УДК 517.928 MSC: 34M60, 34E10, 34A12
DOI 10.17223/19988621/54/4

Д.А. Турсунов

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ПРИ НАРУШЕНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ТОЧКИ ПОКОЯ В ПЛОСКОСТИ «БЫСТРЫХ ДВИЖЕНИЙ»

Получена асимптотическая оценка для решения сингулярно возмущенной задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений». Построен главный член асимптотического разложения решения, который имеет отрицательную дробную степень по малому параметру, что свойственно бисингулярно возмущенным уравнениям или уравнениям с точками поворота.

Ключевые слова: *асимптотическое разложение решения, бисингулярная задача, сингулярное возмущение, задача Коши, малый параметр, метод стационарной фазы, система обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной.*

Одним из основных результатов в теории сингулярно возмущенных уравнений является теорема А.Н. Тихонова о предельном переходе [1, 2]. Он сформулировал достаточные условия, при выполнении которых решение возмущенной задачи и решение невозмущенной системы асимптотически близки. Далее эти достаточные условия стали называть условиями устойчивости.

Первой работой, когда нарушаются условия устойчивости на некотором отрезке, но выполняется предельный переход, является работа М.А. Шишковой [3], ученицы Л.С. Понтрягина. Вслед за этой работой появились работы [4–15]. В работах [6, 7] приведено приложение для маятника Циглера [8].

В данной работе, применяя методы стационарной фазы, перевала, последовательных приближений и идеи [3, 5], обобщаются ранее полученные результаты.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = A(t)x(t,\varepsilon)+f(t),\ t_0 < t \le T; \tag{1}$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ – малый параметр, $A(t)$ – квадратная матрица-функция второго порядка с элементами $a_{jk}(t)$, $f(t) = \mathrm{colon}(f_1(t), f_2(t))$, $a_{jk}(t)$, $f_k(t)$ – аналитические функций в рассматриваемой области, $x^0 = \mathrm{colon}(x_1^0, x_2^0)$ – постоянный вектор.

Пусть выполняются условия:

Условие 1. Матрица-функция $A(t)$ имеет комплексно-сопряженные собственные значения: $\lambda_1(t) = \alpha(t)+i\beta(t)$, $\lambda_2(t) = \alpha(t)-i\beta(t)$, причем $\alpha(t) < 0$, при $t_0 \le t < 0$; $\alpha(t) > 0$, при $0 < t \le T$; $\alpha(0) = 0$, но $\beta(0) \ne 0$.

Условие 2. Пусть $\mathrm{Re}(u_1(t_1^*,t_2^*)-u_1(t_0,0)) = 0$, т.е. граница области D является критической линией уровня (линией Стокса [6]), где (t_1^*,t_2^*) – единственный простой корень собственного значения $\lambda_1(t) = \alpha(t)+i\beta(t)$ в области D, где $D = \{t = t_1+it_2\colon \mathrm{Re}(u_k(t)-u_k(t_0)) \le 0,\ k = 1,2\}$, $i = \sqrt{-1}$, $u_k(t) = \int\lambda_k(t)dt$, $k = 1,2$.

Систему (1) можно рассматривать как возмущенную по отношению к вырожденной системе

$$A(t)\,\tilde{x}\,(t)+f(t) = 0.$$

Вырожденная система имеет единственное решение:

$$\tilde{x}(t) = A^{-1}(t)f(t).$$

Это решение в области D, а именно в точках $t = t_1^* \pm t_2^*$, имеет особенность, так как собственные значения матрицы-функции $A(t)$ в этих точках обращаются в нуль, т.е. решение вырожденной системы не является гладкой функцией в D. Задачу (1), (2) можно назвать бисингулярной [16].

Например, если собственные значения $\lambda_1(t) = \alpha(t)+i\beta(t)$, $\lambda_2(t) = \alpha(t)-i\beta(t)$ имеют простые нули в рассматриваемой области, то нарастающая особенность имеет вид

$$g_k(t) = O\left(\left(\left(t-t^*\right)\left(t+t^*\right)\right)^{-1-2k}\right),\ k = 0,1,2,\ldots,\ (\lambda_1(t^*) = 0,\ \lambda_2(-t^*) = 0).$$

А если собственные значения $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ имеют n-кратный нуль в рассматриваемой области, то нарастающую особенность можно записать как

$$g_k(t) = O\left(\left(\left(t-t^*\right)\left(t+t^*\right)\right)^{-n-(n+1)k}\right),\ k = 0,1,2,\ldots .$$

Когда собственные значения $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ не имеют нулей в рассматриваемой области, то решение вырожденной системы является регулярной (гладкой) функцией, асимптотика решения задачи (1) – (2) получается проще. Этот случай автором рассмотрены в работе [10].

Как нам известно, существует такая неособенная матрица-функция $B_0(t)$, с помощью которой $A(t)$ можно привести к диагональному виду

$$B_0^{-1}(t)A(t)B_0(t) = \Lambda(t),\ \Lambda(t) = \mathrm{diag}(\lambda_1(t),\ \lambda_2(t)).$$

Пусть в области D выполняется неравенство $\det B_0(t)\ne 0$.

С помощь замены $x(t,\varepsilon) = B_0(t)y(t,\varepsilon)$ задачу (1), (2) приведем к виду

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon) = \Lambda(t)y(t,\varepsilon)+\varepsilon B(t)y(t,\varepsilon)+h(t),\quad t_0 < t \le T,\quad y(t_0,\varepsilon) = y^0, \tag{3}$$

где $B(t) = -B_0^{-1}(t)B_0'(t)$, $y^0 = B_0^{-1}(t_0)x^0$, $h(t) = B_0^{-1}(t)f(t)$.

Далее, задачу (3) заменим интегральным уравнением

$$y(t,\varepsilon) = E(t,t_0,\varepsilon)y^0 + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)\left(B(\tau)y(\tau,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}h(\tau)\right)d\tau, \tag{4}$$

где $E(t,\tau,\varepsilon) = \exp\left(\int_\tau^t \Lambda(s)ds/\varepsilon\right)$.

