УДК 164.07
DOI: 10.17223/1998863X/43/3

В.В. Целищев

ИТЕРИРОВАННЫЕ МОДАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И УСЛОВИЯ ВЫВОДИМОСТИ ГИЛЬБЕРТА – БЕРНАЙСА[1]

Анализируются некоторые способы ослабления универсальности условий выводимости Гильберта – Бернайса, связанные с применением модальной логики к теории доказательства, в частности при доказательстве Второй теоремы Геделя о неполноте. Рассмотрен феномен интенсиональной неэквивалентности комбинаций модальных операторов в качестве объяснения интенсионального характера Второй теоремы Геделя. Показано, что причина появления девиантных концепций непротиворечивости формальной системы – неоднозначный перевод неформальных математических концепций в формальный вид, а также побочные эффекты перевода формальных теорий с разной сигнатурой друг в друга.
Ключевые слова: *модальный оператор, неполнота, интенсиональность, доказательство, условия выводимости.*

Интенциональный характер Второй теоремы Геделя о неполноте проявляется прежде всего в том, что формальное выражение непротиворечивости теории может конструироваться различными способами. И только один из них, отвечающий условиям выводимости Гильберта – Бернайса, является «каноническим» в том отношении, что имеет «намеренную» интерпретацию. Ранние работы С. Фефермана [1] и Г. Крайзеля [2] наметили проблематику интенсиональности Второй теоремы, и эта проблематика используется некоторыми логиками, например М. Детлефсеном [3] и Д. Ауэрбахом [4], для критики широко распространенного мнения, что упомянутая теорема опровергает Программу Гильберта. Вторая теорема Геделя в переводе на обыденный язык утверждает, что для достаточно богатых формальных систем доказательство их непротиворечивости невозможно в рамках самой этой системы. Однако в математической практике часто встречаются ситуации, когда непротиворечивый фрагмент теории расширяется добавлением новых фрагментов и требуется проверка непротиворечивости расширенной теории в рамках самой этой теории. Видимое противоречие со Второй теоремой при такой практике объясняется по-разному. Так, П. Смит говорит, что такое доказательство не является семантически содержательным [5]. Но уже сам Крайзель сожалел, что мало исследуется систем логики, где возможно доказательство непротиворечивости средствами самой теории [6]. Тем не менее такая проблематика разрабатывается в связи с системами с «встроенной непротиворечивостью».

Эта проблематика неизбежно связана с возможной ревизией условий выводимости Гильберта – Бернайса, по крайней мере с определенными сомнениями в их универсальности. Возможность подобного рода стала более перспективной с применением модальной логики к теории доказательства.

[1] Статья подготовлена при поддержке Российского научного фонда, проект 16-18-10359.

Появление систем модальной логики доказуемости, в частности системы GL, стало новым этапом развития геделевской проблематики, и не в последнюю очередь благодаря прозрачности связи между модальными версиями доказательства Второй теоремы и условий Гильберта – Бернайса [7].

Уже само сопоставление систем с совершенно разной сигнатурой может оказаться причиной интенсиональности. Но такого рода исследование представляет более широкий проект, который должен включить некоторые частные аспекты феномена интенсиональности Второй теоремы о неполноте. В данной статье рассмотрен один такой частный аспект, связанный с «механикой» действия модальных операторов, и лишь в конце мы коснемся более общих проблем.

Среди разнообразных работ в этом направлении не очень значимое место занимают комбинаторные соображения, связанные с проблемой итерации модальных операторов. Такое упущение представляется странным, потому что в самой модальной логике интерпретация последовательности вложенных модальных операторов чрезвычайно важна. Иногда обоснование итерации апеллирует к интуиции, иногда оно контринтуитивно: так, в условиях выводимости Гильберта – Бернайса считается интуитивно ясным, что если что-то доказуемо в формальной системе, то в этой же формальной системе должно быть доказуемо, что это нечто доказуемо. Но сама проблема допустимости итерации модальных операторов не выходила на первый план. Между тем вместо опоры на интуицию, которая часто подводит в случае модальной логики, следовало бы обратить внимание на комбинаторную природу итерации модальных операторов. Впервые такая проблема была поднята Т. Уильямсоном [8]. Он привлек внимание к феномену интенсиональной неэквивалентности комбинаций модальных операторов. С его точки зрения, такая неэквивалентность является объяснением интенсиональности Второй теоремы Геделя.

