

ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE

Научный журнал

2018

№ 44

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере
массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.)

Подписной индекс в объединённом каталоге «Пресса России» 44031

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук»,
Высшей аттестационной комиссии

Founder – Tomsk State University

EDITORIAL BOARD

Alexander Gortsev – Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof., Head of the Operation Research Department, Tomsk State University. Tel: +72822529599
Valery Smagin – Deputy Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof. of the Operation Research Department Tomsk State University. Tel: +72822529599
Lyudmila Nezhelskaya – Executive Editor, Doctor. of Sc., Prof. of the Operation Research Department Tomsk State University.
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Sergey Vorobeychikov – Doctor of Sc., Prof. of the Higher Mathematics and Mathematical Modeling Department Tomsk State University
Vladimir Vishnevsky – Doctor of Sc., Prof. Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).
Gennady Koshkin – Doctor of Sc., Prof. of the Theoretical Cybernetics Department Tomsk State University
Yury Kostyuk – Doctor of Sc., Prof. of the Theoretical Informatics Department Tomsk State University
Anjela Matrosova – Doctor of Sc., Prof., Head of the Programming Department Tomsk State University
Anatoly Nazarov – Doctor of Sc., Prof., Head of the Probability Theory and Mathematical Statistics Department Tomsk State University
Konstantin Samouylov – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Probability and Informatics Department RUDN University (Moscow, Russia)
Eugene Semenkina – Doctor of Sc., Prof. System Analysis and Operations Research Department Reshetnev Siberian State Aerospace University (Krasnoyarsk, Russia)
Sergey Sushchenko – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied of Information Department, Director of the Institute of Applied Mathematics and Computer Science Tomsk State University
Mais Farkhadov – Doctor of Sc., Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).
Gurami Tsitsiasvili – Doctor of Sc., Prof., Chief researcher Institute for Applied Mathematics Far Eastern Branch of RAS, Prof. Far Eastern Federal University (Vladivostok, Russia)
Editorial address:
Institute of Applied Mathematics and Computer Science,
unit of Applied Mathematics
National Research Tomsk State University
36 Lenina Avenue, Tomsk, 634050
Telephone / fax: +72822529599
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

EDITORIAL COUNCIL

Ana Rosa Cavalli
PhD, Prof.
University VII
Paris, France
Vladimir Dombrovskii
Doctor of Sc., Prof.
Tomsk State University
Russia
Alexander Dudin
Doctor of Sc., Prof.
Belarusian State University
Minsk, Republic Belorussia

Gilbert Saporta
PhD, Prof.
Pierre and Marie Curie
University, Paris, France
Raimund Ubar
Doctor of Sc., Prof.
University of Technology
Tallinn, Estonia
Reindert Nobel
Doctor of Sc., Associate Prof.
Vrije University of Amsterdam
Netherlands

Enco Orsingher
PhD, Prof.
University of Rome
Italy
Paolo Prinetto
Prof.
Politechnic Institute
Torino, Italy

Nina Yevtushenko
Doctor of Sc., Prof.
Tomsk State University
Russia
Yervant Zorian
PhD, Fellow & Chief Architect, Synopsys, Mountain View, CA, USA

JOURNAL INFO

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world. Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031). The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English. The topics of the journal are the following:

- control of dynamical systems,
- mathematical modeling,
- data processing,
- informatics and programming,
- discrete function and automation,
- designing and diagnostics of computer systems.

Rules of registration articles are given in a site:
<http://journals.tsu.ru/informatics/>
ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

Учредитель – Томский государственный университет

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Горцев Александр Михайлович – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой исследования операций ТГУ. Тел. +72822529599
Смагин Валерий Иванович – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, проф. кафедры исследования операций ТГУ. Тел. +72822529599
Нежельская Людмила Алексеевна – ответственный секретарь, доц., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры исследования операций ТГУ
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Воробейчиков Сергей Эрикович – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры высшей математики и математического моделирования ТГУ
Вишневский Владимир Миронович – проф., д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)
Кошкин Геннадий Михайлович – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры теоретической кибернетики ТГУ
Костюк Юрий Леонидович – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры теоретической информатики ТГУ
Матросова Анжела Юрьевна – проф., д-р техн. наук, зав. кафедры программирования ТГУ
Назаров Анатолий Андреевич – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой теории вероятностей и математической статистики ТГУ
Самуйлов Константин Евгеньевич – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (г. Москва)
Семенкин Евгений Станиславович – проф., д-р техн. наук, проф. каф. системного анализа и исследования операций, СГАУ им. акад. М.Ф. Решетнева (г. Красноярск)
Сущенко Сергей Петрович – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики, директор института прикладной математики и компьютерных наук ТГУ
Фархадов Маис Паша Оглы – д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)
Цицашвили Гурами Шалвович – проф., д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Института прикладной математики ДВО РАН, проф. ДВФУ (г. Владивосток)

Адрес редакции и издателя: 634050, Томск, пр. Ленина, 36
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Институт прикладной математики и компьютерных наук,
отделение прикладной математики
Телефон / факс: +72822529599
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Ана Роза Кавалли
д-р философии, проф.
Университет VII,
Париж, Франция
Владимир Домбровский
д-р техн. наук, проф.
ТГУ, Томск, Россия
Александр Дудин
д-р физ.-мат. наук, проф.
БГУ, Минск,
Республика Беларусь

Жильберт Сапорта
д-р философии, проф.
Университет им. Пьера и Марии,
Кюри, Париж, Франция
Раймонд Убар
д-р, проф.
Технологический университет,
Таллинн, Эстония
Рейндерт Нобель
д-р, доцент
Свободный университет,
Амстердам, Нидерланды

Енцо Орзингер
д-р философии, проф.
Римский университет,
Италия
Паоло Принетто
проф.
Политехнический институт,
Турин, Италия

Нина Евтушенко
д-р техн. наук, проф.
ТГУ, Томск, Россия
Ервант Зориан
д-р философии, гл. науч. сотр.
фирмы «Синописис», США

О ЖУРНАЛЕ

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке. Статьи публикуются на русском и английском языках. Тематика публикаций журнала:

- управление динамическими системами,
- математическое моделирование,
- обработка информации,
- информатика и программирование,
- дискретные функции и автоматы,
- проектирование и диагностика вычислительных систем.

Журнал входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ). Правила оформления статей приведены на сайте:
<http://journals.tsu.ru/informatics/>
ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

СОДЕРЖАНИЕ

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Домбровский В.В., Пашинская Т.Ю. Прогнозирующее управление системами с марковскими скачками и авторегрессионным мультипликативным шумом с марковским переключением режимов.....	4
Мансимов К.Б., Сулейманова Ш.Ш. К оптимальности особых в классическом смысле управлений в одной задаче оптимального управления системами с переменной структурой.....	10
Перепелкин Е.А. Управление спектром системы второго порядка с обратной связью по ускорению.....	25

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Ким К.С., Смагин В.И. Робастная экстраполяция в дискретных системах со случайными скачкообразными параметрами и неизвестным входом.....	31
Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Семенова М.А. К вопросу статистического анализа больших данных.....	40
Лившиц К.И., Ульянова Е.С. Модель управления запасами однородной продукции с релейным управлением темпом производства и ММР-потоком моментов продаж.....	50
Мокров Е.В., Самуйлов К.Е. Среда совместного лицензированного доступа в беспроводной сети как система массового обслуживания с ненадежным ресурсом.....	62
Назаров А.А., Худяшова Е.Е., Моисеев А.Н. Система $H_2 GI _\infty$ с бесконечным значением среднего времени обслуживания.....	72

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Асламова Е.А., Кривов М.В., Асламова В.С. Экспертная система агрегированной оценки уровня промышленной безопасности.....	84
Сведения об авторах	93

CONTENTS

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Dombrovskii V.V., Pashinskaya T.Yu. Predictive control for markov jump systems with markov switching autoregressive multiplicative noise.....	4
Mansimov K.B., Suleymanova Sh.Sh. To the optimality of singular controls in the classical sense in one problem of optimal control of systems with variable structure.....	10
Perepelkin E.A. Pole assignment for second-order system by acceleration feedback.....	25

DATA PROCESSING

Kim K.S., Smagin V.I. Robust extrapolation in discrete systems with random jump parameters and unknown input.....	31
Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Semenova M.A. To question of the statistical analysis of big data.....	40
Livshits K. I., Uyanova E.S. Model of inventory control of homogeneous products with relay control of production rate and MMP-flow of sales moments.....	50
Mokrov E.V., Samouylov K.E. LSA framework in lte wireless network environment as a queueing system with unreliable resource.....	62
Nazarov A.A., Khudyashova E.E., Moiseev A.N. Queueing system $H_2 GI _\infty$ with an infinite mean of service time.....	72

INFORMATICS AND PROGRAMMING

Aslamova E.A., Krivov M.V., Aslamova V.S. Expert system of the aggregate assessment of the level of industrial safety.....	84
Brief information about the authors	93

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.2

DOI: 10.17223/19988605/44/1

В.В. Домбровский, Т.Ю. Пашинская

ПРОГНОЗИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С МАРКОВСКИМИ СКАЧКАМИ И АВТОРЕГРЕССИОННЫМ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ ШУМОМ С МАРКОВСКИМ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ РЕЖИМОВ

Рассматривается задача управления с прогнозированием по квадратичному критерию для класса дискретных стохастических систем с марковскими скачками и мультипликативным шумом, описываемым векторной авторегрессионной моделью с марковским переключением режимов, при ограничениях на управляющие воздействия. Алгоритм синтеза прогнозирующей стратегии сводится к решению последовательности задач квадратичного программирования.

Ключевые слова: стохастические системы; марковские скачки; авторегрессионный мультипликативный шум; прогнозирующее управление; ограничения.

Системы с марковскими скачкообразными параметрами нашли широкое признание и применение в практике управления многими реальными процессами [1]. Примерами могут служить сложные производственно-технологические, энергетические и технические системы. Эффективным подходом к решению задач управления такими системами при ограничениях на состояния и / или управления является метод управления с прогнозирующей моделью [2]. Прогнозирующее управление дискретными линейными системами с марковскими переключениями режимов рассматривалось в работах [3–8]. Метод управления с прогнозированием нелинейными системами с марковским переключением режимов, основанный на генерации сценариев, рассматривался в [9]. Отметим, что сценарный подход требует значительных вычислительных затрат. В работе [10] рассматривается задача управления с прогнозированием для класса нелинейных систем с марковскими скачками при ограничениях на управления. В [10] предполагается, что нелинейное слагаемое зависит от состояния, управления и последовательности независимых шумов и описывается статистическими характеристиками.

В данной работе рассматривается класс дискретных стохастических систем с марковскими скачками и мультипликативным шумом, описываемым векторной авторегрессионной моделью с марковским переключением режимов (MSVAR, [11]). Синтезированы стратегии управления с прогнозированием по квадратичному критерию при ограничениях на управляющие переменные. Алгоритм синтеза сводится к решению последовательности задач квадратического программирования.

1. Постановка задачи

Пусть объект управления описывается уравнениями

$$x_{k+1} = A[\theta_{k+1}]x_k + B[\theta_{k+1}, y_{k+1}]u_k, \quad (1)$$

$$y_{k+1} = \alpha[\theta_{k+1}]y_k + \beta[\theta_{k+1}] + \sigma[\theta_{k+1}]w_{k+1}, \quad (2)$$

$$A[\theta_k] = \sum_{i=1}^v \theta_{i,k} A^i, A^i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \quad (3)$$

$$\alpha[\theta_k] = \sum_{i=1}^v \theta_{i,k} \alpha^i, \beta[\theta_k] = \sum_{i=1}^v \theta_{i,k} \beta^i, \sigma[\theta_k] = \sum_{i=1}^v \theta_{i,k} \sigma^i; \alpha^i, \sigma^i \in \mathbb{R}^{q \times q}, \beta^i \in \mathbb{R}^q, \quad (4)$$

$$B[\theta_{k+1}, y_{k+1}] = \sum_{i=1}^v \theta_{i,k+1} (B^i[\alpha^i y_k] + B^i[\beta^i] + B^i[\sigma^i w_{k+1}]), B^i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}, \quad (5)$$

где $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ – вектор состояния, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ – вектор управления, $y_k \in \mathbb{R}^q$ – последовательность случайных векторов, $w_k \in \mathbb{R}^q$ – вектор белых шумов с нулевым средним и единичной матрицей ковариации, $\theta_{i,k+1}, i = \overline{1, v}$ – компонента вектора θ_{k+1} , $\theta_k = [\delta(\tau_k, 1), \dots, \delta(\tau_k, v)]^T$, где $\delta(\tau_k, j)$ – функция Кронекера, τ_k ($k = 0, 1, 2, \dots, v$) – однородная дискретная марковская цепь с конечным множеством состояний $\{1, 2, \dots, v\}$, известной матрицей переходных вероятностей $P = [P_{ij}]$ и известным начальным распределением. Матрица B зависит от y_k линейно. Предполагается, что векторы x_k, y_k , а также состояние марковской цепи в момент времени k доступны наблюдению. Последовательности w_k и θ_k независимы.

Дискретная марковская цепь с конечным множеством состояний $\{1, 2, \dots, v\}$ и матрицей переходных вероятностей P допускает следующее представление в пространстве состояний [12]:

$$\theta_{k+1} = P\theta_k + v_{k+1}, \quad (6)$$

где $\{v_k\}$ – последовательность мартингал-разностей с условными моментами

$$E\{v_{k+1} | \theta_k\} = 0, \quad (7)$$

$$E\{v_{k+1} v_{k+1}^T | \theta_k\} = \text{diag}\{P\theta_k\} - P \text{diag}\{\theta_k\}.$$

На управляющие воздействия наложены ограничения:

$$u_k^{\min} \leq S_k u_k \leq u_k^{\max}, \quad (8)$$

где $S_k \in \mathbb{R}^{p \times n_u}$, $u_k^{\min}, u_k^{\max} \in \mathbb{R}^p$.

Для решения сформулированной задачи используем методологию управления с прогнозирующей моделью. Данный подход позволяет получить стратегии управления с обратной связью с учетом явных ограничений на управляющие воздействия. Стратегии управления с прогнозированием определяются по следующему правилу. На каждом шаге k минимизируем функционал со скользящим горизонтом управления

$$J_{k+m|k} = E\left\{\sum_{i=1}^m x_{k+i}^T R_{k+i}^1 x_{k+i} + u_{k+i-1|k}^T R_{k+i-1} u_{k+i-1|k} \mid x_k, \theta_k, y_k\right\} \quad (9)$$

на траекториях системы (1)–(6) по последовательности прогнозирующих управлений $u_{k|k}, \dots, u_{k+m-1|k}$, зависящих от состояния системы в момент времени k , при ограничениях (8), где m – горизонт прогноза, k – текущий момент времени, $R_{k+i}^1 \geq 0, R_{k+i-1} > 0$ – весовые матрицы соответствующих размерностей. В качестве управления в момент времени k берем $u_k = u_{k|k}$. Тем самым получаем управление u_k как функцию векторов x_k, y_k и состояния марковской цепи θ_k , т.е. управление с обратной связью. Чтобы получить управление u_{k+1} на следующем шаге, процедура повторяется для следующего момента $k+1$ и т.д.

2. Синтез стратегий прогнозирующего управления

Рассмотрим задачу минимизации критерия (9) по последовательности прогнозирующих управлений $u_{k|k}, \dots, u_{k+m-1|k}$, при ограничениях (8).

Теорема. Вектор прогнозирующих управлений $U_k = [u_{k|k}^T, \dots, u_{k+m-1|k}^T]^T$, минимизирующий критерий (9) при ограничениях вида (8), на каждом шаге k определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием вида:

$$Y_{k+m|k} = 2x_k^T G_k U_k + U_k^T H_k U_k,$$

при ограничениях

$$U_k^{\min} \leq \bar{S}_k U_k \leq U_k^{\max}. \quad (10)$$

Оптимальное управление равно

$$u_k = \begin{bmatrix} I_{n_u} & 0_{n_u} & \dots & 0_{n_u} \end{bmatrix} U_k,$$

где

$$\bar{S}_k = \text{diag}(S_k, \dots, S_{k+m-1}),$$

$$U_k^{\min} = \left[\left(u_k^{\min} \right)^T, \dots, \left(u_{k+m-1}^{\min} \right)^T \right], \quad U_k^{\max} = \left[\left(u_k^{\max} \right)^T, \dots, \left(u_{k+m-1}^{\max} \right)^T \right],$$

I_{n_u} – единичная матрица размерности n_u , 0_{n_u} – квадратная нулевая матрица размерности n_u , H_k , G_k – блочные матрицы, блоки которых равны:

$$H_{tt,k} = R_{k+t-1} + \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_1} y_k]^T Q_k^{(i_1, \dots, i_t)} \left(B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_1} y_k] + 2 \sum_{j=1}^t B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}] \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^t \sum_{l=1}^t \sum_{i_{\min(j,l)}=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}]^T Q_k^{(i_{\min(j,l)}, \dots, i_t)} B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}] +$$

$$+ \sum_{j=1}^t \sum_{i_j=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v E \left\{ B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \sigma^{i_j} w_{k+j}]^T Q_k^{(i_j, \dots, i_t)} B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \sigma^{i_j} w_{k+j}] \right\}, \quad (11)$$

$$H_{tf,k} = \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_f=1}^v B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_1} y_k]^T \left(A^{i_{t+1}} \right)^T \dots \left(A^{i_f} \right)^T Q_k^{(i_1, \dots, i_f)} \left(B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_1} y_k] + \sum_{j=1}^f B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}] \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^t \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_f=1}^v B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}]^T \left(A^{i_{t+1}} \right)^T \dots \left(A^{i_f} \right)^T Q_k^{(i_1, \dots, i_f)} B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_1} y_k] +$$

$$+ \sum_{j=1}^t \sum_{l=1}^f \sum_{i_{\min(j,l)}=1}^v \dots \sum_{i_f=1}^v B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}]^T \left(A^{i_{t+1}} \right)^T \dots \left(A^{i_f} \right)^T Q_k^{(i_{\min(j,l)}, \dots, i_f)} B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_1} \beta^{i_j}] +$$

$$+ \sum_{j=1}^t \sum_{i_j=1}^v \dots \sum_{i_f=1}^v E \left\{ B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \sigma^{i_j} w_{k+j}]^T \left(A^{i_{t+1}} \right)^T \dots \left(A^{i_f} \right)^T Q_k^{(i_j, \dots, i_f)} B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \sigma^{i_j} w_{k+j}] \right\},$$

$$G_{t,k} = \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v \left(A^{i_1} \right)^T \dots \left(A^{i_t} \right)^T Q_k^{(i_1, \dots, i_t)} B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_1} y_k] +$$

$$+ \sum_{j=1}^t \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v \left(A^{i_1} \right)^T \dots \left(A^{i_t} \right)^T Q_k^{(i_1, \dots, i_t)} B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}]. \quad (13)$$

Последовательность матриц $Q_k^{(i_1, \dots, i_f)}$ ($t, f = \overline{1, m}$) определяется рекуррентными уравнениями

$$Q_k^{(i_1, \dots, i_f)} = \Theta_k^{(i_1, \dots, i_f)} R_{k+f}^1 + \sum_{i_{f+1}=1}^v \left(A^{i_{f+1}} \right)^T Q_k^{(i_1, \dots, i_{f+1})} A^{i_{f+1}}, t = \overline{1, m-2}, f > t, \quad (14)$$

$$Q_k^{(i_t)} = L_{i_t} P^t \theta_k R_{k+t}^1 + \sum_{i_{t+1}=1}^v \left(A^{i_{t+1}} \right)^T Q_k^{(i_t, i_{t+1})} A^{i_{t+1}}, t = \overline{1, m-1}, \quad (15)$$

$$Q_k^{(i_m)} = L_{i_m} P^m \theta_k R_{k+m}^1, \quad (16)$$

с граничными условиями:

$$Q_k^{(i_t, \dots, i_m)} = \Theta_k^{(i_t, \dots, i_m)} R_{k+m}^1, t = \overline{1, m-1}, \quad (17)$$

где

$$\Theta_k^{(i_t, \dots, i_f)} = P_{i_f, i_{f-1}} P_{i_{f-1}, i_{f-2}} \dots P_{i_{t+1}, i_t} \theta_{i_t, (k+t|k)}, t = \overline{1, m-1}, f > t, \quad (18)$$

$\theta_{i_t, (k+t|k)}$ – компонента вектора $\theta_{k+t|k} = P^t \theta_k$, $L_{i_t} = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]_{1 \times v}$, $i_t = \overline{1, v}$; $t = \overline{1, m}$.

Доказательство. Критерий (9) можно записать следующим образом:

$$J_{k+m|k} = E \{ x_{k+1}^T R_{k+1}^1 x_{k+1} + u_{k|k}^T R_k u_{k|k} + E \{ x_{k+2}^T R_{k+2}^1 x_{k+2} + u_{k+1|k}^T R_{k+1} u_{k+1|k} +$$

$$+ \dots + E \{ x_{k+m}^T R_{k+m}^1 x_{k+m} + u_{k+m-1|k}^T R_{k+m-1} u_{k+m-1|k} \mid x_{k+m-1}, y_{k+m-1}, \theta_{k+m-1} \} \dots \mid x_{k+1}, y_{k+1}, \theta_{k+1} \} \mid x_k, y_k, \theta_k \}. \quad (19)$$

Выражая x_{k+m} через x_{k+m-1} с использованием (1)–(5), получим:

$$x_{k+m} = \sum_{i_m=1}^v \theta_{i_m, k+m} \left(A^{i_m} x_{k+m-1} + B^{i_m} [\alpha^{i_m} y_{k+m-1}] u_{k+m-1} + B^{i_m} [\beta^{i_m}] u_{k+m-1} + B^{i_m} [\sigma^{i_m} w_{k+m}] u_{k+m-1} \right). \quad (20)$$

Вычисляя последовательно операторы математического ожидания в выражении (19) с использованием уравнений (20) и (6), получим

$$\begin{aligned}
 J_{k+m|k} = & x_k^T \sum_{i_1=1}^v \left(A^{i_1} \right)^T Q_k^{(i_1)} A^{i_1} x_k + 2x_k^T \sum_{t=1}^m \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v \left(A^{i_1} \right)^T \dots \left(A^{i_t} \right)^T Q_k^{(i_1, \dots, i_t)} B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_1} y_k] u_{k+t-1|k} + \\
 & + 2x_k^T \sum_{t=1}^m \sum_{j=1}^t \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v \left(A^{i_1} \right)^T \dots \left(A^{i_t} \right)^T Q_k^{(i_1, \dots, i_t)} B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}] u_{k+t-1|k} + \\
 & + \sum_{t=1}^m u_{k+t-1|k}^T \sum_{j=1}^t \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_1} y_k]^T Q_k^{(i_1, \dots, i_t)} B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_1} y_k] u_{k+t-1|k} + \\
 & + \sum_{t=1}^m u_{k+t-1|k}^T \sum_{j=1}^t \sum_{l=1}^t \sum_{i_{\min(j,l)}=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}]^T Q_k^{(i_{\min(j,l)}, \dots, i_t)} B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}] u_{k+t-1|k} + \\
 & + 2 \sum_{t=1}^m u_{k+t-1|k}^T \sum_{j=1}^t \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_1} y_k]^T Q_k^{(i_1, \dots, i_t)} B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}] u_{k+t-1|k} + \\
 & + \sum_{t=1}^m u_{k+t-1|k}^T \sum_{j=1}^t \sum_{i_j=1}^v \dots \sum_{i_t=1}^v E \left\{ B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \sigma^{i_j} w_{k+j}]^T Q_k^{(i_j, \dots, i_t)} B^{i_t} [\alpha^{i_t} \dots \alpha^{i_{j+1}} \sigma^{i_j} w_{k+j}] \right\} u_{k+t-1|k} + \\
 & + 2 \sum_{t=1}^{m-1} \sum_{f=t+1}^m u_{k+t-1|k}^T \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_f=1}^v B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_1} y_k]^T \left(A^{i_{f+1}} \right)^T \dots \left(A^{i_f} \right)^T Q_k^{(i_1, \dots, i_f)}(k) B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_1} y_k] u_{k+f-1|k} + \\
 & + 2 \sum_{t=1}^{m-1} \sum_{f=t+1}^m u_{k+t-1|k}^T \sum_{j=1}^f \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_f=1}^v B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_1} y_k]^T \left(A^{i_{f+1}} \right)^T \dots \left(A^{i_f} \right)^T Q_k^{(i_1, \dots, i_f)} B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}] u_{k+f-1|k} + \\
 & + 2 \sum_{t=1}^{m-1} \sum_{f=t+1}^m u_{k+t-1|k}^T \sum_{j=1}^f \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_f=1}^v B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}]^T \left(A^{i_{f+1}} \right)^T \dots \left(A^{i_f} \right)^T Q_k^{(i_1, \dots, i_f)} B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_1} y_k] u_{k+f-1|k} + \\
 & + 2 \sum_{t=1}^{m-1} \sum_{f=t+1}^m u_{k+t-1|k}^T \sum_{j=1}^f \sum_{l=1}^f \sum_{i_{\min(j,l)}=1}^v \dots \sum_{i_f=1}^v B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}]^T \left(A^{i_{f+1}} \right)^T \dots \left(A^{i_f} \right)^T Q_k^{(i_{\min(j,l)}, \dots, i_f)} B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_{j+1}} \beta^{i_j}] u_{k+f-1|k} + \\
 & + 2 \sum_{t=1}^{m-1} \sum_{f=t+1}^m u_{k+t-1|k}^T \sum_{j=1}^f \sum_{i_j=1}^v \dots \sum_{i_f=1}^v E \left\{ B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_{j+1}} \sigma^{i_j} w_{k+j}]^T \left(A^{i_{f+1}} \right)^T \dots \left(A^{i_f} \right)^T \times \right. \\
 & \left. \times Q_k^{(i_j, \dots, i_f)} B^{i_f} [\alpha^{i_f} \dots \alpha^{i_{j+1}} \sigma^{i_j} w_{k+j}] \right\} u_{k+f-1|k} + \sum_{t=1}^m u_{k+t-1|k}^T R_{k+t-1} u_{k+t-1|k}.
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Последовательности матриц $Q_k^{(i_1, \dots, i_f)}, (t, f = \overline{1, m})$ определяются рекуррентными уравнениями (14)–(18).

Выражение (21) можно записать в матричной форме:

$$J_{k+m|k} = x_k^T \sum_{i_1=1}^v \left(A^{i_1} \right)^T Q_k^{(i_1)} A^{i_1} x_k + 2x_k^T G_k U_k + U_k^T H_k U_k, \tag{22}$$

где G_k, H_k имеют вид (11)–(13).

Таким образом, имеем задачу минимизации критерия (22) при ограничениях (10), которая эквивалентна задаче квадратичного программирования с критерием (9) при ограничениях (8).

Заключение

В работе предложен метод синтеза стратегий прогнозирующего управления по квадратичному критерию для класса дискретных систем с марковскими скачками и авторегрессионным мультипликативным шумом с переключающимися режимами. Данный подход позволяет в явном виде учесть ограничения на управления. Алгоритм синтеза прогнозирующей стратегии включает решение последовательности задач квадратичного программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Costa O.L.V., Fragoso M.D., Marques R.P. Discrete-time Markov jump linear systems. New York : Springer, 2005. 286 p.
2. Mayne D.Q. Model predictive control: Recent developments and future promise // Automatica. 2014. V. 50, No. 12. P. 2967–2986.
3. Henandez-Medjias M.A., Sala A., Querol A., Arino C. Multiple-Horizon predictive control for Markov/switched linear systems // IFAC-PapersOnLine. 2015. V. 48, No. 23. P. 230–235.
4. Tonne J., Jilg M., Stursberg O. Constrained Model Predictive Control of High Dimensional Jump Markov Linear Systems // American Control Conference. Palmer House Hilton. July 1–3, Chicago, IL, USA, 2015. P. 2993–2998.
5. Dombrovskii V.V., Obyedko T.Yu. Predictive control of systems with Markovian jumps under constraints and its application to the investment portfolio optimization // Automation and remote control. 2011. V. 72, No. 5. P. 989–1003.
6. Chitraganti S., Aberkane S., Aubrun C., Valencia-Palomo G., Dragan V. On control of discrete-time state-dependent jump linear systems with probabilistic constraints: a receding horizon approach // Systems & Control Letters. 2014. V. 74. P. 81–89.
7. Lu J, Xi Y, Li D. Stochastic model predictive control for probabilistically constrained Markovian jump linear systems with additive disturbance // Int. J Robust Nonlinear Control. 2017. P. 1–15.
8. Sala A., Henandez-Medjias M.A., Arino C. Stable receding-horizon scenario predictive control for Markov-jump linear systems // Automatica. 2017. V. 86. P. 121–128.
9. Patrinos P., Soparasakis P., Sarimveis H., Bemporad A. Stochastic model predictive control for constrained discrete-time Markovian switching systems // Automatica. 2014. V. 50, No. 10. P. 2504–2514.
10. Dombrovskii V.V., Obyedko T.Yu., Samorodova M. Model predictive control of constrained Markovian jump nonlinear stochastic systems and portfolio optimization under market frictions // Automatica. 2018. V. 87, No. 1. P. 61–68.
11. Krolzig H.-M. Markov Switching Vector Autoregressions. Modelling, Statistical Inference and Application to Business Cycle Analysis. Berlin : Springer, 1997. 357 p.
12. Elliott R.J., Aggoun L., Moore J.B. Hidden Markov models: Estimation and control. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1995. 382 p.

Поступила в редакцию 28 января 2018 г.

Dombrovskii V.V., Pashinskaya T.Yu. (2018) PREDICTIVE CONTROL FOR MARKOV JUMP SYSTEMS WITH MARKOV SWITCHING AUTOREGRESSIVE MULTIPLICATIVE NOISE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 44. pp. 4–9

DOI: 10.17223/19988605/44/1

Assume that the plant to be controlled can be described by the following model

$$x_{k+1} = A[\theta_{k+1}]x_k + B[\theta_{k+1}, y_{k+1}]u_k, \quad (1)$$

$$y_{k+1} = \alpha[\theta_{k+1}]y_k + \beta[\theta_{k+1}] + \sigma[\theta_{k+1}]w_{k+1}, \quad (2)$$

$$A[\theta_k] = \sum_{i=1}^v \theta_{i,k} A^i, A^i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \quad (3)$$

$$\alpha[\theta_k] = \sum_{i=1}^v \theta_{i,k} \alpha^i, \beta[\theta_k] = \sum_{i=1}^v \theta_{i,k} \beta^i, \sigma[\theta_k] = \sum_{i=1}^v \theta_{i,k} \sigma^i; \alpha^i, \sigma^i \in \mathbb{R}^{q \times q}, \beta^i \in \mathbb{R}^q, \quad (4)$$

$$B[\theta_{k+1}, y_{k+1}] = \sum_{i=1}^v \theta_{i,k+1} \left(B^i[\alpha^i y_k] + \bar{B}^i[\beta^i] + \bar{B}^i[\sigma^i w_{k+1}] \right), B^i, \bar{B}^i, \bar{B}^i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}, \quad (5)$$

where $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ is the vector of states, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ is the vector of control inputs, $y_k \in \mathbb{R}^q$ is a sequence of stochastic vectors, $w_k \in \mathbb{R}^q$ is a zero mean independent random sequence; $\theta_{i,k+1}$ ($i = \overline{1, v}$) are the components of the vector θ_{k+1} , $\theta_k = [\delta(\tau_k, 1), \dots, \delta(\tau_k, v)]^T$, $\delta(\tau_k, j)$ is a Kronecker function; $\{\tau_k; k = 0, 1, 2, \dots\}$ is a finite-state discrete-time homogeneous Markov chain taking values in $\{1, 2, \dots, v\}$ with transition probability matrix $P = [P_{ij}]$. All of the elements of matrix B are assumed to be linear functions of vector y .

We impose the following inequality constraints on the control inputs (element-wise inequality):

$$u_k^{\min} \leq S_k u_k \leq u_k^{\max}, \quad (6)$$

where $S_k \in \mathbb{R}^{p \times n_u}$, $u_k^{\min}, u_k^{\max} \in \mathbb{R}^p$.

For control of system (1)–(5) we synthesize the strategies with a predictive control model. At each step k we minimize the quadratic criterion with a receding horizon

$$J_{k+m|k} = E \left\{ \sum_{i=1}^m x_{k+i}^T R_{k+i}^1 x_{k+i} + u_{k+i-1|k}^T R_{k+i-1|k} u_{k+i-1|k} \mid x_k, \theta_k, y_k \right\},$$

on trajectories of system (1) over the sequence of predictive controls $u_{k|k}, \dots, u_{k+m-1|k}$ dependent on information up to time k , under constraints (6), where $R_{k+i}^1 \geq 0, R_{k+i-1} > 0$ are given symmetric weight matrices of corresponding dimensions; m is the prediction horizon, k is the current moment. The synthesis of predictive control strategies is reduced to the sequence of quadratic programming tasks.

Keywords: stochastic systems; Markov jumps; autoregressive multiplicative noise; model predictive control; constraints.

DOMBROVSKII Vladimir Valentinovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Russian Federation).

E-mail: dombrovs@ef.tsu.ru

PASHINSKAYA Tatiana Yurievna (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, National Research Tomsk State University, Russian Federation).

E-mail: tatyana.obedko@mail.ru

REFERENCES

1. Costa, O.L.V., Fragoso, M.D. & Marques, R.P. (2005) *Discrete-time Markov jump linear systems*. Springer: New York.
2. Mayne, D.Q. (2014) Model predictive control: Recent developments and future promise. *Automatica*. 50(12). pp. 2967–2986. DOI: 10.1016/j.automatica.2014.10.128
3. Henandez-Medjias, M.A., Sala, A., Querol, A. & Arino, C. (2015) Multiple-Horizon predictive control for Markov/switched linear systems. *IFAC-PapersOnLine*. 48(23). pp. 230–235. DOI: 10.1016/j.ifacol.2015.11.288
4. Tonne, J., Jilg, M. & Stursberg, O. (2015) Constrained Model Predictive Control of High Dimensional Jump Markov Linear Systems. *American Control Conference*. Palmer House Hilton. July 1–3, 2015. Chicago, IL, USA. pp. 2993–2998. DOI: 10.1109/ACC.2015.7171190
5. Dombrovskii, V.V. & Obedko, T.Yu. (2011) Predictive control of systems with Markovian jumps under constraints and its application to the investment portfolio optimization. *Automation and Remote Control*. 72(5). pp. 989–1003. DOI: 10.1134/S0005117911050079
6. Chitraganti, S., Aberkane, S., Aubrun, C., Valencia-Palomo, G. & Dragan, V. (2014) On control of discrete-time state-dependent jump linear systems with probabilistic constraints: A receding horizon approach. *Systems & Control Letters*. 74. pp. 81–89. DOI: 10.1016/j.sysconle.2014.10.008
7. Lu J, Xi Y & Li D. (2017) Stochastic model predictive control for probabilistically constrained Markovian jump linear systems with additive disturbance. *International Journal of Robust Nonlinear Control*. pp. 1–15. DOI: 10.1002/rnc.3971
8. Sala, A., Henandez-Medjias, M.A. & Arino, C. (2017) Stable receding-horizon scenario predictive control for Markov-jump linear systems. *Automatica*. 86. pp. 121–128. DOI: 10.1016/j.automatica.2017.07.032
9. Patrinos, P., Soparasakis, P., Sarimveis, H. & Bemporad, A. (2014) Stochastic model predictive control for constrained discrete-time Markovian switching systems. *Automatica*. 50(10). pp. 2504–2514. DOI: 10.1016/j.automatica.2014.08.031
10. Dombrovskii, V.V., Obyedko, T.Yu. & Samorodova, M. (2018) Model predictive control of constrained Markovian jump nonlinear stochastic systems and portfolio optimization under market frictions. *Automatica*. 87(1). pp. 61–68. DOI: 10.1016/j.automatica.2017.09.018
11. Krolzig, H.-M. (1997) *Markov Switching Vector Autoregressions. Modelling, Statistical Inference and Application to Business Cycle Analysis*. Berlin: Springer.
12. Elliott, R.J., Aggoun, L. & Moore, J.B. (1995) *Hidden Markov models: Estimation and control*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

К.Б. Мансимов, Ш.Ш. Сулейманова

К ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ В КЛАССИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ УПРАВЛЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Рассматривается одна задача оптимального управления с переменной структурой для системы, описываемой уравнением Гурса–Дарбу. При предположении открытости области управления выведены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков. Исследованы на оптимальность особые, в классическом смысле, управления.

