ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.1

ПЕРИОДЫ φ-ГРАФОВ

Н. А. Артемова

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

Связный граф с $n \geqslant 3$ вершинами, полученный из контура C_n путём переориентации некоторых его дуг, называется многоугольным графом. Рассмотрим некоторую биекцию φ между множеством стоков и множеством источников многоугольного графа G. Присоединим к G все дуги вида $v\varphi(v)$, где v — сток. Полученный сильносвязный граф будем называть φ-графом. Рассматривая последовательность различных матриц $A, A^2, A^3, \ldots$ (степеней булевой матрицы A), заметим, что эта последовательность конечна. Если A^m — её последний элемент, то $A^{m+1} = A^l$ для некоторого $l \leqslant m$. Число $\mathrm{ind}(A) = l - 1$ называется индексом матрицы A, а число $\mathrm{p}(A) = ((m+1) - l)$ — её периодом. Для графа G с матрицей смежности A положим $\mathrm{ind}(G) = \mathrm{ind}(A)$ и $\mathrm{p}(G) = \mathrm{p}(A)$ (индекс и период графа). Вычислены значения периодов всех неизоморфных φ-графов с числом вершин до 9. Рассчитаны максимальные периоды φ-графов с числом вершин до 17. Доказана теорема, позволяющая вычислить период любого φ-графа. Найдено значение максимального периода n-вершинных φ-графов при чётном n и дана оценка максимального периода при нечётном n.

Ключевые слова: *многоугольный граф, примитивность, φ-граф, индекс графа, период графа.*

DOI 10.17223/20710410/41/5

PERIODS OF φ-GRAPHS

N. A. Artemova

Saratov State University, Saratov, Russia

E-mail: NatalyaKorArt@ya.ru

A connected graph with $n \geqslant 3$ vertices obtained from the circuit C_n by reorienting some of its arcs is called a polygonal graph. We consider a bijection φ between the set of sinks and the set of sources of a polygonal graph G. We attach to G all arcs of type $v\varphi(v)$ where v is a sink. The resulting strongly connected graph is called a φ-graph. When we compute successive powers of a binary Boolean matrix A, the sequence starts to repeat itself at some moment, i.e. we get $A^{m+1} = A^l$ for some $l \leqslant m$. The number $\mathrm{ind}(A) = l - 1$ is called an index, and the value $\mathrm{p}(A) = ((m+1) - l)$ is the period of the matrix A. For the graph G with adjacency matrix A, let $\mathrm{ind}(G) = \mathrm{ind}(A)$ and $\mathrm{p}(G) = \mathrm{p}(A)$ (index and period of the graph). We calculate the values of periods of all not isomorphic φ-graphs with a number of vertices up to nine and the maximal periods of φ-graphs with a number of vertices up to seventeen. We prove the theorem that allows to compute the period of any φ-graph. Namely, the period of a φ-graph is equal to the greatest common divisor of the lengths of its circuits. The value of the maximal period for n-vertex φ-graph with even n equals $n/2+1$, and the maximal period of a φ-graph with an odd n is less than $\lfloor n/2 \rfloor + 1$. From the theorem for the maximal values of the periods, we obtain some corollaries. Particularly, according to Corollary 1, among the all n-vertex φ-graphs with even n, φ-graphs obtained from the polygonal graphs with one sink and one source have the maximal period.

Keywords: *polygonal graph, primitivity, φ-graph, index and period of graph.*

Введение

Ориентированный граф (далее граф) — это пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество, а $\alpha \subseteq V^2$ — бинарное отношение на множестве V. Отношение α называют отношением смежности, а соответствующую ему двоичную булеву матрицу — матрицей смежности графа G. Элементы множества V называются вершинами графа, а пары, входящие в отношение смежности α, — его дугами. Если $(u, v) \in \alpha$, то говорят, что вершина u является началом дуги (u, v), а вершина v — её концом. При $u = v$ получается петля (u, u). Считаем, что каждая вершина графа инцидентна некоторой дуге, т. е. является началом или концом некоторой дуги.

