УДК 514.76 MSC 53D10
DOI 10.17223/19988621/54/3

Я.В. Славолюбова

АССОЦИИРОВАННЫЕ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА СЕМИМЕРНОЙ ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА H^7

Построены новые ассоциированные левоинвариантные контактные метрические структуры на семимерной группе Гейзенберга H^7. Изучен общий двенадцатипараметрический класс таких структур, подробно рассмотрены четыре подкласса. Основной результат работы сформулирован в виде теорем, обобщающих свойства левоинвариантных контактных структур на семимерной группе Гейзенберга H^7 и на произвольной $(2n+1)$-мерной группе Гейзенберга H^{2n+1}.

Ключевые слова: *группа Ли, контактные метрические структуры, ассоциированная метрика.*

1. Предварительные сведения

Напомним основные понятия из теории контактных многообразий.

Определение 1 ([1]). Дифференцируемое $(2n+1)$-мерное многообразие M^{2n+1} класса C^∞ называется контактным многообразием, если на нём задана дифференциальная 1-форма η, удовлетворяющая условию $\eta\wedge(d\eta)^n \neq 0$ всюду на M^{2n+1}. Форма η называется контактной формой.

Контактная форма определяет на многообразии M^{2n+1} $2n$-мерное распределение $E^{2n}=\{X\in TM^{2n+1}:\eta(X)=0\}$, которое называется контактным распределением. Кроме того, контактное многообразие M^{2n+1} имеет всюду ненулевое векторное поле, обозначаемое ξ, которое определяется свойствами: $\eta(\xi)=1$ и $d\eta(\xi,X)=0$, для всех векторных полей X на многообразии M^{2n+1}. Векторное поле ξ определяет одномерное распределение, дополнительное к распределению E^{2n}, и называется полем Риба или характеристическим векторным полем контактной структуры.

Определение 2 ([1]). Если M^{2n+1} – контактное многообразие с контактной формой η, то контактной метрической структурой называется четвёрка (η, ξ, φ, g), где ξ – характеристическое векторное поле, φ – аффинор на M^{2n+1}, g – риманова метрика, для которой имеют место следующие свойства:

1. $\varphi^2=-I+\eta\otimes\xi$, где I – тождественный оператор на M^{2n+1}.
2. $d\eta(X,Y)=g(X,\varphi Y)$.
3. $g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)$.

Риманова метрика g контактной метрической структуры называется ассоциированной.

Пусть M^{2n+1} – контактное многообразие с контактной метрической структурой (η, ξ, φ, g). Рассмотрим многообразие $M^{2n+1}\times\mathbf{R}$. Векторное поле на $M^{2n+1}\times\mathbf{R}$ задаётся парой $\left(X, f\frac{d}{dt}\right)$, где X – векторное поле, касательное к M^{2n+1}, t – координата из **R** и f – функция класса C^∞ на $M^{2n+1}\times\mathbf{R}$. Определим почти комплексную структуру J на $M^{2n+1}\times\mathbf{R}$ с помощью оператора J, действующего по формуле $J\left(X, f\dfrac{d}{dt}\right)=\left(\varphi X - f\xi, \eta(X)\dfrac{d}{dt}\right)$. Очевидно, что $J^2=-I$, $J(\xi)=\dfrac{d}{dt}$, $J\left(\dfrac{d}{dt}\right)=-\xi$, $J(X)=\varphi(X)$, если $X\in E^{2n}$. Если почти комплексная структура J интегрируемая, то контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) называется структурой Сасаки [1].

Пусть M^{2n+1} – контактное метрическое многообразие, такое, что η – контактная форма и (η, ξ, φ, g) –ассоциированная контактная метрическая структура для контактной структуры η. Если характеристическое векторное поле ξ порождает группу изометрий метрики g, то есть ξ – векторное поле Киллинга относительно g, то такую контактную метрическую структуру называют K-контактной структурой [1].

Определение 3 ([1]). Контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) называется η-эйнштейновой структурой, если существуют гладкие функции a и b на многообразии M^{2n+1}, такие, что

$$Ric_g(X,Y)=ag(X,Y)+b\eta(X)\eta(Y),\ X,Y\in TM^{2n+1}. \tag{1.1}$$

2. Контактная структура на группе Гейзенберга H^7

Известно [2], что на любой трёхмерной неабелевой группе Ли, за исключением $\mathrm{R}\times_{Id_{\mathrm{R}^2}}\mathrm{R}^2$, можно задать левоинвариантную контактную структуру. Среди пятимерных разрешимых алгебр Ли контактными являются 24 алгебры Ли. В размерности ≥ 7 существует бесконечное семейство неизоморфных контактных алгебр Ли [2]. На любой группе Гейзенберга H^{2n+1} можно задать левоинвариантную контактную структуру.