Неэквивалентность, которую имеет в виду Уильямсон, объясняется следующим образом. Два сентенциональных оператора K_1 и K_2 экстенсионально эквивалентны, если для любых предложений p, K_1p, если и только если K_2p. Эту эквивалентность можно распространить на интенсиональный случай, если она соблюдается во всех возможных мирах. То есть нужно понимать, что интерес представляет не то обстоятельство, что экстенсиональная эквивалентность единичных модальных операторов не совпадает или совпадает с интенсиональной эквивалентностью. Речь идет о другом феномене, возникающем при итерации модальных операторов. Например, пусть имеется эквивалентность K_1K_1p, если и только если K_2K_1p. Но эта эквивалентность никак не гарантирует эквивалентности K_1K_1p, если и только если K_2K_2p. Это обстоятельство представляется странным, если учесть, что ввиду экстенсиональной эквивалентности K_1 и K_2 они должны быть взаимозаменяемы. Дело в том, что действие операторов может определяться различными системами принципов, вплоть до прямой их несовместимости.

Нарушение экстенсиональности при итерации модальностей свидетельствует, что эта итерация может быть источником интенсиональности. Очевидно, что в определенной степени это неожиданный феномен, и в голову приходит незамедлительно другой случай поначалу неожидаемой интенсиональности, а именно доказательство Второй теоремы Геделя о неполноте арифметики. Недавние попытки диагноза интенсиональности подобного рода представляют значительный интерес с точки зрения теории доказательства. Ситуация с появлением интенсиональности в случае итерации модальностей при трактовке Второй теоремы приоткрывает новые измерения этой сложной проблемы, намекая на возможность участия в ней комбинаторных феноменов.

Перед тем как перейти к обсуждению тех проблем, поставленных Уильямсоном, в отношении роли итерации модальных операторов как объяснения интенсиональности доказательства Второй теоремы Геделя о неполноте, следует иметь в виду следующие факты. Во-первых, есть доказательства этой теоремы, например известное доказательство Дж. Булоса, где используется итерация модальных операторов [9]. Во-вторых, эти операторы являются частью логики доказательства GL, которая является сентенциональной модальной логикой. В-третьих, доказательство теоремы осуществляется с помощью определенных условий, которые также используют итерированные модальности. В-четвертых, эти условия вытекают из довольно разумных предположений о природе математического доказательства. Принимая во внимание эти факты, следует заключить, что природа модальных операторов у Булоса и Уильямса трактуется по-разному: если Булос исходит из всех преимуществ системы GL с модальным оператором «$\Box$», то Уильямсон строит общую теорию модальных итерированных операторов. Очевидно, что подход Уильямсона претендует на понимание особой роли итерации модальных операторов по сравнению с тем, как она понимается при «стандартном» подходе. Рассмотрим схему доказательства Второй теоремы Геделя, как оно представлено Булосом, делая упор на том, как в таком доказательстве реализуется интенсиональный характер теоремы. Сразу отметим, что эта интенсиональность обеспечивается использованием модальной логики, к тому же ключевые предпосылки доказательства включают итерацию модальных операторов.

Модальный оператор «$\Box$» обычно интерпретируется как «доказуемо». В доказательстве Геделя фигурирует формула «Proof (x, y)», чья конструкция соответствует определению «x есть доказательство y», и где x и y есть геделевы номера соответствующих синтаксических структур. Нотационный переход к модальным обозначениям дает возможность считать «$\Box$p» предложением языка, которое может рассматриваться как утверждение о доказуемости p в теории. Другими словами, «$\Box$p» является сокращением для выражения «($\exists$x)Proof (x, $\ulcorner p \urcorner$)», где $\ulcorner p \urcorner$ есть геделев номер p. Для доказательства Второй теоремы требуется, чтобы формула «Proof (x, y)» удовлетворяла следующим трем условиям для некоторой формальной теории T (условия выводимости Гильберта – Бернайса):

(i) Если $T \vdash p$, тогда $T \vdash \Box p$.

(ii) $T \vdash \Box (p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$.

(iii) $T \vdash \Box p \rightarrow \Box\Box p$.

Предполагается, что эти условия выполняются всеми «разумными» формальными системами, в которых может доказываться некоторая часть арифметики. Но именно в этом пункте расходятся точки зрения Булоса (который взят как представитель подавляющей части исследователей проблематики геделевских теорем) и Уильямсона. Сама итерация модальных операторов может вызывать сомнения в отношении ее содержательной интерпретации.