Говорят, что вершина v достижима из вершины u за $k \geqslant 1$ шагов, если существует последовательность примыкающих дуг (маршрут) $(w_0, w_1), (w_1, w_2), \ldots, (w_{k-1}, w_k)$, где $w_0 = u$ и $w_k = v$. Если A — матрица смежности орграфа G, то последнее определение означает, что на пересечении строки, соответствующей элементу u, и столбца, соответствующего элементу v, в матрице-степени A^k стоит 1.

Маршрут с неповторяющимися вершинами $C_n = v_1 v_2 \ldots v_n v_1$, в котором начало и конец совпадают, называется n-элементным контуром.

Граф $G = (V, \alpha)$ по определению является функциональным, если его отношение смежности функционально (т. е. из каждой вершины исходит точно одна дуга).

Функциональный граф называется связным, если он содержит точно один контур. Под высотой вершины в функциональном графе понимается расстояние от неё до контура, т. е. минимальная из длин цепей с началом в данной вершине и концом в вершине, принадлежащей контуру.

Под конечной динамической системой понимается пара (S, δ), где S — конечное непустое множество состояний системы, $\delta : S \to S$ — отображение множества состояний в себя, называемое эволюционной функцией системы. Таким образом, каждой конечной динамической системе сопоставляется карта, представляющая собой граф с множеством вершин S и дугами, проведёнными из каждой вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$. Этот граф является функциональным. Компоненты связности графа, задающего динамическую систему, называются её бассейнами. Получается, что каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контуры, в свою очередь, называются предельными циклами, или аттракторами. Индексом состояния называют его расстояние до аттрактора, а периодом — длину принимающего аттрактора.

Связный граф с $n \geqslant 3$ вершинами, полученный из контура C_n путем переориентации некоторых его дуг, называется многоугольным графом.

Граф называется примитивным, если существует целое число $r \geqslant 1$, такое, что каждая вершина графа достижима из любой вершины за r шагов (иначе говоря, если в матрице A^r все элементы равны 1). Таким образом, каждый примитивный граф является сильносвязным (любые две вершины взаимно достижимы), но обратное не верно.

1. Об индексах и периодах

Пусть A — булева матрица. Рассматривая последовательность различных матриц $A, A^2, A^3, \ldots,$ заметим, что эта последовательность конечна и что, если A^m — её последний элемент, то $A^{m+1} = A^l$ для некоторого $l \leqslant m$. Число $\mathrm{ind}(A) = l - 1$ называется индексом матрицы A, а число $\mathrm{p}(A) = ((m+1) - l)$ — её периодом. Так определённые индекс и период матрицы A — это её индекс и период в динамической системе булевых матриц соответствующей размерности с эволюционной функцией $\delta(A^k) = A^{k+1}$. Для графа G с матрицей смежности A положим $\mathrm{ind}(G) = \mathrm{ind}(A)$ и $\mathrm{p}(G) = \mathrm{p}(A)$ (индекс и период графа). Пару $t(G) = (\mathrm{ind}(G), \mathrm{p}(G))$ назовём типом графа G. Об индексах и периодах графов см. [1].

Ряд работ посвящён двоичным булевым матрицам с минимально возможным типом $(0, 1)$ (идемпотентные матрицы) [2]. Индексы и периоды относятся к числу важнейших параметров, связываемых с графами. Решению проблем, связанных с этими параметрами, посвящены работы [1 – 6]. Об индексах состояний в динамических системах, связанных с графами, см. [7 – 11]. Не для всех графов индексы и периоды аналитически вычислены. Известны, например, следующие результаты.

Теорема 1 [3]. Индекс функционального графа равен уменьшенной на единицу максимальной из высот его элементов, а период — наименьшему общему кратному длин его контуров.

Теорема 2 [3]. Бесконтурный граф имеет индекс, равный максимальной из длин его цепей, и период, равный 1.