Ключевые слова: система Гурса–Дарбу; особые в классическом смысле управления; необходимые условия оптимальности; вариация функционала; уравнения в вариациях.

К настоящему времени различные аспекты задач оптимального управления для систем, описываемых уравнениями Гурса–Дарбу, изучены в работах многих авторов, начиная с работы А.И. Егорова [1]. Довольно подробный обзор соответствующих результатов имеется, например, в [2–10] и др.

При предположении открытости области управления установлен аналог уравнения Эйлера [11–14]. Далее, применяя модифицированный вариант метода приращений, предложенный и развитый в работах [1–10, 15–21] и др., для систем Гурса–Дарбу выведено довольно общее необходимое условие оптимальности второго порядка. Отдельно изучен случай вырождения аналога условия Лежандра–Клебша (в классическом смысле особый случай [10, 13, 15, 20, 21]).

В отличие от работ [1–10], предлагаемая работа посвящена исследованию задачи оптимального управления с переменной структурой для систем, описываемых уравнениями Гурса–Дарбу.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u, v) = \varphi_1(z(t_1, X)) + \varphi_2(y(t_2, X)) \quad (1)$$

при ограничениях

$$u(t, x) \in U \subset R^r, \quad (t, x) \in D_1 = [t_0, t_1] \times [x_0, X], \quad (2)$$

$$v(t, x) \in V \subset R^q, \quad (t, x) \in D_2 = [t_1, t_2] \times [x_0, X],$$

$$z_{tx} = f(t, x, z, u), \quad (t, x) \in D_1, \quad (3)$$

$$z(t_0, x) = a(x), \quad x \in [x_0, X], \quad (4)$$

$$z(t, x_0) = b_1(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$y_{tx} = g(t, x, y, v), \quad (t, x) \in D_2, \quad (5)$$

$$y(t_1, x) = G(z(t_1, x)), \quad x \in [x_0, X], \quad (6)$$

$$y(t, x_0) = b_2(t), \quad t \in [t_1, t_2],$$

$$G(z(t_1, x_0)) = b_2(t_1).$$

Здесь $f(t, x, z, u)$, $(g(t, x, y, v))$ – заданная n (m)-мерная вектор-функция, непрерывная в $D_1 \times R^n \times R^r$ ($D_2 \times R^m \times R^q$) вместе с частными производными по (z, u) ((y, v)) до второго порядка включительно,

$G(z)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая в R^n m -мерная вектор-функция, $a(x)$, $b_i(t)$, $i=1,2$ – заданные вектор-функции соответствующих размерностей, удовлетворяющие условию Липшица с некоторыми константами, t_0, t_1, t_2, x_0, X – заданы, причем $t_0 < t_1 < t_2$, $x_0 < X$, управляющие вектор-функции $u(t, x)$ ($v(t, x)$) всюду в дальнейшем считаются измеримыми по Лебегу на прямоугольнике D_1 (D_2), U (V) – заданное непустое, открытое и ограниченное множество.

Пару $(u(t, x), v(t, x))$ таких управляющих воздействий назовем допустимой.

Предполагается, что при заданном допустимом управлении $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x))$ краевые задачи (3)–(4) и (5)–(6) имеют единственное абсолютно непрерывное (в смысле [2, 3]) решение $z^\circ(t, x)$ и $y^\circ(t, x)$ соответственно.

Допустимое управление $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x))$, доставляющее минимум функционалу (1), при ограничениях (2)–(6) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x), z^\circ(t, x), y^\circ(t, x))$ – оптимальным процессом.

2. Вычисление вариаций функционала качества

Пусть $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x), z^\circ(t, x), y^\circ(t, x))$ есть фиксированный допустимый процесс. Через $(\bar{u}(t, x) = u^\circ(t, x) + \Delta u(t, x), \bar{v}(t, x) = v^\circ(t, x) + \Delta v(t, x), \bar{z}(t, x) = z^\circ(t, x) + \Delta z(t, x), \bar{y}(t, x) = y^\circ(t, x) + \Delta y(t, x))$ обозначим произвольный допустимый процесс.

Тогда ясно, что приращение $(\Delta z(t, x), \Delta y(t, x))$ состояния $(z^\circ(t, x), y^\circ(t, x))$ будет решением краевой задачи

$$\Delta z_{tx} = f(t, x, \bar{z}, \bar{u}) - f(t, x, z^\circ, u^\circ), \quad (t, x) \in D_1, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Delta z(t_0, x) &= 0, \quad x \in [x_0, X], \\ \Delta z(t, x_0) &= 0, \quad t \in [t_1, t_2], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Delta y_{tx} = g(t, x, \bar{y}, \bar{v}) - g(t, x, y^\circ, v^\circ), \quad (t, x) \in D_2, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Delta y(t_1, x) &= \Delta G(z^\circ(t_1, x)) = G(\bar{z}(t_1, x)) - G(z^\circ(t_1, x)), \\ \Delta y(t, x_0) &= 0, \quad t \in [t_1, t_2], \\ G(z^\circ(t_1, x_0)) &= b_2(t_1). \end{aligned} \quad (10)$$

Через $\psi_i^\circ(t, x)$, $i=1,2$ обозначим пока неизвестные n и m -мерные вектор-функции соответственно. Умножая обе части соотношения (7) ((9)) слева скалярно на $\psi_1^\circ(t, x)$ ($\psi_2^\circ(t, x)$), а затем интегрируя по области D_1 (D_2) и вводя обозначения

$$H(t, x, z, u, \psi_1^\circ) = \psi_1^{\circ'} \cdot f(t, x, z, u), \quad M(t, x, y, v, \psi_2^\circ) = \psi_2^{\circ'} \cdot g(t, x, y, v),$$

получим

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \psi_1^{\circ'}(t, x) \Delta z_{tx}(t, x) dx dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \left[H(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) - H(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) \right] dx dt, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \psi_2^{o'}(t, x) \Delta y_{tx}(t, x) dx dt = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \left[M(t, x, \bar{y}(t, x), \bar{v}(t, x), \psi_2^o(t, x)) - M(t, x, y^o(t, x), v^o(t, x), \psi_2^o(t, x)) \right] dx dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Считая $\psi_i^o(t, x)$, $i=1, 2$ достаточно гладкими вектор-функциями и учитывая краевые условия (8), можно убедиться в (10) в справедливости тождеств

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \psi_1^{o'}(t, x) \Delta z_{tx}(t, x) dx dt = \psi_1^{o'}(t_1, X) \Delta z(t_1, X) - \int_{x_0}^X \frac{\partial \psi_1^{o'}(t_1, x)}{\partial x} \Delta z(t_1, x) dx - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \psi_1^{o'}(t, X)}{\partial t} \Delta z(t, X) dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \frac{\partial^2 \psi_1^{o'}(t, x)}{\partial t \partial x} \Delta z(t, x) dx dt, \\ & \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \psi_2^{o'}(t, x) \Delta y_{tx}(t, x) dx dt = \psi_2^{o'}(t_2, X) \Delta y(t_2, X) - \int_{x_0}^X \frac{\partial \psi_2^{o'}(t_2, x)}{\partial x} \Delta y(t_2, x) dx - \psi_2^{o'}(t_1, X) \Delta y(t_1, X) + \\ & + \int_{x_0}^X \frac{\partial \psi_2^{o'}(t_1, x)}{\partial x} \Delta y(t_1, x) dx - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \psi_2^{o'}(t, X)}{\partial t} \Delta y(t, X) dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \frac{\partial^2 \psi_2^{o'}(t, x)}{\partial t \partial x} \Delta y(t, x) dx dt. \end{aligned}$$

Поэтому с учетом тождеств (11), (12), а также того, что

$$\Delta y(t_1, x) = G(\bar{z}(t_1, x)) - G(z^o(t_1, x)),$$

формула для приращения критерия качества (1) записывается в виде:

$$\begin{aligned} \Delta S(u^o, v^o) &= S(\bar{u}, \bar{v}) - S(u^o, v^o) = \left[\varphi_1(\bar{z}(t_1, X)) - \varphi_1(z^o(t_1, X)) \right] + \left[\varphi_2(\bar{y}(t_2, X)) - \varphi_2(y^o(t_2, X)) \right] + \\ & + \psi_1^{o'}(t_1, X) \Delta z(t_1, X) - \int_{x_0}^X \frac{\partial \psi_1^{o'}(t_1, x)}{\partial x} \Delta z(t_1, x) dx - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \psi_1^{o'}(t, X)}{\partial t} \Delta z(t, X) dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \frac{\partial^2 \psi_1^{o'}(t, x)}{\partial t \partial x} \Delta z(t, x) dx dt + \psi_2^{o'}(t_2, X) \Delta y(t_2, X) - \int_{x_0}^X \frac{\partial \psi_2^{o'}(t_2, x)}{\partial x} \Delta y(t_2, x) dx - \psi_2^{o'}(t_1, X) \Delta y(t_1, X) + \\ & + \int_{x_0}^X \frac{\partial \psi_2^{o'}(t_1, x)}{\partial x} \Delta y(t_1, x) dx - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \psi_2^{o'}(t, X)}{\partial t} \Delta y(t, X) dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \frac{\partial^2 \psi_2^{o'}(t, x)}{\partial t \partial x} \Delta y(t, x) dx dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \left[H(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t, x), \psi_1^o(t, x)) - H(t, x, z^o(t, x), u^o(t, x), \psi_1^o(t, x)) \right] dx dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \left[M(t, x, \bar{y}(t, x), \bar{v}(t, x), \psi_2^o(t, x)) - M(t, x, y^o(t, x), v^o(t, x), \psi_2^o(t, x)) \right] dx dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Полагая

$$N\left(x, \frac{\partial \psi_2^o}{\partial x}, z(t_1, x)\right) = \frac{\partial \psi_2^{o'}(t_1, x)}{\partial x} y(t_1, x) = \frac{\partial \psi_2^{o'}(t_1, x)}{\partial x} G(z(t_1, x)),$$

$$Q(\psi_2^o, z(t_1, X)) = \psi_2^{o'}(t_1, X) G(z(t_1, X))$$

и используя формулу Тейлора из (13), получим

$$\begin{aligned} \Delta S(u^o, v^o) &= \frac{\partial \varphi_1'(z^o(t_1, X))}{\partial z} \Delta z(t_1, X) + \frac{1}{2} \Delta z'(t_1, X) \frac{\partial^2 \varphi_1(z^o(t_1, X))}{\partial z^2} \Delta z(t_1, X) + o_1(\|\Delta z(t_1, X)\|^2) + \\ & + \frac{\partial \varphi_2'(y^o(t_2, X))}{\partial z} \Delta y(t_2, X) + \frac{1}{2} \Delta y'(t_2, X) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^o(t_2, X))}{\partial y^2} \Delta y(t_2, X) + o_2(\|\Delta y(t_2, X)\|^2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\psi_1^{\circ'}(t_1, X)\Delta z(t_1, X) - \int_{x_0}^X \frac{\partial \psi_1^{\circ'}(t_1, x)}{\partial x} \Delta z(t_1, x) dx - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \psi_1^{\circ'}(t, X)}{\partial t} \Delta z(t, X) dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \frac{\partial^2 \psi_1^{\circ'}(t, x)}{\partial t \partial x} \Delta z(t, x) dx dt + \\
 & +\psi_2^{\circ'}(t_2, X)\Delta y(t_2, x) - \int_{x_0}^X \frac{\partial \psi_2^{\circ'}(t_2, x)}{\partial x} \Delta y(t_2, x) dx - \frac{\partial Q(\psi_2^{\circ}, z^{\circ}(t_1, X))}{\partial z} \Delta z(t_1, X) - \\
 & - \frac{1}{2} \Delta z'(t_1, X) \frac{\partial^2 Q(\psi_2^{\circ}, z^{\circ}(t_1, X))}{\partial z^2} \Delta z(t_1, X) + o_3(\|\Delta z(t_1, X)\|^2) + \int_{x_0}^X \frac{\partial N'\left(x, \frac{\partial \psi_2^{\circ}}{\partial x}, z(t_1, x)\right)}{\partial z} \Delta z(t_1, x) dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{x_0}^X \Delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 N\left(x, \frac{\partial \psi_2^{\circ}}{\partial x}, z(t_1, x)\right)}{\partial z^2} \Delta z(t_1, x) dx + \int_{x_0}^X o_4(\|\Delta z(t_1, x)\|^2) dx - \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \psi_2^{\circ'}(t, X)}{\partial t} \Delta y(t, X) dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \frac{\partial^2 \psi_2^{\circ'}(t, x)}{\partial t \partial x} \Delta y(t, X) dx dt - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \left[H'_u(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t, x), \psi_1^{\circ}(t, x)) \Delta u(t, x) - H'_z(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t, x), \psi_1^{\circ}(t, x)) \Delta z(t, x) \right] dx dt - \quad (14) \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \left[M'_v(t, x, y^{\circ}(t, x), v^{\circ}(t, x), \psi_2^{\circ}(t, x)) \Delta v(t, x) - M'_y(t, x, y^{\circ}(t, x), v^{\circ}(t, x), \psi_2^{\circ}(t, x)) \Delta y(t, x) \right] dx dt - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \left[\Delta z'(t, x) H_{zz}(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t, x), \psi_1^{\circ}(t, x)) \Delta z(t, x) + 2 \Delta u'(t, x) \times \right. \\
 & \times H_{uz}(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t, x), \psi_1^{\circ}(t, x)) \Delta z(t, x) + \Delta u'(t, x) H_{uu}(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t, x), \psi_1^{\circ}(t, x)) \Delta u(t, x) \left. \right] dx dt - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \left[\Delta y'(t, x) M_{yy}(t, x, y^{\circ}(t, x), v^{\circ}(t, x), \psi_2^{\circ}(t, x)) \Delta y(t, x) + 2 \Delta v'(t, x) \times \right. \\
 & \times M_{vy}(t, x, y^{\circ}(t, x), v^{\circ}(t, x), \psi_2^{\circ}(t, x)) \Delta y(t, x) + \Delta v'(t, x) M_{vv}(t, x, y^{\circ}(t, x), v^{\circ}(t, x), \psi_2^{\circ}(t, x)) \Delta v(t, x) \left. \right] dx dt - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X o_5(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta u(t, x)\|)^2 dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X o_6(\|\Delta y(t, x)\| + \|\Delta v(t, x)\|)^2 dx dt.
 \end{aligned}$$

Если предполагать, что $\psi_i^{\circ}(t, x)$, $i=1, 2$ удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial^2 \psi_1^{\circ}(t, x)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial H(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t, x), \psi_1^{\circ}(t, x))}{\partial z}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \psi_1^{\circ}(t_1, x)}{\partial x} &= - \frac{\partial N\left(x, \frac{\partial \psi_2^{\circ}}{\partial x}, z^{\circ}(t_1, x)\right)}{\partial z}, \quad \frac{\partial \psi_1^{\circ}(t, X)}{\partial t} = 0, \\
 \psi_1^{\circ}(t_1, X) &= - \frac{\partial \Phi_1(z^{\circ}(t_1, X))}{\partial z} + \frac{\partial Q(\psi_2^{\circ}, z(t_1, X))}{\partial z}, \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2^{\circ}(t, x)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial M(t, x, y^{\circ}(t, x), v^{\circ}(t, x), \psi_2^{\circ}(t, x))}{\partial y}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \psi_2^{\circ}(t_2, x)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi_2^{\circ}(t, X)}{\partial t} = 0,$$

$$\psi_2^o(t_2, X) = -\frac{\partial \varphi_2(y^o(t_2, X))}{\partial y}, \quad (18)$$

то формула приращения (14) примет вид:

$$\begin{aligned} \Delta S(u^o, v^o) = & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X H'_u(t, x, z^o(t, x), u^o(t, x), \psi_1^o(t, x)) \Delta u(t, x) dx dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X M'_v(t, x, y^o(t, x), v^o(t, x), \psi_2^o(t, x)) \Delta v(t, x) dx dt + \\ & + \frac{1}{2} \Delta z'(t_1, X) \frac{\partial \varphi_1(z^o(t_1, X))}{\partial z} \Delta z(t_1, X) + \frac{1}{2} \Delta y'(t_2, X) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^o(t_2, X))}{\partial z^2} \Delta y(t_2, X) - \\ & - \frac{1}{2} \Delta z'(t_1, X) \frac{\partial^2 Q(\psi_2^o, z^o(t_1, X))}{\partial z^2} \Delta z(t_1, X) - \frac{1}{2} \int_{x_0}^X \Delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 N\left(x, \frac{\partial \psi_2^o}{\partial x}, z(t_1, x)\right)}{\partial z^2} \Delta z(t_1, x) dx - \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \left[\Delta z'(t, x) H_{zz}(t, x, z^o(t, x), u^o(t, x), \psi_1^o(t, x)) \Delta z(t, x) + 2 \Delta u'(t, x) \times \right. \\ & \times H_{uz}(t, x, z^o(t, x), u^o(t, x), \psi_1^o(t, x)) \Delta z(t, x) + \Delta u'(t, x) H_{uu}(t, x, z^o(t, x), u^o(t, x), \psi_1^o(t, x)) \Delta u(t, x) \left. \right] dx dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \left[\Delta y'(t, x) M_{yy}(t, x, y^o(t, x), v^o(t, x), \psi_2^o(t, x)) \Delta y(t, x) + 2 \Delta v'(t, x) \times \right. \\ & \times M_{vy}(t, x, y^o(t, x), v^o(t, x), \psi_2^o(t, x)) \Delta y(t, x) + \Delta v'(t, x) M_{vv}(t, x, y^o(t, x), v^o(t, x), \psi_2^o(t, x)) \Delta v(t, x) \left. \right] dx dt + \\ & + o_1\left(\|\Delta z(t_1, X)\|^2\right) + o_2\left(\|\Delta y(t_2, X)\|^2\right) + o_3\left(\|\Delta z(t_1, X)\|^2\right) + \int_{x_0}^X o_4\left(\|\Delta z(t_1, x)\|^2\right) dx - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X o_5\left(\left[\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta u(t, x)\|\right]^2\right) dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X o_6\left(\left[\|\Delta y(t, x)\| + \|\Delta v(t, x)\|\right]^2\right) dx dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Краевую задачу (15)–(18) назовем сопряженной системой в задаче оптимального управления (1)–(6).

Поскольку множества U и V открытые, то специальное приращение допустимого управления $(u^o(t, x), v^o(t, x))$ можно определить по формуле:

$$\begin{aligned} \Delta u_\varepsilon(t, x) &= \varepsilon \delta u(t, x), \\ \Delta v_\varepsilon(t, x) &= \varepsilon \delta v(t, x). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь ε достаточно малое по абсолютной величине произвольное число, а $\delta u(t, x)$ и $\delta v(t, x)$ произвольные измеримые и ограниченные соответственно r и q -мерные вектор-функции со значениями из R^r и R^q соответственно.

Такие $\delta u(t, x)$ и $\delta v(t, x)$ назовем допустимыми вариациями управляющих функций $u^o(t, x)$ и $v^o(t, x)$ соответственно.

Через $(\Delta z_\varepsilon(t, x; \varepsilon), \Delta y_\varepsilon(t, x; \varepsilon))$ обозначим специальное приращение состояния $(z^o(t, x), y^o(t, x))$, отвечающее приращению (20) управления $(u^o(t, x), v^o(t, x))$.

Из оценок, установленных, например, в [1–3], следует, что

$$\|\Delta z(t, x)\| \leq L_1 \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \|\Delta u(\tau, s)\| ds d\tau, \quad (21)$$

$$\|\Delta y(t, x)\| \leq L_2 \left[\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \|\Delta v(\tau, s)\| ds d\tau + \|\Delta z(t_1, x)\| \right], \quad (22)$$

где $L_i = \text{const} > 0$, $i = 1, 2$ – некоторое постоянное.

Из (22) с учетом (21) получаем, что

$$\|\Delta y(t, x)\| \leq L_3 \left[\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \|\Delta v(\tau, s)\| ds d\tau + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \|\Delta u(\tau, s)\| d\tau ds \right], \quad (23)$$

где $L_3 = \text{const} > 0$ – некоторое постоянное.

Из оценок (21), (23) следует, что $\|\Delta z(t, x; \varepsilon)\|$ и $\|\Delta y(t, x; \varepsilon)\|$ имеют порядок малости ε .

А из краевых задач (7)–(10) получаем, что $(\Delta z_\varepsilon(t, x), \Delta y_\varepsilon(t, x))$ является решением линеаризованной краевой задачи

$$\Delta z_{tx}(t, x; \varepsilon) = f_z(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x)) \Delta z(t, x; \varepsilon) + \varepsilon f_u(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x)) \delta u(t, x) + o(\varepsilon; t, x), \quad (24)$$

$$\Delta z(t_0, x; \varepsilon) = 0, \quad \Delta z(t, x_0; \varepsilon) = 0, \quad (25)$$

$$\Delta y_{tx}(t, x; \varepsilon) = g_y(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x)) \Delta y(t, x; \varepsilon) + \varepsilon g_v(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x)) \delta v(t, x) + o(\varepsilon; t, x), \quad (26)$$

$$\Delta y(t_1, x; \varepsilon) = G_z(z^\circ(t_1, x)) \Delta z(t_1, x; \varepsilon) + o(\varepsilon; x), \quad (27)$$

$$\Delta y(t, x_0; \varepsilon) = 0.$$

При помощи (24)–(27) по схеме, аналогичной, например, схеме из [13], доказывается

Теорема 1. Для специального приращения $(\Delta z(t, x; \varepsilon), \Delta y_\varepsilon(t, x; \varepsilon))$ состояния $(z^\circ(t, x), y^\circ(t, x))$ имеют место разложения

$$\begin{aligned} \Delta z(t, x; \varepsilon) &= \varepsilon \delta z(t, x) + o(\varepsilon; t, x), \\ \Delta y(t, x; \varepsilon) &= \varepsilon \delta y(t, x) + o(\varepsilon; t, x). \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь $(\delta z(t, x), \delta y(t, x))$ – вариация вектора состояния $(z^\circ(t, x), y^\circ(t, x))$, являющаяся решением уравнения в вариациях

$$(\delta z)_{tx} = f_z(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x)) \delta z + f_u(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x)) \delta u(t, x), \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \delta z(t_0, x) &= 0, \quad x \in [x_0, X], \\ \delta z(t, x_0) &= 0, \quad t \in [t_0, t_1], \end{aligned} \quad (30)$$

$$(\delta y)_{tx} = g_y(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x)) \delta y + g_v(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x)) \delta v(t, x), \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \delta y(t_1, x) &= G_z(z^\circ(t_1, x)) \delta z(t_1, x), \\ \delta y(t, x_0) &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Используя разложения (28) и (20) из формулы приращения (19) получаем справедливость соотношения

$$\begin{aligned} \Delta S_\varepsilon(u^\circ, v^\circ) &= S(u^\circ + \Delta u_\varepsilon, v^\circ + \Delta v_\varepsilon) - S(u^\circ, v^\circ) = \\ &= -\varepsilon \left[\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X H'_u(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) \delta u(t, x) dx dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X M'_v(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \delta v(t, x) dx dt \right] + \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \delta z'(t_1, X) \frac{\partial^2 \varphi_1(z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} \delta z(t_1, X) - \delta z'(t_1, X) \frac{\partial^2 Q(\psi_2^\circ, z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} \delta z(t_1, X) - \right. \\
 & - \int_{x_0}^X \delta z(t_1, x) \frac{\partial^2 N\left(x, \frac{\partial \psi_2^\circ}{\partial x}, z^\circ(t_1, x)\right)}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) dx + \delta y'(t_2, X) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^\circ(t_2, X))}{\partial y^2} \delta y(t_2, X) - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \left[\delta z'(t, x) H_{zz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) \delta z(t, x) + 2\delta u'(t, x) \times \right. \\
 & \times H_{uz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) \delta z(t, x) + \delta u'(t, x) H_{uu}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) \delta u(t, x) \Big] dx dt - \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \left[\delta y'(t, x) M_{yy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \delta y(t, x) + 2\delta v'(t, x) M_{vy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \times \right. \\
 & \times \delta y(t, x) + \delta v'(t, x) M_{vv}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \delta v(t, x) \Big] dx dt \Big\} + o(\varepsilon^2).
 \end{aligned}$$

Из разложения (33) следует, что первая и вторая вариации (в классическом смысле) функционала качества (1) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \delta^1 S(u^\circ, v^\circ; \delta u, \delta v) = & - \left[\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X H'_u(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) \delta u(t, x) dx dt + \right. \\
 & \left. + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X M'_v(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \delta v(t, x) dx dt \right],
 \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
 \delta^2 S(u^\circ, v^\circ; \delta u, \delta v) = & \delta z'(t_1, X) \frac{\partial^2 \varphi_1(z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} \delta z(t_1, X) - \delta z'(t_1, X) \frac{\partial^2 Q(\psi_2^\circ, z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} \delta z(t_1, X) - \\
 & - \int_{x_0}^X \delta z(t_1, x) \frac{\partial^2 N\left(x, \frac{\partial \psi_2^\circ}{\partial x}, z^\circ(t_1, x)\right)}{\partial z^2} \delta z^\circ(t_1, x) dx - \delta y'(t_2, X) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^\circ(t_2, X))}{\partial y^2} \delta y(t_2, X) - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \left[\delta z'(t, x) H_{zz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) \delta z(t, x) + 2\delta u'(t, x) \times \right. \\
 & \times H_{uz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) \delta z(t, x) + \delta u'(t, x) H_{uu}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) \delta u(t, x) \Big] dx dt - \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \left[\delta y'(t, x) M_{yy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \delta y(t, x) + 2\delta v'(t, x) M_{vy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \times \right. \\
 & \times \delta y(t, x) + \delta v'(t, x) M_{vv}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \delta v(t, x) \Big] dx dt.
 \end{aligned} \tag{35}$$

3. Необходимые условия оптимальности

Из результатов классического вариационного исчисления (см. напр.: [11–14]) следует, что вдоль оптимального управления $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x))$ первая вариация функционала качества равна нулю, а вторая неотрицательна, т.е. для всех $(\delta u(t, x), \delta v(t, x))$

$$\delta^1 S(u^\circ, v^\circ; \delta u, \delta v) = 0, \tag{36}$$

$$\delta^2 S(u^\circ, v^\circ; \delta u, \delta v) \geq 0. \tag{37}$$

При помощи (36) по схеме, например, из [13, 22] доказывается справедливость утверждения

Теорема 2. Для оптимальности допустимого управления $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x))$ необходимо, чтобы соотношения

$$H_u(\theta, \xi, x^\circ(\theta, \xi), u^\circ(\theta, \xi), \psi_1^\circ(\theta, \xi)) = 0, \quad (38)$$

$$M_v(\theta, \xi, y^\circ(\theta, \xi), v^\circ(\theta, \xi), \psi_2^\circ(\theta, \xi)) = 0 \quad (39)$$

выполнялись для всех $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, X]$ и $(\theta, \xi) \in [t_1, t_2] \times [x_0, X]$ соответственно.

Здесь и в дальнейшем $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, X]$ ($(\theta, \xi) \in [t_1, t_2] \times [x_0, X]$) – произвольная правильная точка (точка Лебега) [2, 3] управления $u(t, x)$ ($v(t, x)$).

Соотношения (38), (39) представляют собой аналог уравнения Эйлера [11–14] для рассматриваемой задачи и являются необходимым условием оптимальности первого порядка.

Каждое допустимое управление $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x))$, удовлетворяющее уравнению Эйлера, назовем классической экстремалью для рассматриваемой задачи.

Неравенство (37) есть необходимое условие для оптимальности классических экстремалей, заданное в неявном виде. С его помощью получим необходимые условия оптимальности, явно выраженные через параметры задачи (1)–(6).

Через $R_i(t, x; \tau, s)$, $i = 1, 2$ – обозначим решения матричных интегральных уравнений

$$R_1(t, x; \tau, s) = E_1 + \int_{\tau}^t \int_s^x R_1(t, x; \alpha, \beta) f_z(\alpha, \beta, z^\circ(\alpha, \beta), u^\circ(\alpha, \beta)) d\alpha d\beta, \quad (t, x) \in D_1,$$

$$R_2(t, x; \tau, s) = E_2 + \int_{\tau}^t \int_s^x R_2(t, x; \alpha, \beta) g_y(\alpha, \beta, y^\circ(\alpha, \beta), v^\circ(\alpha, \beta)) d\alpha d\beta, \quad (t, x) \in D_2.$$

Уравнения в вариациях (29), (31) являются линейными неоднородными дифференциальными уравнениями гиперболического типа с краевыми условиями Гурса (30), (32) соответственно. Решения краевых задач (29)–(30) и (31)–(32) допускают в соответствии с представлением [23]

$$\delta z(t, x) = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_1(t, x; \tau, s) f_u(\tau, s, z^\circ(\tau, s), u^\circ(\tau, s)) \delta u(\tau, s) ds d\tau, \quad (40)$$

$$\delta y(t, x) = \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x R_2(t, x; \tau, s) g_v(\tau, s, y^\circ(\tau, s), v^\circ(\tau, s)) \delta v(\tau, s) ds d\tau + \int_{x_0}^x R_2(t, x; t_1, s) \frac{\partial \delta y(t_1, s)}{\partial s} ds. \quad (41)$$

Из (41) получим

$$\begin{aligned} \delta y(t, x) &= R_2(t, x; t_1, x) \delta y(t_1, x) - \int_{x_0}^x \frac{\partial R_2(t, x; t_1, s)}{\partial s} \delta y(t_1, s) ds + \\ &+ \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x R_2(t, x; \tau, s) g_v(\tau, s, y^\circ(\tau, s), v^\circ(\tau, s)) \delta v(\tau, s) ds d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\delta y(t_1, s) = G_z(z^\circ(t_1, s)) \delta z(t_1, s),$$

то из (41) получаем, что

$$\begin{aligned} \delta y(t, x) &= R_2(t, x; t_1, x) G_z(z^\circ(t_1, x)) \delta z(t_1, x) - \int_{x_0}^x \frac{\partial R_2(t, x; t_1, s)}{\partial s} G_z(z^\circ(t_1, s)) \delta z(t_1, s) ds + \\ &+ \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x R_2(t, x; \tau, s) g_v(\tau, s, y^\circ(\tau, s), v^\circ(\tau, s)) \delta v(\tau, s) ds d\tau. \end{aligned} \quad (42)$$

Введя обозначения

$$f_u(t, x) \equiv f_u(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x)), \quad g_v(t, x) \equiv g_v(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x))$$

и принимая во внимания представление (40), формулу (42) представим в виде:

$$\begin{aligned} \delta y(t, x) = & \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_2(t, x; t_1, x) G_z(z^\circ(t_1, x)) R_1(t_1, x; \tau, s) f_u(\tau, s) \delta u(\tau, s) ds d\tau - \\ & - \int_{x_0}^x \left[\int_{t_0}^t \int_{x_0}^s \frac{\partial R_2(t, x; t_1, s)}{\partial s} G_z(z^\circ(t_1, s)) R_1(t_1, x; \tau, \beta) f_u(\tau, \beta) \delta u(\alpha, \beta) d\tau d\beta \right] ds + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_2(t, x; \tau, s) g_v(\tau, s) \delta v(\tau, s) ds d\tau. \end{aligned}$$

Используя формулу Дирихле, получим

$$\begin{aligned} \delta y(t, x) = & \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_2(t, x; t_1, x) G_z(z^\circ(t_1, x)) R_1(t_1, x; \tau, s) f_u(\tau, s) \delta u(\tau, s) ds d\tau - \\ & - \int_{x_0}^x \left[\int_{t_0}^t \int_{x_0}^s \frac{\partial R_2(t, x; t_1, \beta)}{\partial s} G_z(z^\circ(t_1, \beta)) R_1(t_1, x; \tau, s) d\beta \right] f_u(\tau, s) \delta u(\tau, s) d\tau ds + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_2(t, x; \tau, s) g_v(\tau, s) \delta v(\tau, s) ds d\tau. \end{aligned} \quad (43)$$

Полагая

$$Q(t, x; \tau, s) = R_2(t, x; t_1, x) G_z(z^\circ(t_1, x)) R_1(t_1, x; \tau, s) - \int_s^x \frac{\partial R_2(t, x; t_1, \beta)}{\partial s} G_z(z^\circ(t_1, \beta)) R_1(t_1, x; \tau, s) d\beta,$$

формула (43) записывается в виде:

$$\delta y(t, x) = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q(t, x; \tau, s) f_u(\tau, s) \delta u(\tau, s) ds d\tau + \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x R_2(t, x; \tau, s) g_v(\tau, s) \delta v(\tau, s) ds d\tau. \quad (44)$$

Представления (40), (44) позволяют вывести необходимые условия оптимальности второго порядка, явно выраженные через параметры задачи (1)–(6).