С точки зрения Уильямсона, первое условие является аналогом эпистемического принципа (известного как принцип КК), согласно которому если некто знает что-то. Но этот принцип вызывает значительные возражения, и уже на этом этапе Уильямсон готов возразить тезису о полной легитимности условий Гильберта – Бернайса. Однако эти принципы используются для формализации доказательства Второй теоремы Геделя, и если Уильямсон прав, тогда вся проблематика, связанная с применением теорем Геделя к эпистемологическим проблемам, оказывается под вопросом.

Сами эти принципы приспособлены к важным математическим конструкциям, в частности к процедуре диагонализации. Кроме того, само утверждение «Proof (x, y)» построено таким образом, чтобы быть естественным (или намеренным) в формализации понятия доказательства именно с принятием условий Гильберта – Бернайса (хотя хронологически события имели обратный характер). Для формализации доказательства Второй теоремы вводится нуль-местная функция «$\bot$», интерпретируемая как ложь, как противоречие. С ее помощью легко выразить утверждение о непротиворечивости теории: это «$\neg\Box\bot$», что равносильно «$\neg (\exists x)$ Proof $(x, \ulcorner\bot\urcorner)$». Представление доказуемости этой теоремы, по Булосу, таково [9. P. 411–414.]:

1. $p \equiv \neg \Box p$.

Это посылка доказательства. Такое утверждение получается посредством техники диагонализации, примененной Геделем. В настоящее время оригинальная конструкция Геделем такого рода утверждений упрощена с помощью выделенной Р. Карнапом [10] Диагональной леммы, или Теоремы о неподвижных точках. Хотя в данном доказательстве это выражение является исходным пунктом, на самом деле оно представляет ключевой момент в доказательстве геделевских теорем и сопряжено с принятием ряда тонких предпосылок, одна из которых играет важную роль в сопоставлении в данной статье взглядов на роль итерированных модальностей.

2. $p \rightarrow \neg \Box p$.
3. $\Box p \rightarrow \Box \neg \Box p$.

Шаг 2 является тривиальным следствием шага 1, чего нельзя сказать в общем виде о шаге 3. Он получается из шага 2 с помощью условия

(iv) Если $\vdash (p \rightarrow q)$, то $\vdash (\Box p \rightarrow \Box q)$.

Это условие является частью принятой логики, согласно которой все тавтологии доказуемы и логические следствия доказуемых формул доказуемы. Это условие считается само собой разумеющимся, но важно помнить, что оно является частью принятых соображений о природе логики, не все из которых могут оказаться оправданными в различных контекстах.

4. $\Box p \rightarrow \Box\Box p$.
5. $\neg \Box p \rightarrow (\Box p \rightarrow \bot)$.
6. $\neg \Box p \rightarrow \Box (\Box p \rightarrow \bot)$.
7. $(\Box p \rightarrow \bot) \rightarrow (\Box\Box p \rightarrow \Box\bot)$.

Шаг 4 является условием (iii), шаг 5 – тавтологией, и шаг 6 получается из шага 5 по условию (iv), а шаг 7 получается из шага 6 с помощью условия (ii).

Согласно шагам 3, 6, 7 и 4, а затем и шагу 1 получаем:

8. $\Box p \rightarrow \Box\bot$.
9. $\neg \Box\bot \rightarrow p$.

Наконец, из шага 9 с помощью условия (iv) получаем

10. $\Box\neg\Box\bot \to \Box p$.

Из шагов 8 и 10 имеем заключительную формулу

11. $\neg\ \Box\bot \to \neg\Box\ \neg\Box\ \bot\neg\ \Box\bot$.

Таким образом, если $\neg\ \Box\bot$, тогда $\neg\Box\ \neg\Box\ \bot$. Отсюда по (i) $\Box\neg\Box\bot$, и далее просто $\bot$. Поэтому, если недоказуемо $\bot$, тогда недоказуемо и $\neg\ \Box\bot$.

Приведенное подробно в высшей степени элегантное доказательство Булосом Второй теоремы часто считается некоторого рода логическим «изыском». Между тем оно ценно тем, что в нем очень отчетливо показана роль условий выводимости Гильберта – Бернайса, которая в обычном изложении этого доказательства не так очевидна и требует объяснений.