Каковы максимальные значения индекса и периода для n-вершинного графа? Для периода точная формула неизвестна, асимптотической оценкой является $(n \ln n)^{1/2}$ [6]. Что касается индекса, то имеются компьютерные вычисления [4], которые показывают, что для графа с n вершинами справедливо неравенство $\mathrm{ind} \leqslant (n-1)^2$.

2. О периодах φ-графов

Вершина графа называется источником, если в неё не входит ни одна дуга, и стоком, если из неё не исходит ни одна дуга. Количество источников в многоугольном графе равно количеству стоков. Пусть φ — некоторая биекция между множеством стоков и множеством источников данного многоугольного графа G. Если к G присоединить все дуги вида $v\varphi(v)$, где v — сток, получится сильносвязный граф, назовём его φ-графом.

Конструкция φ-графа предложена в [12] в связи с проблемой описания минимальных примитивных расширений для многоугольных графов. В частности, доказано, что любой φ-граф, полученный из данного многоугольного графа, является его минимальным сильносвязным расширением.

В каждом многоугольном графе есть по крайней мере один источник. Такая вершина имеет степень исхода 2. Эту степень она сохранит и в любом φ-графе, связанном с исходным многоугольным графом. Следовательно, φ-графы не являются функциональными графами и к ним неприменима теорема 1. Будучи сильносвязными, φ-графы не удовлетворяют и условию теоремы 2, так что вопрос об индексах φ-графов требует отдельного рассмотрения.

Был проведен вычислительный эксперимент, в ходе которого были найдены все неизоморфные φ-графы размерности от 3 до 9 вершин и вычислены их периоды. Получены следующие результаты:

— $n = 3$. Существует один φ-граф с 3 вершинами. Он имеет период 1.
— $n = 4$. Есть всего три неизоморфных φ-графа с 4 вершинами. Два графа имеют период 2 и один — период 3.
— $n = 5$. Есть всего четыре неизоморфных φ-графа с 5 вершинами. Данные графы имеют период 1.
— $n = 6$. Есть всего одиннадцать неизоморфных φ-графов с 6 вершинами. Три графа имеют период 1, семь графов имеют период 2 и один граф — период 4.
— $n = 7$. Есть всего девятнадцать неизоморфных φ-графов с 7 вершинами. Восемнадцать графов имеют период 1 и один граф — период 3.
— $n = 8$. Есть всего сорок семь неизоморфных φ-графов с 8 вершинами. Двадцать два графа имеют период 1, двадцать один граф — период 2, два графа — период 3 и по одному графу имеют периоды 4 и 5.
— $n = 9$. Есть всего сто четырнадцать неизоморфных φ-графов с 9 вершинами. Сто тринадцать графов имеют период 1 и один граф имеет период 3.

Вычислены максимальные периоды графов каждой размерности до 17 вершин (таблица).

Максимальные периоды φ-графов

Размерность	Максимальный период
3	1
4	3
5	1
6	4
7	3
8	5
9	3
10	6
11	5
12	7
13	5
14	8
15	7
16	9
17	7

На основе полученных данных сформулировано следующее утверждение.

Теорема 3. Период φ-графа равен наибольшему общему делителю длин его контуров.

Доказательство. Пусть дан φ-граф G с матрицей смежности A; $C_1, C_2, \ldots, C_t$ — множество всех контуров графа G; $l_1, l_2, \ldots, l_t$ — соответствующие длины контуров.

1) Если граф G примитивен, то по определению существует целое число $r \geqslant 1$, такое, что в матрице A^r все элементы равны 1, т. е. $A^r = A^{r+1}$. По определению период графа G равен $(r+1) - r$, т. е. $\mathrm{p}(G) = 1$. По критерию примитивности наибольший общий делитель длин всех контуров примитивного графа равен 1. Таким образом, $\mathrm{p}(G) = 1$, $(l_1, l_2, \ldots, l_t) = 1$. Следовательно, $\mathrm{p}(G) = (l_1, l_2, \ldots, l_t)$.