Используя произвольность $\delta u(t, x)$ и $\delta v(t, x)$, предположим, что $\delta v(t, x) = 0$. Тогда неравенство (37) с учетом (35) примет вид:

$$\begin{aligned} & \delta z'(t_1, X) \frac{\partial^2 \varphi_1(z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} \delta z(t_1, X) - \delta z'(t_1, X) \frac{\partial^2 Q(\psi_2^\circ, z(t_1, X))}{\partial z^2} \delta z(t_1, X) - \\ & - \int_{x_0}^x \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 N\left(x, \frac{\partial \psi_2^\circ}{\partial x}, z^\circ(t_1, x)\right)}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) dx + \delta y'(t_2, X) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^\circ(t_2, X))}{\partial y^2} \delta y(t_2, X) - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^x \left[\delta z'(t, x) H_{zz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) \delta z(t, x) + 2\delta u'(t, x) \times \right. \\ & \times H_{uz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) \delta z(t, x) + \delta u'(t, x) H_{uu}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \psi_1^\circ(t, x)) \delta u(t, x) \left. \right] dx dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^x \delta y'(t, x) M_{yy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \delta y(t, x) dx dt \geq 0, \end{aligned} \quad (45)$$

При этом представление (44) примет вид:

$$\delta y(t, x) = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q(t, x; \tau, s) f_u(\tau, s) \delta u(\tau, s) ds d\tau. \quad (46)$$

Используя представления (40), (45), доказывается справедливость тождеств

$$\delta z'(t_1, X) \left[\frac{\partial^2 \Phi_1(z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Q(\Psi_2^\circ, z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} \right] \delta z(t_1, X) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \delta u'(\tau, s) f'_u(\tau, s) R'_1(t, x; \tau, s) \times \quad (47)$$

$$\times \left[\frac{\partial^2 \Phi_1(z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Q(\Psi_2^\circ, z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} \right] R_1(t_1, X; \alpha, \beta) f_u(\alpha, \beta) \delta u(\alpha, \beta) ds d\tau d\alpha d\beta, \\ \int_{x_0}^X \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 N\left(x, \frac{\partial \Psi_2^\circ}{\partial x}, z^\circ(t_1, x)\right)}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) dx = \int_{x_0}^X \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \int_{t_0}^{t_1} \delta u'(\tau, s) f'_u(\tau, s) R'_1(t_1, x; \tau, s) \times \quad (48)$$

$$\times \frac{\partial^2 N\left(x, \frac{\partial \Psi_2^\circ}{\partial x}, z^\circ(t_1, x)\right)}{\partial z^2} R_1(t_1, x; \alpha, \beta) f_u(\alpha, \beta) \delta u(\alpha, \beta) d\tau ds d\alpha d\beta \Bigg] dx = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \delta u'(\tau, s) f'_u(\tau, s) \left[\int_{\max(s, \beta)}^X R'_1(t_1, x; \tau, s) \frac{\partial^2 N\left(x, \frac{\partial \Psi_2^\circ}{\partial x}, z(t_1, x)\right)}{\partial z^2} R_1(t_1, x; \alpha, \beta) dx \right] \times \\ \times f_u(\alpha, \beta) \delta u(\alpha, \beta) d\tau ds d\alpha d\beta,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \delta z'(t, x) H_{zz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \Psi_1^\circ(t, x)) \delta z(t, x) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \delta u'(\tau, s) f'_u(\tau, s) \times \\ \times \left[\int_{\max(\tau, \alpha)}^{t_1} \int_{\max(s, \beta)}^X R'_1(t_1, x; \tau, s) H_{zz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \Psi_1^\circ(t, x)) R_1(t_1, x; \alpha, \beta) dx dt \right] \times \quad (49) \\ \times f_u(\alpha, \beta) \delta u(\alpha, \beta) d\tau ds d\alpha d\beta,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \delta u'(t, x) H_{uz}(t, x, z^\circ(t, x), u^\circ(t, x), \Psi_1^\circ(t, x)) \delta z(t, x) dx dt = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \left[\int_t^{t_1} \int_x^X \delta u'(\tau, s) H_{uz}(\tau, s, z^\circ(\tau, s), u^\circ(\tau, s), \Psi_1^\circ(\tau, s)) R_1(\tau, s; t, x) d\tau ds \right] f'_u(t, x) \delta u(t, x) dx dt, \\ \delta y'(t_2, X) \frac{\partial^2 \Phi_2(y^\circ(t_2, X))}{\partial y^2} \delta y(t_2, X) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \delta u'(\tau, s) f'_u(\tau, s) Q'(t_2, X; \tau, s) \frac{\partial^2 \Phi_2(y^\circ(t_2, X))}{\partial y^2} \times \quad (50) \\ \times Q(t_2, X; \alpha, \beta) f_u(\alpha, \beta) \delta u(\alpha, \beta) ds d\tau d\alpha d\beta, \\ \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \delta y'(t, x) M_{yy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \Psi_2^\circ(t, x)) \delta y(t, x) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^X \delta u'(\tau, s) f'_u(\tau, s) \times \\ \times \left[\int_{t_1}^{t_2} \int_{\max(s, \beta)}^X Q'(t, x; \tau, s) M_{yy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \Psi_2^\circ(t, x)) Q(t, x; \alpha, \beta) dx dt \right] f_u(\alpha, \beta) \delta u(\alpha, \beta) ds d\tau d\alpha d\beta.$$

Введя обозначение

$$K(\tau, s; \alpha, \beta) = - \left[\frac{\partial^2 \Phi_1(z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Q(\Psi_2^\circ, z^\circ(t_1, X))}{\partial z^2} \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\max(s, \beta)}^X R'_1(t_1, x; \tau, s) \frac{\partial^2 N \left(x, \frac{\partial \psi_2^0}{\partial x}, z(t_1, x) \right)}{\partial z^2} R_1(t_1, x; \alpha, \beta) dx - \\
 & - Q'(t_2, X; \tau, s) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^0(t_2, X))}{\partial y^2} Q(t_2, X; \alpha, \beta) + \\
 & + \int_{\max(\tau, \alpha)}^{t_1} \int_{\max(s, \beta)}^X R'_1(t, x; \tau, s) H_{zz}(t, x, z^0(t, x), u^0(t, x), \psi_1^0(t, x)) R_1(t, x; \alpha, \beta) dx dt + \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\max(s, \beta)}^X Q'(t, x; \tau, s) M_{yy}(t, x, y^0(t, x), v^0(t, x), \psi_2^0(t, x)) Q(t, x; \alpha, \beta) dx dt,
 \end{aligned}$$

и учитывая тождества (47)–(50), из неравенства (45) получим

$$\begin{aligned}
 & \int_{D_1} \int_{D_1} \delta u'(\tau, s) f_u(\tau, s) K(\tau, s; \alpha, \beta) f_u(\alpha, \beta) \delta u(\alpha, \beta) ds d\tau d\alpha d\beta + \\
 & + 2 \int_{D_1} \left[\int_t^{t_1} \int_x^X \delta u'(\tau, s) H_{uz}(\tau, s, z^0(\tau, s), u^0(\tau, s), \psi_1^0(\tau, s)) R_1(\tau, s; t, x) d\tau ds \right] f_u(t, x) \delta u(t, x) dx dt + \\
 & + \int_{D_1} \delta u'(t, x) H_{uu}(t, x, z^0(t, x), u^0(t, x), \psi_1^0(t, x)) \delta u(t, x) dx dt \leq 0.
 \end{aligned} \tag{51}$$

Теперь предположим, что $\delta u(t, x) \equiv 0$, $\delta v(t, x) \neq 0$. При этом предположении неравенство (37) примет вид:

$$\begin{aligned}
 & \delta y'(t_2, X) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^0(t_2, X))}{\partial y^2} \delta y(t_2, X) - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \left[\delta y'(t, x) M_{yy}(t, x, y^0(t, x), v^0(t, x), \psi_2^0(t, x)) \delta y(t, x) + \right. \\
 & + 2 \delta v'(t, x) M_{vy}(t, x, y^0(t, x), v^0(t, x), \psi_2^0(t, x)) \delta y(t, x) + \\
 & \left. + \delta v'(t, x) M_{vv}(t, x, y^0(t, x), v^0(t, x), \psi_2^0(t, x)) \delta v(t, x) \right] dx dt \geq 0.
 \end{aligned} \tag{52}$$

Используя представление (44) (с учетом того, что $\delta u(t, x) = 0$), получим

$$\begin{aligned}
 & \delta y'(t_2, X) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^0(t_2, X))}{\partial y^2} \delta y(t_2, X) = \\
 & = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \delta v'(\tau, s) g'_v(\tau, s) R'_2(t_2, X; \tau, s) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^0(t_2, X))}{\partial y^2} R_2(t_2, X; \alpha, \beta) g_v(\alpha, \beta) \delta v(\tau, s) ds d\tau d\alpha d\beta, \\
 & \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \delta v'(t, x) M_{vy}(t, x, y^0(t, x), v^0(t, x), \psi_2^0(t, x)) \delta y(t, x) dx dt = \\
 & = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \left[\int_t^{t_2} \int_{x_0}^X \delta v'(\tau, s) M_{vy}(\tau, s, y^0(\tau, s), v^0(\tau, s), \psi_2^0(\tau, s)) R_2(\tau, s; t, x) ds d\tau \right] g_v(t, x) \delta v(t, x) dx dt.
 \end{aligned} \tag{53}$$

Далее имеет место тождество

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^X \delta y'(t, x) M_{yy}(t, x, y^0(t, x), v^0(t, x), \psi_2^0(t, x)) \delta y(t, x) dx dt = \\
 & = \int_{D_1} \int_{D_2} \delta v'(\tau, s) g'_v(\tau, s) \left[\int_{t=\max(\tau, x)}^{t_2} \int_{x=\max(s, \beta)}^X R'_2(t, x; \tau, s) M_{yy}(\tau, s, y^0(\tau, s), v^0(\tau, s), \psi_2^0(\tau, s)) R_2(t, x; \alpha, \beta) dx dt \right] \times \\
 & \quad \times g_v(\alpha, \beta) \delta v(\alpha, \beta) d\alpha d\beta.
 \end{aligned} \tag{54}$$

Введя обозначение

$$N(\tau, s; \alpha, \beta) = \int_{t=\max(\tau, x)}^{\tau_2} \int_{x=\max(s, \beta)}^X R'_2(t, x; \tau, s) M_{yy}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) R_2(t, x; \alpha, \beta) dx dt - \\ - R_2(t_2, x; \tau, s) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^\circ(t_2, X))}{\partial y^2} R_2(t_2, x; \alpha, \beta)$$

и учитывая тождества (53)–(55), из неравенства (52) получим

$$\int_{D_1} \int_{D_1} \delta v'(\tau, s) g'_v(\tau, s) N(\tau, s; \alpha, \beta) g_v(\alpha, \beta) \delta v(\alpha, \beta) d\tau ds d\alpha d\beta + \\ + 2 \int_{D_2} \left[\int_{t=x}^{\tau_2} \int_{x=x}^X \delta v'(\tau, s) M_{vy}(\tau, s, y^\circ(\tau, s), v^\circ(\tau, s), \psi_2^\circ(\tau, s)) R_2(\tau, s; t, x) d\tau ds \right] g_v(t, x) \delta v(t, x) dt dx + \\ + \int_{D_2} \delta v'(t, x) M_{vv}(t, x, y^\circ(t, x), v^\circ(t, x), \psi_2^\circ(t, x)) \delta v(t, x) dx dt \leq 0. \quad (56)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Для оптимальности классической экстремали $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x))$ в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы неравенства (51), (56) выполнялись для всех $\delta u(t, x) \in R^r$, $(t, x) \in D_1$ и $\delta v(t, x) \in R^q$, $(t, x) \in D_2$ соответственно.

Неравенства (51) и (56) являются довольно общими необходимыми условиями оптимальности второго порядка. Из них можно получить ряд более легко проверяемых необходимых условий оптимальности, и в частности аналог условия Лежандра–Клебша.

Теорема 4. (Аналог условия Лежандра–Клебша) Для оптимальности классической экстремали $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x))$ необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$u' H_{uu}(\theta, \xi, x^\circ(\theta, \xi), u^\circ(\theta, \xi), \psi_1^\circ(\theta, \xi)) u \leq 0, \quad (57)$$

для всех $u \in R^r$, $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, X]$,

$$v' M_{vv}(\theta, \xi, y^\circ(\theta, \xi), v^\circ(\theta, \xi), \psi_2^\circ(\theta, \xi)) v \leq 0, \quad (58)$$

для всех $v \in R^q$, $(\theta, \xi) \in [t_1, t_2] \times [x_0, X]$.

Неравенства (57), (58) являются аналогом условия Лежандра–Клебша.

Рассмотрим случай вырождения аналога условия Лежандра–Клебша.

Определение. Классическую экстремаль назовем особым, в классическом смысле, управлением, если для всех $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, X]$ и $u \in R^r$

$$u' H_{uu}(\theta, \xi, x^\circ(\theta, \xi), u^\circ(\theta, \xi), \psi_1^\circ(\theta, \xi)) u = 0, \quad (59)$$

а для всех $(\theta, \xi) \in [t_1, t_2] \times [x_0, X]$ и $v \in R^q$

$$v' M_{vv}(\theta, \xi, y^\circ(\theta, \xi), v^\circ(\theta, \xi), \psi_2^\circ(\theta, \xi)) v = 0. \quad (60)$$

Имеет место

Теорема 5. Для оптимальности особого в классическом смысле, управления $(u^\circ(t, x), v^\circ(t, x))$ необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$u' \left[f'_u(\theta, \xi) K(\theta, \xi; \theta, \xi) f_u(\theta, \xi) + 0,5 H_{uz}(\theta, \xi, z^\circ(\theta, \xi), u^\circ(\theta, \xi), \psi_1^\circ(\theta, \xi)) f_u(\theta, \xi) \right] u \leq 0, \quad (61)$$

для всех $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, X]$, $u \in R^r$,

$$v' \left[g'_v(\theta, \xi) N(\theta, \xi; \theta, \xi) g_v(\theta, \xi) + 0,5 M_{vy}(\theta, \xi, y^\circ(\theta, \xi), v^\circ(\theta, \xi), \psi_2^\circ(\theta, \xi)) g_v(\theta, \xi) \right] v \leq 0, \quad (62)$$

для всех $(\theta, \xi) \in [t_1, t_2] \times [x_0, X]$ и $v \in R^q$.

Докажем, например, соотношение (61). Неравенство (62) доказывается симметричными рассуждениями. Считая $(u^o(t, x), v^o(t, x))$ классически особым оптимальным управлением, вариацию $\delta u(t, x)$ управляющей функции $u^o(t, x)$ определим по формуле

$$\delta u_\mu(t, x) = \begin{cases} u, & (t, x) \in [\theta, \theta + \sqrt{\mu}] \times [\xi, \xi + \sqrt{\mu}], \\ 0, & (t, x) \in D_1 \setminus [\theta, \theta + \sqrt{\mu}] \times [\xi, \xi + \sqrt{\mu}], \end{cases} \quad (63)$$

где $\mu > 0$ достаточно малое произвольное число, такое что $\theta + \sqrt{\mu} < t_1$, $\xi + \sqrt{\mu} < X$, а $u \in R^r$ произвольный вектор.

Принимая во внимание (63) в неравенстве (51) и учитывая (59), после некоторых преобразований получим

$$\mu^2 \left\{ u' \left[f'_u(\theta, \xi) K(\theta, \xi; \theta, \xi) f_u(\theta, \xi) + 0,5 H_{uz}(\theta, \xi, z^o(\theta, \xi), u^o(\theta, \xi), \psi_1^o(\theta, \xi)) f_u(\theta, \xi) \right] u \right\} + o(\mu^2) \leq 0.$$

Отсюда в силу произвольности $\mu > 0$ следует неравенство (61). Этим теорема 5 доказана.

Заключение

В статье рассматривается одна задача оптимального управления, описываемая системой гиперболических уравнений с краевыми условиями Гурса. При предположении открытости областей управления установлены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков. Отдельно изучен случай вырождения аналога условия Лежандра–Клебша. Выведено необходимое условие оптимальности (в классическом смысле особых управлений).

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А.И. Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1964. № 5. С. 613–623.
2. Плотников В.И., Сумин В.И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемые системой Гурса–Дарбу // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. № 1. С. 61–77.
3. Новоженев М.М., Сумин В.И., Сумин М.И. Методы оптимального управления системами математической физики. Горький : Изд-во Горьковского гос. ун-та, 1986. 87 с.
4. Ахмедов К.Т., Ахиев С.С. Необходимые условия оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления // Доклады АН Азербайджанской ССР. 1972. № 5. С. 12–16.
5. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения. Новосибирск : Наука, 1990. Ч. 2: Оптимальное управление. 151 с.
6. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Н. Новгород : Изд-во Нижегородского гос. ун-та, 1992. Ч. 1. 110 с.
7. Срочко В.А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. Иркутск : Изд-во Иркутского гос. ун-та, 1989. 160 с.
8. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Принцип максимума для терминальной задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу в классе функций с суммируемой смешанной производной // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. № 2. С. 52–67.
9. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса–Дарбу. Баку : Изд-во ЭЛМ, 2010. 360 с.
10. Меликов Т.К. Особые в классическом смысле управления в системах Гурса–Дарбу. Баку : Изд-во ЭЛМ, 2003. 96 с.
11. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевич В.В. и др. Методы оптимизации. Минск : Четыре четверти, 2011. 472 с.
12. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М. : Физматлит, 2005. 335 с.
13. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. : Наука, 2013. 256 с.
14. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М. : Высшая школа, 2005. 335 с.
15. Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра. Баку : Изд-во ЭЛМ, 2013. 224 с.
16. Мансимов К.Б. Об одной схеме исследования особого случая в системах Гурса–Дарбу // Известия АН Азербайджана. 1981. № 2. С. 100–104.

17. Мансимов К.Б. Об оптимальности квазиособых управлений в системах Гурса–Дарбу // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, № 11. С. 1952–1960.
18. Мансимов К.Б. Интегральные необходимые условия оптимальности квазиособых управлений в системах Гурса–Дарбу // Автоматика и телемеханика. 1993. № 5. С. 36–43
19. Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности особых процессов в задачах оптимального управления : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Баку, 1994. 42 с.
20. Мансимов К.Б. К теории необходимых условий оптимальности в одной задаче с распределенными параметрами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. № 10. С. 1505–1520.
21. Мансимов К.Б. Условия оптимальности второго порядка в системах Гурса–Дарбу при наличии ограничений // Дифференциальные уравнения. 1990. № 6. С. 954–965.
22. Мордухович Б.И. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М. : Наука, 1988. 359 с.
23. Ахиев С.С., Ахмедов К.Т. Об интегральном представлении решений некоторых дифференциальных уравнений // Известия АН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и матем. наук. 1973. № 2. С. 116–120.

Поступила в редакцию 8 апреля 2018 г.

Mansimov K.B., Suleymanova Sh.Sh. (2018) TO THE OPTIMALITY OF SINGULAR CONTROLS IN THE CLASSICAL SENSE IN ONE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL OF SYSTEMS WITH VARIABLE STRUCTURE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 44. pp. 10–24

DOI: 10.17223/19988605/44/2

The paper deals with the problem of the minimization the functional

$$S(u, v) = \varphi_1(z(t_1, X)) + \varphi_2(y(t_2, X)),$$

under constraints

$$\begin{aligned} u(t, x) &\in U \subset R^r, \quad (t, x) \in D_1 = [t_0, t_1] \times [x_0, X], \\ v(t, x) &\in V \subset R^q, \quad (t, x) \in D_2 = [t_1, t_2] \times [x_0, X], \\ z_{tx} &= f(t, x, z, u), \quad (t, x) \in D_1, \\ z(t_0, x) &= a(x), \quad x \in [x_0, X], \\ z(t, x_0) &= b_1(t), \quad t \in [t_0, t_1], \\ y_{tx} &= g(t, x, y, v), \quad (t, x) \in D_2, \\ y(t_1, x) &= G(z(t_1, x)), \quad x \in [x_0, X], \\ y(t, x_0) &= b_2(t), \quad t \in [t_1, t_2], \\ G(z(t_1, x_0)) &= b_2(t_1). \end{aligned}$$

Here $f(t, x, z, u)$, $(g(t, x, y, v))$ is a given n (m)-dimensional vector-function continuous in $D_1 \times R^n \times R^r$ ($D_2 \times R^m \times R^q$) together with their partial derivatives with respect to (z, u) ((y, v)) up to the second order inclusive, $G(z)$ is a given twice continuously differentiable in R^n m -dimensional vector-function, $a(x)$, $b_i(t)$, $i = 1, 2$, are given vector-functions of the corresponding dimensions satisfying a Lipschitz condition with some constants, t_0, t_1, t_2 , x_0, X are given, so that $t_0 < t_1 < t_2$, $x_0 < X$, control vector-function $u(t, x)$ ($v(t, x)$) everywhere is Lebesgue measurable on a rectangle D_1 (D_2), U (V) is a given non-empty, open, and bounded set.

When the control domain is open, the first and second orders necessary optimality conditions are derived. Optimal singular controls in the classical sense are studied.

Keywords: Goursat–Darboux system; singular control the classical sense; necessary optimality conditions; variation of the functional; equations in variations.

MANSIMOV Kamil Bayramali ogly (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Baku State University, Institute of Control Problems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan).
E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

SULEYMANOVA Shabnam Shakir gyzy (Institute of Control problems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan).
E-mail: kmansimov@mail.ru

REFERENCES

1. Egorov, A.I. (1964) Ob optimal'nom upravlenii protsessami v nekotorykh sistemakh s raspredelennymi parametrami [On the optimal control of processes in some systems with distributed parameters]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 5. pp. 613–623.
2. Plotnikov, V.I. & Sumin, V.I. (1972) The optimization of objects with distributed parameters, described by Goursat–Darboux systems. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1. pp. 61–77. (In Russian).
3. Novozhenov, M.M., Sumin, V.I. & Sumin, M.I. (1986) *Metody optimal'nogo upravleniya sistemami matematicheskoy fiziki* [Methods of optimal control of systems of mathematical physics]. Gorkiy: Gorky State University.
4. Akhmedov, K.T. & Akhiyev, S.S. (1972) Neobkhodimyye usloviya optimal'nosti dlya nekotorykh zadach teorii optimal'nogo upravleniya [Necessary optimality conditions for some problems in optimal control theory]. *Doklady AN Azerbaydzhanskoj SSR*. 5. pp. 12–16.
5. Vasilyev, O.V., Srochko, V.A. & Terletskiy, V.A. (1990) *Metody optimizatsii i ikh prilozheniya* [Optimization methods and their applications]. Vol. 2. Novosibirsk: Nauka.
6. Sumin, V.I. (1992) *Funktsional'nyye vol'terrovyye uravneniya v teorii optimal'nogo upravleniya raspredelennymi sistemami* [Functional Volterra equations in the theory of optimal control of distributed systems]. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University.
7. Srochko, V.A. (1989) *Variatsionnyy printsip maksimuma i metody linearizatsii v zadachakh optimal'nogo upravleniya* [Variational Maximum Principle and Linearization Methods in Optimal Control Problems]. Irkutsk: Irkutsk State University.
8. Lisachenko, I.V. & Sumin, V.I. (2011) The maximum principle for terminal optimization problem connected with Goursat–Darboux system in the class of functions having summable mixed derivatives. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 2. pp. 52–67. (In Russian).
9. Mansimov, K.B. & Mardanov, M.J. (2010) *Kachestvennaya teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami Gursa–Darbu* [Qualitative theory of optimal control of Goursat–Darboux systems]. Baku: ELM.
10. Melikov, T.K. (2003) *Osobyie v klassicheskom smysle upravleniya v sistemakh Gursa–Darbu* [Special in the classical sense of control in Goursat–Darboux systems]. Baku: ELM.
11. Gabasov, R., Kirillova, F.M., Alsevizh, V.V. & etc. (2011) *Metody optimizatsii* [Methods of optimization]. Minsk: Chetyre chetverti.
12. Alekseyev, V.M., Fomin, S.V. & Tikhomirov, V.M. (1979) *Optimal'noye upravleniye* [Optimal control]. Moscow: Nauka.
13. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (1973) *Osobyie optimal'nyye upravleniya* [Special optimal controls]. Moscow: Nauka.
14. Demyanov, V.F. (2005) *Usloviya ekstremuma i variatsionnoye ischisleniye* [Extremum conditions and calculus of variations]. Moscow: Vysshaya Shkola.
15. Abdullayev, A.A. & Mansimov, K.B. (2013) *Neobkhodimyye usloviya optimal'nosti v protsessakh, opisyyemykh sistemoy integral'nykh uravneniy tipa Vol'terra* [Necessary optimality conditions in processes described by a system of integral equations of Volterra type]. Baku: ELM.
16. Mansimov, K.B. (1981) Ob odnoy skheme issledovaniya osobogo sluchaya v sistemakh Gursa–Darbu [On a scheme for investigating a special case in Goursat–Darboux systems]. *Izvestiya AN Azerbaidjana*. 2. pp. 100–104.
17. Mansimov, K.B. (1986) Optimality of quasisingular controls in Goursat–Darboux systems. *Differentsial'nyye uravneniya – Differential Equations*. 22(11). pp. 1952–1960. (In Russian).
18. Mansimov, K.B. (1993) Integral necessary conditions for optimality of quasi-singular controls in Goursat–Darboux systems. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 5. pp. 36–43. (In Russian).
19. Mansimov, K.B. (1994) *Neobkhodimyye usloviya optimal'nosti osobnykh protsessov v zadachakh optimal'nogo upravleniya* [Necessary conditions for optimality of special processes in optimal control problems]. Abstract of Physics and Mathematics Dr. Diss. Baku.
20. Mansimov, K.B. (2001) On the theory of necessary optimality conditions in a problem with distributed parameters. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 10. pp. 1505–1520. (In Russian).
21. Mansimov, K.B. (1990) Conditions for second-order optimality in Goursat–Darboux systems in the presence of constraints. *Differentsial'nyye uravneniya – Differential Equations*. 6. pp. 954–965. (In Russian).
22. Mordukhovich, B.Sh. (1988) *Metody aproksimatsiy v zadachakh optimizatsii i upravleniya* [Approximation methods in optimization and control problems]. Moscow: Nauka.
23. Akhiyev, S.S. & Akhmedov, K.T. (1973) Ob integral'nom predstavlenii resheniy nekotorykh differentsial'nykh uravneniy [On the integral representation of solutions of certain differential equations]. *Izvestiya AN Azerbaidjana. Seriya Fiziko-Tekhnicheskikh i Matematicheskikh Nauk*. 2. pp. 116–120.

УДК 517.935.2+517.977.1
DOI: 10.17223/19988605/44/3

Е.А. Перепелкин

УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРОМ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО УСКОРЕНИЮ

Решается задача управления спектром системы второго порядка с обратной связью по вектору ускорения. Установлены ограничения, накладываемые на спектр замкнутой системы. Описан алгоритм расчета матрицы обратной связи, который сводится к последовательному решению квадратного уравнения и системы линейных алгебраических уравнений. Приводится пример решения задачи управления спектром механической системы.
Ключевые слова: система второго порядка; управление спектром; обратная связь по ускорению.

Задача управления спектром линейной стационарной динамической системы в случае статической обратной связи по выходу относится к трудно решаемым задачам математической теории управления [1]. Эту задачу можно рассматривать как обратную проблему собственных значений [2]. Подобного рода задачи встречаются не только в теории автоматического управления, но и в механике, физике, обработке сигналов, вычислительной математике.

Обратная проблема собственных значений, как правило, сводится к решению систем нелинейных алгебраических уравнений. В отличие от систем линейных алгебраических уравнений системы нелинейных алгебраических уравнений могут не иметь действительных решений или иметь конечное число таких решений. Поиск всех действительных решений системы нелинейных алгебраических уравнений в общем случае является достаточно сложной вычислительной задачей.

В данной работе решается задача управления спектром системы второго порядка с двумя переменными входа и двумя переменными выхода. Предполагается, что измерению доступны вторые производные переменных выхода. Управление строится в виде статической обратной связи по вектору измерений. Такого вида обратную связь принято называть обратной связью по ускорению.

В работе рассматриваются условия существования решения задачи управления спектром и ограничения, накладываемые на спектр замкнутой системы. Описывается алгоритм расчета матрицы обратной связи, который сводится к последовательному решению квадратного уравнения и системы линейных алгебраических уравнений.

Аналогичный метод синтеза обратной связи по выходу для системы, заданной передаточной функцией, описан в работе [3]. Необходимо также отметить работы [4–6], в которых представлено решение задачи управления спектром для систем второго порядка с обратной связью по скорости и ускорению. В этом случае синтез обратной связи может быть осуществлен на основе решения линейных матричных уравнений или линейных матричных неравенств. Для систем со статической обратной связью по ускорению этот подход неприменим.

Данная статья дополняет работу [7], в которой получено решение задачи управления спектром системы второго порядка в случае статической обратной связи по выходу.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную динамическую систему, поведение которой описывается уравнением

$$A_0 \ddot{y} + A_1 \dot{y} + A_2 y = Bu,$$

где u , y – 2-векторы входа и выхода, A_0 , A_1 , A_2 , B – (2×2) -матрицы с вещественными элементами. Управление будем искать в виде обратной связи по вектору вторых производных

$$u = -F \ddot{y},$$

где F – (2×2) -матрица обратной связи с вещественными элементами. Замкнутая обратной связью система описывается уравнением

$$(A_0 + BF)\ddot{y} + A_1\dot{y} + A_2y = 0.$$

Под спектром разомкнутой системы будем понимать корни характеристического многочлена разомкнутой системы

$$a(s) = \det(A(s)), \quad A(s) = A_0s^2 + A_1s + A_2.$$

Под спектром замкнутой системы будем понимать корни характеристического многочлена замкнутой системы

$$b(s) = \det(A(s) + BF s^2).$$

Будем считать, что $\det A_0 \neq 0$, и будем рассматривать только те матрицы обратной связи, при которых $\det(A_0 + BF) \neq 0$. В этом случае спектры разомкнутой и замкнутой систем состоят из четырех чисел, $\deg a(s) = \deg b(s) = 4$.

Задача управления спектром заключается в выборе матрицы обратной связи F , при которой корни многочлена $b(s)$ совпадают с заданным набором комплексных чисел $S = \{s_1; s_2; s_3; s_4\}$. Коэффициенты многочлена $b(s)$ действительные, поэтому комплексные числа s_i должны входить в набор S комплексно сопряженными парами. Для обеспечения асимптотической устойчивости замкнутой системы необходимо также, чтобы числа s_i находились в левой части комплексной плоскости.

2. Алгоритм синтеза обратной связи

Запишем матрицы A, B, F поэлементно:

$$A(s) = \begin{bmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$b(s) = a(s) + c_1(s)f_{11} + c_2(s)f_{12} + c_3(s)f_{21} + c_4(s)f_{22} + c_5(s)(f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}),$$

где

$$\begin{aligned} a(s) &= a_{11}(s)a_{22}(s) - a_{21}(s)a_{12}(s), & c_1(s) &= (a_{22}(s)b_{11} - a_{12}(s)b_{21})s^2, \\ c_2(s) &= (a_{11}(s)b_{21} - a_{21}(s)b_{11})s^2, & c_3(s) &= (a_{22}(s)b_{12} - a_{12}(s)b_{22})s^2, \\ c_4(s) &= (a_{11}(s)b_{22} - a_{21}(s)b_{12})s^2, & c_5(s) &= (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})s^4. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} a(s) &= a_0s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4, & c_1(s) &= c_{10}s^4 + c_{11}s^3 + c_{12}s^2, \\ c_2(s) &= c_{20}s^4 + c_{21}s^3 + c_{22}s^2, & c_3(s) &= c_{30}s^4 + c_{31}s^3 + c_{32}s^2, \\ c_4(s) &= c_{40}s^4 + c_{41}s^3 + c_{42}s^2, & c_5(s) &= c_{50}s^4. \end{aligned}$$

Следовательно, коэффициенты характеристического многочлена замкнутой системы

$$b(s) = b_0s^4 + b_1s^3 + b_2s^2 + b_3s + b_4$$

равны

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 + c_{10}f_{11} + c_{20}f_{12} + c_{30}f_{21} + c_{40}f_{22} + c_{50}(f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}), \\ b_1 &= a_1 + c_{11}f_{11} + c_{21}f_{12} + c_{31}f_{21} + c_{41}f_{22}, \\ b_2 &= a_2 + c_{12}f_{11} + c_{22}f_{12} + c_{32}f_{21} + c_{42}f_{22}, \\ b_3 &= a_3, \quad b_4 = a_4. \end{aligned}$$

Составим многочлен

$$\bar{b}(s) = b_0(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4) = b_0(s^4 + \bar{b}_1s^3 + \bar{b}_2s^2 + \bar{b}_3s + \bar{b}_4),$$

где s_1, s_2, s_3, s_4 – желаемый спектр замкнутой системы. Приравняем коэффициенты многочленов $b(s)$ и $\bar{b}(s)$. Получим систему уравнений

$$b_0 \bar{b}_1 = b_1, \quad b_0 \bar{b}_2 = b_2, \quad b_0 \bar{b}_3 = a_3, \quad b_0 \bar{b}_4 = a_4. \quad (1)$$

Система уравнений (1) является системой нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов обратной связи $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$.

Будем считать, что $a_4 = \det A_2 \neq 0$. Это означает, что спектр разомкнутой системы не содержит нулевых чисел. Из равенств (1) следует, что корни многочлена $\bar{b}(s)$ связаны соотношением

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_4} = -\frac{a_3}{a_4}. \quad (2)$$

Соотношение (2) накладывает ограничение на спектр замкнутой системы. Пусть соотношение (2) выполняется. Тогда в системе уравнений (1) можно оставить первые три уравнения. Запишем эту систему уравнений в матричном виде:

$$Cf = p + qg. \quad (3)$$

Здесь

$$C = \begin{bmatrix} c_{10}\bar{b}_1 - c_{11} & c_{20}\bar{b}_1 - c_{21} & c_{30}\bar{b}_1 - c_{31} & c_{40}\bar{b}_1 - c_{41} \\ c_{10}\bar{b}_2 - c_{12} & c_{20}\bar{b}_2 - c_{22} & c_{30}\bar{b}_2 - c_{32} & c_{40}\bar{b}_2 - c_{42} \\ c_{10}\bar{b}_3 & c_{20}\bar{b}_3 & c_{30}\bar{b}_3 & c_{40}\bar{b}_3 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{bmatrix},$$

$$p = \begin{bmatrix} a_1 - a_0 \bar{b}_1 \\ a_2 - a_0 \bar{b}_2 \\ a_3 - a_0 \bar{b}_3 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} -c_{50} \bar{b}_1 \\ -c_{50} \bar{b}_2 \\ -c_{50} \bar{b}_3 \end{bmatrix}, \quad g = f_{11} f_{22} - f_{21} f_{12}.$$

Пусть строки матрицы C линейно независимы, $\text{rank } C = 3$. Тогда при заданном значении g система уравнений (3) имеет бесконечно много решений. Частное решение, обладающее минимальной нормой, можно построить с помощью псевдообратной матрицы

$$f = C^+(p + qg), \quad C^+ = C^T(CC^T)^{-1}. \quad (4)$$

Введем матрицу

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Неизвестную переменную g можно записать в виде квадратичной формы:

$$g = f^T G f. \quad (5)$$

Подставим (4) в (5). Получим уравнение

$$r_0 g^2 + r_1 g + r_2 = 0, \quad (6)$$

где

$$r_0 = q^T (C^+)^T G C^+ q, \quad r_1 = p^T (C^+)^T G C^+ q + q^T (C^+)^T G C^+ p - 1, \\ r_2 = p^T (C^+)^T G C^+ p.$$

Пусть $r_1^2 - 4r_0 r_2 \geq 0$. Тогда существует одно или два действительных решения g уравнения (6), для которых мы можем получить вещественные решения уравнения (3)

$$f = C^+(p + qg),$$

и, соответственно, матрицы обратной связи, при которых корни характеристического многочлена замкнутой системы совпадают с заданным набором комплексных чисел S .

3. Пример

Рассмотрим двухмассовую механическую систему с активным демпфированием, движение которой в окрестности положения равновесия подчиняется уравнениям

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= -k_1 y_1 - d_1 \dot{y}_1 + k_2 (y_2 - y_1) + d_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + u_1 - u_2, \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -k_2 (y_2 - y_1) - d_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + u_2, \end{aligned}$$

где y_1, y_2 – отклонения масс от положения равновесия (м); u_1, u_2 – управляющие силы; m_1, m_2 – значения масс (кг); k_1, k_2 – коэффициенты жесткости (Н/м); d_1, d_2 – коэффициенты демпфирования (Нс/м).

Матрицы системы равны

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 \\ -d_2 & d_2 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Характеристический многочлен разомкнутой системы:

$$\begin{aligned} a(s) &= m_1 m_2 s^4 + ((d_1 + d_2)m_2 + d_2 m_1)s^3 + ((k_1 + k_2)m_2 + k_2 m_1 + d_1 d_2)s^2 + \\ &\quad + (k_1 d_2 + k_2 d_1)s + k_1 k_2. \end{aligned}$$

Характеристический многочлен замкнутой системы:

$$\begin{aligned} b(s) &= (m_2 f_{11} + m_1 f_{22} - m_2 f_{21} + f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21} + m_1 m_2)s^4 + \\ &\quad + (d_2 f_{11} + d_2 f_{12} + d_1 f_{22} + (d_1 + d_2)m_2 + d_2 m_1)s^3 + \\ &\quad + (k_2(f_{11} + f_{12}) + k_1 f_{22} + (k_1 + k_2)m_2 + k_2 m_1 + d_1 d_2)s^2 + \\ &\quad + (k_1 d_2 + k_2 d_1)s + k_1 k_2. \end{aligned}$$

Ограничение (2) принимает вид:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_4} = -\frac{k_1 d_2 + k_2 d_1}{k_1 k_2}. \quad (7)$$

Пусть $m_1 = 2, m_2 = 3, k_1 = 2, k_2 = 4, d_1 = 3, d_2 = 5$. Спектр разомкнутой системы равен

$$s_1 = -4,242; \quad s_2 = -0,94; \quad s_3 = -0,24 + 0,53i; \quad s_4 = -0,24 - 0,53i.$$

Зададим желаемый спектр замкнутой системы в виде

$$s_1 = -v + wi; \quad s_2 = -v - wi; \quad s_3 = s_1; \quad s_4 = s_2.$$

Из соотношения (7) следует

$$w^2 = \frac{4k_1 k_2}{k_1 d_2 + k_2 d_1} v - v^2.$$

Например, при $v = 1$ получим $w = 0,67$. Составим многочлен, корнями которого являются числа

$$s_1 = -1 + 0,67i; \quad s_2 = -1 - 0,67i; \quad s_3 = s_1; \quad s_4 = s_2.$$

Ранг матрицы C равен 3, уравнение (6) имеет вещественные решения $g_1 = -8,28; g_2 = -6,1$. Соответственно находим две матрицы обратной связи:

$$F = \begin{bmatrix} -0,348 & -3,09 \\ -2,74 & -0,563 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -0,59 & -2,85 \\ -2,26 & -0,563 \end{bmatrix},$$

при которых спектр замкнутой системы совпадает с заданными числами.