Необычайная краткость доказательства обязана, конечно же, использованию модальной логики. Глава 3 основной книги Г. Булоса по этому вопросу «Логика доказательства» [7. P. 51–67.] озаглавлена весьма информативно (по крайней мере, для наших целей): «The box as Bew(x)». «Bew» – это знаменитое обозначение предиката доказуемости в оригинальном доказательстве Геделя, «box» – это модальный оператор «$\Box$». Этот оператор играет важнейшую роль в представлении доказательства Второй теоремы – ввиду двойственности его функции – концептуальной и нотационной. Во-первых, он является, как уже было указано, сокращением для «Proof (x)», и во-вторых, он поглощает «скобки», превращающие правильно построенную формулу φ в стандартное число, представляющее геделев номер предложения φ. Исходя из этого, можно сделать правдоподобное предположение, что модальная логика GL «заточена» под геделев предикат доказуемости Bew (x), как и модифицированные условия выводимости Гильберта – Бернайса. Эти условия налагаются именно на предикат доказуемости.

Если вместо предиката «$\Box$» модальной системы GL использовать другие ресурсы модальной логики, скажем понятие функтора, и попытаться сформулировать условия, аналогичные условиям выводимости Гильберта – Бернайса, тогда мы выходим за рамки «заточенности» модальной машинерии под геделев предикат доказуемости. Более важным обстоятельством является то, что при представлении альтернатив подобного рода нарушается применение диагональной леммы.

Именно в этом состоит подход Уильямсона, который апеллирует к большей общности использования модальной логики для анализа эффекта неполноты. В неформальном изложении содержание Второй теоремы Геделя может быть передано таким образом:

PA может доказать свою непротиворечивость только ценой своей противоречивости,

или же

Если в PA доказуемо, что недоказуемо 0 = 1, то в PA доказуемо 0 = 1.

В такой формулировке оператор «доказуемо в PA» входит в область действия самого себя. Следовательно, при такой формулировке оператор трактуется как кодирующий нечто в PA, потому что его намеренной интерпретацией являются предложения, а не числа. Гедель при доказательстве Первой теоремы о неполноте выбрал в качестве кодирующего предикат Bew(x), так что Вторая теорема может быть сформулирована в виде

$\vdash_{PA} \neg\ \mathrm{Bew}\ulcorner 0 = 1\urcorner$, только если $\vdash_{PA} 0 = 1$.

Такое кодирование в случае Второй теоремы встречается с рядом проблем, суть которого состоит в наличии нескольких способов его реализации, не гармонизирующей с геделевским предикатом. Если геделевский способ кодирования с помощью Bew считать стандартным, то довольно рано пришло осознание наличия девиантных способов кодирования утверждения о непротиворечивости формальной системы. Так, как уже было упомянуто выше, Г. Крайзель показал, что дуальная к геделевской проблема Генкина нахождения доказуемого предложения может быть разрешена альтернативным по отношению к геделевскому способом, а Феферман продемонстрировал доказуемость непротиворечивости PA посредством девиантного кодирования. Для понимания сферы действия Второй теоремы Крайзель ввел понятие канонического представления формальной системы в рамках развитой Феферманом программы. Каноническое понимание связано с принятием условий выводимости Гильберта – Бернайса. Однако, с точки зрения Уильямсона, для выделения особенностей кодирования, использованного во Второй теореме, требуется более общий подход. Обобщение модального оператора доказуемости, предлагаемое Уильямсоном, ведет к обнаружению «феномена», как он его сам называет, связанного с итерацией оператора. Уильямсон полагает, что проявлением этого феномена является как раз доказательство Второй теоремы, поскольку уже ее формулировка содержит итерацию операторов. Больше того, нарушение действия Второй теоремы связывается теперь не с наличием девиантных формализаций понятия непротиворечивости, а с феноменом итерации модальных операторов, поскольку такая итерация в некоторых случаях не удовлетворяет условиям выводимости Гильберта – Бернайса.

Что лежит в основе этих правил, столь явно направляющих доказательство Второй теоремы? Как уже указывалось, модальный оператор «$\Box$» поглощает скобки» «$\ulcorner\ \urcorner$», что приводит к значительному удобству. Но для анализа применимости условий Гильберта – Бернайса мы должны вернуться к такой формулировке этих условий, где эти «скобки» представлены функтором Ф получения геделева номера в применении к сингулярным терминам. Тогда мы имеем

(1) Если $\vdash_S \alpha$, тогда $\vdash_S \Phi(\ulcorner\alpha\urcorner)$;

(2) $\vdash_S \Phi(\ulcorner\alpha\supset\beta\urcorner) \supset (\Phi(\ulcorner\alpha\urcorner) \supset \Phi(\ulcorner\beta\urcorner))$;

(3) $\vdash_S \Phi(\ulcorner\alpha\urcorner \supset \Phi(\ulcorner\Phi(\ulcorner\alpha\urcorner)\urcorner)$.