Рассмотрим семимерную группу Гейзенберга H^7. Её алгебра Ли $L(H^7)$ образована следующими матрицами:

$$L(H^7)=\begin{pmatrix}0 & x_2 & x_4 & x_6 & x_7\\ 0&0&0&0&x_1\\ 0&0&0&0&x_3\\ 0&0&0&0&x_5\\ 0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Выберем в алгебре Ли группы Гейзенберга $L(H^7)$ базис $(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7)$, состоящий из матриц из нулей с единицами только на местах, соответствующих координатным осям $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)$:

$$e_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\ \ldots,\ e_7=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Тогда скобки Ли в базисе $(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7)$ будут иметь вид $[e_2,e_1]=e_7$, $[e_4,e_3]=e_7$, $[e_6,e_5]=e_7$. Следовательно, ненулевые структурные константы следующие: $C_{12}^7=-C_{21}^7=-1$, $C_{34}^7=-C_{43}^7=-1$, $C_{56}^7=-C_{65}^7=-1$.

Поскольку построение контактной структуры проводится не просто на многообразии, а на группе Ли, то данная структура является левоинвариантной, и контактная форма η вместе с характеристическим векторным полем ξ задаются своими значениями в единице группы Ли, то есть $\eta = \eta(e)$, $\xi = \xi(e)$, $e \in H^7$.

Алгебра Ли группы Гейзенберга $L(H^7)$ является контактной алгеброй Ли с контактной формой $\eta = e_7^* = e^7$. Легко видеть, что дифференциал $d\eta$ формы η имеет вид: $d\eta = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^* + e_5^* \wedge e_6^*$. Таким образом, вектор e_7 является характеристическим векторным полем ξ данной контактной структуры, $\xi = e_7$, так как он удовлетворяет свойствам $\eta(\xi) = 1$ и $d\eta(\xi, X) = 0$ для всех векторных полей X в $L(H^7)$.

Контактное распределение, ядро 1-формы η, является левоинвариантным распределением, заданным подпространством E^6 в алгебре Ли группы Гейзенберга, $E^6 = \mathbf{R}\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

Алгебра Ли группы Гейзенберга $L(H^7)$ имеет нетривиальный центр $Z\left(L\left(H^7\right)\right) = e_7$ и является разрешимой. Данная контактная алгебра Ли $\left(L(H^7), \eta\right)$ получена центральным расширением $E^6 \times_{d\eta} \mathrm{R}$ симплектической коммутативной алгебры Ли $\left(E^6, d\eta\right)$ с помощью невырожденного 2-коцикла $d\eta$.

3. Ассоциированные контактные метрические структуры на (H^7, η)

Построим на контактной группе Ли (H^7, η) ассоциированные левоинвариантные контактные метрические структуры (η, ξ, φ, g) для контактной структуры η. Для этого на основе свойств: $\varphi^2\big|_{E^6} = -I$, $\varphi(\xi) = 0$, $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$, определим на контактной алгебре Ли ($L(H^7)$, η) аффинор φ. Такой аффинор φ может быть задан неоднозначно. Из свойства 3 определения 2 следует, что ассоциированную метрику g можно задавать с помощью аффинора φ на основе формулы: $g(X, Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$. Также нетрудно заметить, что действие аффинора φ совпадает с действием почти комплексной структуры J на векторах контактного распределении E^{2n}.

Рассмотрим более общую (псевдо)риманову метрику вида

$$g_\lambda(X, Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \lambda\eta(X)\eta(Y) . \tag{3.1}$$

Параметр λ обеспечивает деформацию ассоциированной метрики g_λ вдоль поля Риба ξ. В случае отрицательного значения данного параметра, имеем дело с псевдоримановой метрикой.

Зафиксируем аффинор φ_0, действие которого на базисных векторах $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ определяется следующим образом:

$$\varphi_0(e_1) = e_2 ,\ \varphi_0(e_2) = -e_1 ,\ \varphi_0(e_3) = e_4 ,\ \varphi_0(e_4) = -e_3 ,$$
$$\varphi_0(e_5) = e_6 ,\ \varphi_0(e_6) = -e_5 ,\ \varphi_0(e_7) = 0 .$$

Определим также метрику выражением

$$g_0 = e_1^{*2} + e_2^{*2} + e_3^{*2} + e_4^{*2} + e_5^{*2} + e_6^{*2} + \lambda e_7^{*2} .$$

По заданной ассоциированной метрике g_0, соответствующей аффинору φ_0, можно определить новый аффинор φ, который задаётся оператором P по формуле

$\varphi = \varphi_0 (I+P)(I-P)^{-1}$ [3]. Оператор P действует на алгебре Ли $L(H^7)$ и имеет следующие свойства:

1. $P\varphi_0 = -\varphi_0 P$, P антикоммутирует с аффинором φ_0; $P(\xi) = 0$.

2. P симметричен относительно метрики g_0, Pg_0 – симметричная матрица.

3. $I - P^2$ – невырожденная матрица, $\det(I-P^2) \neq 0$, где I – тождественный оператор на $L(H^7)$.