Заключение

В работе показано, что спектр системы второго порядка с обратной связью по ускорению нельзя назначить произвольно. При выборе допустимого спектра матрицу обратной связи можно найти, решая

последовательно две алгебраические задачи – квадратное уравнение и систему линейных алгебраических уравнений. В результате при определенных условиях можно получить две матрицы обратной связи, которые обеспечивают заданный спектр замкнутой системы.

Результаты работы могут найти применение при решении задач управления колебаниями механических систем на основе сигналов датчиков ускорений, что подтверждается рассмотренным в статье примером решения задачи управления спектром двухмассовой механической системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика. 2005. № 5. С. 7–46.
2. Chu M., Golub G. Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Application. Oxford : Oxford University Press, 2005. 387 p.
3. Wang Q.-G., Lee T., Hang C. Pole assignment by output feedback: a solution for 2×2 plants // Automatica. 1993. V. 29, № 6. P. 1599–1601.
4. Abdelaziz T.H.S. Robust pole placement for second-order linear systems using velocity-plus-acceleration feedback // IET Control Theory & Applications. 2013. V. 7, № 14. P. 1843–1856.
5. Abdelaziz T.H.S. Robust pole assignment using velocity–acceleration feedback for second-order dynamical systems with singular mass matrix // ISA Transactions. 2015. V. 57. P. 71–84.
6. Zhang J., Ouyang H., Zhang Y., Ye J. Partial quadratic eigenvalue assignment in vibrating systems using acceleration and velocity feedback // Inverse Problems in Science and Engineering. 2015. V. 23, № 3. P. 479–497.
7. Перепелкин Е.А. О задаче управления спектром системы второго порядка // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 11. С. 1555–1558.

Поступила в редакцию 9 марта 2018 г.

Perepelkin E.A. (2018) POLE ASSIGNMENT FOR SECOND-ORDER SYSTEM BY ACCELERATION FEEDBACK. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 44. pp. 25–30

DOI: 10.17223/19988605/44/3

Pole assignment problem for a linear stationary dynamical system with static output feedback belongs to the hard-to-solve problems of mathematical control theory. In general case this problem is reduced to solving systems of nonlinear algebraic equations.

In this paper pole assignment problem for a second-order system with acceleration feedback is solved. The system, the behavior of which is described by the equation

$$A_0 \ddot{y} + A_1 \dot{y} + A_2 y = Bu,$$

is considered, where u, y are 2-vectors of input and output, A_0, A_1, A_2, B are 2×2 -matrices with real elements. It is proposed to construct control law in the form of feedback with respect to the second derivative vector, acceleration vector:

$$u = -F \ddot{y},$$

where F is a feedback 2×2 -matrix with real elements.

The spectrum of open-loop system is the roots of the polynomial

$$a(s) = \det(A_0 s^2 + A_1 s + A_2) = a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4.$$

The spectrum of closed-loop system is the roots of the polynomial

$$b(s) = \det((A_0 + BF)s^2 + A_1 s + A_2).$$

Pole assignment problem is to selecting a feedback matrix F under which the roots of the polynomial $b(s)$ coincide with a given set of complex numbers $S = \{s_1; s_2; s_3; s_4\}$.

It is shown that the spectrum of a closed-loop system have to satisfy the relation

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_4} = -\frac{a_3}{a_4}.$$

If this relation is satisfied, then the solution of pole assignment problem reduces to the sequential solution of the square equation and the system of linear algebraic equations. The conditions under which there exist real feedback matrices providing a given spectrum of a closed-loop system are determined.

The results of the paper can be applied in solving the problems of vibration control of mechanical systems based on the signals of acceleration sensor that is confirmed by the example of solving pole assignment problem of a two-mass mechanical system.

Keywords: second-order system; pole assignment; acceleration feedback.

PEREPELKIN Evgenii Alexandrovich (Doctor of Technical Science, Professor, Polzunov Altai State Technical University, Barnaul, Russian Federation).

E-mail: eap@list.ru

REFERENCES

1. Polyak, B.T. & Shcherbakov, P.S. (2005) Hard Problems in Linear Control Theory: Possible Approaches to Solution. *Automation and Remote Control*. 66(5). pp. 681–718. DOI: 10.1007/s10513-005-0115-0
2. Chu, M. & Golub, G. (2005) *Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Application*. Oxford: Oxford University Press.
3. Wang, Q.-G., Lee, T. & Hang, C. (1993) Pole assignment by output feedback: A solution for 2x2 plants. *Automatica*. 29(6). pp. 1599–1601.
4. Abdelaziz, T.H.S. (2013) Robust pole placement for second-order linear systems using velocity-plus-acceleration feedback. *IET Control Theory & Applications*. 7(14). pp. 1843–1856. DOI: 10.1049/iet-cta.2013.0039
5. Abdelaziz, T.H.S. (2015) Robust pole assignment using velocity–acceleration feedback for second-order dynamical systems with singular mass matrix. *ISA Transactions*. 57. pp. 71–84. DOI: 10.1016/j.isatra.2014.11.015
6. Zhang, J., Ouyang, H., Zhang, Y. & Ye, J. (2015) Partial quadratic eigenvalue assignment in vibrating systems using acceleration and velocity feedback. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 23(3). pp. 479–497. DOI: 10.1080/17415977.2014.922076
7. Perepelkin, E.A. (2017) Pole assignment problem of a second order system. *Differential Equations*. 53(11). pp. 1524–1527. (In Russian). DOI: 10.1134/S0012266117110167

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.2

DOI: 10.17223/19988605/44/4

К.С. Ким, В.И. Смагин

РОБАСТНАЯ ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ СКАЧКООБРАЗНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И НЕИЗВЕСТНЫМ ВХОДОМ

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ № 17-08-00920.

Рассматривается алгоритм синтеза робастного экстраполятора, определяющего оценку вектора состояния дискретной линейной системы со случайными скачкообразными параметрами, описываемыми цепью Маркова с конечным числом состояний. Коэффициенты передачи экстраполятора предлагается выбирать из условия минимума суммы квадратичных форм ошибок экстраполяции, осуществляя при этом усреднение по вероятностям состояния скачкообразного параметра, с использованием алгоритмов рекуррентного оценивания с неизвестным входом.

Ключевые слова: дискретная модель; квадратичный критерий; робастная экстраполяция; скачкообразные параметры; неизвестный вход.

Задачи построения оценок и синтеза управлений для объектов с непрерывным временем и параметрами со скачками рассматривались в работах [1–4]. Подобные проблемы изучались для дискретных систем в работах [5–9]. В настоящей работе рассмотрена задача синтеза робастного экстраполятора для дискретного объекта со случайными скачкообразными параметрами с конечным числом состояний. Решены задачи синтеза стационарного экстраполятора, а также синтеза нестационарного экстраполятора для конечного интервала при точной диагностике скачкообразного параметра и при диагностике с ошибками.

1. Постановка задачи

Пусть модель объекта описывается разностным уравнением:

$$x(k+1) = A_\gamma x(k) + U_\gamma(k) + f(k) + q_\gamma(k), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^m$ – вектор состояния, γ – марковская цепь с n состояниями $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$; $U_\gamma(k)$ – известный вход; $f(k)$ – неизвестный вход; x_0 – случайный вектор (предполагаются известными дисперсии $N_{0,i} = M\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T / \gamma = \gamma_i\}$, $i = \overline{1, n}$ и математическое ожидание $\bar{x}_0 = M\{x_0\}$); A_γ – заданная матрица; $q_\gamma(k)$ – вектор случайных возмущений со следующими характеристиками: $M\{q_\gamma(k)\} = 0$, $M\{q_\gamma(k)q_\gamma^T(k)\} = Q_\gamma \delta_{kj}$ ($M\{\cdot\}$ – математическое ожидание, δ_{kj} – символ Кронекера).

Канал наблюдений имеет вид:

$$y(k) = S_\gamma x(k) + v_\gamma(k), \quad (2)$$

где $v_\gamma(k)$ – вектор случайных ошибок наблюдений, независимый от $q_\gamma(k)$, с характеристиками: $M\{v_\gamma(k)\} = 0$, $M\{v_\gamma(k)v_\gamma^T(k)\} = V_\gamma \delta_{kj}$.

Вероятность $p_i(k) = P\{\gamma(k) = i\}$, $i = \overline{1, n}$ удовлетворяет уравнению

$$p_i(k+1) = \sum_{j=1}^n p_{ij} \cdot p_j(k), \quad p_i(0) = p_{i,0}, \quad (3)$$

где p_{ij} – вероятность перехода из состояния i в состояние j за один такт времени, $p_{i,0}$ – начальная вероятность i -го состояния.

По информации, поступившей в момент k , требуется найти оценку состояния прогноза $\hat{x}(k+1)$ на основе минимизации следующего критерия:

$$J[0; T_f] = M \left\{ \left[\sum_{k=0}^{T_f} \sum_{i=1}^n p_i(k) e^T(k) R_i(k) e(k) + \sum_{i=1}^n p_i(T_f) e^T(T_f) L_i(T_f) e(T_f) \right] / \gamma(0) = \gamma_0 \right\}, \quad (4)$$

где $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$, $R_i(k) > 0$ и $L_i(T_f) > 0$ – весовые матрицы, γ_0 – начальное значение переменной γ .

Задача экстраполяции рассматривается, когда значение γ идентифицируется точно и с ошибками.

2. Синтез оптимального экстраполятора для конечного интервала

Для построения оценки будем использовать экстраполятор Калмана

$$\hat{x}(k+1) = A_\gamma \hat{x}(k) + U(k) + \hat{f}(k) + K(k)(y(k) - S_\gamma \hat{x}(k)), \quad \hat{x}(0) = \bar{x}_0, \quad (5)$$

где $K(k)$ – матрица коэффициентов передачи экстраполятора, зависящая от k и не зависящая от $\gamma(k)$.

Введем обозначения для матриц $Q_\gamma, V_\gamma, R_\gamma, N_\gamma, L_\gamma, A_\gamma, S_\gamma$ при $\gamma = \gamma_i: Q_i, V_i, R_i, N_i, L_i, A_i, S_i$, соответственно ($i = \overline{1, n}$).

Теорема. Пусть существуют положительно определенные матрицы N_i и L_i , являющиеся решением двухточечной краевой задачи:

$$N_i(k+1) = (A_i - K(k)S_i) \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} N_j(k) \right) (A_i - K(k)S_i)^T + Q_i + K(k)V_i K(k)^T, \quad N_i(0) = N_0. \quad (6)$$

$$L_i(k) = (A_i - K(k)S_i)^T \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} L_j(k+1) \right) (A_i - K(k)S_i) + R_i, \quad L_i(T_f) = L_{T,i}. \quad (7)$$

Тогда вектор $\text{ct}(K(k))$, составленный из строк матрицы $K(k)$, определится по формуле

$$\begin{aligned} \text{ct}(K(k)) = & \left(\sum_{i=1}^n p_i(k+1) [L_i(k+1) \otimes S_i \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} N_j(k) \right) S_i^T + L_i(k+1) \otimes V_i] \right)^{-1} \times \\ & \times \text{ct} \left(\sum_{i=1}^n p_i(k+1) L_i(k+1) A_i \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} N_j(k) \right) S_i^T \right). \end{aligned} \quad (8)$$

В (8) $\otimes$ – операция кронекеровского произведения.

Доказательство. Представим критерий (3) в виде суммы

$$J[0; T_f] = \sum_{i=1}^n J_i[k; T_f], \quad k = \overline{0, T_f}. \quad (9)$$

В (9) $J_i[k; T_f]$ определяются по формуле

$$J_i[k; T_f] = \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \text{tr} p_i(\xi) N_i(\xi) R_i(\xi) + \text{tr} p_i(T_f) N_i(T_f) L_i(T_f), \quad (10)$$

где tr – след матрицы.

Введем функцию Ляпунова следующего вида:

$$W(k, N_i(k)) = \text{tr} p_i(k) N_i R_i(k) + \text{tr} \sum_{t=k}^{T_f} p_i(t) \bar{\Psi}_i(t) L_i(t), \quad (11)$$

где $L_i(t)$ – удовлетворяет (7), $\bar{\Psi}_i(t) = Q_i + K(t)V_i K(t)^T + \Psi_i(t)$ (здесь $\Psi_i(t)$ – некоторая положительно определенная матрица).

Просуммируем по $k = \overline{t, T_f - 1}$ конечные разности функции $W(k, N_i(k))$, учитывая формулу (7):

$$\begin{aligned} \sum_{k=t}^{T_f-1} \Delta W(k, N_i(k)) &= \sum_{k=t}^{T_f-1} [W(k+1, N_i(k+1)) - W(k, N_i(k))] = \\ &= \sum_{k=t}^{T_f-1} \text{tr}[p_i(k+1)N_i(k+1)L_i(k+1) - p_i(k)N_i(k)L_i(k) - p_i(k)\bar{\Psi}_i(k)L_i(k)]. \end{aligned} \quad (12)$$

С другой стороны, данное выражение можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{k=t}^{T_f-1} \Delta W(k, N_i(k)) &= W(t+1, N_i(t+1)) - W(t, N_i(t)) + \dots + W(T_f, N_i(T_f)) - W(T_f-1, N_i(T_f-1)) = \\ &= \text{tr } p_i(T_f)N_i(T_f)L_i(T_f) - \text{tr } p_i(t)N_i(t)L_i(t) - \text{tr} \sum_{\xi=t}^{T_f-1} p_i(\xi)\bar{\Psi}_i(\xi)L_i(\xi). \end{aligned} \quad (13)$$

Подставим в формулу (10) разность (12) и, учитывая (13), получим:

$$\begin{aligned} J_i[k; T_f] &= \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \text{tr } p_i(\xi)N_i(\xi)R_i(\xi) + \text{tr } p_i(T_f)N_i(T_f)L_i(T_f) + \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \text{tr}[p_i(\xi+1)N_i(\xi+1)L_i(\xi+1) - \\ &\quad - p_i(\xi)N_i(\xi)L_i(\xi) - p_i(\xi)\bar{\Psi}_i(\xi)L_i(\xi)] - [\text{tr } p_i(T_f)N_i(T_f)L_i(T_f) - \text{tr } p_i(k)N_i(k)L_i(k) - \\ &\quad - \text{tr} \sum_{\xi=k}^{T_f-1} p_i(\xi)\bar{\Psi}_i(\xi)L_i(\xi)] = \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \text{tr } p_i(\xi)N_i(\xi)R_i(\xi) + \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \text{tr } p_i(\xi+1)N_i(\xi+1)L_i(\xi+1) - \sum_{\xi=k+1}^{T_f-1} \text{tr } p_i(\xi)N_i(\xi)L_i(\xi). \end{aligned} \quad (14)$$

Критерий (10), с учетом (14) и (6), представим в виде:

$$\begin{aligned} J[0; T_f] &= \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \text{tr } p_i(\xi)N_i(\xi)R_i(\xi) - \sum_{\xi=k+1}^{T_f-1} \text{tr } p_i(\xi)N_i(\xi)L_i(\xi) + \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \text{tr } p_i(\xi+1) \times \right. \\ &\quad \times [(A_i - K(\xi)S_i)(\sum_{j=1}^n p_{i,j}N_j(\xi))(A_i - K(\xi)S_i)^T + Q_i + K(\xi)V_iK(\xi)^T]L_i(\xi+1) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Используя правила дифференцирования функции след tr от произведения матриц:

$$\frac{\partial \text{tr } AXB}{\partial X} = A^T B^T, \quad \frac{\partial \text{tr } A^T X B^T}{\partial X} = BA,$$

вычислим производную по $K(k)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial K(k)} &= \sum_{\xi=k}^{T_f-1} \sum_{i=1}^n [-L_i(\xi+1)p_i(\xi+1)A_i(\sum_{j=1}^n p_{i,j}N_j(\xi))S_i^T - p_i(\xi+1)L_i(\xi+1)A_i(\sum_{j=1}^n p_{i,j}N_j(\xi))S_i^T + \\ &\quad + p_i(\xi+1)L_i(\xi+1)K(\xi)S_i(\sum_{j=1}^n p_{i,j}N_j(\xi))S_i^T + L_i(\xi+1)p_i(\xi+1)K(\xi)S_i(\sum_{j=1}^n p_{i,j}N_j(\xi))S_i^T + \\ &\quad + p_i(\xi+1)L_i(\xi+1)K(\xi)V_i + L_i(\xi+1)p_i(\xi+1)K(\xi)V_i]. \end{aligned} \quad (16)$$

Приравняв эту производную нулю и полагая, что каждое слагаемое суммирования по i равно нулю, получим уравнения для определения матрицы $K(k)$:

$$\begin{aligned} p_i(\xi+1)L_i(\xi+1)K(\xi)S_i(\sum_{j=1}^n p_{i,j}N_j(\xi))S_i^T + p_i(\xi+1)L_i(\xi+1)K(\xi)V_i + L_i(\xi+1)p_i(\xi+1)K(\xi)S_i \times \\ \times (\sum_{j=1}^n p_{i,j}N_j(\xi))S_i^T + L_i(\xi+1)p_i(\xi+1)K(\xi)V_i = L_i(\xi+1)p_i(\xi+1)A_i(\sum_{j=1}^n p_{i,j}N_j(\xi))S_i^T + \\ + p_i(\xi+1)L_i(\xi+1)A_i(\sum_{j=1}^n p_{i,j}N_j(\xi))S_i^T. \end{aligned} \quad (17)$$

Запишем аналитическое решение линейного матричного уравнения (17) для вектора $\text{st}(K(k))$ с использованием операции кронекеровского произведения [11], заменив при этом ξ на k :

$$\begin{aligned} \text{ct}(K(k)) = & \left(\sum_{i=1}^n p_i(k+1) [L_i(k+1) \otimes S_i \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} N_j(k) \right) S_i^T + L_i(k+1) \otimes V_i] \right)^{-1} \times \\ & \times \text{ct} \left(\sum_{i=1}^n p_i(k+1) L_i(k+1) A_i \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} N_j(k) \right) S_i^T \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Для нахождения матрицы $K(k)$ необходимо решить с учетом уравнения (18) двухточечную краевую задачу (6) и (7).

Вычислим конечную разность функции Ляпунова:

$$\begin{aligned} \Delta W(k, N_i(k)) &= W(k+1, N_i(k+1)) - W(k, N_i(k)) = \\ &= \text{tr } p_i(k+1) N_i(k) R_\gamma(k+1) + \text{tr} \sum_{t=k+1}^{T_f} p_i(t) [Q_i + K(t) V_i K(t)^T + \Psi_i(t)] L_i(t) - \\ &\quad - \text{tr } p_i(k) N_i(k) R_\gamma(k) - \text{tr} \sum_{t=k}^{T_f} p_i(t) [Q_i + K(t) V_i K(t)^T + \Psi_i(t)] L_i(t) = \\ &= \text{tr } p_i(k+1) N_i(k) R_\gamma(k+1) - \text{tr } p_i(k) N_i(k) R_\gamma(k) - \text{tr } p_i(k) [Q_i + K(k) V_i K(k)^T + \Psi_i(k)] L_i(k). \end{aligned} \quad (19)$$

В силу того, что матрицы N_i , L_i положительно определены по условию теоремы, а матрица $\Psi_i(t) > 0$ задается произвольно, то очевидно, что ее можно подобрать такой, чтобы конечная разность (19) стала отрицательной. Это условие гарантирует устойчивость динамики экстраполятора по Ляпунову.

В качестве алгоритма оценивания неизвестного входа можно использовать различные алгоритмы [12–16]. В частности, при использовании метода МНК оценка $\hat{f}(k)$ может быть построена на основе минимизации следующего критерия:

$$J(f(k)) = \sum_{t=1}^k \left\{ \|y(t) - S_t \hat{x}(t)\|_W^2 + \|f(t-1)\|_{\bar{W}}^2 \right\}, \quad (20)$$

где $W > 0$, $\bar{W} > 0$ – весовые матрицы. Тогда оптимальная оценка неизвестного входа примет вид:

$$\hat{f}(k) = [S_k^T W S_k + \bar{W}]^{-1} S_k^T W \{y(k+1) - S_k (A_j \hat{x}(k) + U(k))\}. \quad (21)$$

3. Синтез стационарного экстраполятора

Рассмотрим задачу синтеза стационарного экстраполятора. В этом случае матрица коэффициентов передачи K будет постоянной, а критерий примет вид:

$$J[0; \infty] = \sum_{i=1}^n \sum_{\xi=k}^{\infty} \text{tr } \bar{p}_i N_i R_i. \quad (22)$$

Двухточечная краевая задача преобразуется в следующую систему матричных уравнений:

$$N_i = (A_i - K S_i) \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} N_j \right) (A_i - K S_i)^T + Q_i + K V_i K^T, \quad (23)$$

$$L_i = (A_i - K S_i)^T \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} L_j \right) (A_i - K S_i) + R_i, \quad (24)$$

$$\text{ct}(K) = \left(\sum_{i=1}^n \bar{p}_i [L_i \otimes S_i \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} N_j \right) S_i^T + L_i \otimes V_i] \right)^{-1} \text{ct} \left(\sum_{i=1}^n \bar{p}_i L_i A_i \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} N_j \right) S_i^T \right), \quad (25)$$

где $\bar{p}_i$ – установившиеся вероятности (предполагается, что марковская цепь γ является эргодической).

Таким образом, для синтеза стационарного экстраполятора необходимо решить систему матричных уравнений (23)–(25).

Отметим, что если существуют положительно определенные решения N_i, L_i ($i = \overline{1, n}$) матричных уравнений (23)–(25), то из уравнения (24) и условия $R_i > 0$ следует справедливость теоремы 1.6 [17], а это означает выполнение условия стохастической устойчивости стационарного экстраполятора со скачкообразными параметрами.

Для стационарного экстраполятора

$$\hat{x}(k+1) = A_\gamma \hat{x}(k) + U(k) + \hat{f}(k) + K(y(k) - S_\gamma \hat{x}(k)), \quad \hat{x}(0) = \bar{x}_0, \quad (26)$$

где K определяется из (25), оценка неизвестного входа может быть определена по формуле (21).

4. Экстраполяция при ошибках диагностики состояния параметра γ

Задачу экстраполяции при ошибках в диагностике параметра γ рассмотрим для частного случая, когда матрицы $Q_\gamma, V_\gamma, S_\gamma$ не зависят от скачкообразно изменяющегося параметра γ и в модели отсутствует неизвестный вход:

$$x(k+1) = A_\gamma x(k) + U_\gamma(k) + q(k), \quad x(0) = x_0. \quad (27)$$

Так как в модели (27) отсутствует неизвестный вход, то для оценки $\hat{x}(k+1)$ используем экстраполятор:

$$\hat{x}(k+1) = A_\gamma \hat{x}(k) + U_\gamma(k) + K(k)(y(k) - S_\gamma \hat{x}(k)), \quad \hat{x}(0) = \bar{x}_0, \quad (28)$$

При ошибках в диагностике, если система (27) находится в i -м состоянии ($\gamma = \gamma_i$), а это состояние идентифицировано ошибочно как j -е ($j \neq i$), будем представлять модель (27) как модель с неизвестным входом:

$$x(k+1) = A_j x(k) + U_j(k) + f(k) + q(k), \quad (29)$$

где $f(k) = (A_i - A_j)x(k) + (U_i - U_j)$ является вектором неизвестного входа, так как i -е истинное состояние системы неизвестно. Для определения оценки в этом случае воспользуемся экстраполятором:

$$\hat{x}(k+1) = A_j \hat{x}(k) + U_j(k) + \hat{f}(k) + K(k)(y(k) - S \hat{x}(k)). \quad (30)$$

В (28) и (30) матрица $K(k)$ вычисляется так же, как и в разделе 3. Здесь может быть использован также постоянный коэффициент передачи K в соответствии с уравнениями (23)–(25), оценка $\hat{f}(k)$ в (30) может быть вычислена по формуле (21).

5. Результаты моделирования

Оценку экстраполяции при ошибке в диагностике параметра γ рассмотрим для модели, в которой марковская цепь имеет два состояния. Моделирование выполнялось для случая, когда матрицы $Q_\gamma, V_\gamma, S_\gamma$ не зависели от скачкообразно изменяющегося параметра γ и коэффициент передачи экстраполятора определялся из решения системы матричных уравнений (23)–(25).

Исходные данные, используемые при моделировании:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 1,075 & 0,1 \\ -0,05 & 0,94 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1,15 & 0,75 \\ -0,02 & 0,725 \end{pmatrix}, \\ Q &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ P &= \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\bar{W} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = R_2 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,15 \end{pmatrix}.$$

Вектор $U_\gamma(k)$ не зависит от γ и определяется соотношением:

$$U(k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0,275 \\ -0,0025 \end{pmatrix}, & \text{если } k \leq 64, \\ \begin{pmatrix} -0,625 \\ 0,0015 \end{pmatrix}, & \text{если } k > 64. \end{cases}$$

На рис. 1 приведены графики значений параметра γ и его оценки.

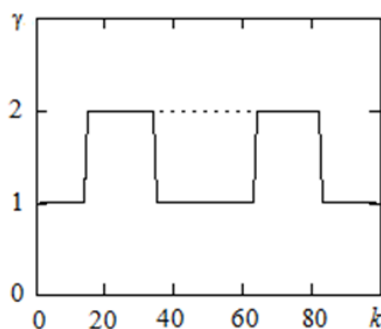


Рис. 1. Значения скачкообразного параметра γ (сплошная линия – истинные значения параметра γ , пунктирная линия – оценки параметра γ)

На рис. 2 приводятся результаты работы предложенных экстраполяторов, вычисляющих оценки прогноза с ошибками в диагностике параметра γ (рис. 2, а – для первой компоненты вектора состояния, рис. 2, б – для второй).

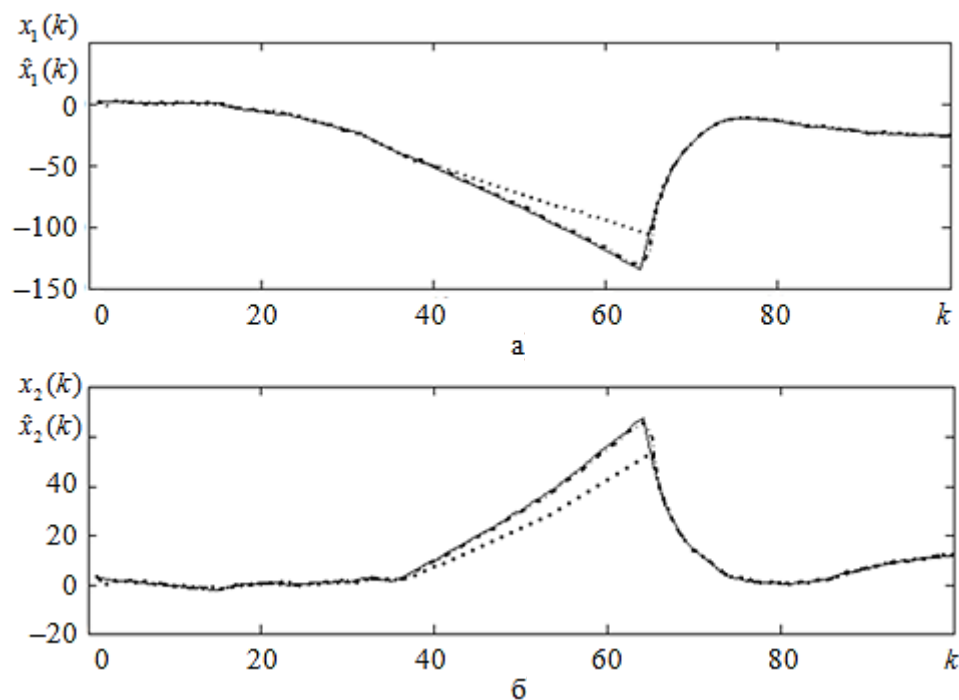


Рис. 2. Оценки прогноза с ошибками в диагностике параметра γ (сплошная линия – значения состояния объекта, пунктирная линия – оценка прогноза на интервале $k \in [35; 64]$, штрихпунктирная линия – оценка прогноза с использованием экстраполятора (26))

На рисунках видно, что на участке от 35 до 64 при ошибке идентификации алгоритм прогнозирования, не использующий оценки неизвестного входа, дает существенные ошибки.

Значения среднеквадратических ошибок для соответствующих временных интервалов приведены в табл. 1 и 2. Результаты получены путем усреднения по 50 реализациям. Сравнения выполнены для алгоритмов А и Б:

– алгоритм А – прогнозирование с ошибкой в определении параметра γ без использования оценки неизвестного входа (экстраполятор (28));

– алгоритм Б – прогнозирование с ошибкой в определении параметра γ с использованием оценки неизвестного входа (экстраполятор (30)).

Таблица 1

Среднеквадратические ошибки экстраполяции для x_1

№	Интервал	Алгоритм А	Алгоритм Б
1	1–15	0,862	0,983
2	15–35	0,332	0,261
3	35–64	15,603	1,526
4	64–83	6,981	3,706
5	83–100	0,352	0,243

Таблица 2

Среднеквадратические ошибки экстраполяции для x_2

№	Интервал	Алгоритм А	Алгоритм Б
1	1–15	0,613	0,676
2	15–35	0,568	0,435
3	35–64	9,215	0,88
4	64–83	3,682	2,074
5	83–100	0,301	0,211

Как видно из графиков и таблиц, применение алгоритма оценивания неизвестного входа позволяет при ошибках в диагностике параметра γ повысить точность оценок прогноза вектора состояния для дискретных моделей со скачкообразно изменяющимися параметрами.

Заключение

Получено решение задачи синтеза стационарного и нестационарного робастного экстраполятора для линейной дискретной модели с неизвестным входом и со случайными марковскими скачкообразными параметрами γ . Результаты математического моделирования показали, что применение разработанного алгоритма к задаче прогнозирования при ошибках в диагностике параметра γ позволяет повысить точность прогнозирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wonham W.M., Bharucha-Reid A.T. Random differential equation in control theory // Probabilistic methods in applied mathematics. 1971. P. 131–213.
2. Blair W.P., Swarder D.D. Feedback-control of a class of linear discrete systems with jump parameters and quadratic cost criteria // Int. J. of Control. 1975. V. 21, is. 5. P. 833–841.
3. Shi P., Boukas E.K., Agarwal R.K. Kalman filtering for continuous-time uncertain systems with Markovian jumping parameters // IEEE Transactions on Automatic Control. 1999. V. 44, is. 8. P. 1592–1597.
4. Ломакина С.С., Смагин В.И. Робастная фильтрация для непрерывных систем со случайными скачкообразными параметрами и вырожденными шумами в наблюдениях // Автометрия. 2005. № 2. С. 36–43.
5. Liu W. State estimation for discrete-time Markov jump linear systems with time-correlated measurement noise // Automatica. 2017. V. 76. P. 266–276.
6. Costa E.F., De Saporta B. Linear minimum mean square filters for Markov jump linear systems // IEEE Trans. On Automatic Control. 2017. V. 62, is. 7. P. 3567–3572.
7. Белявский Г.И., Мисюра И.В. Фильтрация сигналов со скачками, возникающими в дискретном времени и с конечным горизонтом // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2014. № 2 (194). С. 137–144.

8. Mariton M. Jump linear systems in automatic control. New York : Marcel Dekker, 1990.
9. Gomes M.J.F., Costa E.F. On the stability of the recursive Kalman filter with Markov jump parameters // Proc. 2010 American Control Conference Marriott Waterfront, Baltimore, MD, USA June 30 – July 02, 2010. P. 4159–4163.
10. Terra M.H., Ishihara J.Y., Jesus G., Cerri J.P. Robust estimation for discrete-time Markovian jump linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. V. 58, No. 8. 2013. P. 2065–2071.
11. Ланкастер П. Теория матриц. М. : Наука, 1973. 280 с.
12. Janczak D., Grishin Yu. State estimation of linear dynamic system with unknown input and uncertain observation using dynamic programming // Control and Cybernetics. 2006. No. 4. P. 851–862.
13. Koshkin G.M., Smagin V.I. Filtering and prediction for discrete systems with unknown input using nonparametric algorithms // Proc. 10th International Conference on Digital Technologies. Zilina, Slovakia, 2014. P. 120–124.
14. Witczak M. Fault diagnosis and fault-tolerant control strategies for non-linear systems. Ch. 2: Unknown input observers and filters: lecture notes in electrical engineering. Springer International Publishing, Switzerland, 2014. P. 19–56.
15. Smagin V., Koshkin G., Udod V. State estimation for linear discrete-time systems with unknown input using nonparametric technique // Proc. International Conference on Artificial Intelligence and Control Automation (AICA 2015). Phuket, Thailand, 2015. P. 675–677.
16. Smagin V.I., Koshkin G.M. Kalman filtering and control algorithms for systems with unknown disturbances and parameters using nonparametric technique // Proc. 20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR 2015). Miedzyzdroje. Poland, 2015. P. 247–251.
17. Li F., Shi P., Wu. L. Control and filtering for semi-markovian jump systems. New York : Springer, 2016. 208 p.

Поступила в редакцию 15 февраля 2018 г.

Kim K.S., Smagin V.I. (2018) ROBUST EXTRAPOLATION IN DISCRETE SYSTEMS WITH RANDOM JUMP PARAMETERS AND UNKNOWN INPUT. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 44. pp. 31–39

DOI: 10.17223/19988605/44/4

We consider the model of an object that is described by a discrete equation

$$x(k+1) = A_\gamma x(k) + U_\gamma(k) + f(k) + q_\gamma(k), \quad x(0) = x_0,$$

where $x(k) \in \mathbb{R}^m$ is the state vector, $\gamma(k)$ is a Markov chain with n states $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$; $U_\gamma(k)$ is known input; $f(k)$ is the unknown input; x_0 is a random vector (the variances are assumed to be known $N_{0,i} = M\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T / \gamma = \gamma_i\}$, $i = \overline{1, n}$, $\bar{x}_0 = M\{x_0\}$); A_γ is given matrix; $q_\gamma(k)$ is random disturbance with the following characteristics $M\{q_\gamma(k)\} = 0$, $M\{q_\gamma(k)q_\gamma^T(k)\} = Q_\gamma \delta_{kj}$.

The observation channel has the form $y(k) = S_\gamma x(k) + v_\gamma(k)$, where $v_\gamma(k)$ is random errors of observations independent of the $q_\gamma(k)$ with $M\{v_\gamma(k)\} = 0$, $M\{v_\gamma(k)v_\gamma^T(k)\} = V_\gamma \delta_{kj}$.

According to the information obtained at time k , it is required to find an estimate of the state of the forecast $\hat{x}(k+1)$ by minimizing the following criterion:

$$J[0; T_f] = M\left\{\left[\sum_{k=0}^{T_f} \sum_{i=1}^n p_i(k) e^T(k) R_i(k) e(k) + \sum_{i=1}^n p_i(T_f) e^T(T_f) L_i(T_f) e(T_f)\right] / \gamma(0) = \gamma_0\right\},$$

where $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$, $R_i(k) > 0$ and $L_i(T_f) > 0$ are weight matrices, γ_0 is the initial value of the variable γ .