Если ввести обозначение $y(t,\varepsilon) = z(t,\varepsilon)/\varepsilon$, то (4) примет вид

$$z(t,\varepsilon) = \varepsilon E(t,t_0,\varepsilon)y^0 + \int\limits_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)\left(B(\tau)z(\tau,\varepsilon)+h(\tau)\right)d\tau. \tag{5}$$

Для начала вычислим асимптотику интегралов

$$E_j(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda_j(\tau)d\tau\right)h_j(\tau)d\tau,\ j = 1,2.,\ \text{при } \varepsilon\to 0.$$

При выполнении условий 1 и 2, имеем $u'_1(\tau)=\lambda_1(\tau), \lambda_1(t^*)\equiv 0$, $\lambda'_1(t^*)\neq 0$, $t^*=t_1^*+it_2^*$. Точка $\tau=t^*$ является простой точкой перевала функции $u_1(\tau)$. В окрестности точки перевала $\tau=t^*$ критические линии уровня $\mathrm{Re}(u_1(\tau_1,\tau_2)-u_1(t_0,0))=0$ делят плоскость на четыре равных сектора. В двух из них выполняется условие $\mathrm{Re}(u_1(\tau_1,\tau_2)-u_1(t_0,0))<0$, а в остальных $\mathrm{Re}(u_1(\tau_1,\tau_2)-u_1(t_0,0))>0$ [17]. Так как собственные значения комплексно-сопряженные:

$$\lambda_1(t)=\overline{\lambda}_2(t) \text{ и } u'_2(\tau)=\lambda_2(\tau), \lambda_2\left(\overline{t^*}\right)\equiv 0,\ \lambda'_1\left(\overline{t^*}\right)\neq 0,\ \overline{t^*}=t_1^*-it_2^*,$$

то точка $\tau=\overline{t^*}$ является простой точкой перевала для функции $u_2(\tau)$. Аналогично, в окрестности точки перевала $\tau=\overline{t^*}$ критические линии уровня $\mathrm{Re}(u_2(\tau_1,\tau_2)-u_2(t_0,0))=0$ делят плоскость на четыре равных сектора. В двух из них выполняется неравенство $\mathrm{Re}(u_2(\tau_1,\tau_2)-u_2(t_0,0))<0$, а в остальных двух $\mathrm{Re}(u_2(\tau_1,\tau_2)-u_2(t_0,0))>0$. При $\tau_2=0$ имеем $\mathrm{Re}(u_1(\tau_1,0)-u_1(t_0,0))\leq 0$, $\mathrm{Re}(u_2(\tau_1,0)-u_2(t_0,0))\leq 0$, причем знак равенства выполняется только при $\tau_1=t_0$ и $\tau_1=T$. Пересечение множеств $\{t\colon \mathrm{Re}(u_1(t_1,t_2)-u_1(t_0,0))\leq 0\}$ и $\{t\colon \mathrm{Re}(u_2(t_1,t_2)-u_2(t_0,0))\leq 0\}$ содержащее действительную ось обозначим через D, т.е.

$$D=\{\ t=t_1+it_2\colon \mathrm{Re}(u_k(t_1,t_2)-u_k(t_0,0))\leq 0,\ |t_2|\leq\left|t_2^*\right|,\ k=1,2\}.$$

В общем случае D – криволинейный четырехугольник с вершинами $A(t_0,0)$, $B(t_1^*,t_2^*)$, $A_1(T,0)$, $B_1(t_1^*,-t_2^*)$.

Из теории аналитических функций известно, что область D покрывается линиями уровня $\mathrm{Re}(u_k(t_1,t_2)-u_k(t_0,0))=-c$, $c>0$ – const, $k=1, 2$. Локальную и глобальную структуру линии уровней можно найти в [17]. Эти линии соединяют устойчивый и неустойчивый интервалы.

Пусть $u_1(t_1,t_2)=u_{11}(t_1,t_2)+iu_{12}(t_1,t_2)$, $u_2(t_1,t_2)=u_{21}(t_1,t_2)+iu_{22}(t_1,t_2)$, где $u_{k1}(t_1,t_2)=\mathrm{Re}(u_k(t_1,t_2)-u_k(t_0,0))$, $u_{k2}(t_1,t_2)=\mathrm{Im}(u_k(t_1,t_2)-u_k(t_0,0))$, $k=1, 2$.

Для определения более точной асимптотики интегралов $E_1(t,\varepsilon)$, $E_2(t,\varepsilon)$ в D область D разобьем на подобласти:

$$H_{00}=\left\{t:\varepsilon\ln\varepsilon\leq u_{11}(t_1,t_2)\leq 0,\ u_{21}(t_1,t_2)\leq 0,\ |t_2|\leq\left|t_2^*\right|,\ \left|t-t^*\right|\geq\delta, t_1<t_2(t_1^*/t_2^*)\right\},$$

$$H_{01}=\left\{t:u_{11}(t_1,t_2)\leq\varepsilon\ln\varepsilon,\ u_{21}(t_1,t_2)\leq 0,\quad |t_2|\leq\left|t_2^*\right|,\ \left|t-t^*\right|\geq\delta\right\},$$

$$H_{10}=\left\{t:\left|t-t^*\right|=\varepsilon^\gamma\delta,\ u_{11}(t_1,t_2)\leq 0, t_1^0\leq t_1\leq t_1^1, |t_2|\leq\left|t_2^*\right|\right\},$$

$$H_{11}=\left\{t:\ u_{11}(t_1,t_2)=(1/2-\gamma)\varepsilon\ln\varepsilon,\ u_{21}(t_1,t_2)\leq 0, t_1^1\leq t_1, |t_2|\leq\left|t_2^*\right|\right\},$$

$$H_{20}=\left\{t:\left|t-t^*\right|\leq\sqrt{\varepsilon}\delta,\ u_{11}(t_1,t_2)\leq 0, |t_2|\leq\left|t_2^*\right|\right\},$$

$$H_{21}=\left\{t:-c\varepsilon\leq u_{11}(t_1,t_2)\leq 0,\ u_{21}(t_1,t_2)\leq 0, \left|t-t^*\right|\geq c\sqrt{\varepsilon}, |t_2|\leq\left|t_2^*\right|\right\},$$

где $H_0=H_{00}\cup H_{01}$, $H_1=H_{10}\cup H_{11}$, $H_2=H_{20}\cup H_{21}$, $D=H_0\cup H_1\cup H_2$, $\delta>0$ – достаточно малое число, $0\leq\gamma<1/2$, t_1^0 находим, решая систему $\begin{cases} u_{11}(t_1,t_2)=0, \\ \left|t-t^*\right|=\varepsilon^\gamma\delta. \end{cases}$ Эта система, при $t_2 \ge t_2^*$, имеет два корня $\left(\tilde{t}_1^1, \tilde{t}_2^1\right)$, $\left(\tilde{t}_1^2, \tilde{t}_2^2\right)$, и здесь определяем $t_1^0 = \min\left\{\tilde{t}_1^1, \tilde{t}_1^2\right\}$.