С учётом вышеуказанных свойств, следует, что матрица оператора P имеет блочный вид

$$P|_{E^6} = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & F \\ D & F & N \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где блоки A, B, C, D, F, N – симметричные матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} s & t \\ t & -s \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} k & l \\ l & -k \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} q & r \\ r & -q \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} w & z \\ z & -w \end{pmatrix},$$

параметры u, v, s, t, k, l, x, y, q, r, w, z – действительные числа.

Заметим, что матрица (3.2) оператора P содержит 12 параметров.

Изучим сначала некоторые частные классы ассоциированных метрик, соответствующих аффинорам φ, которые задаются операторами P четырёх типов

$$P|_{E^6} = \begin{pmatrix} 0 & B & 0 \\ B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ P|_{E^6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 \end{pmatrix},\ P|_{E^6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \\ 0 & F & 0 \end{pmatrix},\ P|_{E^6} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix}.$$

В этом случае могут быть найдены выражения ассоциированных метрик и контактных метрических структур в явном виде, что позволит провести дальнейшие исследования.

1. Пусть матрица оператора P имеет вид $P|_{E^6} = \begin{pmatrix} 0 & B & 0 \\ B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где блок $B = \begin{pmatrix} s & t \\ t & -s \end{pmatrix}$ содержит два параметра s и t. Тогда двухпараметрическое семейство аффиноров φ определяется матрицей $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi|_{E^6} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где компоненты ненулевого блока $\varphi\big|_{E^6}$, вычисленные на основе формулы $\varphi\big|_{E^6} = \varphi_0\big|_{E^6} (I+P)(I-P)^{-1}$, имеют вид

$$\varphi\big|_{E^6} = \frac{1}{1-s^2-t^2} \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \\ \varphi_2 & \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_3 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1+s^2+t^2 \\ -(1+s^2+t^2) & 0 \end{pmatrix},\ \varphi_2 = \begin{pmatrix} 2t & -2s \\ -2s & -2t \end{pmatrix},\ \varphi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

На параметры s и t накладывается ограничение $s^2+t^2\neq 1$, вытекающее из условия невырожденности матрицы $I-P^2$, $\det\left(I-P^2\right)=\left(1-s^2-t^2\right)^2\neq 0$. Для определенности примем, что параметры s и t принимают достаточно малые значения и $s^2+t^2<1$. Соответствующее двухпараметрическое семейство ассоциированных метрик определяется из формулы (3.1). Выпишем выражение (3.1) на векторах базиса$\{e_i\}$: $g_{ij}=d\eta_{ik}\varphi_j^k+\lambda\eta_i\eta_j$.

В результате проведенных вычислений в системе Maple ассоциированные метрики определяются матрицей $g_\lambda=\begin{pmatrix} g\,|_{E^6} & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$, где компоненты блока $g\,|_{E^6}$ имеют следующий вид:

$$g\Big|_{E^6}=\frac{1}{1-s^2-t^2}\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & 0\\ g_2 & g_1 & 0\\ 0 & 0 & g_3\end{pmatrix},$$

$$g_1=\begin{pmatrix} 1+s^2+t^2 & 0\\ 0 & 1+s^2+t^2\end{pmatrix},\ g_2=\begin{pmatrix} 2s & 2t\\ 2t & -2s\end{pmatrix},\ g_3=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Варьируя значения параметров s и t, получаем различные вариации ассоциированных контактных метрических структур.

Секционные кривизны $K_{\{i,j\}}$ в направлении двумерных координатных площадок базисных векторов $\{e_i\}$ имеют следующие выражения:

$$K_{\{1,2\}}=K_{\{3,4\}}=-\frac{3\lambda(1-b)^2}{4(1+b)^2},\ K_{\{5,6\}}=-\frac{3\lambda}{4},\ K_{\{1,3\}}=K_{\{1,4\}}=K_{\{1,5\}}=K_{\{1,6\}}=0,$$

$$K_{\{2,3\}}=K_{\{2,4\}}=K_{\{2,5\}}=K_{\{2,6\}}=0,\ K_{\{3,4\}}=K_{\{3,5\}}=K_{\{3,6\}}=0,\ K_{\{4,5\}}=K_{\{4,6\}}=0,$$

$$K_{\{1,7\}}=K_{\{2,7\}}=K_{\{3,7\}}=K_{\{4,7\}}=K_{\{5,7\}}=K_{\{6,7\}}=\frac{\lambda}{4},$$

где $b=s^2+t^2$.

