ЛИТЕРАТУРА

1. *Colon-Reyes O., Laubenbacher R., and Pareigis B.* Boolean monomial dynamical systems // Ann. Combinatorics. 2004. V. 8. P. 425–439.
2. *Салий В. Н.* Об одном классе конечных динамических систем // Вестник Томского государствеtherенного университета. Приложение. 2005. № 14. С. 23–26.
3. *Barbosa V. C.* An Atlas of Edge-Reversal Dynamics. London: Chapman&Hall/CRC, 2001.
4. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, Физматлит, 1997.
5. *Власова А. В.* Исследование эволюционных параметров в динамических системах двоичных векторов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2009614409, выданное Роспатентом. Заявка № 2009613140. Дата поступления 22 июня 2009 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 20 августа 2009 г.
6. *Жаркова А. В.* Аттракторы в конечных динамических системах двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм // Прикладная дискретная математика. 2014. № 3(25). С. 58–67.
7. *Жаркова А. В.* Об аттракторах в конечных динамических системах ориентаций полных графов // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2016. № 9. С. 112–114.

УДК 519.17 DOI 10.17223/2226308X/11/34

О МИНИМАЛЬНОМ РЁБЕРНОМ 1-РАСШИРЕНИИ ГИПЕРКУБА

А. А. Лобов, М. Б. Абросимов

Граф G^* с n вершинами называется минимальным рёберным k-расширением n-вершинного графа G, если G вкладывается в каждый граф, получающийся из G^* удалением любых его k рёбер, и G^* имеет при этом минимально возможное число рёбер. Гиперкуб Q_n — это регулярный 2^n-вершинный граф порядка n, представляющий собой декартово произведение n полных 2-вершинных графов K_2. Предлагается семейство графов Q_n^*, представители которого при $n > 1$ являются минимальными рёберными 1-расширениями соответствующих гиперкубов. Вычислительный эксперимент показывает, что при $n \leqslant 4$ эти расширения являются единственными с точностью до изоморфизма.

Ключевые слова: *граф, гиперкуб, рёберная отказоустойчивость, минимальное рёберное 1-расширение.*

Введение

Определение 1. Декартовым произведением $G_1 \times G_2$ двух графов $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называется граф $G = (V, \alpha)$, такой, что $V = V_1 \times V_2$, вершины (u_1, u_2) и (v_1, v_2) смежны в G тогда и только тогда, когда либо $u_1 = v_1$ и u_2, v_2 смежны в G_2, либо $u_2 = v_2$ и u_1, v_1 смежны в G_1.

Определение 2. Гиперкубом Q_n (n-кубом) называется граф, являющийся декартовым произведением n полных 2-вершинных графов K_2.

Можно дать рекурсивное определение: одномерным гиперкубом Q_1 назовём граф K_2; n-мерным гиперкубом при $n > 1$ будем называть граф $Q_n = K_2 \times Q_{n-1}$, $n > 1$.

Гиперкуб Q_n — это регулярный 2^n-вершинный граф порядка n. Семейство гиперкубов достаточно хорошо изучено [1].

Вершины гиперкуба можно пометить двоичными векторами таким образом, чтобы расстояние между каждыми двумя вершинами равнялось дистанции Хэмминга между их метками. Это свойство непосредственно следует из построения гиперкуба.

Топология гиперкуба является популярной схемой соединения параллельных процессоров [2], в том числе и в отказоустойчивых системах типа IBM Blue Gene/Q [3]. Особый интерес с точки зрения отказоустойчивости представляет 4-куб Q_4, или тессеракт. Для исследования полной отказоустойчивости элементов Дж. Хейз предложил модель, основанную на графах [4], которую позднее расширил на случай отказов связей [5]. Оптимальные k-отказоустойчивые реализации гиперкубов Q_n при $n > 3$ неизвестны. На практике используются тривиальные отказоустойчивые реализации с одним избыточным элементом, соединённым со всеми остальными. Далее предложена оптимальная рёберная 1-отказоустойчивая реализация гиперкуба Q_n при $n > 1$.

1. Рёберные расширения

Определение 3. Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным рёберным k-расширением* n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является рёберным k-расширением графа G, то есть граф G вкладывается в каждый граф, получающийся из G^* удалением любых его k рёбер;
2) граф G^* содержит n вершин, то есть $|V^*| = |V|$;
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Если рассматривать простые графы, то минимальное рёберное k-расширение существует не у всех графов. Например, полные графы K_n не имеют минимальных рёберных k-расширений ни при каких натуральных k. Гиперкуб Q_1 соответственно тоже не имеет минимального рёберного k-расширения ни при каких натуральных k. У графа может быть несколько неизоморфных минимальных рёберных k-расширений. Задача поиска минимальных рёберных k-расширений является вычислительно сложной [6].