2) Пусть граф G непримитивен, $\mathrm{p}(G) \neq 1$ и $(l_1, l_2, \ldots, l_t) \neq 1$. Будем обозначать через a_{ij} элемент матрицы смежности A, находящийся на пересечении строки i и столбца j. Элемент a_{ij}^k — аналогичный элемент в матрице-степени A^k.

Если элемент $a_{ij}^k = 1$, то это означает, что в исходной матрице A вершина j достижима из вершины i за k шагов (существует путь длины k из вершины i в вершину j). Если в матрице A^{k_1} элемент $a_{ij}^{k_1}$ равен 1 и в матрице A^{k_2} элемент $a_{ij}^{k_2}$ равен 1 ($k_1 < k_2$), то в матрице A существуют пути длины k_1 и k_2, соединяющие вершины i и j. Так как в φ-графе любые две вершины взаимно достижимы, то длину простого пути из вершины i в вершину j обозначим $k = \min\{k_s : a_{ij}^{k_s} = 1, s = 1, 2, \ldots\}$.

Рассмотрим некоторый путь длины k_s из вершины i в вершину j, где $s = 1, 2, \ldots$ Исходя из структуры φ-графа (в любом φ-графе каждая дуга принадлежит некоторому контуру), имеем, что длина пути из вершины i в вершину j может быть увеличена только за счёт прохождения по некоторому контуру. Таким образом, $k_s = k + (x_1^s l_1 + x_2^s l_2 + \ldots + x_t^s l_t)$, где $x_1^s, x_2^s, \ldots, x_t^s$ — целые неотрицательные числа.

Так как граф G непримитивен, $A^{m+1} = A^l$ для некоторого $l < m$. Для любых вершин i и j графа G, таких, что $a_{ij}^l = a_{ij}^{m+1} = 1$, имеем $l = k + (x_1^l l_1 + x_2^l l_2 + \ldots + x_t^l l_t)$, $(m+1) = k + (x_1^{m+1} l_1 + x_2^{m+1} l_2 + \ldots + x_t^{m+1} l_t)$.

Период $\mathrm{p}(A)$ равен $(m+1) - l$, следовательно, $m + 1 = \mathrm{p}(A) + l$. Таким образом,

$$
\begin{gathered}
\mathrm{p}(A) + l = k + (x_1^{m+1} l_1 + x_2^{m+1} l_2 + \ldots + x_t^{m+1} l_t), \\
l = k + (x_1^l l_1 + x_2^l l_2 + \ldots + x_t^l l_t) = k + (x_1^{m+1} l_1 + x_2^{m+1} l_2 + \ldots + x_t^{m+1} l_t) - \mathrm{p}(A), \\
\mathrm{p}(A) = k + (x_1^{m+1} l_1 + x_2^{m+1} l_2 + \ldots + x_t^{m+1} l_t) - (k + (x_1^l l_1 + x_2^l l_2 + \ldots + x_t^l l_t)), \\
\mathrm{p}(A) = (x_1^{m+1} l_1 + x_2^{m+1} l_2 + \ldots + x_t^{m+1} l_t) - (x_1^l l_1 + x_2^l l_2 + \ldots + x_t^l l_t) = (z_1^p l_1 + z_2^p l_2 + \ldots + z_t^p l_t),
\end{gathered}
$$

где $z_i^p = (x_i^{m+1} - x_i^l)$; x_i — целые неотрицательные числа; z_i — целые числа, $i = 1, 2, \ldots, t$.

Так как $A^l = A^{m+1}$, $A^l = A^{\mathrm{p}(A)+l} = A^{2\mathrm{p}(A)+l} = A^{3\mathrm{p}(A)+l} = \ldots$, то $A^l = A^{\alpha\mathrm{p}(A)+l}$, $\alpha = 1, 2, \ldots$ Следовательно, $\alpha\mathrm{p}(A) = (z_1 l_1 + z_2 l_2 + \ldots + z_t l_t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots$

При $z_1 = 1$, $z_2 = z_3 = \ldots = z_t = 0$ имеем $\alpha_1 \mathrm{p}(A) = l_1$. Аналогично $\alpha_s \mathrm{p}(A) = l_s$, $s = 1, 2, \ldots, t$, т. е. длина любого контура графа G представима в виде $\alpha_i p$, где $p = \mathrm{p}(A)$. Следовательно, период графа G является общим делителем длин его контуров.