Аналогично, t_1^1 находим, решая систему $\begin{cases} u_{11}(t_1,t_2) = (1/2-\gamma)\varepsilon\ln\varepsilon, \\ \left|t-t^*\right| = \varepsilon^\gamma\delta, \end{cases}$ при $t_2 \ge t_2^*$ система имеет два корня $\left(\tilde{t}_1^3, \tilde{t}_2^3\right)$, $\left(\tilde{t}_1^4, \tilde{t}_2^4\right)$, и $t_1^1 = \max\{\tilde{t}_1^3, \tilde{t}_1^4\}$.

Исследуем интегралы

$$E_k(t,\varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}u_k(t)} \int\limits_{L_k} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(u_{k1}(\tau_1,\tau_2)+iu_{k2}(\tau_1,\tau_2))} h_k(\tau_1,\tau_2)\, d(\tau_1+i\tau_2),\ k=1,2.$$

В комплексной плоскости ($t = t_1+it_2$, $\tau = \tau_1+i\tau_2$) определим пути интегрирования L_1 и L_2. По теореме Коши можно деформировать путь интегрирования наиболее оптимально для получения асимптотических оценок в D. Пути интегрирования L_1, L_2 симметричны относительно действительной оси. Поэтому достаточно определить только одну из них, мы определим L_1.

Путь интегрирования L_1. Если $(t_1,t_2)\in H_{00}$, то L_1 – отрезок прямой, соединяющий точки $(t_0,0)$ и (t_1,t_2), уравнение которой имеет вид $\tau_2 = (\tau_1-t_0)(t_1-t_0)/t_2$, $t_0 \le \tau_1 \le t_1$; а если $(t_1,t_2)\in H_{01}\cup H_1\cup H_2$, то $L_1 = L_{11}\cup L_{12}$, где L_{11} – $\tau_2 = \varphi_1(\tau_1)$ – часть критической линии уровня, определяемая из равенства $u_{11}(\tau_1,\tau_2) = 0$, при этом $t_0 \le \tau_1 \le t_1^*$ $(t_1^* \le \tau_1 \le t_0)$; L_{12} – отрезок прямой $\tau_1 = \psi(\tau_2)$, где $\psi(\tau_2) = \left(t_1-t_1^*\right)\left(\tau_2-t_2^*\right)/\left(t_2-t_2^*\right)+t_1^*$, $t_2^* \le \tau_2 \le t_2$.

Оценки интегралов в подобластях. Пусть $t\in H_{00}$, тогда

$$E_1(t,\varepsilon) = (1+i(t_1-t_0)/t_2)e^{\frac{1}{\varepsilon}u_1(t)} \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\tilde{u}_1(\tau_1)} \tilde{h}_1(\tau_1)\, d\tau_1,$$

где $$\tilde{u}_1(\tau_1) = u_{11}(\tau_1,(\tau_1-t_0)t_2/(t_1-t_0)) + iu_{12}(\tau_1,(\tau_1-t_0)t_2/(t_1-t_0)),$$

$$\tilde{h}_1(\tau_1) = h_1(\tau_1,(\tau_1-t_0)t_2/(t_1-t_0)).$$

Интеграл $E_1(t,\varepsilon)$ интегрируем по частям:

$$E_1(t,\varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}u_1(t)} \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\varepsilon}{-\lambda_1(\tau_1)} \tilde{h}_1(\tau_1)\, de^{-\frac{1}{\varepsilon}\tilde{u}_1(\tau_1)} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{-\lambda_1(t_1)}\tilde{h}_1(t_1) - \frac{\varepsilon}{-\lambda_1(t_0)}\tilde{h}_1(t_0) - \varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}u_1(t)} \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\tilde{h}_1(\tau_1)}{\lambda_1(\tau_1)}\right)' e^{-\frac{1}{\varepsilon}\tilde{u}_1(\tau_1)}\, d\tau_1.$$

Учитывая, что в H_{00}: $\mathrm{Re}\lambda_1(t_1,t_2) < 0$, имеем

$$\left|E_1(t,\varepsilon)\right| \le \frac{\varepsilon}{\left|\lambda_1(t_1)\right|}c + \frac{\varepsilon^2}{\left|\lambda_1(t_1)\right|^3}c + \ldots + \frac{\varepsilon^n}{\left|\lambda_1(t_1)\right|^{2n-1}}c.$$

Так как $\left|t-t^*\right| \ge \delta$, т.е. $\left(t_1-t_1^*\right)^2 + \left(t_2+t_2^*\right)^2 \ge \delta^2$, то

$$\left|E_1(t,\varepsilon)\right| \le \frac{\varepsilon c}{\left|\lambda_1(t_1)\right|} + \frac{\varepsilon^2 c}{\left|\lambda_1(t_1)\right|^3} + \ldots + \frac{\varepsilon^n c}{\left|\lambda_1(t_1)\right|^{2n-1}} = O(\varepsilon).$$

Следствие 1. Если $|t-t^*| = \varepsilon^\gamma\delta$, то в этом случае

$$|E_1(t,\varepsilon)| \le \frac{\varepsilon}{|\lambda_1(t_1)|}c + \frac{\varepsilon^2}{|\lambda_1(t_1)|^3}c + \ldots + \frac{\varepsilon^n}{|\lambda_1(t_1)|^{2n-1}}c =$$
$$= \varepsilon^{1-\gamma}c + \left(\varepsilon^{1-\gamma}\right)^2 c + \ldots + \left(\varepsilon^{1-\gamma}\right)^n c = O\left(\varepsilon^{1-\gamma}\right).$$

Следовательно, в H_{00} для $E_1(t,\varepsilon)$ справедлива оценка

$$|E_1(t,\varepsilon)| \le c\varepsilon. \tag{6}$$

Пусть $(t_1,t_2)\in H_{00}\cup H_1\cup H_2$, тогда $E_1(t,\varepsilon) = E_{11}(t,\varepsilon)+ E_{12}(t,\varepsilon)$, где

$$E_{1k}(t,\varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}u_1(t)} \int\limits_{L_{1k}} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(u_{11}(\tau_1,\tau_2)+iu_{12}(\tau_1,\tau_2))} h_1(\tau_1,\tau_2)\, d(\tau_1+i\tau_2), k=1,2 .$$