В этой нотации Вторая теорема при соблюдении условий (1) – (3) будет выглядеть так:

$\vdash_S \neg\,\Phi(\ulcorner\bot\urcorner$, только если $\vdash_S \bot$.

Уильямсон полагает, что и такой анализ недостаточен, поскольку в нем недостает общности для понимания роли функтора Ф, т.е. «действия» скобок в выражении «$\ulcorner\ldots\urcorner$». Он полагает, что к условиям (1) – (3) нужно добавить условие, которое является слабым аналогом операции подстановки для геделевых чисел, играющей ключевую роль в геделевской машинерии. Для этой цели он считает достаточным введение такого функционального символа «#», что для всех α, β и γ справедливо

(4) $\vdash_S \ulcorner\alpha\urcorner \# \ulcorner\beta\urcorner = \ulcorner\gamma\urcorner$.

В предположении обычной логики для PA (с обоснованностью, нормальностью и подставимостью тождественного) условий (1) – (4) вместе с Диагональной леммой

$\vdash_S \alpha \equiv \Phi(\ulcorner \alpha \urcorner)$

достаточно для выведения теоремы Леба

$\vdash_S \Phi(\ulcorner \alpha \urcorner) \supset \alpha$, только если $\vdash_S \alpha$.

Вторая теорема Геделя получается из теоремы Леба в случае, когда $\alpha = \bot$:

$\vdash_S \Phi(\ulcorner \bot \urcorner) \supset \bot$, только если $\vdash_S \bot$.

Итак, мы получили другое доказательство Второй теоремы Геделя. В отличие от доказательства Булоса новое доказательство позволяет перейти к обобщению, анализ которого обнаруживает наложения некоторых ограничений на модальные операторы в доказательстве Второй теоремы. Эти ограничения являются в некотором смысле аналогом интенсионального характера этого доказательства, связанного с девиантными формализациями понятия непротиворечивости формальной системы. Однако Уильямсон полагает, что обнаруживаемые ограничения имеют более общий характер, чем условия выводимости Гильберта – Бернайса, которые призваны обеспечить легитимность лишь одной формализации непротиворечивости (при использовании геделевского способа кодирования).

Обобщение, о котором идет речь, состоит в замене оператора, или функтора Φ, произвольным оператором K в условиях (1) – (4). При такой замене Вторая теорема принимает вид

$\vdash_S \neg K\bot$, только если $\vdash_S \bot$.

При этом аналоги условий выводимости Гильберта – Бернайса принимают следующий вид:

(1') Если $\vdash_S \alpha$, тогда $\vdash_S K\alpha$;

(2') $\vdash_S K(\alpha \supset \beta) \supset (K\alpha \supset K\beta)$;

(3') $\vdash_S K\alpha \supset KK\alpha$.

При условиях (1') – (3') плюс (4) утверждение «$\vdash_S \neg K\bot$, только если $\vdash_S \bot$» ложно. Но это означает, что нарушается Вторая теорема о неполноте. Что может быть причиной этого феномена?

Поскольку оператор K является обобщенным оператором, он может иметь свойство редуцируемости, которое проявляется при итерации операторов: в этом случае выражение $KK\alpha$ эквивалентно выражению $K\alpha$. Это означает, что $K\alpha$ переходит в α, и тогда обычная логика (условие обоснованности плюс нормальность) дает нам условия (1') – (3') плюс утверждение $\vdash_S \neg K\bot$. Тогда получается, что «$\vdash_S \neg K\bot$, только если $\vdash_S \bot$» и «$\vdash_S \neg K\bot$» дают «$\vdash_S \bot$». Другими словами, если система S удовлетворяет обычной логике с условием (4), тогда S противоречива. Но это явно противоречит фактам, например в случае PA. Неудача в попытке доказать Вторую теорему при редуцируемых операторах состоит в «сбое» применения Диагональной леммы, лежащей в основе доказательства. Дело в том, что лемма «$\vdash_S \alpha \equiv \Phi(\ulcorner \alpha \urcorner)$» не дает нужного α, потому что оно существует при редуцируемом операторе только в случае противоречивости S [8. P. 85–133].