The structure of the extrapolator is defined by the equation

$$\hat{x}(k+1) = A_\gamma \hat{x}(k) + U(k) + \hat{f}(k) + K(k)(y(k) - S_\gamma \hat{x}(k)), \quad \hat{x}(0) = \bar{x}_0,$$

where $K(k)$ is the matrix of transmission coefficients to be determined.

Theorem. Assume that there exist positive definite matrices N_i and L_i being solutions of the two-point boundary problem:

$$N_i(k+1) = (A_i - K(k)S_i)\left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} N_j(k)\right)(A_i - K(k)S_i)^T + Q_i + K(k)V_i K(k)^T, \quad N_i(0) = N_0.$$

$$L_i(k) = (A_i - K(k)S_i)^T \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} L_j(k+1)\right)(A_i - K(k)S_i) + R_i, \quad L_i(T_f) = L_{T,i}.$$

Then the vector $\text{ct}(K(k))$, composed with using of rows of the matrix $K(k)$, is determined by the formula:

$$\begin{aligned} \text{ct}(K(k)) = & \left(\sum_{i=1}^n p_i(k+1)[L_i(k+1) \otimes S_i \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} N_j(k)\right) S_i^T + L_i(k+1) \otimes V_i]\right)^{-1} \times \\ & \times \text{ct}\left(\sum_{i=1}^n p_i(k+1)L_i(k+1)A_i \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} N_j(k)\right) S_i^T\right). \end{aligned}$$

Thus, the synthesis algorithm robust extrapolator is developed that allows to define estimate of the state vector for discrete linear system with random jump parameter described by a Markov chain with a finite number of states. The filter transmission coefficients are proposed to be chosen by minimizing the sum of the quadratic forms of extrapolation errors, while averaging over the probabilities of the state of the jump parameter using recursive estimation algorithms with an unknown input. The extrapolation problem is considered when the value γ is identified both accurately and with errors.

Keywords: discrete model; quadratic criterion; robust extrapolation; jump parameters; unknown input.

KIM Konstantin Stanislavovich (National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: kks93@rambler.ru

SMAGIN Valery Ivanovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: vsm@mail.tsu.ru

REFERENCES

1. Wonham, W.M. & Bharucha-Reid, A.T. (1971) Random differential equation in control theory. In: Bharucha-Reid, A.T. (ed.) *Probabilistic Methods in Applied Mathematics*. Vol. 2. Academic Press Inc. pp. 131–213.
2. Blair, W.P. & Swarder, D.D. (1975) Feedback-control of a class of linear discrete systems with jump parameters and quadratic cost criteria. *International Journal of Control*. 21(5). pp. 833–841. DOI: 10.1080/00207177508922037
3. Shi, P., Boukas, E.K. & Agarwal, R.K. (1999) Kalman filtering for continuous-time uncertain systems with Markovian jumping parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 44(8). pp. 1592–1597. DOI: 10.1109/9.780431
4. Lomakina, S.S. & Smagin, V.I. (2005) Robust filtering in continuous systems with random jump parameters. *Avtometriya – Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 2. pp. 36–43. (In Russian).
5. Liu, W. (2017) State estimation for discrete-time Markov jump linear systems with time-correlated measurement noise. *Automatica*. 76. pp. 266–276. DOI: 10.1016/j.automatica.2016.10.028
6. Costa, E.F. & De Saporta, B. (2017) Linear minimum mean square filters for Markov jump linear systems. *IEEE Transactions On Automatic Control*. 62(7). pp. 3567–3572. DOI: 10.1109/TAC.2017.2692180
7. Belyavsky, G.I. & Misyura, I.V. (2014) Signal filtering with jumps during discrete time and under finite horizon. *Nauchno-tehnicheskiye vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta. Fiziko-matematicheskiye nauki – St. Petersburg Polytechnic University Journal of Engineering Science and Technology*. 2(194). pp. 137–144. (In Russian).
8. Mariton, M. (1990) *Jump linear systems in automatic control*. New York: Marcel Dekker.
9. Gomes, M.J.F. & Costa, E.F. (2010) On the stability of the recursive Kalman filter with Markov jump parameters. *Proc. 2010 American Control Conference Marriott Waterfront, Baltimore, MD, USA*. pp.4159–4163. DOI: 10.1109/ACC.2008.4586670
10. Terra, M.H., Ishihara, J.Y., Jesus, G. & Cerri, J.P. (2013) Robust estimation for discrete-time Markovian jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 58(8). pp. 2065–2071. DOI: 10.1109/TAC.2013.2246475
11. Lancaster, P. (1969) *Theory of Matrices*. New York: Academic Press.
12. Janczak, D. & Grishin, Yu. (2006) State estimation of linear dynamic system with unknown input and uncertain observation using dynamic programming. *Control and Cybernetics*. 35(4). pp. 851–862.
13. Koshkin, G.M. & Smagin, V.I. (2014) Filtering and prediction for discrete systems with unknown input using nonparametric algorithms. *Proc. 10th International Conference on Digital Technologies*. Zilina, Slovakia. July 9–11, 2014. pp. 120–124. DOI: 10.1109/DT.2014.6868702
14. Witczak, M. (2014) *Fault diagnosis and fault-tolerant control strategies for non-linear systems*. Springer International Publishing, Switzerland. pp. 19–56. DOI: 10.1007/978-3-319-03014-2
15. Smagin, V., Koshkin, G. & Udod, V. (2015) State estimation for linear discrete-time systems with unknown input using nonparametric technique. *Proc. International Conference on Artificial Intelligence and Control Automation (AICA 2015)*. Phuket. Thailand. pp. 675–677. DOI: 10.2991/cisia-15.2015.184
16. Smagin, V.I. & Koshkin, G.M. (2015) Kalman filtering and control algorithms for systems with unknown disturbances and parameters using nonparametric technique. *Proc. 20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR 2015)*. Miedzyzdroje, Poland. August 24–27, 2015. pp. 247–251. DOI: 10.1109/MMAR.2015.7283881
17. Li, F., Shi, P. & Wu, L. (2016) *Control and filtering for semi-Markovian jump systems*. New York: Springer.

Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, М.А. Семенова

К ВОПРОСУ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА БОЛЬШИХ ДАННЫХ

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственной работы «Обеспечение проведения научных исследований» (№ 1.4574.2017/6.7) и проектной части государственного задания (№ 1.1009.2017/4.6).

Рассмотрены методы построения оценок при анализе больших данных (Big Data). Демонстрируется влияние на результаты выводов по критерию χ^2 Пирсона выбора числа интервалов и способа группирования. Показывается, как влияет на распределения статистик непараметрических критериев согласия ограниченная точность представления данных в больших выборках. Даются рекомендации по применению критериев для анализа больших выборок.

Ключевые слова: Big Data; оценивание параметров; проверка гипотез; критерии согласия.

Вопросы применения статистических методов к анализу больших массивов данных (Big Data) в последнее время вызывают все больший интерес.

Вполне естественно, что для анализа больших данных пытаются применять методы и критерии из обширного арсенала классической математической статистики, используя, в том числе, популярные программные системы статистического анализа. И тут сталкиваются с тем, что хорошо зарекомендовавшие себя методы и алгоритмы становятся неэффективными из-за «проклятия размерности». Популярные критерии проверки гипотез оказываются неприспособленными для анализа выборок даже порядка тысячи наблюдений. Критерии, которые формально можно использовать при объемах выборок $n \rightarrow \infty$, на практике приводят к отклонению даже справедливой проверяемой гипотезы H_0 .

В данном случае мы будем касаться только методов и критериев, связанных с анализом одномерных случайных величин, с областью, которая нам наиболее знакома. Можно рассмотреть по крайней мере три ситуации, при которых рост размерности выборок вызывает проблемы в применении методов или критериев.

1. Первая ситуация связана с вычислением оценок параметров. При использовании методов оценивания, оперирующих негруппированными данными, с ростом размерности анализируемых выборок кардинально растут вычислительные затраты, ухудшается сходимость итерационных алгоритмов, используемых при нахождении оценок. Существенным фактором оказывается неробастность оценок. Естественным выходом является использование методов оценивания, предусматривающих группирование данных.

2. Основная причина, исключающая возможность применения к большим выборкам многих критериев проверки статистических гипотез, заключается в зависимости распределений статистик этих критериев от объемов выборок, в результате чего вся информация о распределениях статистик представлена лишь краткими таблицами критических значений для некоторых объемов n . Отметим, что возможность применения такого рода критерия при «разумных» величинах n легко разрешается интерактивным моделированием распределений статистик при данном n и справедливости проверяемой гипотезы H_0 [1] с последующим использованием построенного эмпирического распределения $G_N(S_n|H_0)$ статистики S для оценки достигнутого уровня значимости p_{value} по значению статистики S^* , вычисленному по анализируемой выборке. Здесь N – количество имитационных экспериментов при статистическом моделировании $G_N(S_n|H_0)$.

3. Существование предельных распределений статистик критериев не гарантирует корректности статистических выводов при использовании последних для анализа больших выборок. Например, применение к выборкам очень большого объема непараметрических критериев согласия, как правило, приводит к отклонению проверяемой гипотезы, даже когда она справедлива. Причина этого кроется в том, что объемы накапливаемых данных практически не ограничены, а исследуемые показатели зафиксированы с ограниченной точностью.

4. Соглашаясь с наличием проблем в применении непараметрических критериев согласия для больших выборок, специалисты рекомендуют использовать критерий χ^2 Пирсона. Однако результаты проверки гипотезы по критериям типа χ^2 бывают неоднозначны, существенно зависят от выбираемого числа интервалов и способа группирования.

В данной работе мы затронем проблемы применения к анализу Big Data некоторых критериев согласия и вопросы, связанные с оцениванием параметров моделей законов распределения.

1. Об оценивании параметров

Для нахождения оценок параметров законов могут использоваться различные методы.

Наилучшими асимптотическими свойствами обладают оценки максимального правдоподобия (ОМП), вычисляемые в результате максимизации функции правдоподобия

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \prod_{j=1}^n f(x_j, \theta), \quad (1)$$

или ее логарифма, где θ – неизвестный параметр (в общем случае векторный), $f(x, \theta)$ – функция плотности закона распределения, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – выборка, по которой вычисляется оценка $\hat{\theta}$. Для некоторых законов распределения ОМП параметров получаются в виде просто вычисляемых статистик от элементов выборок, но в большинстве случаев находятся в результате использования некоторого итерационного метода.

При вычислении MD-оценок (оценок минимального расстояния) по θ минимизируется некоторая мера близости (расстояние) $\rho(F(x, \theta), F_n(x))$ между теоретическим $F(x, \theta)$ и эмпирическим $F_n(x)$ распределениями. MD-оценки находятся в процессе решения задачи

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \rho(F(x, \theta), F_n(x)). \quad (2)$$

В качестве мер близости можно использовать, например, статистики непараметрических критериев согласия (Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга, Купера, Ватсона и др. [1]).

При относительно малых объемах выборок могут использоваться L -оценки параметров, представляющие собой некоторые линейные комбинации порядковых статистик (элементов вариационного ряда $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$, построенного по выборке $x_1, x_2, \dots, x_n$).

ОМП параметров законов распределения, как правило, не являются робастными. Наличие аномальных наблюдений или ошибочность предположения о виде закона приводят к построению моделей с функциями распределения, неприемлемо отклоняющимися от эмпирических распределений. MD-оценки обладают большей устойчивостью.

Очевидно, что при очень больших выборках вычисление оценок (1) и (2) связано с серьезными вычислительными трудностями.

В случае группированной выборки имеющаяся в нашем распоряжении информация связана с множеством непересекающихся интервалов, которые делят область определения случайной величины на k непересекающихся интервалов граничными точками

$$x_{(0)} < x_{(1)} < \dots < x_{(k-1)} < x_{(k)},$$

где $x_{(0)}$ – нижняя грань области определения случайной величины X ; $x_{(k)}$ – верхняя грань области определения случайной величины X .

ОМП по группированной выборке вычисляется в результате максимизации функции правдоподобия

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \prod_{i=1}^k P^{n_i}(\theta), \quad (3)$$

где $P_i(\theta) = \int_{x_{(i-1)}}^{x_{(i)}} f(x, \theta) dx$ – вероятность попадания наблюдения в i -й интервал значений, n_i – количество наблюдений, попавших в i -й интервал, $\sum_{i=1}^k n_i = n$.

Оценки по группированным данным можно получать в результате минимизации статистики χ^2

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} n \sum_{i=1}^k \frac{(n_i / n - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)}, \quad (4)$$

а также ряда других статистик. В [2] на основании анализа рассмотренной совокупности методов оценивания параметров по группированным данным показано, что все они при соответствующих условиях регулярности дают состоятельные и асимптотически эффективные оценки, но наиболее предпочтительными оценками являются ОМП. Важным достоинством оценок по группированным данным является робастность [3].

При наличии негруппированных данных к оценкам по группированным данным обращаются редко. Связано это с большей трудоемкостью вычислительного процесса, часто с необходимостью многократного использования численного интегрирования при вычислении $P_i(\theta)$, и требует соответствующей программной поддержки.

В случае больших объемов выборок ситуация меняется. При фиксированном числе интервалов группирования с ростом объемов выборок вычислительные затраты не меняются, а возрастают только с увеличением количества интервалов k . Это значит, что в условиях Big Data целесообразно использовать ОМП по группированным выборкам. Это робастные и асимптотически эффективные оценки. При малом k качество оценок можно улучшать, используя асимптотически оптимальное группирование (АОГ) [4–6], при котором минимизируются потери в информации Фишера, связанные с группированием.

2. О применении критерия χ^2 Пирсона

Статистику критерия согласия χ^2 Пирсона вычисляют по формуле

$$\chi_n^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(n_i / n - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)}. \quad (5)$$

В случае проверки простой гипотезы при $n \rightarrow \infty$ эта статистика подчиняется χ_r^2 -распределению с $r = k - 1$ степенями свободы, если верна нулевая гипотеза.

При проверке сложной гипотезы и оценивании по выборке m параметров закона статистика (5) в случае справедливости H_0 подчиняется χ_r^2 -распределению с $r = k - m - 1$ степенями свободы, если оценки получаются минимизацией этой статистики (4) или используются ОМП (3) или другие асимптотически эффективные оценки по группированным данным.

При оценивании параметров по негруппированным данным распределение статистики (5) не подчиняется χ_{k-m-1}^2 -распределению. При использовании ОМП по негруппированным данным рекомендуется применять критерий Никулина–Рао–Робсона [7, 8].

Принципиальные проблемы, препятствующие применению критерия χ^2 Пирсона для анализа Big Data, отсутствуют: возможны только вычислительные трудности.

Проиллюстрируем результаты применения критерия χ^2 Пирсона на примере достаточно большой выборки, принадлежащей нормальному закону с плотностью

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \theta_0)^2}{2\theta_1^2} \right\}.$$

Выборка объемом $n = 10^7$ смоделирована по стандартному нормальному закону $N(0,1)$ ($\theta_0 = 0$, $\theta_1 = 1$).

В табл. 1 представлены результаты применения критерия при проверке простой гипотезы о принадлежности выборки закону $N(0,1)$ при различном числе интервалов в случае равночастотного группирования (РЧГ) и в случае (АОГ) при $k = 15$. При АОГ максимизируется мощность критерия χ^2 Пирсона относительно близких конкурирующих законов [9–11]. В таблице приведены значения X_n^{2*} статистики (5), вычисленные по выборке, и соответствующие значения достигнутого уровня значимости $p_{value} = P\{X_n^2 \geq X_n^{2*} | H_0\}$. Как можно видеть, результаты зависят как от способа разбиения, так и от числа интервалов. От этого же зависит и мощность критерия [12].

В табл. 2 приведены результаты проверки сложных гипотез. Представлены ОМП $\hat{\theta}_0$ и $\hat{\theta}_1$ по группированным данным, полученные при соответствующем числе интервалов k , значения статистик X_n^{2*} и p_{value} .

Таблица 1

Результаты проверки простой гипотезы о согласии с $N(0,1)$

	АОГ	РЧГ						
	$k = 15$	$k = 15$	$k = 50$	$k = 75$	$k = 100$	$k = 500$	$k = 1000$	$k = 2000$
X_n^{2*}	7,75162	9,18380	56,8942	79,4904	96,5701	493,995	1044,57	2099,91
p_{value}	0,90186	0,81910	0,20475	0,31026	0,55038	0,55482	0,15403	0,05702

Таблица 2

Результаты проверки сложной гипотезы

k	АОГ	РЧГ						
	15	15	50	75	100	500	1000	2000
$\hat{\theta}_0$	0,000276	0,000301	0,0002440	0,000270	0,000268	0,000277	0,000273	0,000274
$\hat{\theta}_1$	1,007150	1,002629	1,001730	1,001338	1,001123	1,000399	1,000305	1,000236
X_n^{2*}	927,9202	99,99627	101,7669	104,5111	112,1514	493,7161	1043,471	2098,605
p_{value}	0,0	5,58e-16	6,50e-06	0,007396	0,139377	0,533166	0,149218	0,055723

ОМП параметров по полной негруппированной выборке $\hat{\theta}_0 = 0,000274$, $\hat{\theta}_1 = 1,000177$. В [13, 14] построены модели распределений статистики (5) для случая проверки сложной гипотезы относительно нормального закона с использованием ОМП по негруппированным данным и применением АОГ. Вычисленное по выборке значение статистики $X_n^{2*} = 6,600521$ при $k = 15$, а полученная в соответствии с приведенной в [13, 14] моделью предельного распределения оценка $p_{value} = 0,886707$, что свидетельствует о хорошем согласии полной выборки с нормальным законом $N(0,000274; 1,000177)$.

Можно заметить, что и при проверке сложных гипотез результат существенно зависит от числа интервалов k .

3. О применении непараметрических критериев согласия

Если опустить рост вычислительных трудностей, то основной причиной возможной некорректности выводов при анализе больших данных с использованием непараметрических критериев согласия

является ограниченной точностью представления этих данных. Результаты исследований, демонстрирующих влияние точности регистрации данных на распределения статистик, покажем на трех классических критериях согласия.

В критерии Колмогорова рекомендуется использовать статистику с поправкой Большева [15]:

$$S_K = \sqrt{n}D_n + \frac{1}{6\sqrt{n}} = \frac{6nD_n + 1}{6\sqrt{n}}, \quad (6)$$

где $D_n = \max(D_n^+, D_n^-)$, $D_n^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{i}{n} - F(x_i, \theta) \right\}$, $D_n^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ F(x_i, \theta) - \frac{i-1}{n} \right\}$; n – объем выборки; $x_1, x_2, \dots, x_n$ здесь и далее – упорядоченные по возрастанию выборочные значения; $F(x, \theta)$ – функция закона распределения, согласие с которым проверяют. Распределение величины S_K при простой гипотезе в пределе подчиняется закону Колмогорова с функцией распределения $K(S)$ [15].

Статистика критерия Крамера–Мизеса–Смирнова имеет вид:

$$S_\omega = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left\{ F(x_i, \theta) - \frac{2i-1}{2n} \right\}^2, \quad (7)$$

и при простой гипотезе в пределе подчиняется закону с функцией распределения $a1(s)$ [15].

Статистика критерия Андерсона–Дарлинга задается выражением [16]:

$$S_\Omega = -n - 2 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{2i-1}{2n} \ln F(x_i, \theta) + \left(1 - \frac{2i-1}{2n} \right) \ln(1 - F(x_i, \theta)) \right\}. \quad (8)$$

При проверке простой гипотезы эта статистика в пределе подчиняется закону с функцией распределения $a2(s)$ [15].

Распределения статистик (6)–(8) непараметрических критериев согласия исследовались в зависимости от точности регистрации наблюдаемых значений случайных величин. Задавалось число значимых десятичных разрядов, до которых округлялись наблюдаемые величины. Это определяло число уникальных значений, которые могли оказаться в генерируемых выборках. Как правило, число имитационных экспериментов, осуществляемых для моделирования эмпирических распределений статистик, составляло величину $N = 10^6$.

Отклонение реального (эмпирического) распределения статистики от предельного распределения отслеживалось при оценке медианы $\tilde{S}_n$ эмпирического распределения статистики, полученного в результате моделирования. Если реальное распределение статистики при объемах выборок n не отклоняется от предельного, то вероятность $P\{S > \tilde{S}_n\}$, вычисляемая по соответствующему предельному распределению, равна 0,5. При сдвиге реального распределения статистики в область больших значений (вправо от предельного) оценки $\hat{p}_v = P\{S > \tilde{S}_n\}$ будут уменьшаться. По величине отклонения оценок $\hat{p}_v$ от 0,5 можно судить о величине погрешности оценки достигнутого уровня значимости p_{value} , вычисляемой по предельному распределению статистики (в случае проверки простых гипотез, соответственно, по $K(S)$, $a1(S)$ и $a2(S)$).

В табл. 3 представлены оценки медиан $\tilde{S}_n$ эмпирических распределений статистик и соответствующие вероятности $\hat{p}_v = P\{S > \tilde{S}_n\}$, вычисляемые по предельным распределениям статистик критериев при проверке простой гипотезы о принадлежности выборок стандартному нормальному закону в зависимости от объемов выборок n при регистрации наблюдений с округлением до заданного числа знаков после десятичной точки. В первой колонке таблицы приведены значения $\tilde{S}_n$ и $p_v = P\{S > \tilde{S}_n\}$ для предельных распределений статистик.

Таблица 3

Оценки медиан эмпирических распределений статистик и вероятностей $\hat{p}_V$

Критерий Колмогорова								
$\Delta=0,1$		$K(S)$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 100$
	$\tilde{S}_n$	0,827574	0,8261	0,8389	0,8480	0,8618	0,8721	0,9149
	$\hat{p}_V$	0,5	0,5023	0,4897	0,4663	0,4597	0,4235	0,3724
$\Delta=0,01$		$K(S)$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$	$n = 300$	$n = 500$	$n = 1\,000$
	$\tilde{S}_n$	0,827574	0,8289	0,8309	0,8311	0,8348	0,8385	0,85233
	$\hat{p}_V$	0,5	0,4994	0,4962	0,4937	0,4882	0,4840	0,4618
$\Delta=0,001$		$K(S)$	$n = 500$	$n = 1\,000$	$n = 5\,000$	$n = 10\,000$	$n = 20\,000$	$n = 50\,000$
	$\tilde{S}_n$	0,827574	0,8271	0,8280	0,8301	0,8353	0,8423	0,8538
	$\hat{p}_V$	0,5	0,5007	0,4994	0,4960	0,4879	0,4770	0,4596
Критерий Крамера–Мизеса–Смирнова								
$\Delta=0,1$		$a1(S)$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 150$
	$\tilde{S}_n$	0,11888	0,1214	0,1218	0,1223	0,1231	0,1267	0,1304
	$\hat{p}_V$	0,5	0,4897	0,4882	0,4861	0,4832	0,4690	0,4551
$\Delta=0,01$		$a1(S)$	$n = 100$	$n = 500$	$n = 1\,000$	$n = 5\,000$	$n = 10\,000$	$n = 20\,000$
	$\tilde{S}_n$	0,11888	0,1192	0,1193	0,1198	0,1229	0,1263	0,1340
	$\hat{p}_V$	0,5	0,4988	0,4984	0,4962	0,4838	0,4708	0,4423
$\Delta=0,001$		$a1(S)$	$n = 10\,000$	$n = 5 \times 10^4$	$n = 10^5$	$n = 2 \times 10^5$	$n = 5 \times 10^5$	$n = 10^6$
	$\tilde{S}_n$	0,11888	0,11886	0,11890	0,11887	0,11967	0,1210	0,1250
	$\hat{p}_V$	0,5	0,5001	0,4999	0,5000	0,4968	0,4913	0,4756
Критерий Андерсона–Дарлингга								
$\Delta=0,1$		$a2(S)$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 150$
	$\tilde{S}_n$	0,774214	0,7798	0,7842	0,7883	0,7931	0,8138	0,8334
	$\hat{p}_V$	0,5	0,4958	0,4926	0,4895	0,4860	0,4712	0,4575
$\Delta=0,01$		$a2(S)$	$n = 100$	$n = 500$	$n = 1\,000$	$n = 5\,000$	$n = 10\,000$	$n = 20\,000$
	$\tilde{S}_n$	0,774214	0,7744	0,7759	0,7792	0,7956	0,8144	0,8523
	$\hat{p}_V$	0,5	0,5002	0,4987	0,4963	0,4842	0,4708	0,4448
$\Delta=0,001$		$a2(S)$	$n = 10\,000$	$n = 5 \times 10^4$	$n = 10^5$	$n = 2 \times 10^5$	$n = 5 \times 10^5$	$n = 10^6$
	$\tilde{S}_n$	0,774214	0,7753	0,7762	0,7767	0,7778	0,7922	0,8153
	$\hat{p}_V$	0,5	0,4992	0,4985	0,4982	0,4973	0,4867	0,4701

При округлении с точностью до 1 в выборках, принадлежащих $N(0, 1)$, может появляться 9 уникальных значений, при округлении с точностью до $\Delta = 0,1$ – порядка 86 уникальных значений, с точностью $\Delta = 0,01$ – порядка 956, с точностью до $\Delta = 0,001$ – порядка 9 830.

Как показали результаты моделирования, при округлении наблюдений до целых значений использование предельных распределений статистик критериев **абсолютно** исключено.

При $\Delta = 0,1$ распределения статистики критерия Колмогорова $G(S_n|H_0)$ обладают существенной дискретностью. Для критерия Колмогорова отклонение $G(S_n|H_0)$ от предельного распределения $K(S)$ при $\Delta = 0,1$ следует учитывать уже для $n > 20$, при $\Delta = 0,01$ – для $n > 250$, при $\Delta = 0,001$ величина $n_{\max}$ сдвигается до величины порядка 10^4 .

В случае критериев Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга отклонение $G(S_n|H_0)$ от предельных $a1(S)$ и $a2(S)$ при $\Delta = 0,1$ надо учитывать для $n > 30$, при $\Delta = 0,01$ – для $n > 1000$, при $\Delta = 0,001$ величина $n_{\max}$ сдвигается до 5×10^5 .

Следовательно, при анализе Big Data с использованием соответствующего непараметрического критерия согласия статистика должна вычисляться не по всему большому массиву, а по выборкам, извлекаемым по равномерному закону из «генеральной совокупности», роль которой в данном случае играет анализируемый большой массив данных. Объем извлекаемой выборки должен учитывать точность фиксируемых данных (количество возможных уникальных значений в выборке) и не превышать некоторой величины $n_{\max}$, при которой (при данной точности) распределение статистики $G(S_{n_{\max}}|H_0)$ критерия при справедливости H_0 еще реально не отличается от предельного распределения $G(S|H_0)$ этого критерия.

При проверке сложных гипотез проверяемая гипотеза имеет вид $H_0: F(x) \in \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$, где Θ – область определения параметра θ . Если оценка $\hat{\theta}$ скалярного или векторного параметра закона опирается на ту же самую выборку, по которой проверяется гипотеза, то распределение статистики $G(S|H_0)$ любого непараметрического критерия согласия существенно отличается от предельного, имеющего место при проверке простой гипотезы [17]. При оценивании параметров по этой же выборке на закон распределения статистики $G(S|H_0)$ влияют следующие факторы [1]: вид наблюдаемого закона распределения $F(x, \theta)$, соответствующего истинной гипотезе H_0 ; тип оцениваемого параметра и число оцениваемых параметров; в некоторых ситуациях конкретное значение параметра (например, в случае гамма-распределения и т.п.); используемый метод оценивания параметров.

Очевидно, что в случае проверки сложных гипотез при анализе Big Data с ограниченной точностью фиксируемых данных мы столкнемся с теми же проблемами и должны извлекать из «генеральной совокупности» выборки объема $n < n_{\max}$, чтобы использовать, например, модели предельных распределений статистик критериев, имеющие место при проверке сложных гипотез [1, 18–20].

Если оценку $\hat{\theta}$ вектора параметров находить одним из рассмотренных выше методов по всему массиву больших данных, а далее критерий применять к выборке объема $n < n_{\max}$, извлекаемой из этого же массива, то при проверке гипотезы $H_0: F(x) = F(x, \hat{\theta})$, где $\hat{\theta}$ – полученная ранее оценка, распределение статистики $G(S|H_0)$ будет то же самое, что и при проверке простой гипотезы.

Заключение

В случае больших выборок целесообразно использование методов оценивания параметров, предусматривающих группирование данных. В отличие от оценок по негруппированным данным они робастны, а вычислительные затраты не зависят от объемов выборок.

Нет препятствий для применения к большим выборкам критерия χ^2 Пирсона: он сохраняет как свои положительные качества, так и свойственные ему недостатки.

Ограниченная точность представления данных в больших выборках влияет на распределения статистик непараметрических критериев согласия. Поэтому эти критерии целесообразно применять к выборкам, извлекаемым из Big Data, объем которых ограничивается точностью представления этих данных (количеством возможных уникальных значений в выборке).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лемешко Б.Ю. Непараметрические критерии согласия : руководство по применению. М. : ИНФРА-М, 2014. 163 с. DOI: 10.12737/11873.

2. Рао. С.Р. Линейные статистические методы и их применения. М. : Наука, 1968. 548 с.
3. Лемешко Б.Ю. Группирование наблюдений как способ получения робастных оценок // Надежность и контроль качества. 1997. № 5. С. 26–35.
4. Куллдорф Г. Введение в теорию оценивания по группированным и частично группированным выборкам. М. : Наука, 1966. 176 с.
5. Денисов В.И., Лемешко Б.Ю., Цой Е.Б. Оптимальное группирование, оценка параметров и планирование регрессионных экспериментов : в 2 ч. / Новосиб. гос. техн. ун-т. Новосибирск, 1993. 347 с.
6. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов, Е.В. Чимитова. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. 888 с.
7. Никулин М.С. О критерии хи-квадрат для непрерывных распределений // Теория вероятностей и ее применение. 1973. Т. XVIII, № 3. С. 75–676.
8. Rao K.C., Robson D.S. A chi-squared statistic for goodness-of-fit tests within the exponential family // Commun. Statist. 1974. V. 3. P. 1139–1153.
9. Денисов В.И., Лемешко Б.Ю. Оптимальное группирование при обработке экспериментальных данных // Измерительные информационные системы. Новосибирск, 1979. С. 5–14.
10. Лемешко Б.Ю. Асимптотически оптимальное группирование наблюдений – это обеспечение максимальной мощности критериев // Надежность и контроль качества. 1997. № 8. С. 3–14.
11. Лемешко Б.Ю. Асимптотически оптимальное группирование наблюдений в критериях согласия // Заводская лаборатория. 1998. Т. 64, № 1. С. 56–64.
12. Лемешко Б.Ю., Чимитова Е.В. О выборе числа интервалов в критериях согласия типа χ^2 // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2003. Т. 69, № 1. С. 61–67.
13. Лемешко Б.Ю. Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона : руководство по применению. М. : ИНФРА-М, 2015. 160 с. DOI: 10.12737/6086.
14. Лемешко Б.Ю. Критерии согласия типа хи-квадрат при проверке нормальности // Измерительная техника. 2015. № 6. С. 3–9.
15. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. М. : Наука, 1983. 416 с.
16. Anderson T.W., Darling D.A. A test of goodness of fit // J. Amer. Statist. Assoc. 1954. V. 29. P. 765–769.
17. Кас М., Kiefer J., Wolfowitz J. On tests of normality and other J. tests of goodness of fit based on distance methods // Ann. Math. Stat. 1955. V. 26. P. 189–211.
18. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. I // Измерительная техника. 2009. № 6. С. 3–11.
19. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. Модели распределений статистик непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез с использованием оценок максимального правдоподобия. Ч. II // Измерительная техника. 2009. № 8. С. 17–26.
20. Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Postovalov S.N. Statistic Distribution Models for Some Nonparametric Goodness-of-Fit Tests in Testing Composite Hypotheses // Communications in Statistics – Theory and Methods. 2010. V. 39, No. 3. P. 460–471.

Поступила в редакцию 15 февраля 2018 г.

Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Semenova M.A. (2018) TO QUESTION OF THE STATISTICAL ANALYSIS OF BIG DATA. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 44. pp. 40–49

DOI: 10.17223/19988605/44/5

The search for regularities in Big Data now receives more and more scientific attention. Naturally, the methods for parameter estimation of models and criteria for testing hypotheses from classical mathematical statistic are applied to achieve these aims. At the same time, it is found that well-established methods of evaluation become ineffective because of the “dimensional curse”. Most criteria for testing statistical hypotheses are suitable for samples analysis of very limited dimension. The criteria that can be formally used for sizes samples $n \rightarrow \infty$ in practice lead to an unjustified rejection of the hypothesis being tested.

In estimation methods that operate with ungrouped data, as the dimension of the analyzed samples increases, the computational costs dramatically increase, the convergence of the iterative algorithms used in the construction of estimates worsens. The non-robustness of the estimates turns out an essential factor.

The reason that excludes the possibility of applying many tests for testing hypotheses to Big Data samples is the dependence of the statistics distribution of these tests on n and the availability only short tables of critical values. At reasonable sizes of n , this reason can be eliminated by computer technology and statistical simulating methods to find the empirical distribution of statistics necessary for making a decision.

The reason for incorrect conclusions when using tests with known limit distributions of statistics is that sizes n in Big Data are “practically unlimited” and these data are presented with limited accuracy.

For a fixed number of intervals with an increase in sample sizes, the computational costs for parameters estimation by grouped data do not change, but increase only with an increase in the number of k intervals. It is recommended that maximum likelihood estimates (MLE) were used for grouped samples. These are robust and asymptotically efficient estimates. For small k , the quality of estimates can be improved using asymptotically optimal grouping, in which the losses in Fisher information associated with grouping are minimized.

Using the example of a Big Data sample, the dependence of the result of applying χ^2 Pearson's criterion for testing a simple and complex hypothesis is shown correspondence on the number of intervals and the method of grouping. It is shown that there are no obstacles to the application of χ^2 Pearson's criterion to large samples, and it retains both its positive qualities and its inherent disadvantages (conclusions are ambiguous, essentially depend on the number of intervals chosen and on the method of grouping).

Statistical distributions of goodness-of-fit tests (Kolmogorov, Cramer–Mises–Smirnov and Anderson–Darling) were studied by statistical simulating methods, depending on the accuracy of the observation record (from the possible number of unique values in the samples).

From obtained results, it follows that when analysis of Big Data using the appropriate non-parametric goodness-of-fit tests, the statistics should not be computed over the entire large array, but on samples extracted from the “general population”, whose role in this case is played by the Big Data array being analyzed. The size of the sample to be extracted should take into account the accuracy of the data to be captured (the number of possible unique values in the sample) and not exceed some value of $n_{\max}$, at which (for a given accuracy) the distribution of the statistic $G(S_{n_{\max}} | H_0)$ of the tests for the validity of the hypothesis H_0 does not differ from the limiting distribution $G(S | H_0)$ of this statistic. The presented results allow to estimate $n_{\max}$ values for the considered tests. The estimates of $n_{\max}$ for the Kolmogorov test are substantially lower than for the Cramer–Mises–Smirnov and Anderson–Darling tests. The obtained estimates $n_{\max}$ can apply for using in the goodness-of-fit tests by the Big Data analysis.

Keywords: Big Data; parameter estimation; hypothesis testing; goodness-of-fit test.