2. Пусть матрица оператора P имеет вид $P\,|_{E^6}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & D\\ 0 & 0 & 0\\ D & 0 & 0\end{pmatrix}$, где блок $D=\begin{pmatrix} x & y\\ y & -x\end{pmatrix}$. Тогда двухпараметрические семейства аффиноров φ и ассоциированных метрик g_λ задаются матрицами

$$\varphi\Big|_{E^6}=\frac{1}{1-x^2-y^2}\begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2\\ 0 & \varphi_3 & 0\\ \varphi_2 & 0 & \varphi_1\end{pmatrix},$$

$$\varphi_1=\begin{pmatrix} 0 & 1+x^2+y^2\\ -(1+x^2+y^2) & 0\end{pmatrix},\ \varphi_2=\begin{pmatrix} 2y & -2x\\ -2x & -2y\end{pmatrix},\ \varphi_3=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$g\Big|_{E^6}=\frac{1}{1-x^2-y^2}\begin{pmatrix} g_1 & 0 & g_2\\ 0 & g_3 & 0\\ g_2 & 0 & g_1\end{pmatrix},$$

$$g_1=\begin{pmatrix}1+x^2+y^2 & 0\\ 0 & 1+x^2+y^2\end{pmatrix},\ g_2=\begin{pmatrix}2x & 2y\\ 2y & -2x\end{pmatrix},\ g_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

где $x^2+y^2<1$, $x,y\in\mathrm{R}$.

Получены выражения секционной кривизны $K_{\{i,j\}}$ в направлении двумерных координатных площадок базисных векторов $\{e_i\}$:

$$K_{\{1,2\}}=K_{\{5,6\}}=-\frac{3\lambda(1-d)^2}{4(1+d)^2},\ K_{\{3,4\}}=-\frac{3\lambda}{4},\ K_{\{1,3\}}=K_{\{1,4\}}=K_{\{1,5\}}=K_{\{1,6\}}=0,$$

$$K_{\{2,3\}}=K_{\{2,4\}}=K_{\{2,5\}}=K_{\{2,6\}}=0,\ K_{\{3,4\}}=K_{\{3,5\}}=K_{\{3,6\}}=0;K_{\{4,5\}}=K_{\{4,6\}}=0,$$

$$K_{\{1,7\}}=K_{\{2,7\}}=K_{\{3,7\}}=K_{\{4,7\}}=K_{\{5,7\}}=K_{\{6,7\}}=\frac{\lambda}{4},$$

где $d=x^2+y^2$.

3. Пусть матрица оператора P имеет вид $P|_{E^6}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&F\\0&F&0\end{pmatrix}$, где блок $F=\begin{pmatrix}q & r\\ r & -q\end{pmatrix}$. Тогда двухпараметрическое семейство аффиноров φ, ассоциированная метрика g_λ задаются матрицами

$$\varphi\Big|_{E^6}=\frac{1}{1-q^2-r^2}\begin{pmatrix}\varphi_1&0&0\\0&\varphi_2&\varphi_3\\0&\varphi_3&\varphi_2\end{pmatrix},$$

$$\varphi_1=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ \varphi_2=\begin{pmatrix}0 & 1+q^2+r^2\\ -(1+q^2+r^2) & 0\end{pmatrix},\ \varphi_3=\begin{pmatrix}2r & -2q\\ -2q & -2r\end{pmatrix},$$

$$g\Big|_{E^6}=\frac{1}{1-q^2-r^2}\begin{pmatrix}g_1&0&0\\0&g_2&g_3\\0&g_3&g_2\end{pmatrix},$$

$$g_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ g_2=\begin{pmatrix}1+q^2+r^2 & 0\\ 0 & 1+q^2+r^2\end{pmatrix},\ g_3=\begin{pmatrix}2q & 2r\\ 2r & -2q\end{pmatrix},$$

где $q^2+r^2<1$, $q,r\in\mathrm{R}$.

Получены выражения секционной кривизны $K_{\{i,j\}}$ в направлении двумерных координатных площадок базисных векторов $\{e_i\}$:

$$K_{\{1,2\}}=-\frac{3\lambda}{4},\ K_{\{3,4\}}=K_{\{5,6\}}=-\frac{3\lambda(1-f)^2}{4(1+f)^2},\ K_{\{1,3\}}=K_{\{1,4\}}=K_{\{1,5\}}=K_{\{1,6\}}=0,$$

$$K_{\{2,3\}}=K_{\{2,4\}}=K_{\{2,5\}}=K_{\{2,6\}}=0,\ K_{\{3,4\}}=K_{\{3,5\}}=K_{\{3,6\}}=0,\ K_{\{4,5\}}=K_{\{4,6\}}=0,$$

$$K_{\{1,7\}}=K_{\{2,7\}}=K_{\{3,7\}}=K_{\{4,7\}}=K_{\{5,7\}}=K_{\{6,7\}}=\frac{\lambda}{4},$$

где $f=q^2+r^2$.