Таким образом, решающим обстоятельством является введение в рассмотрение редуцирующих операторов, которые, с первого взгляда, нарушают Вторую теорему о неполноте. Но откуда берется уверенность в том, что в модализированной формулировке Второй теоремы Геделя о неполноте мы имеем итерацию операторов? Такая идея явно заимствована из формулировки Второй теоремы на обыденном языке для понимания ее содержания [11].

Так, одна из подобного рода формулировок может быть представлена в следующем виде:

(*) Если в PA недоказуемо, что $0 = 1$, тогда в PA недоказуемо, что в *PA недоказуемо*, что $0 = 1$.

Формулировка Второй теоремы в таком виде, который может считаться содержанием теоремы, скрывает важное обстоятельство. Последняя часть приведенного выше утверждения должна иметь уже формальный вид, а именно, термин «недоказуемо» должен быть представлен отрицанием предиката доказуемости. Тогда Вторая теорема приобретает следующий вид:

(**) Если в PA недоказуемо, что $0 = 1$, тогда в PA недоказуемо, что Bew $(\neg (\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$.

Если бы Bew $(\neg (\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ было единственным представлением концепции непротиворечивости или же все другие преставления были бы в некотором смысле эквивалентны, тогда никакого различия (*) и (**) не было бы. Но при наличии девиантных формализаций концепции непротиворечивости эквивалентности нет, а это значит, что нельзя говорить об итерации одних и тех же операторов. Это обстоятельство ставит под сомнение саму идею Уильямсона, что единственной причиной интенсиональности является наличие разных условий на итерированные операторы.

По-видимому, мы все-таки сталкиваемся с более общей проблемой формализации математических понятий, которая включает перевод неформальных формулировок в формальный вид. Другими словами, можно говорить о трех «испостасях» концепции непротиворечивости. Во-первых, это формулировка результата в обыденном языке, в которой излагается результат, полученный при доказательстве теоремы. Во-вторых, это представление теоремы в формальном языке. Наконец, это представление доказуемости этой теоремы в конкретной формальной системе. Для случая традиционного изложения Второй теоремы, где концепция непротиворечивости представлена предикатом Con или (Consis), эти три этапа выглядят так:

1. Если теория T непротиворечива, тогда в T не может быть доказана ее непротиворечивость.

2. $\mathrm{Con} \rightarrow \neg \Box\, \mathrm{Con}$.

3. $\mathrm{T} \vdash \mathrm{Con} \rightarrow \neg \Box\, \mathrm{Con}$.

Мы специально отклонились от единообразной нотации в представлении концепции непротиворечивости (Con вместо Bew или K) для того, чтобы подчеркнуть важность наличия девиантных представлений. Но главное обстоятельство заключается в том, что нельзя путать в одном утверждении математического результата (в смысле взаимозаменяемости или экстенсиональной эквивалентности) положения 1, 2 и 3. Преподнесение содержания теоремы как действия одного модального оператора, который итерируется в утверждении теоремы, скрывает подлинный источник интенсиональности Второй теоремы.

Однако вполне может быть, что проблемы с интенсиональностью лежат еще глубже, чем итерирование модальных операторов. Воспринимаемое как должное своего рода вложение теоретико-доказательного контекста в модальное исчисление, например Логику доказательства GL, на самом деле, по мнению А. Виссера, является настоящим чудом.

Свершилось чудо! С одной стороны, мы имеем класс фантастически сложных теорий в логике предикатов, теорий «с достаточно кодирующим потенциалом» типа арифметики Пеано или теории множеств Цермело – Френкеля, с другой – определенные модальные пропозициональные теории поразительной простоты. Мы переводим модальные операторы модальных теорий в определенные специфические, фиксированные предикаты предикатной логики. Эти специальные предикаты содержат астрономическое число символов. Мы интерпретируем пропозициональные переменные как произвольные предикатные логические последовательности. И мы видим, что модальные теории обладают обоснованностью и полнотой при такой интерпретации. Они кодифицируют в точности схематические принципы в пределах их области действия. Так что чудеса все-таки случаются. Наше чудо включает переход в другую субстанцию. Мы осуществляем перевод между языками несравнимой сигнатуры. Модальный язык не содержит кванторов, а предикатные логические теории – модальных операторов. Модальные операторы могут быть переведены в предикаты, потому что мы транссубстанциируем формулы, входящие в область действия модального оператора, в замкнутые термы (нумерические символы), представляющие коды геделевских номеров формул переводимой теории (p. 1)[1].