LEMESHKO Boris Yurievich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Novosibirsk State Technical University, Russian Federation).
E-mail: Lemeshko@ami.nstu.ru

LEMESHKO Stanislav Borisovich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Novosibirsk State Technical University, Russian Federation).
E-mail: skyer@mail.ru

SEMENOVA Mariya Alexandrovna (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Novosibirsk State Technical University, Russian Federation).
E-mail: vedernikova.m.a@gmail.com

REFERENCES

1. Lemeshko, B.Yu. (2014) *Neparametricheskie kriterii soglasiya. Rukovodstvo po primeneniyu* [Nonparametric goodness-of-fit tests]. Moscow: INFRA–M. DOI: 10.12737/11873
2. Rao, S.R. (1968) *Lineynyye statisticheskiye metody i ikh primeneniya* [Linear statistical methods and their applications]. Moscow: Nauka.
3. Lemeshko, B.Yu. (1997) Gruppirovaniye nablyudeniy kak sposob polucheniya robastnykh otsenok [Grouping observations as a way to generate robust estimates]. *Nadezhnost' i kontrol' kachestva*. 5. pp. 26–35.
4. Kulldorf, G. (1966) *Vvedeniye v teoriyu otsenivaniya po gruppirovannym i chastichno gruppirovannym vyborkam* [Introduction to the theory of estimation by grouped and partially grouped samples]. Moscow: Nauka.
5. Denisov, V.I., Lemeshko, B.Yu. & Tsoi, E.B. (1993) *Optimal'noye gruppirovaniye, otsenka parametrov i planirovaniye regressionnykh eksperimentov* [Optimal grouping, parameter estimation, and regression experiment planning]. Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University.
6. Lemeshko, B.Yu., Lemeshko, S.B., Postovalov, S.N. & Chimitova, E.V. (2011) *Statisticheskiy analiz dannykh, modelirovaniye i issledovaniye veroyatnostnykh zakonomernostey. Komp'yuternyy podkhod* [Statistical Data Analysis, Simulation and Study of Probability Regularities. Computer Approach]. Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University.
7. Nikulin, M.S. (1973) Chi-square test for continuous distributions with location and scale parameters. *Teoriya veroyatnostey i yeye primeneniya* – Theory of Probability and Its Applications. 18(3). pp. 75–76. (In Russian).
8. Rao, K.C. & Robson, D.S. (1974) A chi-squared statistic for goodness-of-fit tests within the exponential family. *Communications in Statistics*. 3. pp. 1139–1153. DOI: 10.1080/03610927408827216
9. Denisov, V.I., & Lemeshko, B.Yu. (1979) Optimal'noye gruppirovaniye pri obrabotke eksperimental'nykh dannykh [Optimal grouping in the processing of experimental data]. In: *Izmeritel'nyye informatsionnyye sistemy* [Measuring Information Systems]. Novosibirsk: [s.n.]. pp. 5–14.

10. Lemesko, B.Yu. (1997) Asimptoticheski optimal'noye gruppированиye nablyudeniy – eto obespecheniye maksimal'noy moshchnosti kriteriyev [Asymptotically optimal grouping of observations is to ensure the maximum power of the tests]. *Nadezhnost' i kontrol' kachestva*. 8. pp. 3–14.
11. Lemesko, B.Yu. (1998) Asimptoticheski optimal'noye gruppированиye nablyudeniy v kriteriyakh soglasiya [Asymptotically optimum grouping of observations in goodness-of-fit tests]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov – Industrial laboratory. Diagnostics of materials*. 64(1). pp. 56–64.
12. Lemesko, B.Yu. & Chimitova, E.V. (2003) O vybore chisla intervalov v kriteriyakh soglasiya tipa χ^2 [On the choice of the number of intervals in the goodness-of-fit tests of type χ^2]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov – Industrial laboratory. Diagnostics of materials*. 69(1). pp. 61–67.
13. Lemesko, B.Yu. (2015) *Kriterii proverki otkloneniya raspredeleniya ot normal'nogo zakona* [Tests for checking the deviation from normal distribution law]. Moscow: INFRA–M. DOI: 10.12737/6086
14. Lemesko, B.Yu. (2015) Chi-Square-Type Tests for Verification of Normality. *Measurement Techniques*. 58(6). pp. 581–591. DOI: 10.1007/s11018-015-0759-2
15. Bolshev, L.N. & Smirnov, N. V. (1983) *Tablitsy matematicheskoy statistiki* [Tables for Mathematical Statistics]. Moscow: Nauka.
16. Anderson, T.W. & Darling, D.A. (1954) A test of goodness of fit. *Journal of American Statistics Association*. 29. pp. 765–769.
17. Kac, M., Kiefer, J. & Wolfowitz J. (1955) On tests of normality and other J. tests of goodness of fit based on distance methods. *The Annals of Mathematical Statistics*. 26. pp. 189–211.
18. Lemesko, B.Yu. & Lemesko, S.B. (2009) Distribution models for nonparametric tests for fit in verifying complicated hypotheses and maximum-likelihood estimators. Part 1. *Measurement Techniques*. 52(6). pp. 555–565. DOI: 10.1007/s11018-009-9330-3
19. Lemesko, B.Yu. & Lemesko, S.B. (2009) Models for statistical distributions in nonparametric fitting tests on composite hypotheses based on maximum-likelihood estimators. Part II. *Measurement Techniques*. 52(8). pp. 799–812.
20. Lemesko, B.Yu., Lemesko, S.B. & Postovalov, S.N. (2010) Statistic Distribution Models for Some Nonparametric Goodness-of-Fit Tests in Testing Composite Hypotheses. *Communications in Statistics – Theory and Methods*. 39(3). pp. 460–471. DOI: 10.1080/03610920903140148

УДК 519.2

DOI: 10.17223/19988605/44/6

К.И. Лившиц, Е.С. Ульянова

МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ ОДНОРОДНОЙ ПРОДУКЦИИ С РЕЛЕЙНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ ТЕМПОМ ПРОИЗВОДСТВА И ММР-ПОТОКОМ МОМЕНТОВ ПРОДАЖ

Исследуются статистические математические модели производства и сбыта некоторого однородного ресурса (товара) с релейным управлением скоростью производства и ММР-потоком моментов потребления произведенного ресурса. Найдена в диффузионном приближении плотность распределения количества ресурса в стационарном режиме. Получены оптимальные значения параметров релейного управления темпом производства, максимизирующие среднюю прибыль в единицу времени в стационарном режиме.

Ключевые слова: управление запасами; релейное управление; ММР-поток; асимптотическое распределение количества продукции.

Одной из классических задач теории управления запасами является задача производства и сбыта однородной продукции. Систематическое исследование моделей управления запасами началось, по-видимому, еще в 1950-е гг. в работах [1, 2]. К настоящему времени опубликовано огромное количество работ, посвященных данной тематике, в которых либо используется чисто детерминистский подход к решению задачи, требующий полной информации о процессе реализации продукции [3–5], либо рассматриваются стохастические модели. Из работ последнего времени, в которых рассматриваются стохастические модели, отметим, например, работы [6–14].

Целью данной работы является определение асимптотических вероятностных характеристик модели управления запасами с релейным управлением темпом производства и ММР-потоком моментов продаж.

1. Математическая модель

В настоящей работе задача производства и сбыта продукции рассматривается при следующих предположениях. Пусть $S(t)$ – количество продукции в момент времени t . Считается, что продукция производится со скоростью $C(S)$, так что за время Δt поступает $C(S(t))\Delta t$ единиц продукции. Накопленная продукция непрерывно реализуется. Величины покупок являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с плотностью распределения $\varphi(x)$ и моментами $M\{x\} = a$ и $M\{x^2\} = a_2$.

Моменты продаж образуют дважды стохастический пуассоновский поток с интенсивностью $\lambda(t)$. Процесс $\lambda(t)$ является однородной цепью Маркова с непрерывным временем и n состояниями $\lambda(t) = \lambda_i$. Такое предположение представляется естественным, так как продажи происходят в принципе в случайные моменты времени, а интенсивность потока продаж с течением времени случайным образом может изменяться. Простейшим примером является изменение количества покупателей в течение дня в продуктовой торговой точке.

Пусть переход из состояния в состояние задается матрицей инфинитезимальных характеристик $Q = [q_{ij}]$ ранга $n-1$, где $q_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$ и

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} = 0. \quad (1)$$

Обозначим $\gamma_i, i = \overline{1, n}$ – собственные значения матрицы Q , $\gamma_n = 0$. В дальнейшем считается, что все собственные значения – простые. Если при $i = \overline{1, n-1}$ $\gamma_i < 0$, то существуют финальные вероятности состояний π_i , являющиеся решением системы уравнений

$$\sum_{i=1}^n q_{ij} \pi_i = 0, \quad (2)$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n = 1. \quad (3)$$

Различные варианты выбора функции $C(S)$ приводят к различным моделям производства и сбыта продукции. В простейших случаях, которые и будут в дальнейшем рассматриваться, управление $C(S)$ является релейным с различными вариантами выбора точек переключения управления. Приведем несколько возможных вариантов. Пусть

$$C(S) = \begin{cases} C_0, & S < S_0, \\ C_1, & S \geq S_0, \end{cases} \quad (4)$$

где S_0 – пороговое значение желаемого запаса продукции, $C_1 < \lambda_0 a, C_0 > \lambda_0 a$ и $\lambda_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \pi_i$ – средняя интенсивность потока покупок. Выбор управления вида (4) гарантирует в стационарном режиме стабилизацию уровня запаса продукции $S(t)$ около желаемого значения S_0 . Отрицательные значения запаса $S(t)$ интерпретируются как неудовлетворенный спрос (накопленные заказы подлежат немедленному исполнению при пополнении запаса) [15].

При выборе функции $C(S)$ в виде

$$C(S) = \begin{cases} C, & S \leq S_0, \\ 0, & S > S_0 \end{cases} \quad (5)$$

величина S_0 может интерпретироваться как максимально допустимый уровень запаса. Отметим, что при детерминированной постановке задачи управления производством и сбытом продукции релейное управление вида (5) является оптимальным [4].

Наконец, возможен вариант

$$C(S) = \begin{cases} C, & 0 \leq S \leq S_0, \\ 0, & S < 0 \text{ и } S > S_0. \end{cases} \quad (6)$$

В этом случае неудовлетворенный спрос не учитывается, неудовлетворенные заказы теряются.

2. Функция распределения количества продукции в стационарном режиме

Обозначим

$$P_i(s, t) = P\{S(t) < s; \lambda(t) = \lambda_i\} \quad (i = \overline{1, n})$$

и рассмотрим два близких момента времени t и $t + \Delta t$. Пусть в момент времени t $\lambda(t) = \lambda_j$ количество продукции $S(t) = z$. Вычислим условную вероятность

$$P\{S(t + \Delta t) < s, \lambda(t + \Delta t) = \lambda_i | S(t) = z, \lambda(t) = \lambda_j\}.$$

На интервале времени длиной Δt могли произойти следующие события:

1. Интенсивность $\lambda(t) = \lambda_i$, за время Δt интенсивность не изменилась, продажа продукции не производилась. Вероятность этого события равна $1 + (q_{ii} - \lambda_i)\Delta t + o(\Delta t)$. В этом случае

$$P\{S(t + \Delta t) < s, \lambda(t + \Delta t) = \lambda_i | S(t) = z, \lambda(t) = \lambda_i\} = (1 + q_{ii}\Delta t)(1 - \lambda_i\Delta t)I(s - z - C(z)\Delta t) + o(\Delta t),$$

где $I(z)$ – единичная ступенчатая функция.

2. За время Δt значение интенсивности $\lambda(t) = \lambda_j$ поменялось на $\lambda(t + \Delta t) = \lambda_i$, продажа продукции не производилась. Вероятность этого события $q_{ji}\Delta t + o(\Delta t)$. В этом случае

$$P\{S(t + \Delta t) < s, \lambda(t + \Delta t) = \lambda_i \mid S(t) = z, \lambda(t) = \lambda_j\} = q_{ji}\Delta t I(s - z - C(z)\Delta t) + o(\Delta t).$$

3. Интенсивность $\lambda(t) = \lambda_i$, за время Δt интенсивность не изменилась, произошла продажа продукции в количестве x . Вероятность этого события $\lambda_i\Delta t\varphi(x)dx + o(\Delta t)$. В этом случае после усреднения получим

$$P\{S(t + \Delta t) < s, \lambda(t + \Delta t) = \lambda_i \mid S(t) = z, \lambda(t) = \lambda_i\} = \lambda_i\Delta t \int_0^\infty I(s - z - C(z)\Delta t + x)\varphi(x)dx + o(\Delta t).$$

4. Вероятность иных событий равняется $o(\Delta t)$.

Используя формулу полной вероятности и усредняя по $P_i(z, t)$, получим

$$P_i(s, t + \Delta t) = (1 + (q_{ii} - \lambda_i)\Delta t) \int_{-\infty}^\infty I(s - z - C(z)\Delta t)dP_i(z, t) + \\ + \sum_{j \neq i} q_{ji} \int_{-\infty}^\infty I(s - z)dP_j(z, t)\Delta t + \lambda_i\Delta t \int_{-\infty}^\infty dP_i(z, t) \int_0^\infty I(s - z + x)\varphi(x)dx + o(\Delta t).$$

При малых Δt уравнение $z = s - C(z)\Delta t$ имеет корень $z = s - C(s)\Delta t + o(\Delta t)$. Поэтому

$$P_i(s, t + \Delta t) = (1 - \lambda_i\Delta t)P_i(s - C(s)\Delta t, t) + \sum_{j=1}^m q_{ji}P_j(s, t)\Delta t + \lambda_i\Delta t \int_0^\infty P_i(s + z, t)\varphi(z)dz + o(\Delta t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим, что функции $P_i(s, t)$ удовлетворяют во всех точках непрерывности системе уравнений

$$\frac{\partial P_i(s, t)}{\partial t} + C(s) \frac{\partial P_i(s, t)}{\partial s} = -\lambda_i P_i(s, t) + \sum_{j=1}^n q_{ji} P_j(s, t) + \lambda_i \int_0^\infty P_i(s + x, t)\varphi(x)dx.$$

Рассмотрим далее стационарный случай. Обозначим

$$P_i(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_i(s, t). \quad (7)$$

Функции $P_i(s)$ будут удовлетворять уравнениям

$$C(s) \dot{P}_i(s) = -\lambda_i P_i(s) + \sum_{j=1}^n q_{ji} P_j(s) + \lambda_i \int_0^\infty P_i(s + x)\varphi(x)dx \quad (8)$$

с вытекающими из их определения условиями нормировки

$$\lim_{s \rightarrow \infty} P_i(s) = \pi_i, \quad (9)$$

где π_i – финальная вероятность состояния λ_i .

Функция распределения количества продукции $P(s)$ в стационарном режиме будет, очевидно, равна

$$P(s) = \sum_{k=1}^n P_k(s).$$

3. Асимптотическое распределение количества продукции в стационарном режиме

Рассмотрим наиболее подробно случай, когда функция $C(S)$ определяется соотношением (5). Система уравнений (8) тогда переписывается в виде

$$-\lambda_i P_i(s) + \sum_{j=1}^n q_{ji} P_j(s) + \lambda_i \int_0^\infty P_i(s + x)\varphi(x)dx = 0, \quad s > S_0, \quad (10)$$

$$C\dot{P}_i(s) = -\lambda_i P_i(s) + \sum_{j=1}^n q_{ji} P_j(s) + \lambda_i \int_0^{\infty} P_i(s+x) \varphi(x) dx, \quad s \leq S_0. \quad (11)$$

Решения уравнений (10) с учетом граничных условий (9) и соотношений (2) имеют, очевидно, вид:

$$P_i(s) = \pi_i, \quad s > S_0. \quad (12)$$

Отсюда при $s \leq S_0$

$$C\dot{P}_i(s) = -\lambda_i P_i(s) + \sum_{j=1}^n q_{ji} P_j(s) + \lambda_i \int_0^{S_0-s} P_i(s+x) \varphi(x) dx + \lambda_i \pi_i \int_{S_0-s}^{\infty} \varphi(x) dx, \quad s \leq S_0. \quad (13)$$

Получить точное решение системы уравнений (13) при произвольных n и $\varphi(x)$ не удастся. Поэтому в дальнейшем рассматривается случай, когда

$$C = (1+\theta)\lambda_0 a \quad (14)$$

и параметр $\theta \rightarrow 0$. Такое предположение является довольно естественным, так как темп производства $C(S)$ должен быть согласован со средней величиной спроса в единицу времени $\lambda_0 a$ и большие отклонения $C(S)$ от $\lambda_0 a$ должны приводить либо к перепроизводству, либо к дефициту продукции. Для решения уравнений (13) воспользуемся методикой из [16].

Решение системы уравнений (13) будем искать в виде:

$$P_i(s) = f_i(\theta s, \theta), \quad (15)$$

считая функции $f_i(z, \theta)$ монотонно возрастающими и дважды дифференцируемыми по z , за исключением, возможно, точки $z_0 = \theta S_0$. Будем также считать, что $S_0 = S_0(\theta)$ и что при $\theta \rightarrow 0$ $S_0(\theta) \rightarrow \infty$, но так, что существует конечный предел

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta S_0(\theta) = z_0. \quad (16)$$

Подставляя функции (15) в уравнения (13), после замены переменных $z = \theta s$, получим в области $z < z_0$

$$C\theta \dot{f}_i(z, \theta) = -\lambda_i f_i(z, \theta) + \sum_{j=1}^n q_{ji} f_j(z, \theta) + \lambda_i \int_0^{\infty} f_i(z+\theta x, \theta) \varphi(x) dx + R_i(z, \theta), \quad (17)$$

где

$$R_i(z, \theta) = -\lambda_i \int_{\frac{z_0-z}{\theta}}^{\infty} f_i(z+\theta x, \theta) \varphi(x) dx + \lambda_i \pi_i \int_{\frac{z_0-z}{\theta}}^{\infty} \varphi(x) dx.$$

Функции $f_i(z, \theta)$ предполагаются дифференцируемыми и, следовательно, ограниченными. Поэтому при $z < z_0$

$$\int_{\frac{z_0-z}{\theta}}^{\infty} f_i(z+\theta x) \varphi(x) dx \leq \max_z f_i(z, \theta) \int_{\frac{z_0-z}{\theta}}^{\infty} \varphi(x) dx \leq \text{const} \frac{\theta^2}{(z_0-z)^2} \int_{\frac{z_0-z}{\theta}}^{\infty} x^2 \varphi(x) dx < o(\theta^2),$$

так как по условию второй момент $a_2 = M\{x^2\}$ конечен. Аналогично можно оценить и второе слагаемое. Поэтому слагаемое $R_i(z, \theta)$ в (17) в дальнейшем учитываться не будет.

Переходя в уравнениях (17) к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим

$$\sum_{j=1}^n q_{ji} f_j(z, 0) = 0. \quad (18)$$

Так как $\text{Rang } Q = n-1$, то из сравнения систем уравнений (18) и (2) будем иметь

$$f_j(z, 0) = \pi_j f(z), \quad (19)$$

где $f(z)$ – не определенная пока функция.

Пусть теперь

$$f_j(z, \theta) = \pi_j f(z) + h_j(z)\theta + o(\theta). \quad (20)$$

Подставляя выражения (20) в уравнения (17), раскладывая подынтегральные функции в ряд по θ и ограничиваясь членами, имеющими порядок θ , получим после предельного перехода при $\theta \rightarrow 0$

$$\sum_{j=1}^n q_{ji} h_j(z) = -(\lambda_i - \lambda_0) a \pi_i \dot{f}(z). \quad (21)$$

Пусть

$$f_i(z, \theta) = \pi_i f(z) + h_i(z) \theta + g_i(z) \theta^2 + o(\theta^2). \quad (22)$$

Подставляя разложения (22) в уравнения (17), раскладывая подынтегральные функции в ряд по θ и ограничиваясь членами, имеющими порядок не выше θ^2 , получим, учитывая (19) и (21), после предельного перехода при $\theta \rightarrow 0 \rightarrow 0$

$$-\sum_{j=1}^n q_{ji} g_j(z) = \frac{\lambda_i a_2}{2} \pi_i \ddot{f}(s) + (\lambda_i - \lambda_0) a \dot{h}_i(s) + \lambda_0 a \pi_i \dot{f}(s). \quad (23)$$

Просуммировав, наконец, все соотношения (23) по i , получим с учетом (1), что

$$\frac{\lambda_0 a_2}{2} \ddot{f}(s) + \lambda_0 a \dot{f}(s) - \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_0) a \dot{h}_i(s) = 0. \quad (24)$$

Из системы уравнений (21)

$$\sum_{j=1}^n q_{ji} h_j(z) = -(\lambda_i - \lambda_0) a \pi_i \ddot{f}(z). \quad (25)$$

Пусть матрица

$$V = Q^T = R \gamma P, \quad (26)$$

где $R = [R_{ij}]$ – матрица собственных векторов матрицы V , матрица $P = [P_{ij}] = R^{-1}$, матрица $\gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}, 0)$ – диагональная матрица из собственных значений матрицы V . Из соотношений (2) вытекает, что $R_{in} = \pi_i$. Далее, из соотношений (26) и (1)

$$\sum_{k=1}^n \left[\sum_{j=1}^n R_{jk} \right] \gamma_k P_{ki} = 0.$$

Так как столбцы матрицы P линейно независимы, то при $k = \overline{1, n-1}$

$$\sum_{j=1}^n R_{jk} = 0.$$

Элементы n -й строки матрицы P должны удовлетворять соотношениям

$$\sum_{j=1}^n P_{nj} R_{jk} = 0, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad \sum_{j=1}^n P_{nj} \pi_j = 1.$$

Откуда следует, что $P_{nk} = 1, k = \overline{1, n}$. Учитывая разложение (26), уравнения (25) можно переписать как

$$\gamma_t \sum_{j=1}^n P_{tj} \dot{h}_j(s) = - \sum_{i=1}^n P_{ti} (\lambda_i - \lambda_0) \pi_i a \ddot{f}(s).$$

Или

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n P_{tj} \dot{h}_j(s) &= - \frac{1}{\gamma_t} \sum_{i=1}^n P_{ti} (\lambda_i - \lambda_0) \pi_i a \ddot{f}(s) \quad t = \overline{1, n-1}, \\ \sum_{i=1}^n P_{ni} \dot{h}_i(s) &= c(s), \end{aligned}$$

где $c(s)$ – произвольная функция. Отсюда

$$\dot{h}_i(s) = \sum_{t=1}^{n-1} R_{it} \frac{1}{\gamma_t} \sum_{j=1}^n P_{tj} (\lambda_0 - \lambda_j) \pi_j a \ddot{f}(s) + \pi_i c(s). \quad (27)$$

Подставляя (27) в уравнение (24), получим, наконец, уравнение относительно функции $f(s)$:

$$A_2 \ddot{f}(s) - A_1 \dot{f}(s) = 0, \quad (28)$$

где

$$A_1 = \lambda_0 a, \quad (29)$$

$$A_2 = \frac{\lambda_0 a_2}{2} - a^2 \sum_{t=1}^{n-1} \frac{1}{\gamma_t} \sum_{i=1}^n (\lambda_0 - \lambda_i) R_{it} \sum_{j=1}^n P_{tj} (\lambda_0 - \lambda_j) \pi_j. \quad (30)$$

Покажем, что квадратичная форма

$$W = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{1}{\gamma_t} \sum_{i=1}^n (\lambda_0 - \lambda_i) R_{it} \sum_{j=1}^n P_{tj} (\lambda_0 - \lambda_j) \pi_j$$

отрицательно определена. Обозначим

$$x_t = \sum_{i=1}^n (\lambda_0 - \lambda_i) R_{it}.$$

Тогда $\lambda_0 - \lambda_j = \sum_{t=1}^n x_t P_{tj}$ и после несложных преобразований

$$W = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{x_t}{\gamma_t} \sum_{k=1}^n x_k \omega_{tk} = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{x_t}{\gamma_t} \sum_{k=1}^{n-1} x_k \omega_{tk},$$

где

$$\omega_{tk} = \sum_{j=1}^n P_{tj} P_{kj} \pi_j.$$

Так как $P_{nj} = 1$ и при $t \neq n$ t -я строка матрицы P ортогональна столбцу $[\pi_1 \ \pi_2 \ \dots \ \pi_n]^T$, то $\omega_{tn} = 0$.

Так как матрица P не вырождена, $\pi_j \geq 0$, $\sum_j \pi_j = 1$, то матрица $\omega = [\omega_{ij}] > 0$. Поэтому все главные ми-

норы k -го порядка этой матрицы $\Delta_k(\omega) > 0$. Миноры матрицы квадратичной формы W k -го порядка

$\Delta_k = \prod_{j=1}^k \frac{1}{\gamma_j} \Delta_k(\omega)$. Так как $\gamma_k < 0$, то знаки миноров Δ_k чередуются. Поэтому квадратичная форма W

отрицательно определена.

Решение уравнения (28) будет иметь вид

$$f(z) = B_1 + B_2 e^{\frac{A_1}{A_2}(z-z_0)}.$$

Так как $P_i(-\infty) = 0$, то $f(-\infty) = 0$, и окончательно

$$f(z) = B e^{\frac{A_1}{A_2}(z-z_0)}, \quad z < z_0. \quad (31)$$

Таким образом, при $s < S_0$

$$P_i(s) = B \pi_i e^{\frac{A_1}{A_2} \theta(s-S_0)} + O(\theta). \quad (32)$$

Соотношение (31) и, соответственно, соотношения (32) были получены в предположении, что $s \neq S_0$ ($z \neq z_0$). При $s = S_0$ уравнения (13) дают

$$C \dot{P}_i(S_0) = -\lambda_i P_i(S_0) + \sum_{j=1}^n q_{ji} P_j(S_0) + \lambda_i \pi_i. \quad (33)$$

Подставляя в (33) выражения (32) и суммируя соотношения (33), получим

$$B = \frac{1}{1 + \theta \frac{a A_1}{A_2}} + o(\theta). \quad (34)$$

Таким образом, при $\theta \ll 1$

$$P_i(s) = \begin{cases} \frac{\pi_i}{1 + \theta \frac{aA_1}{A_2}} e^{\frac{A_1}{A_2} \theta (s - S_0)} + O(\theta), & s \leq S_0, \\ \pi_i, & s > S_0. \end{cases} \quad (35)$$

Рассмотрим коротко случай, когда функция $C(S)$ определяется соотношением (6). В этом случае система уравнений (8) переписывается в виде:

$$-\lambda_i P_i(s) + \sum_{j=1}^n q_{ji} P_j(s) + \lambda_i \int_0^\infty P_i(s+x) \varphi(x) dx = 0, \quad s < 0, s > S_0, \quad (36)$$

$$C \dot{P}_i(s) = -\lambda_i P_i(s) + \sum_{j=1}^n q_{ji} P_j(s) + \lambda_i \int_0^\infty P_i(s+x) \varphi(x) dx, \quad 0 \leq s \leq S_0. \quad (37)$$

Решения уравнений (36) имеют вид:

$$P_i(s) = 0, \quad s < 0, \quad P_i(s) = \pi_i, \quad s > S_0. \quad (38)$$

Условная вероятность

$$P\{s(t + \Delta t) = 0, \lambda(t + \Delta t) = \lambda_i \mid s(t) = z, \lambda(t) = \lambda_j\} = o(\Delta t),$$

$$P\{s(t + \Delta t) = 0, \lambda(t + \Delta t) = \lambda_i \mid s(t) = z, \lambda(t) = \lambda_i\} = \lambda_i \Delta t \int_z^\infty \varphi(x) dx + o(\Delta t).$$

Откуда в стационарном режиме

$$P_i(0) = 0. \quad (39)$$

Решение уравнений (37) опять будем искать в виде (15), приравняв в конце концов к соотношению на функцию

$$f(z) = B_1 + B_2 e^{\frac{A_1}{A_2} z}.$$

Условие (39) дает $f(0) = 0$. Откуда $B_2 = -B_1$ и при $0 \leq s < S$

$$P_i(s) = B \pi_i (1 - e^{\frac{A_1}{A_2} \theta s}) + O(\theta). \quad (40)$$

Подставляя соотношения (40) в (33), получим

$$B = \frac{1}{1 - (1 + \theta \frac{aA_1}{A_2}) e^{\frac{A_1}{A_2} \theta S_0}} + o(\theta) \quad (41)$$

и окончательно

$$P_i(s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ \frac{\pi_i (1 - e^{\frac{A_1}{A_2} \theta s})}{1 - (1 + \theta \frac{aA_1}{A_2}) e^{\frac{A_1}{A_2} \theta S_0}} + O(\theta), & 0 \leq s \leq S_0, \\ \pi_i & s > S_0. \end{cases} \quad (42)$$

4. Распределение количества продукции для случая потока с двумя состояниями и экспоненциального распределения величин покупок

Для оценки точности асимптотических соотношений (35) рассмотрим случай, когда число состояний потока моментов продаж равняется двум: $\lambda(t) = \lambda_1$ или $\lambda(t) = \lambda_2$, а величины покупок имеют

экспоненциальное распределение $\varphi(x) = \frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}}$. Решение системы уравнений (13), которая переписывается как

$$C\dot{P}_k(s) = -\lambda_k P_k(s) + \sum_{j=1}^2 q_{jk} P_j(s) + \frac{\lambda_k}{a} \int_0^{S_0-s} P_k(s+x) e^{-\frac{x}{a}} dx + \lambda_k \pi_k e^{-\frac{s-S_0}{a}}, \quad s \leq S_0, \quad (43)$$

будем искать в виде

$$P_k(s) = A_{k1} e^{\gamma_1(s-S_0)} + A_{k2} e^{\gamma_2(s-S_0)}, \quad k=1,2. \quad (44)$$

Подставляя соотношения (44) в уравнения (43) и приравнявая коэффициенты при линейно независимых функциях $e^{\gamma_j(s-S_0)}$ и $e^{-\frac{s-S_0}{a}}$, получим систему соотношений

$$\frac{A_{k1}}{1-\gamma_1 a} + \frac{A_{k2}}{1-\gamma_2 a} = \pi_k, \quad k=1,2, \quad (45)$$

$$A_{1k}(q_{11} - C\gamma_k + \frac{\lambda_1 a \gamma_k}{1-a\gamma_k}) + q_{21} A_{2k} = 0, \quad (46)$$

$$q_{12} A_{1k} + (q_{22} - C\gamma_k + \frac{\lambda_2 a \gamma_k}{1-a\gamma_k}) A_{2k} = 0, \quad k=1,2.$$

Однородные системы (46) имеют ненулевые решения, если их определители $\Delta(\gamma_k)$ равны нулю. Так как матрица $[q_{ij}]$ вырождена, то один корень уравнения $\Delta(\gamma_k) = 0$ $\gamma_k = 0$. Остальные корни являются решениями уравнения

$$f(z) = z(C - \frac{\lambda_1 a}{1-az})(C - \frac{\lambda_2 a}{1-az}) - (q_{11} + q_{22})(C - \frac{\lambda_0 a}{1-az}) = 0. \quad (47)$$

Пусть k – корень уравнения $C - \frac{\lambda_0 a}{1-az} = 0$, т.е. $k = \frac{C - \lambda_0 a}{Ca}$. Тогда

$$f(k) = k \frac{(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_2)a^2}{(1-ak)^2} < 0,$$

так как либо $\lambda_0 - \lambda_1 < 0$, либо $\lambda_0 - \lambda_2 < 0$. С другой стороны,

$$f(0) = -(q_{11} + q_{22})(C - \lambda_0 a) > 0.$$

Поэтому существует корень $\gamma_1 \in (0, k)$ уравнения (47). Далее, при $z \rightarrow 1/a$ $f(z) \rightarrow \infty$. Поэтому существует корень $\gamma_2 \in (k, 1/a)$ уравнения (47). Наконец, при $z \rightarrow -\infty$ $f(z) \rightarrow -\infty$. Следовательно, третий корень уравнения (47) $\gamma_3 < 0$. Так как при $s \rightarrow -\infty$ $P_k(s) \rightarrow 0$, то он не может входить в выражения (44).

Из соотношений (46) имеем теперь

$$A_{2k} = v_k A_{1k}, \quad v_k = -\frac{1}{q_{21}}(q_{11} + \frac{\lambda_1 a \gamma_k}{1-a\gamma_k} - C\gamma_k), \quad (48)$$

и система уравнений (45) переписывается как

$$\begin{aligned} \frac{A_{11}}{1-a\gamma_1} + \frac{A_{12}}{1-a\gamma_2} &= \pi_1, \\ \frac{A_{11}v_1}{1-a\gamma_1} + \frac{A_{12}v_2}{1-a\gamma_2} &= \pi_2. \end{aligned} \quad (49)$$

Откуда

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{(\pi_1 v_2 - \pi_2)(1-a\gamma_1)}{v_2 - v_1}, & A_{12} &= \frac{(\pi_1 v_1 - \pi_2)(1-a\gamma_2)}{v_1 - v_2}, \\ A_{21} &= v_1 \frac{(\pi_1 v_2 - \pi_2)(1-a\gamma_1)}{v_2 - v_1}, & A_{22} &= v_2 \frac{(\pi_1 v_1 - \pi_2)(1-a\gamma_2)}{v_1 - v_2}. \end{aligned} \quad (50)$$

На рис. 1 приведены безусловные функции распределения количества продукции

$$P(s) = P_1(s) + P_2(s),$$

вычисленные по точным формулам (44) (сплошные линии) и по приближенным формулам (35) (пунктирные линии) при $\theta = 0,01; 0,1; 0,25$. Параметры $\lambda_1 = 15, \lambda_2 = 5, a = 1, C = (1 + \theta)\lambda_0 a, q_{11} = -2, q_{22} = -1, S_0 = 20$.

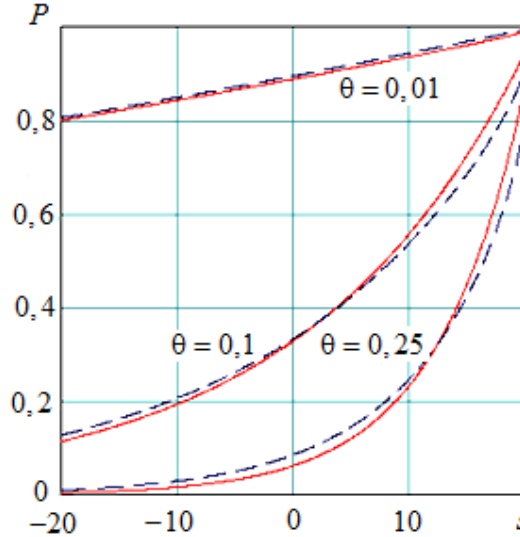


Рис. 1. Функция распределения количества продукции (сплошные линии) и ее аппроксимация (пунктирные линии) при экспоненциальном распределении величин покупок

Как следует из приведенных графиков, в рассмотренном простейшем случае приближенные соотношения (35) дают хорошую аппроксимацию функции распределения.

5. Средняя прибыль в стационарном режиме

Обозначим через β продажную цену единицы продукции, считая себестоимость равной 1, и через α – стоимость хранения единицы продукции. Если $\varphi(x)$ – плотность распределения величин покупок, то при принятой релейной стратегии управления темпом производства средняя прибыль в единицу времени

$$W = \beta \lambda_0 \int_0^{S_0} \psi(s) dP(s) - \alpha \int_0^{S_0} s dP(s) - CP(S_0), \quad (51)$$

где

$$\psi(s) = \int_0^s x \varphi(x) dx + s \int_s^\infty \varphi(x) dx, \quad (52)$$

так как реализация возможна лишь при наличии продукции. При этом необходимо учитывать, что продукция, произведенная на данном временном промежутке, может быть реализована только на последующих временных промежутках. В рассматриваемом нами асимптотическом случае выражение (51) принимает вид:

$$W(\theta, S_0) = \beta \lambda_0 \frac{\gamma \theta}{1 + a \gamma \theta} \int_0^{S_0} e^{\gamma \theta (s - S_0)} \psi(s) ds - \frac{\alpha}{1 + a \gamma \theta} \left(S_0 - \frac{1}{\gamma \theta} (1 - e^{-\gamma \theta S_0}) \right) - \lambda_0 a \frac{1 + \theta}{1 + a \gamma \theta}, \quad (53)$$

где $\gamma = \frac{A_1}{A_2}$. Оптимальные значения параметров θ и S_0 будут определяться, очевидно, условиями

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial S_0} = 0. \quad (54)$$

Получить аналитическое решение системы (54) не удастся.