4. Пусть матрица оператора P имеет диагональный вид $P|_{E^6} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix}$, где блоки $A = \begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} k & l \\ l & -k \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} w & z \\ z & -w \end{pmatrix}$ содержат по два параметра. Тогда шестипараметрическое семейство аффиноров φ, соответствующая ассоциированная метрика g_λ задаются матрицами

$$\varphi\big|_{E^6} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_3 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{2v}{1-u^2-v^2} & \dfrac{(1-u)^2+v^2}{1-u^2-v^2} \\ \dfrac{-((1+u)^2+v^2)}{1-u^2-v^2} & \dfrac{-2v}{1-u^2-v^2} \end{pmatrix},$$

$$\varphi_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{2l}{1-k^2-l^2} & \dfrac{(1-k)^2+l^2}{1-k^2-l^2} \\ \dfrac{-((1+k)^2+l^2)}{1-k^2-l^2} & \dfrac{-2l}{1-k^2-l^2} \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{2z}{1-w^2-z^2} & \dfrac{(1-w)^2+z^2}{1-w^2-z^2} \\ \dfrac{-((1+w)^2+z^2)}{1-w^2-z^2} & \dfrac{-2z}{1-w^2-z^2} \end{pmatrix},$$

$$g\big|_{E^6} = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{(1+u)^2+v^2}{1-u^2-v^2} & \dfrac{2v}{1-u^2-v^2} \\ \dfrac{2v}{1-u^2-v^2} & \dfrac{(1-u)^2+v^2}{1-u^2-v^2} \end{pmatrix},$$

$$g_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{(1+k)^2+l^2}{1-k^2-l^2} & \dfrac{2l}{1-k^2-l^2} \\ \dfrac{2l}{1-k^2-l^2} & \dfrac{(1-k)^2+l^2}{1-k^2-l^2} \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{(1+w)^2+z^2}{1-w^2-z^2} & \dfrac{2z}{1-w^2-z^2} \\ \dfrac{2z}{1-w^2-z^2} & \dfrac{(1-w)^2+z^2}{1-w^2-z^2} \end{pmatrix},$$

где $u^2+v^2<1$, $k^2+l^2<1$, $w^2+z^2<1$, $u,v,k,l,w,z \in \mathrm{R}$.

Секционные кривизны $K_{\{i,j\}}$ в направлении двумерных координатных площадок базисных векторов $\{e_i\}$ имеют следующие выражения:

$$K_{\{1,2\}} = K_{\{3,4\}} = -\frac{3\lambda}{4}, \quad K_{\{5,6\}} = -\frac{3\lambda((1+w)^2+z^2)((1-w)^2+z^2)}{4\left(1-w^2-z^2\right)^2},$$

$$K_{\{1,3\}} = K_{\{1,4\}} = K_{\{1,5\}} = K_{\{1,6\}} = 0, \quad K_{\{2,3\}} = K_{\{2,4\}} = K_{\{2,5\}} = K_{\{2,6\}} = 0,$$

$$K_{\{3,4\}} = K_{\{3,5\}} = K_{\{3,6\}} = 0, K_{\{4,5\}} = K_{\{4,6\}} = 0,$$

$$K_{\{1,7\}} = K_{\{2,7\}} = K_{\{3,7\}} = K_{\{4,7\}} = K_{\{5,7\}} = K_{\{6,7\}} = \frac{\lambda}{4}.$$

Рассмотрению также подлежал оператор P общего вида (3.2), для которого были найдены явные аналитические выражения двенадцатипараметрического семейства аффиноров φ и ассоциированных метрик g_λ. Для полученных выражений был проведен многопараметрический анализ и вычислены основные геометрические характеристики с использованием системы компьютерной математики Maple.

В общем случае, для любой ассоциированной (псевдо)римановой метрики вида $g_\lambda(X,Y)=d\eta(\varphi X,Y)+\lambda\eta(X)\eta(Y)$ имеет место

Теорема 1. Любая левоинвариантная контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g_λ) на группе Гейзенберга H^7 является η-эйнштейновой K-контактной структурой Сасаки.

Квадраты норм тензора Римана и тензора Риччи ассоциированной левоинвариантной метрики g_λ имеют следующие выражения: $\|R\|^2=\dfrac{69\lambda^2}{4}$, $\|Ric\|^2=\dfrac{15\lambda^2}{4}$.

Для любой левоинвариантной контактной метрической структуры (η, ξ, φ, g_λ) на группе Гейзенберга H^7 оператор тензора Риччи, $Ric(X,Y)=g_\lambda(A_{Ric}X,Y)$, имеет следующую диагональную матрицу:

$$A_{Ric}=\begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3\lambda}{2} \end{pmatrix}.$$

Скалярная кривизна ассоциированной левоинвариантной метрики g_λ знакопеременная и равна $-\dfrac{3\lambda}{2}$, $S=-\dfrac{3\lambda}{2}$.

Аналогично были исследованы другие семимерные разрешимые контактные алгебры Ли классификационного списка, приведенного в работе [2].

