УДК 512.64 DOI 10.17223/2226308X/11/2

ВЕСОВЫЕ СВОЙСТВА ПРИМИТИВНЫХ МАТРИЦ

С. Н. Кяжин

Для неотрицательных матриц порядка $n > 2$ представлены результаты, характеризующие зависимость свойства примитивности от веса (количества положительных элементов) матрицы: 1) любая матрица веса $k \leqslant n$ непримитивная; 2) для $k = n+1, \ldots, n^2-n+1$ существует и непримитивная матрица веса k, и примитивная матрица веса k с экспонентом γ, где $n+2\lfloor\sqrt{2(n-1)}\rfloor \leqslant \gamma+k \leqslant n^2-n+3$; 3) любая матрица веса $k = n^2-n+2, \ldots, n^2-1$ примитивная, её экспонент $\gamma = 2$. Установлено, что при возведении в степень некоторых примитивных матриц вес степеней матрицы изменяется немонотонно.

Ключевые слова: *примитивная матрица, экспонент матрицы, вес матрицы.*

Введение

Неотрицательная матрица A называется примитивной, если существует такое натуральное число γ, что для любого $t \geqslant \gamma$ матрица A^t является положительной. Наименьшее такое γ называется экспонентом матрицы A и обозначается $\exp A$.

Количество положительных элементов неотрицательной матрицы A порядка n назовём весом матрицы A и обозначим через $\|A\|$.

1. Зависимость свойства примитивности от веса матрицы

Примитивная матрица называется минимальной, если после замены любого положительного элемента нулём она не является примитивной. Такие матрицы представляют интерес с точки зрения экономной реализации систем, описываемых с помощью примитивных матриц. В [1, 2] исследованы некоторые свойства минимальных примитивных матриц, в том числе связанные с весом матрицы. В частности, в [2] для любой неотрицательной матрицы A порядка $n > 3$ показано:

а) любая примитивная матрица A веса $n+1$ является минимальной;

б) для любого $k \in \{n+2, \ldots, n^2\}$ существует неминимальная примитивная матрица A веса k;

в) для любого $k \in \{n+2, \ldots, 2n-3\}$ существует минимальная примитивная матрица A веса k.

Следующая теорема характеризует связь веса и экспонента неотрицательных матриц, в том числе минимальных примитивных матриц.

Теорема 1. Пусть A — неотрицательная матрица порядка $n > 2$. Тогда:

а) любая матрица A веса $k \leqslant n$ непримитивная, для любого $k \in \{n+1, \ldots, n^2-n+1\}$ существует непримитивная матрица A веса k;

б) любая матрица A веса $k \in \{n^2-n+2, \ldots, n^2-1\}$ является примитивной, при этом $\exp A = 2$, для любого $k \in \{2n-1, \ldots, n^2-n+1\}$ существует такая примитивная матрица A веса k, что $\exp A = 2$;

в) для любого $k \in \{n+1, \ldots, n^2-n+1\}$ существует такая примитивная матрица A веса k, что $n+2\lfloor\sqrt{2(n-1)}\rfloor \leqslant \exp A + \|A\| \leqslant n^2-n+3$.

2. Монотонность зависимости веса степени матрицы от показателя степени

Множество неотрицательных матриц разбивается на 2 класса: для *первого класса* свойство монотонности зависимости веса степени матрицы от показателя степени выполняется, для *второго класса* — не выполняется. Критерий такого разбиения пока не установлен, его определение является перспективной задачей. Установлен ряд свойств.

Вычислительный эксперимент показал, что для всех примитивных матриц порядка $n \leqslant 4$ верна гипотеза о монотонной зависимости веса примитивной матрицы от её степени. Однако уже для $n = 5$ гипотеза опровергается.

Обозначим: U — матрица порядка n, состоящая из положительных элементов; $U^{\rightarrow}_{(i,j)}$ ($U^{\downarrow}_{(i,j)}$) — матрица порядка n, где в i-й строке (i-м столбце) все элементы, кроме j-го, положительные, остальные элементы нулевые; $E_{(i,j)}$ — матрица порядка n, где элемент с номером (i,j) положительный, остальные элементы нулевые.

Теорема 2. Пусть для матрицы A порядка $n > 4$ выполнено одно из условий:

а) $A = U^{\rightarrow}_{(i,i)} + U^{\downarrow}_{(j,j)} + E_{(j,i)}$ для некоторых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$;

б) $A = U^{\rightarrow}_{(i,i)} + U^{\downarrow}_{(j,j)} + E_{(j,i)} + E_{(p,q)}$ для некоторых $i, j, p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, $p = j$, $q \neq i, j$ или $q = i$, $p \neq i, j$;

в) $A = U^{\rightarrow}_{(i,i)} + U^{\downarrow}_{(i,i)} + E_{(p,q)}$ для некоторых $i, p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $p, q \neq i$;

г) $A = U^{\rightarrow}_{(i,i)} + U^{\downarrow}_{(i,i)} + E_{(p,q)} + E_{(r,s)}$ для некоторых $i, p, q, r, s \in \{1, \ldots, n\}$, $p, q \neq i$, $r = p$, $s \neq i, q$ или $s = q$, $r \neq i, p$.