Асимптотическая оценка $E_{11}(t,\varepsilon)$. Так как $u'_{12}\left(t_1^*,\varphi_1\left(t_1^*\right)\right)=0$, поэтому интеграл делим на две части. Пусть $E_{11}(t,\varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}u_1(t)}\tilde{E}_{11}(t,\varepsilon)$, тогда

$$\tilde{E}_{11}(t,\varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{t_1^*} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(iu_{12}(\tau_1,\varphi_1(\tau_2)))} h_1(\tau_1,\varphi_1(\tau_1))(1+i\varphi'_1(\tau_1))\,d\tau_1 = j_1(\varepsilon)+j_2(\varepsilon),$$

где
$$j_1(\varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{t_1^*-\delta} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(iu_{12}(\tau_1,\varphi_1(\tau_1)))} h_1(\tau_1,\varphi_1(\tau_1))(1+i\varphi'_1(\tau_1))\,d\tau_1 ,$$

$$j_2(\varepsilon) = \int\limits_{t_1^*-\delta}^{t_1^*} e^{-\frac{i}{\varepsilon}u_{12}(\tau_1,\varphi_1(\tau_1))} h_1(\tau_1,\varphi_1(\tau_1))(1+i\varphi'_1(\tau_1))\,d\tau_1 .$$

Интеграл $j_1(\varepsilon)$ не имеет особенностей, поэтому его интегрируем по частям:

$$j_1(\varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{t_1^*-\delta} e^{-\frac{i}{\varepsilon}\tilde{u}_{12}(\tau_1)} \tilde{h}_1(\tau_1)\,d\tau_1 = i\varepsilon \int\limits_{t_0}^{t_1^*-\delta} \frac{\tilde{h}_1(\tau_1)}{\tilde{u}'_{12}(\tau_1)} d\left(e^{-\frac{i}{\varepsilon}\tilde{u}_{12}(\tau_1)}\right) =$$
$$= i\varepsilon\left(\frac{\tilde{h}_1\left(t_1^*-\delta\right)}{\tilde{u}'_{12}\left(t_1^*-\delta\right)} e^{-\frac{i}{\varepsilon}\tilde{u}_{12}\left(t_1^*-\delta\right)} - \frac{\tilde{h}_1(t_0)}{\tilde{u}'_{12}(t_0)} e^{-\frac{i}{\varepsilon}\tilde{u}_{12}(t_0)}\right) - (i\varepsilon)^2 \int\limits_{t_0}^{t_1^*-\delta} \left(\frac{\tilde{h}_1(\tau_1)}{\tilde{u}'_{12}(\tau_1)}\right)' \frac{1}{\tilde{u}'_{12}(\tau_1)} d\left(e^{-\frac{i}{\varepsilon}\tilde{u}_{12}(\tau_1)}\right).$$

$$|j_1(\varepsilon)| \le \varepsilon\frac{c}{\delta}c + \varepsilon^2\frac{c}{\delta^3}.$$

Интегрируя по частям n раз можно получить оценку

$$|j_1(\varepsilon)| \le \sqrt{\varepsilon}\left(c\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta} + c\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta}\right)^3 + \ldots + c\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta}\right)^{2n-1}\right) = O(\varepsilon) .$$

Отметим, что если $\delta = c\varepsilon^\gamma$, $0<\gamma\le 1/2$, то имеем

$$|j_1(\varepsilon)| \le \varepsilon^{1-\gamma}\left(c + c\varepsilon^{1-2\gamma} + \ldots + c\varepsilon^{n(1-2\gamma)}\right) = O\left(\varepsilon^{1-\gamma}\right), \varepsilon\to 0 .$$

Оценка следующего интеграла покажет, что γ не может быть больше 1/2

$$j_2(\varepsilon) = \int\limits_{t_1^*-\delta}^{t_1^*} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(iu_{12}(\tau_1,\varphi_1(\tau_1)))} h_1(\tau_1,\varphi_1(\tau_1))(1+i\varphi'_1(\tau_1))\,d\tau_1 .$$

В δ ($0<\delta<<1$) окрестности точки t_1^* функцию $u_{12}\left(\tau_1,\varphi_1\left(\tau_1\right)\right)$ можно записать в виде $u_{12}\left(\tau_1,\varphi_1\left(\tau_1\right)\right)\sim c\left(\tau_1-t_1^*\right)^2$, $c=u_{12}''\left(t_1^*\right)/2$, тогда

$$j_2\left(\varepsilon\right)=\int\limits_{t_1^*-\delta}^{t_1^*} e^{-\frac{ic}{\varepsilon}(\tau_1-t_1^*)^2}\tilde{h}_1\left(\tau_1\right)d\tau_1=\sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2|c|}}\tilde{h}_1\left(t_1^*\right)e^{i\pi/4sign(-c)}+O\left(\varepsilon\right),\ \varepsilon\to 0\,.$$

Отсюда получим

$$\left|E_{11}\left(t,\varepsilon\right)\right|\le c\Omega_{01}\left(t,\varepsilon\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}u_{11}(t)}\,, \tag{7}$$

где

$$\Omega_{01}\left(t,\varepsilon\right)=\begin{cases}\varepsilon,\ \text{при}\, t_0\le t_1\le-\delta,\ 0<\delta<<1,\\ \varepsilon^{1-\gamma},\ \text{при}\, t_0\le t_1\le -c\varepsilon^{\gamma},\ 0\le\gamma<1/2,\\ \sqrt{\varepsilon},\ \text{при}\, t_0\le t_1\le t_1^*,\end{cases}$$

или

$$|E_{11}(t,\varepsilon)|\le c\varepsilon^n,\ \forall n\in\mathbf{N},\ \text{при}\ (t_1,t_2)\in H_{01},$$
$$|E_{11}(t,\varepsilon)|\le c\varepsilon^{1-\gamma},\ \text{при}\ (t_1,t_2)\in H_1,$$
$$|E_{11}(t,\varepsilon)|\le c\varepsilon^{1/2},\ \text{при}\ (t_1,t_2)\in H_2.$$