В [3] доказывается лемма, которая позволяет охарактеризовать вид минимального рёберного k-расширения и оценить минимально возможное количество дополнительных рёбер в нём.

Лемма 1 [3]. Если минимальная степень вершины графа G есть $d > 0$, то его минимальное рёберное k-расширение не содержит вершин степени ниже $d + k$.

2. Минимальное рёберное 1-расширение гиперкуба

Удалось найти схему построения минимального рёберного 1-расширения для любого гиперкуба Q_n при $n > 1$.

Определим семейство графов Q_n^*. Граф Q_n^* при $n > 1$ получается путём соединения каждой вершины гиперкуба Q_n с наиболее удалённой от неё вершиной. Если вершина имеет код k, то она соединяется с вершиной, код которой получается из k поразрядной инверсией.

Теорема 1. Для n-мерного гиперкуба Q_n при $n > 1$ граф Q_n^* является минимальным рёберным 1-расширением.

Легко убедиться, что минимальное рёберное 1-расширение для гиперкуба Q_2 единственно с точностью до изоморфизма: граф Q_2^* изоморфен графу K_4. Аналитически доказано, что граф Q_3^* является единственным с точностью до изоморфизма минимальным рёберным 1-расширением для гиперкуба Q_3. В общем случае единственность минимального рёберного 1-расширения дли гиперкуба Q_n при $n > 3$ пока доказать не удалось. Для гиперкуба Q_4 проведён вычислительный эксперимент по поиску всех неизоморфных минимальных рёберных 1-расширений. Из теоремы 1 и леммы 1 следует, что любое минимальное рёберное 1-расширение гиперкуба Q_n при $n > 1$ есть регулярный граф порядка $n + 1$. С помощью программы genreg [7] были построены все 16-вершинные регулярные графы порядка 5 и проверено, являются ли они 1-расширениями гиперкуба Q_4. Найдено единственное расширение — граф Q_4^*. Вычисления проводились с использованием кластера высокопроизводительных вычислений ПРЦ НИТ СГУ.

Единственные с точностью до изоморфизма минимальные рёберные 1-расширения гиперкубов Q_2, Q_3 и Q_4 изображены на рис. 1.

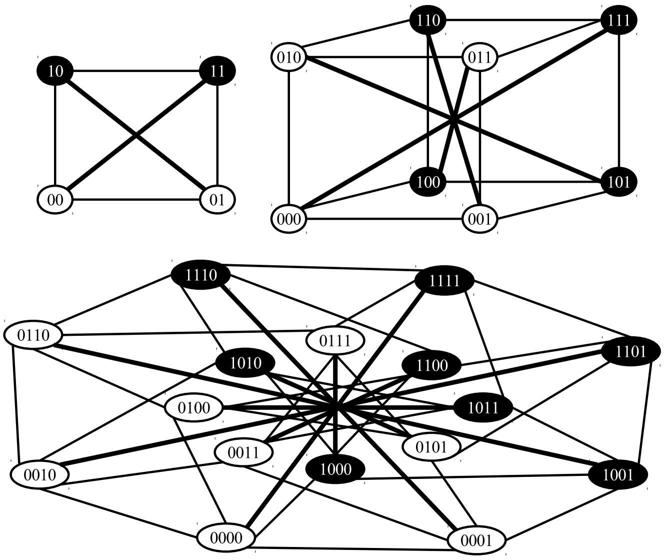

Рис. 1. Минимальные рёберные 1-расширения для Q_2, Q_3 и Q_4

ЛИТЕРАТУРА

1. *Harary F., Hayes J. P., and Wu H.-J.* A survey of the theory of hypercube graphs // Computers & Math. Appl. 1988. V. 15. P. 277–289.
2. *Padua D. A.* Encyclopedia of Parallel Computing. N.Y.: Springer, 2011.
3. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.
4. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C.25. No. 9. P. 875–884.
5. *Harary F. and Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.
6. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. № 5(88). С. 643–650.
7. *Meringer M.* Fast generation of regular graphs and construction of cages // J. Graph Theory. 1999. V. 30. P. 137–146.