Также для произвольной $(2n+1)$-мерной группы Гейзенберга H^{2n+1} с заданной (псевдо)римановой метрикой $g_0=e_1^{*2}+\ldots+e_{2n}^{*2}+\lambda e_{2n+1}^{*2}$ имеет место

Теорема 2. Левоинвариантная контактная метрическая структура (η, ξ, φ_0, g_0) на группе Гейзенберга H^{2n+1} является η-эйнштейновой и

$$Ric_{g_0}(X,Y)=-\frac{\lambda}{2}g_0(X,Y)+\frac{(n+\lambda)\lambda}{2}\eta(X)\eta(Y),\ X,Y\in L(H^{2n+1}).$$

Доказательство. Рассмотрим контактную метрическую структуру (η, ξ, φ_0, g_0) на группе Гейзенберга H^{2n+1}. В базисе $(e_1,\ldots,e_{2n+1})$ скобки Ли имеют вид $[e_{2m},e_{2m-1}]=e_{2n+1}$, $m=1,\ldots,n$. Тогда ненулевые структурные константы: $C_{2m,2m-1}^{2n+1}=1$, $m=1,\ldots,n$.

Определим компоненты связности Леви – Чивита Γ_{ij}^k левоинвариантной метрики g_0, $\nabla_{e_i}e_j=\Gamma_{ij}^k e_k$, используя шестичленную формулу [4], которая для левоинвариантных векторных полей X, Y, Z на группе Ли принимает вид

$$2g_0(\nabla_X Y, Z) = g_0([X,Y],Z) + g_0([Z,X],Y) - g_0([Y,Z],X).$$

В базисе $\{e_i\}$ имеем $2g_0\left(\nabla_{e_i} e_j, e_l\right) = g_0\left(\left[e_i, e_j\right], e_l\right) + g_0\left([e_l, e_i], e_j\right) - g_0\left(e_i\left[e_l, e_j\right]\right)$, поэтому

$$\Gamma_{ij}^p = \frac{1}{2}\left(C_{ij}^p + g_0{}^{lp} g_{0ik} C_{lj}^k + g_0{}^{lp} g_{0jk} C_{li}^k\right), \; i, j, p, k, l = 1,\ldots, n. \tag{3.3}$$

Используя формулу (3.3), получаем

$$\Gamma_{2\tau,2\mu}^p = \frac{1}{2}\left(C_{2\tau,2\mu}^p + g_0{}^{lp} g_{02\tau,k} C_{l,2\mu}^k g_0{}^{kp} + g_0{}^{lp} g_{02\mu,k} C_{l,2\tau}^k\right) = 0$$

$$\text{и } \Gamma_{2\tau-1,2\mu-1}^p = 0,\ \tau,\ \mu = 1,\ldots,n,\ p - \text{любое.}$$

Это следует из того, что $C_{l,2\mu}^k \neq 0$ при $l = 2\mu - 1$ и $k = 2n+1$, $C_{l,2\tau}^k \neq 0$ при $l = 2\tau - 1$ и $k = 2n+1$, $g_{0ij} \neq 0$ при $i = j$. Очевидно, $\Gamma_{2\mu,2\tau}^p = 0$, $\Gamma_{2\tau-1,2\mu-1}^p = 0$, $\Gamma_{2\mu-1,2\tau-1}^p = 0$, τ, $\mu = 1,\ldots,n$, p – любое.

Аналогичными рассуждениями получены ненулевые символы Кристофеля:

$$\Gamma_{2\tau-1,2\tau}^{2n+1} = -\frac{1}{2},\ \Gamma_{2\tau,2\tau-1}^{2n+1} = \frac{1}{2},\ \Gamma_{2n+1,2\tau}^{2\tau-1} = -\frac{\lambda}{2},\ \Gamma_{2\tau,2n+1}^{2\tau-1} = -\frac{\lambda}{2},$$

$$\Gamma_{2n+1,2\tau-1}^{2\tau} = \frac{\lambda}{2},\ \Gamma_{2\tau-1,2n+1}^{2\tau} = \frac{\lambda}{2},\ \tau = 1,\ldots,n. \tag{3.4}$$

Тензор Риччи метрики g_0 на алгебре Ли определяется как свёртка тензора кривизны R, $R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$, по первому и четвёртому индексам: $Ric(X,Y) = g^{ij} g(R(e_i, X)Y, e_j)$.

Компоненты тензора Риччи на базисных векторах:

$$Ric_{ij} = \Gamma_{ij}^u \Gamma_{lu}^l - \Gamma_{lj}^u \Gamma_{iu}^l - C_{li}^u \Gamma_{uj}^l. \tag{3.5}$$

Вычислим компоненты тензора Риччи (3.5) на контактном распределении $E^{2n} = \mathbf{R}\{e_1,\ldots,e_{2n}\}$:

$$Ric_{2\tau,2\tau} = \Gamma_{2\tau,2\tau}^u \Gamma_{lu}^l - \Gamma_{l,2\tau}^u \Gamma_{2\tau,u}^l - C_{l,2\tau}^u \Gamma_{u,2\tau}^l =$$

$$= \Gamma_{2\tau,2\tau}^{2n+1} \Gamma_{2\tau-1,2n+1}^{2\tau-1} - \Gamma_{2\tau-1,2\tau}^{2n+1} \Gamma_{2\tau,2n+1}^{2\tau-1} - C_{2\tau-1,2\tau}^{2n+1} \Gamma_{2n+1,2\tau}^{2\tau-1} +$$

$$+ \Gamma_{2\tau,2\tau}^{2\tau-1} \Gamma_{2n+1,2\tau-1}^{2n+1} - \Gamma_{2n+1,2\tau}^{2\tau-1} \Gamma_{2\tau,2\tau-1}^{2n+1} - C_{2n+1,2\tau}^{2\tau-1} \Gamma_{2\tau-1,2\tau}^{2n+1}. \tag{3.6}$$