Можно полагать, что именно такого рода «сложности перевода» и могут быть причиной интенсиональности Второй теоремы Геделя, тем более что они достаточно специфичны, а самое главное – не универсальны. Действительно, приведенный пассаж сопровождается отрезвлением: «Чудо работает не всегда – как и следует ожидать в случае настоящих чудес – мы не получаем аналогичных результатов, если попытаемся работать с предикатными модальными логическими языками».

Разрабатываемая А. Виссером и другими *логика интепретируемости* может дать более общий ответ на подлинные причины интенсиональных феноменов [12]. В применении к теме данной статьи это помогло бы дать ответ на два кардинальных вопроса: прежде всего, как математический дискурс переводится в разговор о формальных теориях (в нашей терминологии, это переход от первой ипостаси ко второй), в которых теоремы о формализмах используются для мотивированных заключений собственно математического толка. И далее, в каком смысле понятие непротиворечивости выражается в этом формализме (переход от второй ипостаси к третьей).

Д. Ауэрбах считает, что не менее значим обратный переход от математической теоремы к ее философскому осмыслению, которое в значительной степени мотивирует поиски интенсиональности. Типично философская интерпретация Второй теоремы Геделя утверждает, что никакая достаточно сильная формальная система не может доказать своей собственной непротиворечивости. При этом остается неясным, какой смысл придается понятию непротиворечивости и какими средствами оно эксплицируется. Ауэрбах уточняет эти вопросы, говоря о двух тезисах:

(PET – Positive Expressibility Thesis): Невыводимое (в теории T) предложение Второй теоремы о неполноте выражает непротиворечивость.

[1] https://pdfs.semanticscholar.org/f78b/795ae47c887516fba9b902d11eba87cb01b0.pdf

(NET – Negative Expressibility Thesis): Никакое выводимое (в теории T) предложение не выражает непротиворечивости [13. P. 79].

Учитывая наличие девиантных определений непротиворечивости, можно сказать, что NET не выглядит вполне обоснованным тезисом. Больше того, М. Детлефсен представил аргументацию, что этот тезис не может быть обоснован [14]. Его аргументация касается как раз обоснованности условий выводимости Гильберта – Бернайса. В частности, он рассматривает вытекающий из этих условий принцип

Если $\vdash_T p$, тогда $\vdash_T \mathrm{Bew}(\ulcorner p \urcorner)$

и его формализацию

$T \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner p \urcorner) \rightarrow \mathrm{Bew}\,[(\ulcorner \mathrm{Bew}(\ulcorner p \urcorner) \urcorner)]$.

Последнее выражение имеет модальный аналог $\vdash \Box p \rightarrow \Box\Box p$. Детлефен не считает, что оно является необходимым в качестве условия корректной выводимости предикатов [13. P. 80].

Мы видим, что опять-таки итерирование модальных операторов оказывается одной из причин интенсиональности Второй теоремы о неполноте. Эта теорема вызвала к жизни не только значительные модификации теории доказательства, но и проложила мост к пониманию путей от неформальной математики к формализации ключевых понятий, играющих основную роль в философии математики.

Литература

1. *Feferman S.* Arithmetization of Metamathematics in a General Setting // Fundamenta Mathematicae. 1960. Vol. 49. P. 35–92.

2. *Kreisel G.* On the Problem of Henkin // Proceedings of Netherland Academy of Science. 1953. Vol. 56. P. 405–406.

3. *Detlefsen M.* On Interpreting Gödel's Second Incompleteness Theorem // Journal of Philosophical Logic. 1979. Vol. 8. P. 297–315.

4. *Auerbach D.* Intensionality and the Gödel Theorem // Philosophical Studies. 1985. Vol. 48. P. 337–351.

5. *Smith P.* An Introduction to Gödel's Theorems. Second Edition. Cambridge : Cambridge University Press, 2013.

6. *Kreisel G.* Gödel's Excursion into Intuitionistic Logic // Gödel Remembered / ed. P. Weingartner, L. Schmetterer. Napoli : Bibliopolis, 1987. P. 65–179.

7. *Boolos G.* The Logic of Provability. Cambridge : Cambridge University Press, 1996.

8. *Williamson T.* Iterated Attitudes // Philosophical Logic / ed. T. Smiley. Oxford : Oxford University Press, 1998. P. 85–133.

