo upravleniya* [Some problems in the theory of optimal control]. Dis. Cand. fiz.-mat. nauk. Tomsk. 21 p.
3. Gabbasov R., Kirillova F. M. (2011) *Printsip maksimuma v teorii optimal'nogo upravleniya* [The maximum principle in the optimal control theory]. Moscow. URSS. 272 p.
4. Gabasov R., Kirillova F.M., Alisievich V.V. (2011) *Metody optimizatsii* [Optimization Methods] Minsk: Publishing house «Four quarters». 472 p.
5. Mansimov K.B. (1981) Ob odnoy scheme issledovaniya osobogo sluchaya v sistemakh Gursa–Darbu [On a scheme of studying a singular case in Goursat–Darboux systems]. *Izv. AN Azerb. SSR. Ser. Phys.- tech. and math. Sciences*, no. 2, pp. 100–104.
6. Mansimov K.B. (1999) *Osobye upravleniya v sistemakh s zapazdyvaniem* [Singular controls in systems with delay]. Baku: Publishing house "ELM". 176 p.
7. Mansimov K.B. (1994) *Issledovaniye osobykh protsessov v zadachakh optimal'nogo upravleniya* [Study of singular processes in optimal control problems]. Author's abstract. Diss. on competition of a scientific degree. PhD in physics and mathematics sciences. Baku: BSU. 42 pp.
8. Mansimov K.B., Mardanov M.J. (2010) *Kachestvennaya teoriya optimalnogo upravleniya sistemami Gursa–Darbu* [Qualitative theory of optimal control of Goursat-Darboux systems]. Baku: Publishing house "ELM". 360 p.
9. Mardanov M.J., Mansimov K.B. (2015) Necessary optimality conditions of quasisingular controls in optimal control problem described by integro-differential equations // *Proc. Inst. Mech.and matem*. ANAS. V. 41. No. 1. P. 113–122.
10. Mardanov M.J., Mansimov K.B., Melikov T.K. (2013) *Issledovaniya osobykh upravleniy i neobkhodimye usloviya vtorogo poryadka v sistemakh s zapazdyvaniyem* [Study of singular controls and necessary optimality conditions of second order in systems with delay]. Baku: Publishing house "ELM". 355 p.
11. Abdullayev A.A., Mansimov K.B. (2013) *Neobkhodimye usloviya optimalnosti v protsessakh opisyvaemykh sistemoy differentsialnykh uravneniy tipa Volterra* [Necessary optimality conditions in processes described by a system of Volterra-type integral equations]. Baku. 224 p.
12. Parayev Yu.I., Grekova T.I., Danilyuk Ye.Yu. (2011) Analiticheskoe reshenie zadachi optimal'nogo upravleniya odnosektornoy ekonomikoy na konechnom intervale vremeni [Analytical solution of the problem of optimum control for one-sector economy on a finite

time interval]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye*, *vychislitel'naya tekhnika i informatika*. 4(17). pp. 4–15.
13. Parayev Yu.I. (2014) Optimal'noye upravleniya dvukhsektornyy ekonomikoy [Optimal control for the two-sector economy]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye*, *vychislitel'naya tekhnika i informatika*. 3(28). pp. 4–11.
14. Gabasov R., Kirillova F.M. (1973) *Osobyye optimal'nyye upravleniya* [Singular optimal controls]. Moscow: URRS. 256 p.
15. Alekseyev V.M., Fomin S.V., Tikhomirov V.M. (1979) *Optimal'noye upravleniye* [Optimal control]. Moscow: Nauka. 429 p.
16. Ashchepkov L.T. (1985) *Lektsii po optimal'nomu upravleniyu* [Lectures on optimal control]. Vladivostok: Izd-vo DVU. 165 p.
17. Gabasov R., Kirillova F.M. (1973) *Optimizatsiya lineynykh system* [Optimization of linear systems]. Minsk: Izd-vo BGU. 256 p.
18. Plotnikov V.I., Sumin V.I. (1972) Problema ustoychivosti nelineynykh sistem Gursa–Darbu [The stability problem for non-linear Goursat–Darboux systems]. *Differents. uravneniya*. 5. pp. 845–856.