Подставляя в выражение (3.6) символы Кристофеля (3.4), получим $Ric_{2\tau,2\tau} = -\frac{\lambda}{2}$, $\tau = 1,\ldots,n$.

$$Ric_{2\tau,2\tau-1} = \Gamma_{2\tau,2\tau-1}^u \Gamma_{lu}^l - \Gamma_{l,2\tau-1}^u \Gamma_{2\tau,u}^l - C_{l,2\tau}^u \Gamma_{u,2\tau-1}^l =$$

$$= \sum_{(u,l)} \left(\Gamma_{2\tau,2\tau-1}^u \Gamma_{lu}^l - \Gamma_{l,2\tau-1}^u \Gamma_{2\tau,u}^l - C_{l,2\tau}^u \Gamma_{u,2\tau-1}^l\right) = 0,\ \tau = 1,\ldots,n. \tag{3.7}$$

Суммирование в формуле (3.7) идёт по всем наборам

$$(u,l) \in \{(2\tau-1, 2n+1), (2\tau, 2n+1), (2n+1, 2\tau-1)\}.$$

Определим $Ric_{2n+1,2n+1}$:

$$Ric_{2n+1,2n+1} = \Gamma^{u}_{2n+1,2n+1}\Gamma^{l}_{lu} - \Gamma^{u}_{l,2n+1}\Gamma^{l}_{2n+1,u} - C^{u}_{l,2n+1}\Gamma^{l}_{u,2n+1} =$$

$$= -\Gamma^{u}_{l,2n+1}\Gamma^{l}_{2n+1,u} = -\sum_{(u,l)}\left(\Gamma^{u}_{l,2n+1}\Gamma^{l}_{2n+1,u}\right),$$

где суммирование ведётся по всем наборам $(u,l) \in \{(2\tau-1,2\tau),(2\tau,2\tau-1)\}$.

С учётом выражений (3.4) получаем $Ric_{2n+1,2n+1} = \frac{n\lambda}{2}$.

Окончательно, имеем

$$Ric_{2\tau,2\tau} = -\frac{\lambda}{2},\ Ric_{2\tau,2\tau-1} = 0,\ Ric_{2n+1,2n+1} = \frac{n\lambda}{2},\ \tau = 1,\ldots,n. \qquad (3.8)$$

Из выражений (3.8) следует, что

$$Ric_{g_0}(X,Y) = -\frac{\lambda}{2}g_0(X,Y),\ X,Y \in E^{2n}.$$

Пусть в равенстве (1.1) $X = \xi,\ Y = \xi,\ a = -\frac{\lambda}{2}$, тогда получим

$$Ric_{g_0}(\xi,\xi) = -\frac{\lambda^2}{2} + b.$$

Так как $\xi = e_{2n+1}$, тогда

$$Ric_{g_0}(e_{2n+1},e_{2n+1}) = -\frac{\lambda^2}{2} + b,\ b = Ric_{2n+1,2n+1} - \frac{\lambda^2}{2} = \frac{(n+\lambda)\lambda}{2}.$$

Таким образом, найдены функции $a = a(e)$, $b = b(e)$, $e \in H^7$, удовлетворяющие равенству $Ric_{g_0}(X,Y) = ag_0(X,Y) + b\eta(X)\eta(Y)$, $X,Y \in L(H^{2n+1})$. Следовательно, структура $(\eta, \xi, \varphi_0, g_0)$ – η-эйнштейнова.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Blair D.E.* Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Mathematics. New York: Springer–Verlag Publ., 1976. 148 p.
2. *Diatta A.* Left invariant contact structures on Lie groups. Differential Geometry and its Applications. 2008. V. 26. Iss. 5. P. 544–552. DOI: 10.1016/j.difgeo.2008.04.001.
3. *Смоленцев Н.К.* Пространства римановых метрик // Современная математика и ее приложения. 2005. Т. 31. С. 69–146.
4. *Кобаяси Ш.*, *Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т.1 и Т.2. М.: Наука, 1981. 344 с.

Статья поступила 27.02.2018 г.

Slavolyubova Ya.V. (2018) ASSOCIATED LEFT-INVARIANT CONTACT METRIC STRUCTURES ON THE 7-DIMENSIONAL HEISENBERG GROUP H^7. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 54. pp. 34-45

DOI 10.17223/19988621/54/3

Keywords: Lie group, contact metric structures, associated metric.