Очевидно, что $p \leqslant \min\{l_i : i = 1, 2, \ldots, t\}$. Докажем, что p — наибольший делитель. При $p = \min\{l_i : i = 1, 2, \ldots, t\}$ это очевидно.

Рассмотрим случай, когда $p < \min\{l_i : i = 1, 2, \ldots, t\}$, и докажем, что p — наибольший делитель длин контуров графа G.

От противного. Пусть p — общий делитель длин контуров, но не наибольший. Тогда граф G состоит из контуров вида $l_i = \alpha_i p$, где $\alpha_i = ac_i$, a, c_i — целые числа, $i = 1, 2, \ldots, t$ (т. е. наибольший общий делитель равен ap). Имеем

$$
\begin{gathered}
p = (z_1 l_1 + z_2 l_2 + \ldots + z_t l_t) = (z_1 apc_1 + z_2 apc_2 + \ldots + z_t apc_t), \\
p = ap(z_1 c_1 + z_2 c_2 + \ldots + z_t c_t), \\
1/a = z_1 c_1 + z_2 c_2 + \ldots + z_t c_t,
\end{gathered}
$$

где p, a, c_i, z_i — целые числа. Последнее уравнение имеет решение в целых числах только при $a = 1$. Следовательно, p — наибольший общий делитель длин контуров графа G. ■

Теорема 4. Максимальный период φ-графа с числом вершин n не превышает $\lfloor n/2 \rfloor + 1$, причём эта оценка достигается при чётном n.

Доказательство. n-Вершинный φ-граф состоит из $n + k$ дуг (k — количество стоков/источников в исходном многоугольном графе), а сумма длин его контуров равна $n + 2k$. По теореме 3 $p = \mathrm{p}(G) = (l_1, l_2, \ldots, l_t)$, $p \leqslant \min\{l_i\}$, где l_i — длины контуров графа. Очевидно, что максимальный период $p = \min\{l_i\}$ имеют графы, у которых контур минимальной длины максимален.

При чётном n длина минимального контура будет максимальной при $k = 1$, $t = 2$, $l_1 = l_2 = (n + 2k)/2 = n/2 + k = n/2 + 1$, т. е. граф имеет два контура длины $n/2 + 1$. Следовательно, $p = n/2 + 1$.

При нечётном n гипотетически максимальная длина минимального контура достигается при $k = 1$, $t = 2$, $l_1 = \lfloor n/2 \rfloor + 1$, $l_2 = \lfloor n/2 \rfloor + 2$ и равна l_1. Так как $(\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 2) = 1$, перебрав все возможные длины контуров при $k = 1, 2, \ldots$, получаем, что $\mathrm{p}(G) < \lfloor n/2 \rfloor + 1$. ■

φ-Графы, полученные из многоугольных графов с одним источником и стоком, будем называть φ_1-графами. Такой граф имеет два контура. Из теоремы 4 получаем три следствия.

Следствие 1. Максимальный период среди всех n-вершинных φ-графов при чётном n имеют φ_1-графы.

Следствие 2. Максимальный период n-вершинных φ-графов при чётном n равен $n/2 + 1$.

Следствие 3. Максимальный период n-вершинных φ-графов при нечётном n имеет оценку $\mathrm{p}(G) < \lfloor n/2 \rfloor + 1$.

3. Пояснения

Коэффициенты $z_i = x_i' - x_i''$ — целые числа. Эти коэффициенты могут принимать отрицательные значения (при $x_i'' > x_i'$). Как показано в доказательстве теоремы 3, $p \leqslant \min\{l_i : i = 1, 2, \ldots, t\}$. Случаи $p = \min\{l_i : i = 1, 2, \ldots, t\}$ и $p = 1$ не нуждаются в пояснениях.