9. *Boolos G.* Gödel's Second Incompleteness Theorem Explained in Words of One Syllable // Boolos G. Logic, Logic, and Logic. Cambridge : Harvard University Press, 1998. P. 411–414.

10. *Smorynski C.* The Development of the Self-Reference: Lob's Theorem // Perspectives on the History of Mathematical Logic / ed. T. Drucker. Berlin : Birkhauser, 1991. P. 110–133.

11. *Edgington D.* Williamson on Iterated Attitudes // Philosophical Logic / ed. T. Smiley. Oxford : Oxford University Press, 1998. P. 135–158.

12. *Visser A.* The formalization of interpretability // Studia Logica. 1991. Vol. 50 (1). P. 81–105.

13. *Auerbach D.* How to Say Things with Formalisms // Proof, Logic and Formalization / ed. M. Detlefsen. London : Routledge, 1992. P. 77–93.

14. *Detlefsen M.* Hilbert's Program: An Essay in Mathematical Instrumentalism. Dordrecht : Reidel, 1986.

Vitaly V. Tselishchev, Novosibirsk State University (Novosibirsk, Russian Federation); Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Novosibirsk, Russian Federation).

E-mail: leitval@gmail.com

Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofiya. Sotsiologiya. Politologiya – Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science. 2018. 43. pp. 5–43.

DOI: 10.17223/1998863X/43/3

ITERATED MODAL OPERATORS AND HILBERT-BERNAYS DERIVABILITY CONDITIONS

Keywords: modal operator; incompleteness; intensionality; proof; derivability conditions.

In this paper, the author analyses some methods for weakening the universality of the Hilbert-Bernays derivability conditions associated with the application of modal logic to the theory of proof, in particular, in the proof of Gödel’s second incompleteness theorem. The phenomenon of intensional non-equivalence of combinations of modal operators is considered as an explanation of the intensional character of Gödel’s second theorem. It is shown that the cause of the appearance of deviant concepts of consistency of a formal system is the ambiguous translation of informal mathematical concepts into a formal presentation, as well as the effects of translation of formal theories with different signatures from one to another.

References

1. Feferman, S. (1960) Arithmetization of Metamathematics in a General Setting. *Fundamenta Mathematicae*. 49. pp. 35–92. DOI: 10.2307/2269834

2. Kreisel, G. (1953) On a Problem of Henkin’s. *Proceedings of Netherland Academy of Science*. 56. pp. 405–406. DOI: 10.2307/2268627

3. Detlefsen, M. (1979) On Interpreting Gödel’s Second Incompleteness Theorem. Journal of Philosophical Logic. 8. pp. 297–315.

4. Auerbach, D. (1985) Intensionality and the Gödel Theorem. *Philosophical Studies*. 48. pp. 337–351. DOI: 10.1007/BF01305394

5. Smith, P. (2013) *An Introduction to Gödel’s Theorems*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press.

6. Kreisel, G. (1987) Gödel’s Excursion into Intuitionistic Logic. In: Weingartner, P. & Schmetterer, L. (eds) *Gödel Remembered*. Napoli: Bibliopolis. pp. 65–179.

7. Boolos, G. (1996) *The Logic of Provability*. Cambridge: Cambridge University Press.

8. Williamson, T. (1998) Iterated Attitudes. In: Smiley, T. (ed.) *Philosophical Logic*. Oxford: Oxford University Press. p. 85–133.

9. Boolos, G. (1998) *Logic, Logic, and Logic*. Cambridge: Harvard University Press. pp. 411–414.

10. Smorynski, C. (1991) The Development of the Self-Reference: Lob’s Theorem. In: Drucker, T. (ed.) *Perspectives on the History of Mathematical Logic*. Berlin: Birkhauser. pp. 110–133.

11. Edgington, D. (1998) Williamson on Iterated Attitudes. In: Smiley, T. (ed.) *Philosophical Logic*. Oxford: Oxford University Press. p. 135–158.

12. Visser, A. (1991) The formalization of interpretability. *Studia Logica*. 50(1). pp. 81–105. DOI: 10.1007/BF00370389

13. Auerbach, D. (1992) How to Say Things with Formalisms. In: Detlefsen, M. (ed.) *Proof, Logic and Formalization*. London: Routledge. pp. 77–93.

14. Detlefsen, M. (1986) *Hilbert’s Program: An Essay in Mathematical Instrumentalism*. Dordrecht: Reidel.