Тогда A примитивная, $\gamma = \exp A = 5$ для случаев п. а, б, $\gamma = 4$ для случаев п. в, г; существует такое $t < \gamma$, что неравенство $\|A^t\| \leqslant \|A^{t+1}\|$ неверно.

Замечание 1. По результатам вычислительного эксперимента установлено, что для $n = 5$ указанные в теореме 2 классы полностью покрывают множество примитивных матриц порядка n, для которых свойство монотонности веса нарушается.

При $n \geqslant 6$ имеются другие классы. Например, значения весов матриц A_1^t, $t = 1, \ldots, 9$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

образуют последовательность $\{11, 12, 22, 21, 20, 30, 31, 30, 36\}$.

Используем отношение частичного порядка на множестве неотрицательных матриц порядка n. Пусть $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, положим $A \leqslant B$ тогда и только тогда, когда $a_{i,j} \leqslant b_{i,j}$ для всех пар (i,j).

Опишем частный класс матриц первого класса.

Утверждение 1. Если $A > P$, где P — некоторая подстановочная матрица, то $\|A^t\| \leqslant \|A^{t+1}\|$, $t = 1, 2, \ldots$

Замечание 2. Обратное утверждение в общем случае неверно. Например, значения весов матриц A_2^t, $t = 1, \ldots, 4$, где

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

образуют последовательность $\{12, 17, 32, 36\}$, однако не существует такой подстановочной матрицы P, что $A_2 > P$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бар-Гнар Р. И., Фомичев В. М.* О минимальных примитивных матрицах // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2014. №7. С. 7–9.
2. *Фомичев В. М.* Свойства минимальных примитивных орграфов // Прикладная дискретная математика. 2015. №2(28). С. 86–96.

УДК 519.226, 519.244.3, 519.244.8 DOI 10.17223/2226308X/11/3

ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О ВЛОЖЕНИИ С ДОПУСКОМ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Н. М. Меженная

Последовательность X является подпоследовательностью с допуском d последовательности Y, если X получается из Y удалением несмежных отрезков не более чем из d знаков. В этом случае говорят, что X может быть вложена в Y с допуском d. Предложен последовательный критерий проверки гипотезы о вложении с допуском d для дискретных случайных последовательностей над конечным алфавитом и изучены его свойства. Вероятность ошибки первого рода (вероятность отклонения верной гипотезы о вложении с допуском) построенного критерия равна нулю. Трудоёмкость предложенной процедуры пропорциональна длине вкладываемой последовательности, что по порядку намного меньше трудоёмкости тотального опробования. Получено выражение для вероятности ошибки второго рода при альтернативной гипотезе о том, что рассматриваемые дискретные последовательности образованы независимыми в совокупности случайными величинами с равномерными распределениями на конечном алфавите.

Ключевые слова: *плотное вложение, вложение с допуском, последовательный критерий, гипотеза о независимости, вероятности ошибок первого и второго рода, дискретная случайная последовательность.*

Введение

Пусть $X_n = (x_1, \ldots, x_n)$ и $Y_m = (y_1, \ldots, y_m)$ — последовательности элементов множества $A_N = \{0, \ldots, N-1\}$, $N \geqslant 2$, длин n и $m \geqslant 1 + (d+1)(n-1)$ соответственно. Последовательность X_n может быть *вложена с допуском* $d \geqslant 1$ в начало последовательности Y_m, если существуют такие натуральные числа

$$1 = j_1 < j_2 < \ldots < j_n \leqslant m, \quad j_{k+1} - j_k \in \{1, 2, \ldots, d+1\}, \quad k = 1, \ldots, n-1, \qquad (1)$$

что $x_k = y_{j_k}$, $k = 1, \ldots, n$. В этом случае X_n является *подпоследовательностью* Y_m с допуском d. Вложение с допуском $d = 1$ в [1] названо *плотным*.

В [1] найдена верхняя оценка для вероятности того, что заданная двоичная последовательность может быть плотно вложена в последовательность независимых двоичных случайных величин с равномерными распределениями. В [2] этот результат обобщен на последовательности со значениями в любом конечном алфавите. Получены неулучшаемые нижняя и верхняя оценки для вероятности плотного вложения и указаны классы последовательностей, на которых они достигаются. Обобщение понятия плотного вложения на вложение с допуском проведено в [3]. Задача о вложениях двоичных последовательностей и её практическое применение рассмотрены в [4, 5].