Асимптотическая оценка интеграла $E_{12}(t,\varepsilon)$. Интеграл делим на две части: $\delta(\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}$ -окрестность точки $\left(t_1^*,t_2^*\right)$ и остальная часть отрезка, т.е.

$$E_{12}\left(t,\varepsilon\right)=e^{\frac{1}{\varepsilon}u_1(t_1,t_2))}\left(\int\limits_{t_2^*}^{\sqrt{\varepsilon}+t_2^*}+\int\limits_{\sqrt{\varepsilon}+t_2^*}^{t_2}\right)e^{-\frac{1}{\varepsilon}u_1(\psi(\tau_2),\tau_2))}h_1\left(\psi(\tau_2),\tau_2\right)\left(i+\psi'(\tau_2)\right)d\tau_2\,.$$

Для первого интеграла, в $\delta(\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}$ -окрестности точки перевала $\left(t_1^*,t_2^*\right)$ справедливо неравенство

$$|E_{12}(t,\varepsilon)|\le\varepsilon^{1/2}c(|h_{10}|+O(\varepsilon^{1/2})).$$

Действительно, в интеграле

$$E_{12}\left(t,\varepsilon\right)=e^{\frac{1}{\varepsilon}u_1(t_1,t_2)}\int\limits_{t_2^*}^{\sqrt{\varepsilon}+t_2^*}e^{-\frac{1}{\varepsilon}u_1(\psi(\tau_2),\tau_2)}h_1\left(\psi(\tau_2),\tau_2\right)\left(i+\psi'(\tau_2)\right)d\tau_2$$

функцию $u_1(\psi(\tau_2),\tau_2)$ можно записать в виде

$$u_1\left(\psi\left(\tau_2\right),\tau_2\right)\sim c\left(\tau_2-t_2^*\right)^2,\ c=u_1''\left(t_1^*,t_2^*\right)/2\,.$$

Отсюда получим

$$E_{12}\left(t,\varepsilon\right)=O\left(1\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}u_1(t_1,t_2))}\int\limits_{t_2^*}^{t_2^*+\delta}e^{-\frac{ic}{\varepsilon}(\tau_2-t_2^*)^2}h_1\left(\tau_2\right)d\tau_2=$$
$$=O\left(1\right)\sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2|c|}}h_{10}e^{i\pi/4sign(-c)}+O\left(\varepsilon\right)h_{11}+\ldots,$$

где $h_{10}=h_1\left(t_1^*,t_2^*\right)$, $h_{1k}=h_1^{(k)}\left(t_1^*,t_2^*\right)/k!$.

Тем самым $|E_{12}(t,\varepsilon)|\le\varepsilon^{1/2}c(|h_{10}+O(\varepsilon^{1/2}))$, $\varepsilon\to 0$.

Второй интеграл не имеет особенностей, кроме того, когда мы поднимаемся по прямой $\psi(\tau_2)=\left(t_1-t_1^*\right)\left(\tau_2-t_2^*\right)/\left(t_2-t_2^*\right)+t_1^*$, $t_2^*\le\tau_2\le t_2$, функция $u_{11}(\psi(\tau_2),\tau_2)$ монотонно убывает (значения линии уровней убывают) при $-t_2^*+\sqrt{\varepsilon}\le\tau_2\le t_2$. Отметим, что здесь не требуем условия 4^0 [9], условия монотонности по вертикали.

Интегрируя по частям интеграл $E_{12}(t,\varepsilon)$, получим

$$E_{12}(t,\varepsilon)=e^{\frac{1}{\varepsilon}u_1(t_1,t_2))}\int\limits_{-t_2^*+\sqrt{\varepsilon}}^{t_2}e^{-\frac{1}{\varepsilon}u_1(\psi(\tau_2),\tau_2))}h_1(\psi(\tau_2),\tau_2)(i+\psi'(\tau_2))d\tau_2=$$

$$=\frac{\varepsilon h_1(t_1,t_2)}{-\lambda_1(t_1,t_2)}+\frac{\sqrt{\varepsilon}\left(h_{10}+\sqrt{\varepsilon}h_{11}+O(\varepsilon)\right)}{O(1)}e^{\frac{1}{\varepsilon}u_1(t_1,t_2)}+\frac{\varepsilon h_1(t_1,t_2)}{\lambda_1(t_1,t_2)}O(1).$$

Отсюда $$\left|E_{12}(t,\varepsilon)\right|\le\varepsilon\left|\frac{h_1(t_1,t_2)}{-\lambda_1(t_1,t_2)}\right|+c\sqrt{\varepsilon}\left(\left|h_{10}\right|+O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}u_{11}(t_1,t_2)}.$$

Поэтому, если $h_1\left(t_1^*,t_2^*\right)=0$, то $|E_{12}(t,\varepsilon)|\le c\varepsilon$, а если $h_1\left(t_1^*,t_2^*\right)\ne0$, то $\left|E_{12}(t,\varepsilon)\right|\le\dfrac{c\varepsilon}{\left|\lambda_1(t_1,t_2)\right|}+c\sqrt{\varepsilon}e^{\frac{1}{\varepsilon}u_{11}(t_1,t_2)}$.

Отсюда вытекает справедливость неравенства

$$|E_{12}(t,\varepsilon)|\le c\Omega_{02}(t,\varepsilon), \qquad (8)$$

где $\Omega_{02}(t,\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon, \text{ при } t\in H_{01},\\ \varepsilon^{1-\gamma}, \text{ при } t\in H_1,\\ \sqrt{\varepsilon}, \text{ при } t\in H_2.\end{cases}$

Объединяя асимптотические оценки (6) – (8) и следствие 1, получим асимптотику для $E_1(t,\varepsilon)$ в области D при $\varepsilon\to0$.