Рассмотрим случай $p < \min\{l_i : i = 1, 2, \ldots, t\}$ на примере конкретного φ-графа G (рис. 1) с матрицей смежности A, которая имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

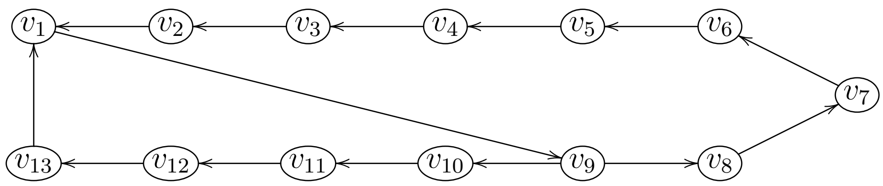

Рис. 1. φ-Граф G с матрицей смежности A

Для данного графа $l = 19$, $\mathrm{ind}(G) = 18$, $\mathrm{p}(G) = 3$, $l_1 = 6$, $l_2 = 9$.

Рассмотрим пути из вершины v_1 в вершину v_3. Элемент $a^k_{1,3}$ матриц A^k равен 1 при $k = 7, 13, 16, 19, 22, \ldots$ Положим $k = 7$, $k_1 = 13$, $k_2 = 16$, $k_3 = 19$, $k_4 = 22$, $\ldots$ Запишем, согласно формулам из теоремы 3, $k_1 = k + x^1_1 l_1 + x^1_2 l_2$. Подставим известные значения k, k_1, l_1, l_2 и вычислим значения коэффициентов x^1_1, x^1_2. Получим $x^1_1 = 1$, $x^1_2 = 0$.

Аналогичные действия выполним и для k_2, k_3, k_4:

$$\begin{aligned}
k_2 &= k + x^2_1 l_1 + x^2_2 l_2, \quad x^2_1 = 0, \quad x^2_2 = 1,\\
k_3 &= k + x^3_1 l_1 + x^3_2 l_2, \quad x^3_1 = 2, \quad x^3_2 = 0,\\
k_4 &= k + x^4_1 l_1 + x^4_2 l_2, \quad x^4_1 = 1, \quad x^4_2 = 1.
\end{aligned}$$

Так как $l = k_3 = k + x^3_1 l_1 + x^3_2 l_2$ и $k_4 = k + x^4_1 l_1 + x^4_2 l_2 = l + p = k_3 + p = k + x^3_1 l_1 + x^3_2 l_2 + p$, то $p = k + x^4_1 l_1 + x^4_2 l_2 - (k + x^3_1 l_1 + x^3_2 l_2) = (x^4_1 - x^3_1) l_1 + (x^4_2 - x^3_2) l_2$, где $x^4_1 = 1$, $x^4_2 = 1$, $x^3_1 = 2$, $x^3_2 = 0$. Получаем $p = (1-2) l_1 + (1-0) l_2 = -l_1 + l_2 = -6 + 9 = 3$. В обозначениях доказательства теоремы 3 имеем $z_1 = (x^4_1 - x^3_1) = -1$ — отрицательный коэффициент.

Заключение

Доказана теорема, позволяющая вычислить период любого φ-графа. Дана оценка максимального периода n-вершинных φ-графов и показана её корректность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Салий В. Н.* Отказоустойчивость и оптимизация дискретных систем с заданными индексом и периодом // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2006. № 17. С. 222–225.
2. *Chaudhuri R. and Mukherdjea A.* Idempotent Boolean matrices // Semigroup Forum. 1980. V. 21. P. 273–282.
3. *Максимов А. А., Салий В. Н.* Индексы и периоды нечетких матриц и графов // Теоретические проблемы информатики и её приложения. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 7. С. 87–95.
4. *Максимов А. А.* Об индексе и периоде нечеткой матрицы. Саратов, 2005. Деп. в ВИНИТИ 20.01.05. № 78-В2005. 11 с.
5. *Бар-Гнар Р. И., Фомичев В. М.* О минимальных примитивных матрицах // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2014. № 7. С. 7–9.
6. *Miller W.* The maximum order of an element of a finite symmetric group // Amer. Math. Monthly. 1987. No. 94. P. 497–506.
7. *Barbosa V. C.* An Atlas of Edge-Reversal Dynamics. London: Chapman&Hall/CRC, 2001. 385 p.
8. *Салий В. Н.* Об одном классе конечных динамических систем // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2005. № 14. С. 23–26.