На рис. 2 приведена зависимость средней прибыли $W(\theta, S_0)$ от параметров θ , S_0 для простейшего случая экспоненциального распределения покупок. Параметры $\beta = 2$, $\lambda_1 = 15$, $\lambda_2 = 5$, $a = 1$, $q_{11} = -2$, $q_{22} = -1$.

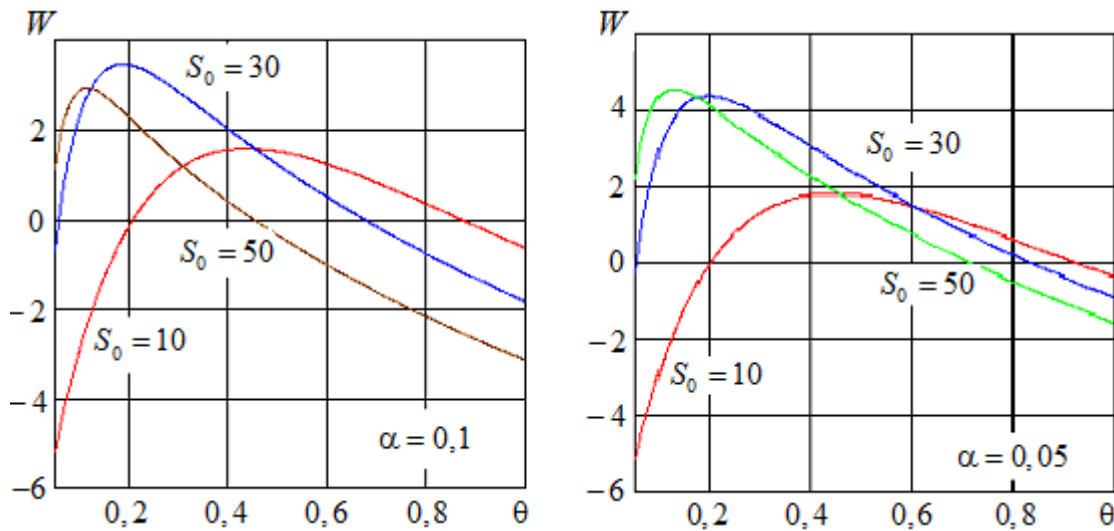


Рис.2. Зависимость средней прибыли от параметров θ и S_0 при экспоненциальном распределении величин покупок

Как следует из приведенных графиков, средняя прибыль $W(\theta, S_0)$ имеет максимум как по параметру θ , так и по параметру S_0 , положение которого зависит, в частности, от стоимости хранения единицы продукции α . Как следует из рис. 2, оптимальное значение параметра θ в рассматриваемом примере равно примерно 0,1–0,2.

Заключение

В работе получены асимптотические выражения для распределения количества производимой однородной продукции при релейном управлении темпом производства и ММР-потоке моментов продаж продукции при дополнительном предположении, что темп производства «почти совпадает» с темпом продаж. Для случая экспоненциального распределения величин покупок показано хорошее совпадение асимптотических результатов с истинным распределением. Проанализировано влияние выбора порога алгоритма релейного управления и темпа производства на величину средней прибыли.

Предлагаемая методика расчета статистических характеристик может быть использована для анализа более сложных вариантов управления темпом производства и интенсивностью потока продаж, например для одновременного учета зависимости интенсивности потока продаж от меняющейся продажной цены продукции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Arrow K.J., Harris Th.E., Marschak J. Optimal Inventory Policy // *Econometrica*. 1951. V. 19 (3). P. 205–272.
2. Dvoretzky A., Kiefer J., Wolfowitz J. On the optimal character of the (S, s) policy in inventory theory // *Econometrica*. 1953. V. 21. P. 586–596.
3. Горский А.А., Локшин Б.Я. Математическая модель процесса производства и продажи для управления и планирования производства // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2002. Т. 8, № 1. С. 34–45.
4. Параев Ю.И. Решение задачи об оптимальном производстве, хранении и сбыте товара // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2000. № 2. С. 103–107.
5. Параев Ю.И. Игровой подход к решению задачи производства, хранения и сбыта товара // *Автоматика и телемеханика*. 2005. № 2. С. 115–123.

6. Chopra S., Meindl P. Supply chain management: Strategy, Planning and Operation. New Jersey : Pearson Education, 2013. 529 p.
7. Beyer D., Cheng F., Sethi S.P., Taksar M. Markovian demand inventory models. New York : Springer, 2010. 255 p.
8. Nazarov A., Broner V. Inventory Management System with On/Off Control of Input Product Flow // Communications in Computer and Information Science. 2017. № 800. P. 370–381.
9. Назаров А.А., Бронер В.И. Система управления запасами с гиперэкспоненциальным распределением объемов потребления ресурсов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 1 (34). С. 43–49.
10. Лившиц К.И., Ульянова Е.С. Диффузионная аппроксимация процесса производства и сбыта скоропортящейся продукции // Известия высших учебных заведений. Физика. 2015. Т. 58, № 11-2. С. 281–285.
11. Livshits K., Ulyanova E. Switch-hysteresis control of the production process in model with perishable goods // Communications in Computer and Information Sciences. 2016. № 638. P. 192–206.
12. Livshits K., Ulyanova E. Switch-hysteresis control of the selling times flow in a model with perishable goods // Communications in Computer and Information Science. 2015. № 564. P. 263–274.
13. Zhang D., Xu Y., Wu Y. Single and multi-period optimal inventory control models with risk-averse constraints // European Journal of Operational Research. 2009. V. 199. P. 420–434.
14. Zhang J., Chen J. A multi-period pricing and inventory control model // Journal of Systems Science and Complexity. 2009. V. 23. P. 249–260.
15. Карлин С.М. Основы теории случайных процессов. М. : Мир, 1971. 536 с.
16. Лившиц К.И., Бублик Я.С. Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1 (10). С. 66–77.

Поступила в редакцию 9 марта 2018 г.

Livshits K.I., Ulyanova E.S. (2018). MODEL OF INVENTORY CONTROL OF HOMOGENEOUS PRODUCTS WITH RELAY CONTROL OF PRODUCTION RATE AND MMP-FLOW OF SALES MOMENTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 44. pp. 50–61

DOI: 10.17223/19988605/44/6

In this paper, we consider a mathematical model of a system of inventory management, on the input of which some resources (goods) come with a speed $C(S(t))$, where $S(t)$ is the volume of accumulated resources in the system at the time t . Consumption of the resource (sales) is carried out at random moments of time by batches of random volume, having an arbitrary density distribution $\varphi(x)$ and moments $M\{x\} = a$, $M\{x^2\} = a_2$. The moments of resource consumption time form a MMP-flow with n states and matrix of infinitesimal characteristics $[q_{ij}]$.

For a stationary distribution $P_i(s) = P\{S(t) < s; \lambda(t) = \lambda_i\}$ of process $S(t)$ and intensity $\lambda(t)$ equation

$$C(s)\dot{P}_i(s) = -\lambda_i P_i(s) + \sum_{j=1}^n q_{ji} P_j(s) + \lambda_i \int_0^{\infty} P_i(s+x)\varphi(x)dx$$

is obtained.

The main attention is paid to the case when the function $C(S(t))$ is determined by the relation $C(S) = C$ at $S \leq S_0$ and $C(S) = 0$ with $S > S_0$, the magnitude $C = (1 + \theta)\lambda_0 a$ and the parameter $\theta \ll 1$. It is proved that in this case

$$P_i(s) = \begin{cases} \frac{\pi_i}{1 + \theta \frac{aA_1}{A_2}} e^{\frac{A_1}{A_2}\theta(s-S_0)} + O(\theta), & s \leq S_0, \\ \pi_i, & s > S_0, \end{cases}$$

where π_i is the final probability of the state λ_i , $A_1 = \lambda_0 a$, $A_2 = \frac{\lambda_0 a_2}{2} - a^2 \sum_{t=1}^{n-1} \frac{1}{\gamma_t} \sum_{i=1}^n (\lambda_0 - \lambda_i) R_{it} \sum_{j=1}^n P_{ij} (\lambda_0 - \lambda_j) \pi_j$, λ_0 is the average intensity of the flow of purchases, the matrix $[R_{ij}]$ is the matrix of the eigenvectors of the matrix $[q_{ij}]$, the matrix $[P_{ij}]$ is the matrix inverse to the matrix $[R_{ij}]$.

Based on a comparison of the proposed asymptotic distribution with the exact one in the case of a two-state flow and the exponential distribution of the quantities of purchases, it was concluded that the proposed asymptotic distribution can be applied. The dependence of the average profit on the quantities C and S_0 has been analyzed.

Keywords: Inventory control; relay control; MMP flow; asymptotic distribution of quantity of products.

LIVSHITS Klimenty Isaakovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: kim47@mail.ru

ULYANOVA Ekaterina Sergeevna (National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: ulyanovaeks@gmail.com

REFERENCES

1. Arrow, K.J., Harris, Th.E. & Marschak, J. (1951) Optimal Inventory Policy. *Econometrica*. 19(3). pp. 205–272. DOI: 10.2307/1906813
2. Dvoretzky, A., Kiefer, J. & Wolfowitz, J. (1953) On the optimal character of the (S, s) policy in inventory theory. *Econometrica*. 21. pp. 586–596.
3. Gorsky, A.A. & Lokshin, B.Ya. (2002) A mathematical model of goods production and sale for production supervision and planning. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika – Fundamental and Applied Mathematics*. 8(1). pp. 34–45. (In Russian).
4. Paraev, Yu.I. (2000) Resheniye zadachi ob optimal'nom proizvodstve, khraneni i sbyte tovara [Solution of the problem of optimal production, storage and sale of goods]. *Izvestia RAN Teoria i sistemy Upravleniya – International Journal of Computer and Systems Sciences*. 2. pp. 103–107.
5. Paraev, Yu.I. (2005) A game approach to production, storage, and marketing problems. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 2. pp. 115–123. (In Russian).
6. Chopra, S. & Meindl, P. (2013) *Supply chain management: Strategy, Planning and Operation*. New Jersey: Pearson Education.
7. Beyer, D., Cheng, F., Sethi, S.P. & Taksar, M. (2010) *Markovian demand inventory models*. New York: Springer.
8. Nazarov, A. & Broner, V. (2017) Inventory Management System with On/Off Control of Input Product Flow. *Communications in Computer and Information Science*. 800. pp. 370–381.
9. Nazarov, A.A. & Broner, V.I. (2016) Inventory model with hyperexponential distribution of demand's batch size. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(34). pp. 43–49. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/34/5
10. Livshits, K.I. & Ulyanova, E.S. (2015) Diffusion approximation of the production and selling of perishable products. *Russian Physics Journal*. 58(11–2). pp. 281–285. (In Russian).
11. Livshits, K. & Ulyanova, E. (2016) Switch-Hysteresis Control of the Production Process in Model with Perishable Goods. *Communications in Computer and Information Sciences*. 638. pp. 192–206. DOI: 10.1007/978-3-319-44615-8_17
12. Livshits, K. & Ulyanova, E. (2015) Switch-hysteresis control of the selling times flow in a model with perishable goods. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 263–274. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4_23
13. Zhang, D., Xu, Y. & Wu, Y. (2009) Single and multi-period optimal inventory control models with risk-averse constraints. *European Journal of Operational Research*. 199. pp. 420–434. DOI: 10.1016/j.ejor.2008.11.047
14. Zhang, J. & Chen, J. (2009) A multi-period pricing and inventory control model. *Journal of Systems Science and Complexity*. 23. pp. 249–260. DOI: 10.1007/s11424-010-7066-4
15. Karlin, S. (1968) *A first course in stochastic processes*. New York and London: Academic press.
16. Livshits, K.I. & Bublik, Ya.S. (2010) Ruin probability of an insurance company under double stochastic payment current. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(10). pp. 66–77. (In Russian).

Е.В. Мокров, К.Е. Самуйлов**СРЕДА СОВМЕСТНОГО ЛИЦЕНЗИРОВАННОГО ДОСТУПА В БЕСПРОВОДНОЙ СЕТИ
КАК СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕНАДЕЖНЫМ РЕСУРСОМ**

*Публикация подготовлена при поддержке Министерства образования и науки
Российской Федерации (проект № 2.882.2017/4.6).*

В терминах теории массового обслуживания рассматривается математическая модель среды совместного лицензионного доступа (LSA, Licensed Shared Access), применяемой в беспроводных сетях LTE (Long Term Evolution). Модель представлена в виде системы массового обслуживания (СМО) с заявками случайного объема и с ненадежным ресурсом. Получены уравнения для общего случая распределения случайного объема заявок. Для дискретного распределения объема заявок с переразыгрыванием выделяемого им ресурса предложен метод анализа вероятностных характеристик.

Ключевые слова: система массового обслуживания; марковский процесс; ненадежный ресурс; заявка случайного объема.

Большая часть работ, посвященных анализу показателей эффективности системы совместного лицензионного доступа LSA, концентрируется либо на экспериментах с измерениями на лабораторном оборудовании [1–3], либо на оптимизации механизмов доступа к лицензируемой полосе частот [4–6]. В работах, исследующих LSA с помощью моделей систем массового обслуживания, как правило, рассматриваются либо различные законы поступления и обслуживания заявок, либо алгоритмы расчета вероятностных характеристик системы [7–11]. Однако в этих работах применяются классические СМО, в которых заявка при обслуживании занимает ровно один прибор. В отличие от указанных выше работ, в данной статье для обслуживания заявки в системе кроме прибора выделяется ресурс, объем которого является случайной величиной с заданным распределением. В отличие от работ [12–15], рассматривается многолинейная система, в которой имеется ресурс, частично выходящий из строя и восстанавливающийся в соответствии с марковским процессом. В этом случае два состояния, в которых может прибывать ресурс, моделируются при помощи надежной и ненадежной составляющих ресурса. Надежную составляющую ресурса можно рассматривать как, например, доступный оператору сети спектр частот, а ненадежную – как арендуемый им спектр, поскольку при использовании системы LSA часть частот оператора арендуется у третьей стороны и может изыматься в случайные моменты на случайное время.

В данной статье получены уравнения для стационарного распределения наличия в системе, находящейся в состоянии s , n заявок, каждая из которых занимает r_i , $i = 1, \dots, n$, ресурсов для случая системы с непрерывным ресурсом, а для системы с дискретным ресурсом предложен метод анализа и расчета вероятности эвакуации и вероятности прерывания обслуживания.

1. Построение модели

Рассматривается S -линейная СМО, на которую поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ . Обслуживание заявок происходит по экспоненциальному закону с параметром μ (рис. 1). Система может находиться в одном из двух состояний s , переход между которыми происходит

в случайные моменты времени, распределенные согласно экспоненциальному закону, $s \in \{0,1\}$. С интенсивностью α осуществляется переход из состояния $s = 1$ (состояние приема заявок) в состояние $s = 0$ и с интенсивностью β – переход из состояния $s = 0$ в состояние $s = 1$ (состояние потери заявок). В нормальных условиях функционирования системы ($s = 1$) заявкам доступен ресурс объема R_1 , а при отказе ($s = 0$) его объем уменьшается до величины $R_0 < R_1$.

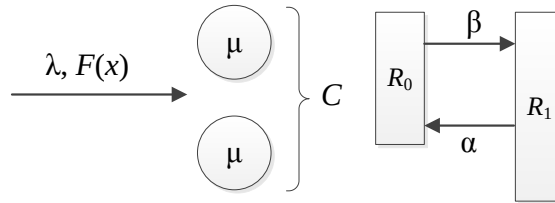


Рис. 1. Схема СМО с ненадежным ресурсом

В момент поступления заявки в систему для ее обслуживания должен быть выделен один прибор и случайный объем ресурса в соответствии с функцией распределения (ФР) $F(x)$, причем $F(x) = 0, x < 0$. Если для обслуживания поступившей в нормальных условиях функционирования системы заявки нет свободных приборов и / или отсутствует в достаточном объеме свободный ресурс, заявка теряется.

Кроме того, при смене состояния системы с $s = 1$ на $s = 0$ из-за уменьшения объема доступного ресурса могут быть потеряны уже принятые в систему заявки. Это происходит, если в момент перехода в состояние $s = 0$ в системе имеется n заявок, каждая из которых занимает ресурс объема r_i , а суммар-

ный объем занятого ресурса $r. = \sum_{i=1}^n r_i > R_0$. Ниже предложены два алгоритма выбора заявок, которые покинут систему до окончания обслуживания (будут потеряны).

Алгоритм 1 (A1). Потеря последней поступившей заявки. Алгоритм предлагает в случае нехватки ресурса терять заявки, поступившие в систему последними. Таким образом, будут теряться те заявки, которые провели в системе меньше всего времени, и сохраняться те заявки, которые провели в системе больше времени. Алгоритм начинает работу при смене состояния системы с $s = 1$ на $s = 0$. Шаги алгоритма A1 приведены ниже.

Шаг 1. Проверить суммарный объем занятого ресурса; если $r. \leq R_0$ закончить работу, иначе перейти к шагу 2.

Шаг 2. Найти заявку с минимальным временем пребывания в системе. Если таких заявок несколько, выбрать любую из них.

Шаг 3. Освободить занимаемый выбранной заявкой ресурс и прибор, удалить заявку из системы, перейти к шагу 1.

Алгоритм 2 (A2). Потеря заявки максимального объема. Алгоритм предлагает в случае нехватки ресурса терять заявки, занимающие максимальный объем ресурса. Таким образом, алгоритм минимизирует число потерянных заявок, поскольку каждый раз при потере заявки достигается максимальный выигрыш в освобождаемом ресурсе. Алгоритм также начинает работу при смене состояния системы с $s = 1$ на $s = 0$ и работает аналогично предыдущему.

Шаг 1. Проверить суммарный объем занятого ресурса; если $r. \leq R_0$ закончить работу, иначе перейти к шагу 2.

Шаг 2. Найти заявку с максимальным объемом занимаемых ресурсов. Если таких заявок несколько, выбрать любую из них.

Шаг 3. Освободить занимаемый выбранной заявкой ресурс и прибор, удалить заявку из системы, перейти к шагу 1.

Таким образом, на шаге 2 алгоритма *А1* будет теряться заявка с номером n в соответствии с порядком поступления заявок в систему. Этот же простой принцип реализации можно получить и для алгоритма *А2*, если в момент принятия в систему новой заявки перенумеровывать заявки в порядке возрастания объема занимаемого ресурса. Однако ввиду того, что подобная перенумерация достаточно сложна в случае неэкспоненциального распределения функции требований к ресурсам [16], далее в этой статье мы будем исследовать систему при использовании алгоритма *А1*.

2. Уравнения равновесия и вероятностные характеристики системы

Введем случайный процесс $X(t) = (n(t), (r_1(t), \dots, r_n(t)), s(t))$, где $n(t)$ – число заявок в системе, $(r_1(t), \dots, r_n(t))$ – вектор объемов ресурсов, занимаемых заявками, $s(t) \in \{0, 1\}$ – состояние, в котором находится система в момент t . По построению процесс $X(t)$ является марковским на пространстве состояний

$$\mathcal{X} = \left\{ (n, (r_1, \dots, r_n), s) : 0 \leq n \leq C, s \in \{0, 1\}, r_i = \sum_{i=0}^n r_i \leq R_s \right\}.$$

Введем следующие обозначения

$$p_n(r_1, \dots, r_n) = P\{n(t) = n, (r_1(t), \dots, r_n(t)) = (r_1, \dots, r_n), s(t) = 1\},$$

$$q_n(r_1, \dots, r_n) = P\{n(t) = n, (r_1(t), \dots, r_n(t)) = (r_1, \dots, r_n), s(t) = 0\}.$$

В случае, когда ФР $F(x)$ непрерывна с плотностью $f(x)$, система уравнений равновесия (СУР) для системы с алгоритмом потери заявок *А1* может быть записана в следующем виде:

$$q_0(\lambda F(R_0) + \beta) = \mu \int_0^{R_0} q_1(x) dx + \alpha \left(\sum_{k=1}^C \int_{\substack{x \leq R_1 \\ x_1 \geq R_0}} p_k(dx_1, \dots, dx_k) + p_0 \right), \quad p_0(\lambda F(R_1) + \alpha) = \mu \int_0^{R_1} p_1(x) dx + \beta q_0,$$

$$q_n(r_1, \dots, r_n)(\lambda F(R_0 - x) + n\mu + \beta) = \lambda q_{n-1}(r_1, \dots, r_{n-1}) f(r_n) +$$

$$+ \mu \sum_{i=0}^n \int_0^{R_0 - r_i} q_{n+1}(r_1, \dots, r_i, x, r_{i+1}, \dots, r_n) dx +$$

$$+ \alpha \left(\sum_{\substack{k=n+1 \\ r_i + x_1 \geq R_0}}^C \int_{\bar{x} \leq R_1 - r_i} p_k(r_1, \dots, r_n, dx_1, \dots, dx_{k-n}) + p_n(r_1, \dots, r_n) \right),$$

$$n = 1, \dots, C-1, r_i \leq R_0,$$

$$p_n(r_1, \dots, r_n)(\lambda F(R_1 - x) + n\mu + \alpha) = \lambda p_{n-1}(r_1, \dots, r_{n-1}) f(r_n) +$$

$$+ \mu \sum_{i=0}^n \int_0^{R_1 - r_i} p_{n+1}(r_1, \dots, r_i, x, r_{i+1}, \dots, r_n) dx + \beta q_n(r_1, \dots, r_n),$$

$$n = 1, \dots, C-1, r_i \leq R_1,$$

$$q_C(r_1, \dots, r_C)(C\mu + \beta) = \lambda q_{C-1}(r_1, \dots, r_{C-1}) f(r_C) + \alpha p_C(r_1, \dots, r_C), \quad r_i \leq R_0,$$

$$p_n(r_1, \dots, r_C)(C\mu + \alpha) = \lambda p_{C-1}(r_1, \dots, r_{C-1}) f(r_C) + \beta q_C(r_1, \dots, r_C), \quad r_i \leq R_0.$$

В качестве основной вероятностной характеристики системы рассмотрим вероятность успешной эвакуации $P\{X(t) = (n, (r_1, \dots, r_n), 0) | X(t - \Delta) = (n, (r_1, \dots, r_n), 1)\}$ как вероятность того, что при изъятии ресурса ни одна заявка не будет потеряна:

$$P = \sum_{n=0}^C \int_{r \leq R_0} \frac{\alpha}{\alpha + \lambda F(R_1 - r.) + n\mu} p_n(r),$$

и вероятность прерывания $P\{X(t) = (n, (r_1, \dots, r_n), 0) | X(t - \Delta) = (m, (r_1, \dots, r_m), 1), m > n\}$ как вероятность того, что при изъятии ресурса будет потеряна хотя бы одна заявка

$$Q = \sum_{n=1}^C \int_{r > R_0} \frac{\alpha}{\alpha + \lambda F(R_1 - r.) + n\mu} p_n(r).$$

3. Случай дискретного ресурса

В связи с тем что получить аналитическое решение и даже метод вычисления характеристик в общем случае произвольного распределения ресурса весьма затруднительно, далее рассмотрим случай дискретного распределения ресурса. Для дискретного случая в предположении, что $p(x)$ есть вероятность вновь пришедшей заявке занять ресурс объема x , аналогично вышеизложенному получаем СУР следующего вида:

$$\begin{aligned} q_0(\lambda F(R_0) + \beta) &= \mu \sum_{i=0}^{R_0} q_1(i) + \alpha \left(\sum_{k=1}^C \sum_{\substack{r \leq R_1 \\ r_1 > R_0}} p_k(r_1, \dots, r_k) + p_0 \right), \\ p_0(\lambda F(R_1) + \alpha) &= \mu \sum_{i=0}^{R_1} q_1(i) + \beta q_0, \\ q_n(r_1, \dots, r_n)(\lambda F(R_0 - r.) + n\mu + \beta) &= \lambda q_{n-1}(r_1, \dots, r_{n-1}) p(r_n) + \\ &+ \mu \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{\substack{R_0 - \sum_{j \neq i} r_j \\ r_i = 0}} q_{n+1}(r_1, \dots, r_i, \dots, r_n) + \\ &+ \alpha \left(\sum_{k=n+1}^C \sum_{\substack{r \leq R_1 \\ R_0 - r_{n+1} < \sum_{i=1}^n r_i \leq R_0}} p_k(r_1, \dots, r_n, r_{n+1}, \dots, r_k) + p_n(r_1, \dots, r_n) \right), \\ n &= 1, \dots, C-1, \\ p_n(r_1, \dots, r_n)(\lambda F(R_1 - r.) + n\mu + \alpha) &= \lambda p_{n-1}(r_1, \dots, r_{n-1}) p(r_n) + \\ &+ \mu \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{\substack{R_1 - \sum_{j \neq i} r_j \\ r_i = 0}} q_{n+1}(r_1, \dots, r_i, \dots, r_n) + \beta q_n(r_1, \dots, r_n), \\ n &= 1, \dots, C-1, \\ q_C(r_1, \dots, r_C)(C\mu + \beta) &= \lambda q_{C-1}(r_1, \dots, r_{C-1}) p(r_C) + \alpha p_C(r_1, \dots, r_C), \\ p_C(r_1, \dots, r_C)(C\mu + \alpha) &= \lambda p_{C-1}(r_1, \dots, r_{C-1}) p(r_C) + \beta q_C(r_1, \dots, r_n), \end{aligned}$$

Для упрощения вычислений и ввиду большой размерности пространства состояний $\mathcal{X}$ введем марковский процесс $Y(t) = (n(t), r(t), s(t))$ с пространством состояний $\mathcal{Y} = \{(n, r, s) : 0 \leq n \leq C, s \in \{0, 1\}, r \leq R_s\}$.

Заметим, что здесь учитывается только суммарный объем занятого ресурса, а не объем, занятый каждой заявкой. В момент окончания обслуживания заявки, а также в момент изменения состояния системы с $s = 1$ на $s = 0$, приводящего к потере заявки, освобождаемый ресурс переразыгрывается согласно формуле условной вероятности. Недостатком такого упрощения является то, что при его применении можно наблюдать разницу между занимаемым и освобождаемым заявкой ресурсом, однако, как показано в [16], для надежной системы данное упрощение позволяет достаточно точно оценить поведение исходной системы.

Введем обозначения:

$$p_n(r) = P\{n(t) = n, (r(t)) = r, s(t) = 1\}, \quad q_n(r) = P\{n(t) = n, (r(t)) = r, s(t) = 0\},$$

и тогда СУР для процесса $Y(t)$ может быть записана в следующем виде:

$$q_0(0)(\lambda F(R_1) + \beta) = \mu \sum_{j=0}^{R_0} q_1(j) + \alpha \left(\sum_{i=1}^C \sum_{j=R_0+1}^{R_1} p_i(j) \sum_{s=R_0+1}^j \frac{p(s)p(j-s)^{(i-1)}}{p(j)^{(i)}} + p_0(0) \right), \quad (1)$$

$$p_0(0)(\lambda F(R_1) + \alpha) = \mu \sum_{j=0}^{R_1} p_1(j) + \beta q_0(0), \quad (2)$$

$$q_n(r)(\lambda F(R_1 - r) + n\mu + \beta) = \lambda \sum_{j=0}^r p(j)q_{n-1}(r-j) + \mu \sum_{j=0}^{R_0-r} \frac{p(j)p(r)^{(n)}}{p(r+j)^{(n+1)}} q_{n+1}(r+j) + \alpha \left(\sum_{i=n+1}^C \sum_{j=R_0+1}^{R_1} p_i(j) \sum_{s=R_0-r+1}^{j-r} \frac{p(r)^{(n)}p(s)p(j-r-s)^{(i-n-1)}}{p(j)^{(i)}} + p_n(r) \right), \quad n = 1, \dots, C-1, \quad (3)$$

$$p_n(r)(\lambda F(R_1 - r) + n\mu + \alpha) = \lambda \sum_{j=0}^r p(j)p_{n-1}(r-j) + \mu \sum_{j=0}^{R_1-r} \sum_{i=1}^{n+1} i \frac{p(j)^i (1-p(j))^{(n+1-i)}}{p(r+j)^{(n+1)}} p_{n+1}(r+j) + \beta q_n(r), \quad n = 1, \dots, C-1, \quad (4)$$

$$q_C(r)(n\mu + \beta) = \lambda \sum_{j=0}^r p(j)q_{C-1}(r-j) + \alpha p_C(r), \quad (5)$$

$$p_C(r)(n\mu + \alpha) = \lambda \sum_{j=0}^r p(j)p_{C-1}(r-j) + \beta q_n(r). \quad (6)$$

Здесь $p(r)^{(n)}$ n -кратная свертка, определяющая вероятность того, что n заявок займут ресурс объема r .

4. Вычисление матрицы интенсивностей

Полученная в предыдущем разделе СУР (1)–(6) может также быть записана в матричном виде. Для этого представим пространство состояний в виде непересекающихся подмножеств

$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_0 \cup \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2$, где $\mathcal{Y}_s = \bigcup_{i=0}^C \mathcal{Y}_{is}$, $\mathcal{Y}_{0s} = \{0, s\}$, $\mathcal{Y}_{js} = \{(j, 0, s), \dots, (j, R_0, s)\}$, $s \in \{0, 1\}$, и $\mathcal{Y}_{j2} = \{(j, R_0 + 1, 1), \dots, (j, R_1, 1), j = 1, \dots, C\}$. В этом случае матрица интенсивностей переходов процесса $Y(t)$ будет иметь блочный вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{00} & \mathbf{A}_{01} & \mathbf{A}_{02} \\ \mathbf{A}_{10} & \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{20} & \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{00} &= \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{00} & \mathbf{U}_{00} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{01} & \mathbf{D}_{01} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \mathbf{U}_{0C-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{0C} & \mathbf{D}_{0C} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_{01} &= \text{diag}(\beta), \\ \mathbf{A}_{02} &= (\mathbf{0}), \\ \mathbf{A}_{10} &= \text{diag}(\alpha), \\ \mathbf{A}_{11} &= \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{00} & \mathbf{U}_{00} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{01} & \mathbf{D}_{01} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \mathbf{U}_{0C-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{0C} & \mathbf{D}_{0C} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{20} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \ddots & \ddots & \mathbf{U}_{2C-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_{20} = (a_{((i,j),(r,n))}) &= \begin{cases} \alpha \frac{p(r)^{(n)}}{p(j)^{(i)}} \sum_{s=R_0-r+1}^{j-r} p(s) p(j-r-s)^{(i-n-1)}, \\ \quad r = 0, \dots, R_0, n = 0, \dots, i, \\ \quad j = R_0 + 1, \dots, R_1, i = 0, \dots, C, \\ 0, \quad \text{иначе} \end{cases} \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{21} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{2C} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{10} & \mathbf{U}_{10} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{11} & \mathbf{D}_{11} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \mathbf{U}_{1C-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{1C} & \mathbf{D}_{1C} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{U}_{0i} &= (\lambda p(r-j))_{\substack{j=0, \dots, R_0, \\ i=j, \dots, R_0,}}, \\ \mathbf{U}_{1i} &= (\lambda p(r-j))_{\substack{j=R_0, \dots, R_1, \\ i=j, \dots, R_1,}}, \\ \mathbf{U}_{2i} &= (\lambda p(i-j))_{\substack{j=0, \dots, R_0, \\ i=R_0+1, \dots, R_1,}}, \\ \mathbf{L}_{0i} &= \left(i\mu \sum_{j=0}^{R_0-r} \frac{p(j)^i (1-p(j))^{(n+1-i)}}{p(r+j)^{(n+1)}} \right)_{\substack{j=0, \dots, R_0, \\ i=0, \dots, j,}}, \\ \mathbf{L}_{1i} &= \left(i\mu \sum_{j=0}^{R_0-r} \frac{p(j)^i (1-p(j))^{(n+1-i)}}{p(r+j)^{(n+1)}} \right)_{\substack{j=R_0, \dots, R_1, \\ i=R_0, \dots, j,}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{L}_{2i} = \left(i\mu \sum_{j=0}^{R_1-r} \frac{p(j)^i (1-p(j))^{(n+1-i)}}{p(r+j)^{(n+1)}} \right)_{\substack{i=R_0+1, \dots, R_1, \\ j=0, \dots, R_0,}} \\ \mathbf{D}_{0i} = \text{diag}(-\lambda F(R_0 - r) + \mu n + \beta), \\ \mathbf{D}_{1i} = \text{diag}(-\lambda F(R_1 - r) + \mu n + \alpha), \\ \mathbf{D}_{2i} = \text{diag}(-\lambda F(R_1 - r) + \mu n + \alpha).$$

В матричном виде СУР (1)–(6) может быть решена известными, например итерационными, методами.

5. Численный пример

Рассмотрим пример численного анализа вероятностных характеристик СМО с дискретным ресурсом. Исходные данные для расчетов взяты из работы [11]. В примере под ресурсом понимается емкость (скорость передачи данных) радиоканала беспроводной сети. Базовая полоса пропускания оператора сети составляет $C_0 = 10$ МГц, а арендуемая им LSA полоса составляет $C_1 - C_0 = 5$ МГц. Таким образом, пропускные способности основной и арендуемой полос можно рассчитать по формуле $R_s = C_s \cdot v_s$, где v_s – спектральная эффективность, составляющая для сетей LTE величину 4 бит/с/Гц [17]. Тогда объем надежной составляющей ресурса равен $R_0 = 10$ МГц $\cdot$ 4 бит/с/Гц = 40 Мбит/с, а объем ненадежной составляющей равен $R_1 - R_0 = 5$ МГц $\cdot$ 4 бит/с/Гц = 20 Мбит/с. Следовательно, общий объем ресурса равен $R_1 = 60$ Мбит/с. Для рассматриваемого сценария будем считать, что пользователи порождают трафик 2 Мбит/с, т.е. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$. Среднее время обслуживания $\mu^{-1} = 15$ с, изъятие ресурса происходит в среднем каждые $\alpha^{-1} = 2$ мин, а длительность периода изъятия составляет в среднем $\beta^{-1} = 1$ мин.

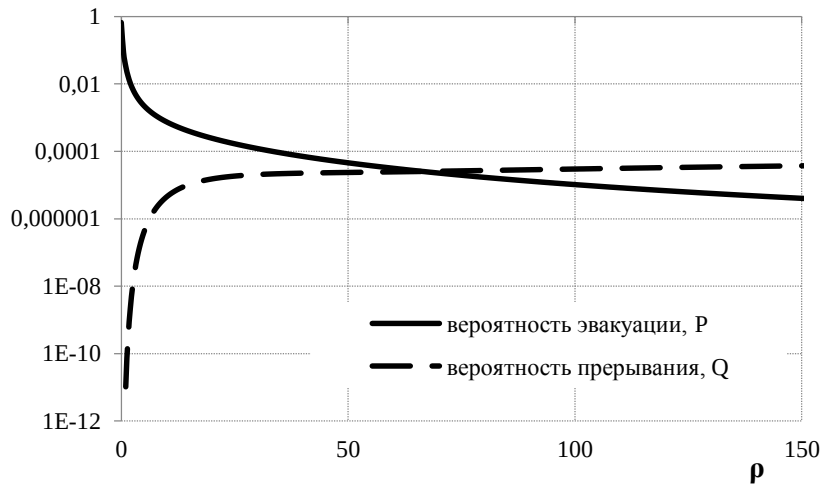


Рис. 2 Вероятности эвакуации и прерывания для СМО с ненадежным ресурсом

Характеристики системы при различных значениях нагрузки для приведенных данных показаны на рис. 2. Выбор логарифмического масштаба оси ординат объясняется тем, что при малой нагрузке вероятность эвакуации P стремится к вероятности изъятия ресурса, а при росте нагрузки резко убывает.

Заключение

В статье рассмотрена СМО с ненадежным ресурсом и предложены два алгоритма потери заявок. Подробно исследован алгоритм *A1*, для которого получена СУР в общем случае и проведен анализ упрощенного процесса для получения метода расчета основных вероятностных характеристик. Для дискретного случая и упрощенного процесса получена СУР в матричном виде, а также приведен численный пример для близких к реальным исходных данных.