Нами доказана

Теорема 1. Пусть $h_1(t_1^*,t_2^*)\ne0$, тогда для $E_1(t,\varepsilon)$ в области D справедлива оценка

$$|E_1(t,\varepsilon)|\le c\Omega_1(t,\varepsilon),$$

где $$\Omega_1(t,\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon, \text{ при } t\in H_0,\\ \varepsilon^{1-\gamma}, \text{ при } t\in H_1,\\ \sqrt{\varepsilon}, \text{ при } t\in H_2, 0\le\gamma<1/2.\end{cases}$$

Аналогично, вычисляя интеграл $E_2(t,\varepsilon)$ по пути L_2 (L_2 симметрично к L_1 относительно действительной оси), получим асимптотику для $E_2(t,\varepsilon)$ в D, т.е. справедлива

Теорема 2. Пусть $h_2(t_1^*,-t_2^*)\ne0$, тогда для $E_2(t,\varepsilon)$ в области D справедлива оценка

$$\left|E_2(t,\varepsilon)\right|\le c\tilde{\Omega}_1(t,\varepsilon),$$

где $$\tilde{\Omega}_1(t,\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon, \text{ при } t\in\tilde{H}_0,\\ \varepsilon^{1-\gamma}, \text{ при } t\in\tilde{H}_1,\\ \sqrt{\varepsilon}, \text{ при } t\in\tilde{H}_2, 0\le\gamma<1/2.\end{cases}$$

Тем самым, если $h_1(t_1^*, t_2^*) \neq 0$ или $h_2(t_1^*, -t_2^*) \neq 0$, то справедлива оценка

$$\left\| \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon) h(\tau) d\tau \right\| \le c\Omega_2(t,\varepsilon), \text{ или } \left\| \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon) h(\tau) d\tau \right\| \le c\sqrt{\varepsilon},\ t \in D,$$

где
$$\Omega_2(t,\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon, \text{ при } t \in H_0 \cap \tilde{H}_0, \\ \varepsilon^{1-\gamma}, \text{ при } t \in H_1 \cup \tilde{H}_1, t_1 \le T + (1/2-\gamma)\varepsilon \ln \varepsilon, \\ \sqrt{\varepsilon}, \text{ при } t \in H_2 \cup \tilde{H}_2, 0 \le \gamma < 1/2. \end{cases}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть в области D справедливы оценки $\|B(t)\| \le c$ и

$$\int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon) h(\tau) d\tau \sim \mathrm{O}(\delta(\varepsilon)),\ \varepsilon \to 0, \text{ где } \varepsilon \le \delta(\varepsilon) \le \varepsilon^{\gamma},\ 0 < \gamma < 1,$$

то для решения систем интегральных уравнений (8) справедлива оценка

$$z(t,\varepsilon) \sim O(\delta(\varepsilon)),\ \varepsilon \to 0.$$

Доказательство. Воспользуемся методом последовательных приближений. Пусть $z_0(t,\varepsilon) \equiv 0$,

$$z_n(t,\varepsilon) = \varepsilon E(t,t_0,\varepsilon) y^0 + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)\left(B(\tau) z_{n-1}(\tau,\varepsilon) + h(\tau)\right) d\tau,$$

тогда
$$z_1(t,\varepsilon) = \varepsilon E(t,t_0,\varepsilon) y^0 + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon) h(\tau) d\tau,$$

$$z_n(t,\varepsilon) = z_1(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon) B(\tau) z_{n-1}(\tau,\varepsilon) d\tau,\ n = 1,2,\ldots .$$

По условию теоремы имеем

$$\int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon) h(\tau) d\tau \sim O(\delta(\varepsilon)),\ \varepsilon \to 0, \text{ и } \varepsilon \le \delta(\varepsilon) \le \varepsilon^{\gamma},$$

поэтому

$$z_1(t,\varepsilon) \sim E(t,t_0,\varepsilon) y^0 \varepsilon + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon) h(\tau) d\tau \sim O(\delta(\varepsilon)),\ \varepsilon \to 0,\ t \in D.$$

Оценим второе приближение:

$$z_2(t,\varepsilon) = z_1(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon) B(\tau) z_1(\tau,\varepsilon) d\tau \sim O(\delta(\varepsilon)) + O\left(\delta^2(\varepsilon)\right),\ \varepsilon \to 0,\ t \in D.$$

Аналогично, получаем

$$z_3(t,\varepsilon) = z_1(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon) B(\tau) z_2(\tau,\varepsilon) d\tau \sim O(\delta(\varepsilon)) + O\left(\delta^2(\varepsilon)\right) + O\left(\delta^3(\varepsilon)\right),$$

$$\varepsilon \to 0,\ t \in D.$$

Для n-го приближения справедливо соотношение

$$z_n(t,\varepsilon) \sim \mathrm{O}(\delta(\varepsilon)) + O\left(\delta^2(\varepsilon)\right) + ... + O\left(\delta^n(\varepsilon)\right),\ \varepsilon \to 0,\ t \in D.$$

Это можно доказать, применяя метод математической индукции.

Последовательные приближения $z_n(t,\varepsilon)$ равномерно ограничены:

$$\forall n \in \mathbf{N}\ \ \|z_n(t,\varepsilon)\| \le c\delta(\varepsilon),\ \ 0 < c - \mathrm{const}.$$

Рассмотрим ряд

$$z_n(t,\varepsilon) = z_1(t,\varepsilon) + (z_2(t,\varepsilon) - z_1(t,\varepsilon)) + (z_3(t,\varepsilon) - z_2(t,\varepsilon)) + \ldots + (z_n(t,\varepsilon) - z_{n-1}(t,\varepsilon)),$$

отсюда

$$\|z_n(t,\varepsilon)\| \le \|z_1(t,\varepsilon)\| + \|z_2(t,\varepsilon) - z_1(t,\varepsilon)\| + \|z_3(t,\varepsilon) - z_2(t,\varepsilon)\| + \ldots + \|z_n(t,\varepsilon) - z_{n-1}(t,\varepsilon)\|.$$

Так как

$$z_1(t,\varepsilon) \sim O(\delta(\varepsilon)),\ z_k(t,\varepsilon) - z_{k-1}(t,\varepsilon) \sim \mathrm{O}(\delta^k(\varepsilon)),\ k = 2,3,\ldots,n,$$

то в области D последовательность $\{z_n(t,\varepsilon)\}$ является сходящейся и имеет предел $z(t,\varepsilon) = O(\delta(\varepsilon))$, $\varepsilon \to 0$. Теорема 3 доказана.

А если $h_1(t_1^*, t_2^*) = 0$ и $h_2(t_1^*, -t_2^*) = 0$, то в области D справедлива оценка

$$\left\| \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon) h(\tau) d\tau \right\| \le c\varepsilon.$$

Поэтому, в этом случае, $z(t,\varepsilon) \sim \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$.