9. *Власова А. В.* Индексы в динамической системе (B, δ) двоичных векторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11. Вып. 3. С. 116–122.
10. *Жаркова А. В.* Индексы в динамической системе двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями циклов // Прикладная дискретная математика. 2012. № 2. С. 79–85.
11. *Жаркова А. В.* Индексы состояний в динамической системе двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16. Вып. 4. С. 475–484.
12. *Салий В. Н.* Минимальные примитивные расширения ориентированных графов // Прикладная дискретная математика. 2008. № 1. С. 116–119.

REFERENCES

1. *Salii V. N.* Otkazoustoychivost' i optimizatsiya diskretnykh sistem s zadannymi indeksom i periodom [Fault tolerance and optimization of discrete systems with specified index and period]. Vestnik TSU. Prilozhenie, 2006, no. 17, pp. 222–225. (in Russian)
2. *Chaudhuri R. and Mukherdjea A.* Idempotent Boolean matrices. Semigroup Forum, 1980, vol. 21, pp. 273–282.
3. *Maximov A. A. and Salii V. N.* Indeksy i periody nechetkikh matrits i grafov [Indices and periods of fuzzy matrices and graphs]. Theoretical Problems of Computer Science and its Applications. Saratov, Saratov Univ. Press, 2006, vol. 7, pp. 87–95. (in Russian)
4. *Maximov A. A.* Ob indekse i periode nechetkoy matritsy [On the Index and Period of a Fuzzy Matrix]. Saratov, 2005. Dep. v VINITI 20.01.05, no. 78-B2005, 11 p. (in Russian)
5. *Bar-Gnar R. I. and Fomichev V. M.* O minimal'nykh primitivnykh matritsakh [On minimal primitive matrices]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika. Prilozhenie, 2014, no. 7, pp. 7–9. (in Russian)
6. *Miller W.* The maximum order of an element of a finite symmetric group. Amer. Math. Monthly, 1987, no. 94, pp. 497–506.
7. *Barbosa V. C.* An Atlas of Edge-Reversal Dynamics. London, Chapman&Hall/CRC, 2001. 385 p.
8. *Salii V. N.* Ob odnom klasse konechnykh dinamicheskikh sistem [A class of finite dynamical systems]. Vestnik TSU. Prilozhenie, 2005, no. 14, pp. 23–26. (in Russian)
9. *Vlasova A. V.* Indeksy v dinamicheskoy sisteme (B, δ) dvoichnykh vektorov [Indices in dynamical system (B, δ) of binary vectors]. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., 2011, vol. 11, iss 3, pt. 1, pp. 116–122. (in Russian)
10. *Zharkova A. V.* Indeksy v dinamicheskoy sisteme dvoichnykh vektorov, assotsiirovannykh s oriyentatsiyami tsiklov [Indices in dynamic system of binary vectors associated with cycles orientations]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2012, no. 2(16), pp. 79–85. (in Russian)
11. *Zharkova A. V.* Indeksy sostoyaniy v dinamicheskoy sisteme dvoichnykh vektorov, assotsiirovannykh s oriyentatsiyami pal'm [Indices of states in dynamical system of binary vectors associated with palms orientations]. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., 2016, vol. 16, iss 4, pp. 475–484. (in Russian)
12. *Salii V. N.* Minimal'nyye primitivnyye rasshireniya oriyentirovannykh grafov [Minimal primitive extensions of oriented graphs]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2008, no. 1, pp. 116–119. (in Russian)