In this paper, we construct new nonstandard associated left-invariant contact metric structures $(\eta,\xi,\varphi,g_\lambda)$ on the 7-dimensional Heisenberg group H^7.

The associated left-invariant contact metric structures for the contact structure η on the contact Lie group (H^7,η) were given by the affinor φ and the (pseudo-)Riemannian metric g_λ such that

$$\varphi\big|_{\ker\eta} = J\ ,\ \varphi(\xi)=0\ ,$$

$$g_\lambda(X,Y) = d\eta(\varphi X,Y)+\lambda\eta(X)\eta(Y)\ , \tag{1}$$

where J is an almost complex structure compatible with the restriction of g_λ on $\ker\eta$, $g_\lambda\big|_{\ker\eta}$.

The parameter λ provided deformation of the associated metric g_λ along the Reeb field ξ.

The affinor $\varphi_0=\begin{pmatrix} J_0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ and the metric $g_0=\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ are fixed. The new affinors $\varphi=\varphi_0\left(Id+P\right)\left(Id-P\right)^{-1}$ are given by an operator $P:L(H^7)\to L(H^7)$ such that $P(\xi)=0$ and $P|_{\ker\eta}=\begin{pmatrix} A & B & D\\ B & C & F\\ D & F & N\end{pmatrix}$, where $A=\begin{pmatrix} u & v\\ v & -u\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} s & t\\ t & -s\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} k & l\\ l & -k\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} x & y\\ y & -x\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix} q & r\\ r & -q\end{pmatrix}$, and $N=\begin{pmatrix} w & z\\ z & -w\end{pmatrix}$ are symmetric matrices; u, v, s, t, k, l, x, y, q, r, w, and z are real parameters.

Each new affinor φ defines a new associated metric g_λ by formula (1).

We have considered some particular classes of associated metrics corresponding to the affinors φ which were given by the operators P of the following types

$$P|_{\ker\eta}=\begin{pmatrix} 0 & B & 0\\ B & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ P|_{\ker\eta}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & D\\ 0 & 0 & 0\\ D & 0 & 0\end{pmatrix},\ P|_{\ker\eta}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & F\\ 0 & F & 0\end{pmatrix},\ P|_{\ker\eta}=\begin{pmatrix} A & 0 & 0\\ 0 & C & 0\\ 0 & 0 & N\end{pmatrix}.$$

The following theorem was received for any associated (pseudo-)Riemannian metric $g_\lambda(X,Y)=d\eta(\varphi X,Y)+\lambda\eta(X)\eta(Y)$.

Theorem 1. Any left-invariant contact metric structure $(\eta,\xi,\varphi,g_\lambda)$ on the Heisenberg group H^7 is a Sasaki, *K*-contact, and η-Einstein structure.

The squares of the norms of a Riemann tensor R and Ricci tensor $Ric(X,Y)=g_\lambda(A_{Ric}X,Y)$ of associated left-invariant metric g_λ have the following expressions: $\|R\|^2=\dfrac{69\lambda^2}{4}$, $\|Ric\|^2=\dfrac{15\lambda^2}{4}$.

The Ricci operator has the following matrix:

$$A_{Ric}=\begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3\lambda}{2}\end{pmatrix}.$$

The sign of the scalar curvature of associated left-invariant metric g_λ is not constant and $S = -\frac{3\lambda}{2}$.

In addition, the following theorem has been proved for any (2n+1)-dimensional Heisenberg group H^{2n+1} with a given (pseudo-)Riemannian metric $g_0 = e_1^{*2} + ... + e_{2n}^{*2} + \lambda e_{2n+1}^{*2}$.

Theorem 2. A left-invariant contact metric structure $(\eta, \xi, \varphi_0, g_0)$ on the Heisenberg group H^{2n+1} is η-Einstein, and $Ric_{g_0}(X,Y) = -\frac{\lambda}{2} g_0(X,Y) + \frac{(n+\lambda)\lambda}{2} \eta(X)\eta(Y)$, $X,Y \in L(H^{2n+1})$.

MSC 53D10

SLAVOLYUBOVA Yaroslavna Viktorovna (Candidate of Physics and Mathematics, Kemerovo Institute (branch) of Plekhanov Russian University of Economics, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: jar1984@mail.ru

REFERENCES

1. Blair D.E. (1976.) *Contact Manifolds in Riemannian Geometry.* Lecture Notes in Mathematics. New York: Springer–Verlag Publ., 148 p.
2. Diatta A. (2008) Left invariant contact structures on Lie groups. *Differential Geometry and its Applications*. Vol. 26, iss. 5, pp. 544–552. DOI: 10.1016/j.difgeo.2008.04.001.
3. Smolentsev N.K. (2007) Spaces of Riemannian metrics. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 142, Issue 5, pp. 2436–2519. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-007-0185-3
4. Kobayashi S., Nomizu K. (1963) *Foundations of Differential Geometry*, New York: Wiley.