Справедливы теоремы:

Теорема 4. Пусть выполняются условия 1, 2 и $f(t_1^*, t_2^*) \neq 0$, $f(t_1^*, -t_2^*) \neq 0$, тогда задача (1), (2) имеет единственное решение, для которого справедлива асимптотическая оценка

$$\|x(t,\varepsilon)\| \le c\Omega_3(t,\varepsilon),$$

где

$$\Omega_3(t,\varepsilon) = \begin{cases} 1, \text{ при } t \in H_0 \cap \tilde{H}_0, \\ 1/\varepsilon^{\gamma}, \text{ при } t \in H_1 \cup \tilde{H}_1, t_1 \le T + (1-2\gamma)\varepsilon \ln \varepsilon, \\ 1/\sqrt{\varepsilon}, \text{ при } t \in H_2 \cup \tilde{H}_2,\ 0 \le \gamma < 1/2. \end{cases}$$

Теорема 5. Пусть выполняются условия 1, 2, $f(t_1^*, t_2^*) = 0$ и $f(t_1^*, -t_2^*) = 0$, тогда задача (1), (2) имеет единственное решение и для решения справедливо неравенство: $\|x(t, \varepsilon)\| \le c$, $\varepsilon \to 0$.

Замечание. Мы рассматривали общий случаи простой точки перевала. Этот результат можно обобщить для n-кратной точки перевала, т.е. когда собственные значения $\lambda_1(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, $\lambda_2(t) = \alpha(t) - i\beta(t)$ в области D имеют единственный n-кратный нуль:

$$\lambda_1^{(k)}\left(t^*\right) \equiv 0,\ \lambda_2^{(k)}\left(\overline{t^*}\right) \equiv 0,\ k = 0, 1,..., n-1;\ \lambda_1^{(n)}\left(t^*\right) \neq 0,\ \lambda_2^{(n)}\left(\overline{t^*}\right) \neq 0,$$

где $t^* = t_1^* + it_2^*$, t^* – принадлежит границе D.

В данном случае асимптотика интегралов $E_j(t,\varepsilon)$, $j = 1,2$ при $\varepsilon \to 0$, вычисляется аналогично. Но надо иметь ввиду, что точка $\tau = t^*$ ($\tau = \overline{t^*}$) является точкой перевала порядка n функций $u_1(\tau)$ ($u_2(\tau)$). В окрестности точки перевала $\tau = t^*$ ($\tau = \overline{t^*}$) линии $\mathrm{Re}(u_1(\tau_1,\tau_2) - u_1(t_0,0)) = 0$ ($\mathrm{Re}(u_2(\tau_1, \tau_2) - u_2(t_0,0)) = 0$) делят плоскость на $2(n+1)$ равных секторов с углами $\pi/(n+1)$ при вершине, $\tau = t^*$ ($\tau = \overline{t^*}$). В соседних секторах знаки $\mathrm{Re}(u_1(\tau_1,\tau_2) - u_1(t_0,0))$ ($\mathrm{Re}(u_2(\tau_1, \tau_2) - u_2(t_0,0))$) различные [17].

Следствие 2. Пусть собственные значения $\lambda_1(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, $\lambda_2(t) = \alpha(t) - i\beta(t)$ на границе области D имеют единственный n-кратный нуль и $f(t_1^*, t_2^*) \neq 0$, $f(t_1^*, -t_2^*) \neq 0$. Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение и для него справедлива оценка

$$\|x(t,\varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{-n/(n+1)},\ \varepsilon\to 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Математический сборник. 1948. Т. 22 (64). С. 193–204.
2. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных // Математический сборник. 1952. Т. 31(73). № 3. С. 575–586.
3. *Шишкова М.А.* Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Докл. АН СССР. 1973. Т. 209. № 3. С. 576–579.
4. *Нейштадт А.И.* Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось. Заседания семинара имени И.Г. Петровского по дифференциальным уравнениям и математическим проблемам физики // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40. Вып. 5. С. 300–301.
5. *Нейштадт А.И.* О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях I, II // Диф. урав. 1987. Т. 23. № 12. С. 2060–2067; 1988. Т. 24. № 2. С. 226–233.
6. *Нейштадт А.И.*, *Сидоренко В.В.* Запаздывание потери устойчивости в системе Циглера / Препринт. М.: Институт прикладной математики РАН им. М.В. Келдыша, 1995.
7. *Neishtadt A.I. Sidorenko V.V.* Stability loss delay in a Ziegler systemi // J. App. Maths. Mechs. 1997. V. 61. No. 1. P. 15–25.
8. *Ziegler H.* Stabilitats kriterien der Flasto mechanic // Ing. Archiv. 1952. V. 20. N 1. S. 49–56.
9. *Каримов С.* Асимптотика решений некоторых классов дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» // Дифф. уравнения. 1985. Т. 21. № 10. С. 1698–1701.
10. *Каримов С.*, *Турсунов Д.А.*, *Маматкулова М.* Асимптотические оценки решений дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости. Ош: Билим, 2006. Серия № 2. 112 с.
11. *Арнольд В.И.*, *Афраймович В.С.*, *Ильяшенко Ю.С.*, *Шильников Л.П.* Теория бифуркаций // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. 1986. Т. 5. С. 5–218.
12. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. 3-е изд., доп. М.: Наука, 1990. С. 128.
13. *Алыбаев К.С.* Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости: дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. Жалалабат, 2001. 203 с.
14. *Турсунов Д.А.* Асимптотика решений сингулярно возмущенных уравнений в случае смены устойчивости, когда собственные значения имеют n-кратный полюс: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Ош, 2005. 110 с.
15. *Турсунов Д.А.* Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи с периодическими точками поворота // Изв. Томского политехнического университета. 2014. Т. 324. № 2. С. 31–35.
16. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений краевых задач. М.: Наука, 1989. 334 с.
17. *Федорюк М.В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Статья поступила 21.02.2018 г.

Tursunov D.A. (2018) ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM IN THE CASE OF A CHANGE IN THE STABILITY OF A STATIONARY POINT IN THE PLANE OF “RAPID MOTIONS”. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 54. pp. 46–57

DOI 10.17223/19988621/54/4

Keywords: asymptotic expansion of the solution, bisingular problem, singular perturbation, Cauchy problem, small parameter, stationary phase method, system of ordinary differential equations with a small parameter for the derivative.

In this paper, the Cauchy problem for a normal system of two linear inhomogeneous ordinary differential equations with a small parameter at the derivative is considered. The coefficient matrix of the linear part of the system has complex conjugate eigenvalues. The real parts of the complex conjugate eigenvalues in the considered interval change signs from negative to positive ones. A singularly perturbed Cauchy problem is investigated in the case of instability, i.e., when the asymptotic stability condition is violated. Moreover, the singularly perturbed Cauchy problem has an additional singularity, namely, the corresponding unperturbed equation has a non-smooth solution in the investigated extended domain. More exactly, the solution of the corresponding unperturbed equation has poles in the complex plane. Therefore, the Cauchy problem under consideration can be called bisingular in the terminology introduced by Academician A.M. Il’in.

The aim of the research is to construct the principal term of the asymptotic behavior of the Cauchy problem solution when the asymptotic stability condition is violated.

In the study, methods of the stationary phase, saddle point, successive approximations, and L.S. Pontryagin’s idea—the transition to a complex plane—are applied.

An asymptotic estimate is obtained for the solution of a bisingularly perturbed Cauchy problem in the case of a change in the stability of a stationary point in the plane of “rapid motions” is violated. The principal term of the asymptotic expansion of the solution is constructed. It has a negative fractional power with respect to a small parameter, which is characteristic of bisingularly perturbed equations or equations with turning points.

The obtained results can find applications in chemical kinetics, in the study of Ziegler's pendulum, etc.

AMS Mathematical Subject Classification: 34M60, 34E10, 34A12

TURSUNOV Dilmurat A. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Osh State University, Kyrgyzstan). E-mail: tdaosh@gmail.com

REFERENCES

1. Tikhonov A. N. (1948) O zavisimosti resheniy differentsial’nykh uravneniy ot malogo parametra [On the dependence of solutions of differential equations on a small parameter]. *Mat. Sb. (N.S.)*. 22(64). pp. 193–204.
2. Tikhonov A. N. (1952) Sistemy differentsial’nykh uravneniy soderzhashchikh malyye parametry pri proizvodnykh [Systems of differential equations containing small parameters at the derivatives]. *Mat. Sb. (N.S.)*. 31(73). pp. 575–586.
3. Shishkova M.A. (1973) Rassmotreniye odnoy sistemy differentsial’nykh uravneniy s malym parametrom pri vysshikh proizvodnykh [Consideration of a system of differential equations with a small parameter at higher derivatives]. *Dokl. AN SSSR*. 209(3). pp. 576–579.
4. Neishtadt A.I. (1985) Asimptoticheskoye issledovaniye poteri ustoychivosti ravnovesiya pri medlennom prokhozhdenii pary sobstvennykh chisel cherez mnimuyu os’ [Asymptotic study of the loss of equilibrium stability upon a slow passage of a pair of eigenvalues through an imaginary axis]. Sessions of the Petrovskii seminar on differential equations and mathemathical problems of physics. *Uspekhi Mat. Nauk*, 40(5). pp. 300–301.
5. Neishtadt A. I. (1987, 1988) O zatyagivanii poteri ustoychivosti pri dinamicheskikh bifurkatsiyakh [Prolongation of the loss of stability in the case of dynamic bifurcations. I, II]. *Differ. Uravn.* 23(12). pp. 2060–2067; 24(2). pp. 226–233

6. Neishtadt A.I. Sidorenko V.V. (1995) Запаздывание потери устойчивости в системе Циглера [Stability loss delay in a Ziegler system]. Preprint. Moscow: Institute of Applied Mathematics RAS. M.V. Keldysh.
7. Neishtadt A.I. Sidorenko V.V. (1997) Stability loss delay in a Ziegler system. *J. App. Math. Mech*. 61(1). pp. 15–25.
8. Ziegler H. (1952) Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik. *Ing. Archiv*. 20(1). S. 49–56.
9. Karimov S. (1985) Asimptotika resheniy nekotorykh klassov differentsial'nykh uravneniy s malym parametrom pri proizvodnykh v sluchaye smeny ustoychivosti tochki pokoya v ploskosti "bystrykh dvizheniy" [Asymptotic behavior of the solutions of certain classes of differential equations with a small parameter at the derivatives in the case of a change in the stability of a stationary point in the plane of "rapid motions"]. *Differ. Uravn.* 21(10). pp. 1698–1701.
10. Karimov S., Tursunov D.A. Mamatkulova M. (2006) *Asimptoticheskiye otsenki resheniy differentsial'nykh uravneniy s malym parametrom pri proizvodnykh v sluchaye smeny ustoychivosti* [Asymptotic estimates for solutions of differential equations with a small parameter at derivatives in the case of a change of stability]. Osh: Bilim. 112 p.
11. Arnol'd V. I., Afraimovich V. S., Ilyashenko Yu. S., Shilnikov L. P. (1986) Teoriya bifurkatsiy [Bifurcation theory]. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr.* 5. Moscow: VINITI. pp. 5–218.
12. Arnold V.I. (1990) *The theory of catastrophes*. Moscow: Nauka. p. 128.
13. Alybaev K.S. (2001) Metod liniy urovnya issledovaniya singulyarno vozmushchennykh uravneniy pri narushenii usloviya ustoychivosti [Method of level lines for the study of singularly perturbed equations upon violation of the stability condition]: Diss. Dr. phys.-math. sciences: 01.01.02. Jalalabat. 203 p.
14. Tursunov D.A. (2005) Asimptotika resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy v sluchaye smeny ustoychivosti, kogda sobstvennyye znacheniya imeyut *n*-kratnyy polyus. [Asymptotic behavior of solutions of singularly perturbed equations in the case of a change of stability, when the eigenvalues have an *n*-multiple pole]: Diss. Cand. fiz.-mat. sciences: 01.01.02. Osh. 110 p.
15. Tursunov D.A. (2014) Asimptotika resheniya bisingulyarno vozmushchennogo ellipticheskogo uravneniya. Sluchay osoboy tochki na granitse [Asymptotic solutions of the bisingular perturbed elliptic equation. Case of a singular point at the boundary]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*. 324(2). pp. 31–35.
16. Ilin A.M. (1989) *Soglasovaniye asimptoticheskikh razlozheniy krayevykh zadach* [Matching of asymptotic expansions of boundary value problems]. Moscow: Nauka. 334 p.
17. Fedoryuk M.V. (1977) *Metod perevala* [Saddle-point method]. Moscow: Nauka. 368 p.