В дальнейшем планируется исследовать модель с очередью, другие варианты функции распределения ресурсов, а также алгоритм выбора заявок *A2*, как более эффективный с точки зрения потерь заявок. Кроме того, интересно исследовать модель с более сложным входящим потоком, например МАР-потоком.

В заключение авторы приносят благодарность профессору Валерию Арсентьевичу Наумову и доценту Эдуарду Сергеевичу Сопину за ценные замечания и внимание к исследованиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Masek P., Mokrov E., Pyattaev A., Zeman K., Ponomarenko-Timofeev A., Samuylov A., Sopin E., Hosek J., Gudkova I., Andreev S., Novotny V., Koucheryavy Y., Samouylov K. Experimental Evaluation of Dynamic Licensed Shared Access Operation in Live 3GPP LTE System // Global Communications Conference (GLOBECOM). IEEE. 2016.
2. Palola M., Rautio T., Matinmikko M., Prokkola J., Mustonen M., Heikkilä M., Kippola T., Yrjölä S., Hartikainen V., Tudose L., Kivinen A., Paavola J., Okkonen J., Mäkeläinen M., Hänninen T., Kokkinen H. Licensed Shared Access (LSA) trial demonstration using real LTE network // International Conference on Cognitive Radio Oriented Wireless Networks (CROWNCOM). 2014.
3. Palola M., Matinmikko M., Prokkola J., Heiska K. Live field trial of Licensed Shared Access (LSA) concept using LTE network in 2.3 GHz band // IEEE International Symposium on Dynamic Spectrum Access. 2014.
4. Mokrov E., Ponomarenko-Timofeev A., Gudkova I., Masek P., Hosek J., Andreev S., Koucheryavy Y., Gaidamaka Yu. Modeling Transmit Power Reduction for a Typical Cell with Licensed Shared Access Capabilities // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2017.
5. Ponomarenko-Timofeev A., Pyattaev A., Andreev S., Koucheryavy Y., Mueck M., Karls I. Highly dynamic spectrum management within licensed shared access regulatory framework // IEEE Communications Magazine. 2016. V. 54, No. 3. P. 100–109.
6. Yrjölä S., Kokkinen H. Licensed Shared Access evolution enables early access to 5G spectrum and novel use cases // EAI Endorsed Transactions on Wireless Spectrum. 2017. V. 3, No. 10.
7. Suliman I., Lehtomäki J. Queueing Analysis of Opportunistic Access in Cognitive Radios // Cognitive Radio and Advanced Spectrum Management (CogART). 2009.
8. Giorgetti A., Varrella M., Chiani M. Analysis and performance comparison of different cognitive radio algorithms // Cognitive Radio and Advanced Spectrum Management (CogART). 2009.
9. Ivanova D., Karnauhova E., Markova E., Gudkova I. Analyzing of Licensed Shared Access Scheme Model with Service Bit Rate Degradation in 3GPP Network // Information Technologies and Mathematical Modelling Queueing Theory and Applications. 2017. P. 231–242.
10. Samouylov K.E., Naumov V., Sopin E., Gudkova I., Shorgin S. Sojourn Time Analysis for Processor Sharing Loss System with Unreliable Server // Analytical & Stochastic Modelling Techniques & Applications ASMTA, 2016. P. 284–297.
11. Острикова Д.Ю. Анализ вероятностно-временных характеристик схем доступа с прерыванием обслуживания в телекоммуникационных беспроводных сетях : дис. ... канд. физ.-мат. наук / Рос. ун-т дружбы народов. М., 2015. 124 с.
12. Тихоненко О.М., Климович К.Г. Анализ систем обслуживания требований случайной длины при ограниченном суммарном объеме // Проблемы передачи информации. 2001. Т. 37, вып. 1. С. 70–79.
13. Бородин Н.Н., Малинковский Ю.В. Характеристики суммарного объема требований в СеМО Джексона // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1 (10). С. 253–285.
14. Лисовская Е.Ю., Моисеева С.П. Асимптотический анализ немарковской бесконечнолинейной системы обслуживания требований случайного объема с входящим рекуррентным потоком // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 39. С. 30–38.
15. Назаров А.А., Бронер В.И. Система управления запасами с гиперэкспоненциальным распределением объемов потребления ресурсов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 1 (34). С. 43–49.
16. Naumov V., Samouylov K., Yarkina N., Sopin E., Andreev S., Samuylov A. LTE Performance Analysis Using Queueing Systems with Finite Resources and Random Requirements // 7th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). 2015.
17. 3GPP TS 36.300: Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA) and Evolved Universal Terrestrial Radio Access Network (E-UTRAN); Overall description; Stage 2: Release 12. 2015. 177 p.

Поступила в редакцию 17 марта 2018 г.

Mokrov E.V., Samouylov K.E. (2018) LSA FRAMEWORK IN LTE WIRELESS NETWORK ENVIRONMENT AS A QUEUEING SYSTEM WITH UNRELIABLE RESOURCE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 44. pp. 62–71

DOI: 10.17223/19988605/44/7

In this paper, we consider an LTE cell with LSA framework as a queueing system with unreliable resources. Here the resources can be assumed to represent e.g. frequency spectrum, since the LSA framework implies that part of the spectrum is leased from the third party and can be seized at a random time for a random duration.

A system with C servers and R_s resources is studied. The system can be found in one of $s \in \{0, 1\}$ states. The state transitions are distributed according to the exponential law with parameters α и β , notably $R_0 \leq R_1$. The customers arrive according to the Poisson process with parameter λ , and are served according to the exponential law with parameter μ . When a new customer arrives it requires a server and a random resource volume with CDF $F(x)$. A customer is considered lost if there is either no enough available servers in the system or there are no enough available resources to accommodate it. Thus in the considered system a customer can be lost either upon arrival or while it is being served upon the system state change.

First consider a general case of continuous resources. Here we introduce a Markov process $X(t) = (n(t), (r_1(t), \dots, r_n(t)), s(t))$

with state space $\mathcal{X} = \left\{ (n, (r_1, \dots, r_n), s) : 0 \leq n \leq C, s \in \{0, 1\}, r_i = \sum_{j=0}^n r_j \leq R_s \right\}$. However, since, unfortunately, we failed to obtain a closed

form solution for this case further we consider a discrete case. But, as it is shown in the paper, applying the same process for the discrete case means that the state space is growing exponentially against the maximum number of customers in the system. And can be obtained

as $\sum_{s=0}^1 \left(1 + \sum_{n=1}^C \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^n (j + R_s) \right)$. This equation considers the scenario when a new customer can require the resources in the range from

0 to R_s . As one can note from the equation the state space grows extremely rapidly with the number of servers and volume of available resources, which highly affects the matrix techniques performance.

Taking all this into account, we propose an approximation, where the resources allocated to the customer are reallocated when the customer leaves the system. Thus we only have to trace the volume of the allocated resources in total and not the resources allocated to each customer separately, thus greatly reducing computation difficulty. In this case the process can be obtained as $Y(t) = (n(t), r(t), s(t))$. Since we consider the Poisson arrival flow and exponential service time this approximation gives us a reasonable approximation of the initial process.

For the considered system evacuation and interruption probabilities are obtained as the main characteristics. Evacuation probability is a probability that when the frequency is being seized, no customer was interrupted while being served are the interruption probability is a probability that when the frequency is being seized at least one customer was interrupted while being served. As one can note, the sum of these probabilities is a constant and equals to the probability of a frequency being seized. In the last section we give a numerical example.

Keywords: queueing system; Markov process; unreliable resources; cumulative distribution function.

MOKROV Evgenii Vladimirovich (Assistant Professor, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation).
E-mail: melkor77@yandex.ru

SAMOUYLOV Konstantin Evgenievich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department of Applied Informatics and Probability Theory, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation).
E-mail: samuylov_ke@pfur.ru

REFERENCES

1. Masek, P., Mokrov, E., Pyattaev, A., Zeman, K., Ponomarenko-Timofeev, A., Samuylov, A., Sopin, E., Hosek, J., Gudkova, I., Andreev, S., Novotny, V., Koucheryavy, Y., & Samouylov, K. (2016) Experimental Evaluation of Dynamic Licensed Shared Access Operation in Live 3GPP LTE System. *Global Communications Conference (GLOBECOM)*, IEEE. DOI: 10.1109/GLOCOM.2016.7841826
2. Palola, M., Rautio, T., Matinmikko, M., Prokkola, J., Mustonen, M., Heikkilä, M., Kippola, T., Yrjölä, S., Hartikainen, V., Tudose, L., Kivinen, A., Paavola, J., Okkonen, J., Mäkeläinen, M., Hänninen, T. & Kokkinen, H. (2014) Licensed Shared Access (LSA) trial demonstration using real LTE network. *International Conference on Cognitive Radio Oriented Wireless Networks (CROWNCOM)*. DOI: 10.4108/icst.crowncom.2014.255724
3. Palola, M., Matinmikko, M., Prokkola, J. & Heiska, K. (2014) Live field trial of Licensed Shared Access (LSA) concept using LTE network in 2.3 GHz band. *IEEE International Symposium on Dynamic Spectrum Access*. DOI: 10.1109/DySPAN.2014.6817778

4. Mokrov, E., Ponomarenko-Timofeev, A., Gudkova, I., Masek, P., Hosek, J., Andreev, S., Koucheryavy, Y. & Gaidamaka, Yu. (2017) Modeling Transmit Power Reduction for a Typical Cell with Licensed Shared Access Capabilities. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*. pp. 1–1. DOI: 10.1109/TVT.2018.2799141
5. Ponomarenko-Timofeev, A., Pyattaev, A., Andreev, S., Koucheryavy, Y., Mueck, M. & Karls, I. (2016) Highly dynamic spectrum management within licensed shared access regulatory framework. *IEEE Communications Magazine*. 54(3). pp.100–109. DOI: 10.1109/MCOM.2016.7432155
6. Yrjola, S. & Kokkinen, H. (2017) Licensed Shared Access evolution enables early access to 5G spectrum and novel use cases. *EAI Endorsed Transactions on Wireless Spectrum*. 3(10). DOI: 10.4108/eai.12-12-2017.153463
7. Suliman, I. & Lehtomaki, J. (2009) Queueing Analysis of Opportunistic Access in Cognitive Radios. *Cognitive Radio and Advanced Spectrum Management (CogART)*. pp. 153 – 157. DOI: 10.1109/COGART.2009.5167252
8. Giorgetti, A., Varrella, M. & Chiani, M. (2009) Analysis and performance comparison of different cognitive radio algorithms. *Cognitive Radio and Advanced Spectrum Management (CogART)*. DOI: 10.1109/COGART.2009.5167247
9. Ivanova, D., Karnauhova, E., Markova, E. & Gudkova, I. (2017) Analyzing of Licensed Shared Access Scheme Model with Service Bit Rate Degradation in 3GPP Network. *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications*. pp. 231–242. DOI: 10.1007/978-3-319-68069-9_19
10. Samouylov, K.E., Naumov, V., Sopin, E., Gudkova, I. & Shorgin, S. (2016). Sojourn Time Analysis for Processor Sharing Loss System with Unreliable Server. *Analytical & Stochastic Modelling Techniques & Applications (ASMTA)*. pp. 284–297. DOI 10.1007/978-3-319-43904-4_20
11. Ostrikova, D.Y. (2015) *Analiz veroyatnostno-vremennykh kharakteristik skhem dostupa s preryvaniyem obsluzhivaniya v telekommunikatsionnykh besprovodnykh setyakh* [Analysis of probability-time characteristics of access schemes with service interruptions in wireless telecommunication networks]. Physics and Mathematics Cand. Diss. Moscow.
12. Tikhonenko, O.M. & Klimovich, K.G. (2001) Analysis of Queueing Systems for Random-Length Arrivals with Limited Cumulative Volume. *Problems of Information Transmission*. 37(1). pp. 70–79. (In Russian). DOI: 10.1023/A:1010451827648.
13. Borodin, N.N. & Malinovsky, Y.V. (2010) The characteristics of cumulative volume of demands in Jackson networks. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(10). pp. 253–285. (In Russian).
14. Lisovskaya, E.Y. & Moiseeva, S.P. (2017) Asymptotical analysis of a non-Markovian queueing system with renewal input process and random capacity of customers. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 39. pp. 30–38. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/39/5.
15. Nazarov, A.A. & Broner, V.I. (2016) Inventory model with hyperexponential distribution of demand's batch size. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(34). pp. 43–49. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/34/5
16. Naumov, V., Samouylov, K., Yarkina, N., Sopin, E., Andreev, S. & Samuylov, A. (2015) LTE Performance Analysis Using Queueing Systems with Finite Resources and Random Requirements. *7th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT)*. DOI: 10.1109/ICUMT.2015.7382412.
17. 3GPP (2015) *TS 36.300: Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA) and Evolved Universal Terrestrial Radio Access Network (E-UTRAN)*. Overall description; Stage 2: Release 12.

А.А. Назаров, Е.Е. Худяшова, А.Н. Моисеев

СИСТЕМА $M_2|GI|_\infty$ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Проводится исследование математической модели системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов и рекуррентным входящим потоком, в котором длины интервалов между моментами наступления событий имеют двухфазную гиперэкспоненциальную функцию распределения. С помощью метода динамического просеивания получены среднее значение и дисперсия числа заявок в системе. Предложена дискретная гауссовская аппроксимация нестационарного распределения вероятностей числа заявок в системе. С помощью имитационного моделирования установлена область применимости предлагаемой аппроксимации.

Ключевые слова: система с неограниченным числом приборов; бесконечное значение среднего времени обслуживания; рекуррентный поток; метод динамического просеивания.

Системы массового обслуживания все чаще используются для описания широкого круга практических задач. Некоторые из них могут быть сформулированы таким образом, что количество обслуживающих приборов становится настолько большим, что его можно считать бесконечным. Это могут быть такие модели страховых компаний, в которых договоры страхования жизни или имущества с физическими или юридическими лицами выступают в качестве обслуживающих приборов. Разумеется, ограничивать число таких договоров в подобных системах совершенно нелогично [1]. Результаты для системы обслуживания с бесконечным числом каналов и идентичным временем обслуживания, полученные в [2], применяются к анализу процесса образования очередей на неуправляемых перекрестках автомобильных дорог. Также системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов используются для моделирования систем распределенной обработки данных [3] или, как показано в [4], – для анализа изменения числа клиентов торговой компании.

Исследованием систем с неограниченным числом приборов занимаются со второй половины XX в. В [5] была рассмотрена система массового обслуживания типа $M|G|_\infty$ – телефонная станция, в которой ни один звонок не задерживался и не терялся. В 1960–1980-е гг. публикуется ряд статей [6–10], посвященных системам $GI|G|_\infty$ и $G|M|_\infty$. В [9, 11] изучаются системы $GI|GI|_\infty$, интенсивность входящего потока в которых стремится к бесконечности, но распределение времени обслуживания фиксировано. В [12] доказывается ряд предельных теорем для системы, в которой среднее время обслуживания бесконечно. В работе Е. Баштовой и Е. Чернавской [13] показано, что в предельном условии растущего времени число заявок в системе имеет гауссовское распределение.

Как показано в [14–16], модели с неограниченным числом приборов можно применять и в случаях, когда вероятность достижения загрузки всех каналов достаточно мала. Поэтому модели массового обслуживания с неограниченным числом приборов последние десятилетия изучаются довольно подробно [17–22]. В этих работах исследованы распределения вероятностей числа занятых приборов как в стационарном [21], так и в нестационарном случае [19]. И нестационарное распределение вероятностей найдено лишь для пуассоновского входящего потока. Результаты исследования однофазных, многофазных систем и сетей массового обслуживания с неограниченным числом приборов и рекуррентным обслуживанием представлены в работах [17, 23–25]. Однако все работы объединены общей идеей конечного математического ожидания времени обслуживания заявки. Но при рассмотрении моделей, для которых математическое ожидание времени обслуживания заявки бесконечно, все результаты перестают иметь хоть какое-то логическое обоснование. Поэтому возникает необходимость

рассмотреть бесконечнолинейную систему массового обслуживания с бесконечным математическим ожиданием времени обслуживания заявки. Такая система с входящим рекуррентным потоком, в котором интервалы между моментами наступления событий имеют гиперэкспоненциальное распределение, рассматривается в настоящей работе.

1. Описание модели и постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов (рис. 1).

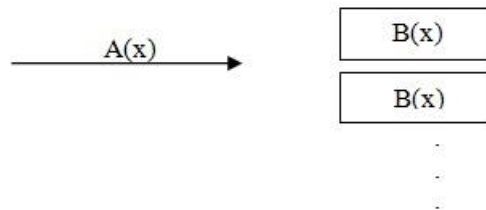


Рис. 1. Система массового обслуживания с неограниченным числом приборов, произвольной функцией распределения времени обслуживания заявок $B(x)$ и гиперэкспоненциальным рекуррентным потоком $A(x)$ длин интервалов между моментами наступления событий

На вход этой системы поступает гиперэкспоненциальный рекуррентный поток, длины интервалов между моментами наступления событий в котором имеют двухфазную гиперэкспоненциальную функцию распределения

$$A(x) = q(1 - e^{-\lambda_1 x}) + (1 - q)(1 - e^{-\lambda_2 x}), \quad (1)$$

с параметрами $0 \leq q \leq 1$, $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$. Продолжительности обслуживания заявок являются независимыми случайными величинами с функцией распределения $B(x)$ и бесконечным первым моментом, т.е. выполняется равенство

$$\int_0^\infty (1 - B(x)) dx = \infty. \quad (2)$$

Обозначим $i(t)$ – число заявок (число занятых приборов) в системе в момент времени t .

Для рассматриваемой системы, в силу условия (2), не существует стационарного распределения вероятностей значений процесса $i(t)$, поэтому его нестационарное распределение обозначим

$$P(i, t) = P\{i(t) = i\}, \quad (3)$$

полагая, что при $t = 0$ система свободна и в ней нет обслуживаемых заявок.

Задачей исследований в данной работе является нахождение нестационарного дискретного распределения $P(i, t)$ числа занятых приборов в момент времени t .

Для решения поставленной задачи применим метод динамического просеивания [17] (метод просеянного потока).

2. Метод динамического просеивания

Рассмотрим две оси времени t (рис. 2). На первой оси отметим моменты наступления событий входящего потока, а также моменты времени $t = 0$ и $t = T > 0$.

Обозначим

$$S(t) = 1 - B(T - t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (4)$$

вероятность того, что заявка входящего потока, поступившая в момент времени $0 \leq t \leq T$, будет находиться в системе в момент времени $t = T$, занимая один из ее приборов.

Каждое событие входящего потока, наступившее в момент времени t с вероятностью $S(t)$ просеивается на вторую ось (реализуется динамическое по t просеивание), а с вероятностью $1 - S(t)$ не рассматривается. По построению на второй оси генерируется нестационарный просеянный поток.

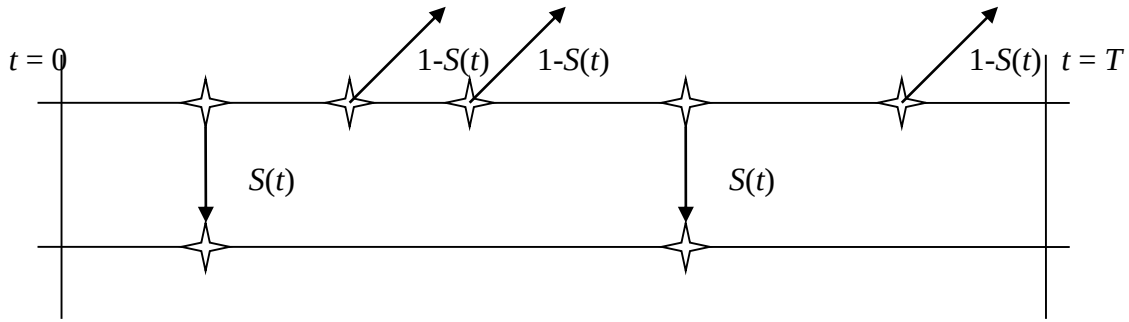


Рис. 2. Метод динамического просеивания заявок, поступающих в систему на обслуживание

Обозначим $n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших за время t на интервале $[0, t]$. Доказано [17], что выполняется равенство

$$P\{i(T) = m\} = P\{n(T) = m\} = P(m, T), \quad m = \overline{0, \infty}, \quad (5)$$

поэтому для нахождения распределения вероятностей $P(i, T)$ из (3) числа i занятых приборов в системе в момент времени $t = T$ достаточно найти распределение вероятностей числа $n(t)$ событий просеянного потока, наступивших за время t , и положить $t = T$.

Обозначим $k(t)$ – состояние входящего рекуррентного двухфазного гиперэкспоненциального потока в момент времени t , положив $k(t) = k$, если в момент времени t поток находится на k -й фазе ($k = 1, 2$) двухфазного гиперэкспоненциального распределения $A(x)$ из (1).

Рассмотрим двумерный случайный процесс $\{k(t), n(t)\}$, а его распределение вероятностей обозначим

$$P\{k(t) = k, n(t) = n\} = P_k(n, t), \quad k = 1, 2, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (6)$$

Нетрудно показать, что это распределение $P_k(n, t)$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial P_1(n, t)}{\partial t} = \lambda_1[q(1 - S(t)) - 1]P_1(n, t) + \lambda_1 q S(t)P_1(n - 1, t) + \\ + \lambda_2 q(1 - S(t))P_2(n, t) + \lambda_2 q S(t)P_2(n - 1, t), \\ \frac{\partial P_2(n, t)}{\partial t} = \lambda_1(1 - q)(1 - S(t))P_1(n, t) + \lambda_1(1 - q)S(t)P_1(n - 1, t) + \\ + \lambda_2[(1 - q)(1 - S(t)) - 1]P_2(n, t) + \lambda_2(1 - q)S(t)P_2(n - 1, t). \end{cases} \quad (7)$$

Для распределения вероятностей $P_k(n, t)$ обозначим частичные по k характеристические функции числа $n(t)$ событий, наступивших в просеянном потоке за время t ,

$$H_k(u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P_k(n, t), \quad (8)$$

для которых, в силу (7), запишем систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial H_1(u, t)}{\partial t} = \lambda_1\{q - 1 + (e^{ju} - 1)qS(t)\}H_1(u, t) + \lambda_2\{q + (e^{ju} - 1)qS(t)\}H_2(u, t), \\ \frac{\partial H_2(u, t)}{\partial t} = \lambda_1\{1 - q + (e^{ju} - 1)(1 - q)S(t)\}H_1(u, t) + \lambda_2\{-q + (e^{ju} - 1)(1 - q)S(t)\}H_2(u, t). \end{cases} \quad (9)$$

Нетрудно показать, что

$$H_k(u, 0) = H_k(0, t) = R_k, \quad (10)$$

тогда, положив в (9) $u = 0$, получим для R_k систему двух эквивалентных уравнений

$$\begin{cases} -\lambda_1(1 - q)R_1 + \lambda_2 q R_2 = 0, \\ \lambda_1(1 - q)R_1 - \lambda_2 q R_2 = 0. \end{cases}$$

Решение $\{R_1, R_2\}$ этой системы, удовлетворяющее условию нормировки $R_1 + R_2 = 1$, имеет вид:

$$R_1 = \frac{\lambda_2 q}{\lambda_2 q + (1-q)\lambda_1}, \quad R_2 = \frac{(1-q)\lambda_1}{\lambda_2 q + (1-q)\lambda_1}. \quad (11)$$

3. Среднее значение числа заявок в системе

Обозначим

$$\left. \frac{\partial H_k(u, t)}{\partial u} \right|_{u=0} = j m_k(t),$$

где $m_k(t)$ – частичные первые моменты числа событий, наступивших в просеянном потоке за время t , а их сумма $m(t) = m_1(t) + m_2(t)$ является средним значением числа событий, наступивших в просеянном потоке за время t на интервале $[0, t]$.

Докажем следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть

$$a = \int_0^\infty (1 - A(x)) dx -$$

средняя длина интервалов входящего двухфазного гиперэкспоненциального рекуррентного потока, тогда среднее значение $m(t) = M\{n(t)\}$ числа событий, наступивших в просеянном потоке за время t на интервале $[0, t]$, имеет вид:

$$m(t) = \frac{1}{a} \int_0^t S(x) dx. \quad (12)$$

Доказательство. Дифференцируя по u равенства (9) и полагая $u = 0$, для $m_k(t)$ получим систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} m_1'(t) &= -(1-q)\lambda_1 m_1(t) + \lambda_2 q m_2(t) + (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) q S(t), \\ m_2'(t) &= (1-q)\lambda_1 m_1(t) - \lambda_2 q m_2(t) + (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2)(1-q) S(t). \end{aligned}$$

Складывая уравнения этой системы, получим равенство

$$m'(t) = (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) S(t).$$

Из этого равенства при начальном условии $m(0) = 0$ получим

$$m(t) = (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) \int_0^t S(x) dx, \quad (13)$$

где для $\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2$ получаем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 &= \lambda_1 \frac{\lambda_2 q}{\lambda_2 q + (1-q)\lambda_1} + \lambda_2 \frac{(1-q)\lambda_1}{\lambda_2 q + (1-q)\lambda_1} = \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 q + (1-q)\lambda_1} = \frac{1}{\frac{q}{\lambda_1} + \frac{1-q}{\lambda_2}} = \frac{1}{\int_0^\infty (1 - A(x)) dx} = \frac{1}{a}, \end{aligned}$$

поэтому $m(t)$ из (13) имеет вид

$$m(t) = \frac{1}{a} \int_0^t S(x) dx,$$

который совпадает с (12). Лемма 1 доказана.

Из этой леммы следует утверждение.

Теорема 1. Пусть $B(x)$ – функция распределения времени обслуживания заявок, тогда математическое ожидание $M\{i(T)\}$ числа $i(T)$ заявок в системе $H_2|GI|\infty$ в момент времени T определяется равенством

$$M\{i(T)\} = m(T) = \frac{1}{a} \int_0^T (1 - B(x)) dx. \quad (14)$$

Доказательство. В (12) вероятность просеивания $S(x)$ определяется равенством (4), поэтому

$$m(t) = \frac{1}{a} \int_0^t (1 - B(T - x)) dx = \frac{1}{a} \int_{T-t}^T (1 - B(y)) dy,$$

тогда, в силу (5), выполняется равенство

$$M\{i(T)\} = m(T) = \frac{1}{a} \int_0^T (1 - B(x)) dx,$$

которое совпадает с (14). Теорема доказана.

Далее найдем дисперсию числа заявок в системе.

4. Дисперсия числа заявок в системе

Для центрирования случайного процесса $n(t)$ рассмотрим частичные характеристические функции

$$H_k^{(2)}(u, t) = H_k(u, t) \exp \left\{ -ju \frac{1}{a} \int_0^t S(x) dx \right\}, \quad (15)$$

где $k = 1, 2$ для разности $n(t) - m(t) = n(t) - M\{n(t)\}$.

Можно доказать следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $v = \lambda_1 \lambda_2 a$, тогда дисперсия $D(t)$ числа $n(t)$ событий, наступивших в просеянном потоке за время t на интервале $[0, t]$, имеет вид:

$$D(t) = \frac{1}{a} \int_0^t S(x) dx + 2 \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2 a} \right)^2 \frac{q(1-q)}{a} \int_0^t v e^{-vx} S(x) \left[\int_0^x e^{vy} S(y) dy \right] dx. \quad (16)$$

Доказательство. В системе (9) выполним совпадающую с (15) замену:

$$H_k(u, t) = H_k^{(2)}(u, t) \exp \left\{ ju \frac{1}{a} \int_0^t S(x) dx \right\},$$

для $H_k^{(2)}(u, t)$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial H_1^{(2)}(u, t)}{\partial t} + ju \frac{1}{a} S(t) H_1^{(2)}(u, t) = \\ = \lambda_1 \{q - 1 + (e^{ju} - 1)qS(t)\} H_1^{(2)}(u, t) + \lambda_2 \{q + (e^{ju} - 1)qS(t)\} H_2^{(2)}(u, t), \\ \frac{\partial H_2^{(2)}(u, t)}{\partial t} + ju \frac{1}{a} S(t) H_2^{(2)}(u, t) = \\ = \lambda_1 \{1 - q + (e^{ju} - 1)(1 - q)S(t)\} H_1^{(2)}(u, t) + \lambda_2 \{-q + (e^{ju} - 1)(1 - q)S(t)\} H_2^{(2)}(u, t). \end{cases} \quad (17)$$

Обозначая $m_k^{(2)}(t)$ – частичные математические ожидания централизованного процесса $n(t)$ – $M\{n(t)\}$, а $D_k(t)$ – частичные дисперсии числа заявок в системе

$$\left. \frac{\partial H_k^{(2)}(u, t)}{\partial u} \right|_{u=0} = j m_k^{(2)}(t), \quad \left. \frac{\partial^2 H_k^{(2)}(u, t)}{\partial u^2} \right|_{u=0} = j^2 D_k(t),$$

дифференцируя по u в нуле (17), получим две системы, первая из которых для $m_k^{(2)}(t)$:

$$\begin{cases} m_1^{(2)'}(t) = -(1-q)\lambda_1 m_1^{(2)}(t) + q\lambda_2 m_2^{(2)}(t) + \frac{1}{a}(q - R_1)S(t) \\ m_2^{(2)'}(t) = (1-q)\lambda_1 m_1^{(2)}(t) - q\lambda_2 m_2^{(2)}(t) + \frac{1}{a}(R_1 - q)S(t), \end{cases} \quad (18)$$

а вторая – для $D_k(t)$ Ф:

$$\begin{cases} D_1'(t) + \frac{2}{a}S(t)m_1^{(2)}(t) = -\lambda_1(1-q)D_1(t) + \lambda_2 q D_2(t) + \\ + 2qS(t)[\lambda_1 m_1^{(2)}(t) + \lambda_2 m_2^{(2)}(t)] + qS(t)[\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2], \\ D_2'(t) + \frac{2}{a}S(t)m_2^{(2)}(t) = \lambda_1(1-q)D_1(t) - \lambda_2 q D_2(t) + \\ + 2(1-q)S(t)[\lambda_1 m_1^{(2)}(t) + \lambda_2 m_2^{(2)}(t)] + (1-q)S(t)[\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2]. \end{cases}$$

Складывая уравнения этой системы и обозначая $D_1(t) + D_2(t) = D(t)$, получим равенство

$$\begin{aligned} D'(t) + \frac{2}{a}S(t)(m_1^{(2)}(t) + m_2^{(2)}(t)) = \\ = 2S(t)[\lambda_1 m_1^{(2)}(t) + \lambda_2 m_2^{(2)}(t)] + [\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2]S(t), \end{aligned} \quad (19)$$

в котором содержатся комбинации $m_1^{(2)}(t) + m_2^{(2)}(t)$ и $\lambda_1 m_1^{(2)}(t) + \lambda_2 m_2^{(2)}(t)$ компонент $m_1^{(2)}$ и $m_2^{(2)}$ решения системы (18).

Из (18) очевидно следует, что $m_1^{(2)}(t) + m_2^{(2)}(t) = 0$, поэтому, записав $m_1^{(2)}(t) = -m_2^{(2)}(t)$, второе уравнение системы (18) перепишем в виде обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} m_2^{(2)'}(t) &= -(q\lambda_2 + (1-q)\lambda_1)m_2^{(2)}(t) + \frac{1}{a}(R_1 - q)S(t) = \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{q}{\lambda_1} + \frac{1-q}{\lambda_2} \right) m_2^{(2)}(t) + \frac{1}{a}(R_1 - q)S(t) = \\ &= -\lambda_1 \lambda_2 a m_2^{(2)}(t) + \frac{1}{a}(R_1 - q)S(t). \end{aligned}$$

Решение $m_2^{(2)}$ этого уравнения при начальном условии $m_2^{(2)} = 0$ имеет вид

$$m_2^{(2)}(t) = e^{-\lambda_1 \lambda_2 a t} \int_0^t e^{\lambda_1 \lambda_2 a x} \frac{1}{a}(R_1 - q)S(x)dx,$$

а выражение $\lambda_1 m_1^{(2)}(t) + \lambda_2 m_2^{(2)}(t)$ можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}\lambda_1 m_1^{(2)}(t) + \lambda_2 m_2^{(2)}(t) &= (\lambda_2 - \lambda_1) m_2^{(2)}(t) = \\ &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a} (R_1 - q) e^{-\lambda_1 \lambda_2 a t} \int_0^t e^{\lambda_1 \lambda_2 a x} S(x) dx.\end{aligned}$$

При нулевом начальном условии $D(0) = 0$ из равенства (19) получим выражение для $D(t)$ в виде:

$$D(t) = \frac{1}{a} \int_0^t S(x) dx + 2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a} (R_1 - q) \int_0^t e^{-\lambda_1 \lambda_2 a x} S(x) \left[\int_0^x e^{\lambda_1 \lambda_2 a y} S(y) dy \right] dx. \quad (20)$$

Найдем значение коэффициента $2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a} (R_1 - q)$ при интеграле второго слагаемого в (20). Принимая во внимание (11), после несложных преобразований, запишем

$$2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a} (R_1 - q) = 2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a} \left(\frac{\lambda_2 q}{\lambda_2 q + (1 - q) \lambda_1} - q \right) = 2 \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2 a} \right)^2 \frac{q(1 - q)}{a} \lambda_1 \lambda_2 a.$$

Тогда (20), обозначив $\lambda_1 \lambda_2 a = v$, перепишем в виде:

$$D(t) = \frac{1}{a} \int_0^t S(x) dx + 2 \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2 a} \right)^2 \frac{q(1 - q)}{a} \int_0^t v e^{-vx} S(x) \int_0^x e^{vy} S(y) dy dx,$$

совпадающем с (16). Лемма доказана.

Для дисперсии $D(T) = M\{(i(T) - M i(T))^2\}$ числа $i(T)$ заявок в момент времени $t = T$ в системе $H_2|GI|^\infty$ можно сформулировать следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть

$$\theta = 2 \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2 a} \right)^2 \frac{q(1 - q)}{a}, \quad (21)$$

тогда дисперсия $D(T)$ числа $i(T)$ заявок в момент времени $t = T$ в системе $H_2|GI|^\infty$ имеет вид:

$$D\{i(T)\} = \frac{1}{a} \int_0^T (1 - B(x)) dx + \theta \int_0^T v e^{-vy} \left[\int_0^{T-y} (1 - B(x))(1 - B(x + y)) dx \right] dy. \quad (22)$$

Доказательство. В силу (5) и обозначения (21) дисперсия $D(T)$ числа $i(T)$ заявок в системе совпадает с дисперсией $D(T)$ при $t = T$, определяемой равенством (16), поэтому

$$D\{i(T)\} = \frac{1}{a} \int_0^T S(t) dt + \theta \int_0^T v e^{-vt} S(t) \left[\int_0^t e^{vx} S(x) dx \right] dt.$$

Интеграл во втором слагаемом этого выражения запишем в виде:

$$\int_0^T v e^{-vt} S(t) \left[\int_0^t e^{vx} S(x) dx \right] dt.$$

И после двойной замены переменных и изменения порядка интегрирования, получим

$$\int_0^T v e^{-vy} \left[\int_0^{T-y} (1 - B(z))(1 - B(z + y)) dz \right] dy$$

тогда дисперсию $D\{i(T)\}$ перепишем в виде:

$$D\{i(T)\} = \frac{1}{a} \int_0^T (1 - B(x)) dx + \theta \int_0^T v e^{-vy} \left[\int_0^{T-y} (1 - B(x))(1 - B(x+y)) dx \right] dy,$$

совпадающем с (22). Теорема доказана.

В статье получены допредельные (при конечном T) характеристики, при этом математическое ожидание совпадает с предельным результатом [13].

5. Дискретная гауссовская аппроксимация распределения вероятностей $P(i, T)$ и ее область применимости

Опираясь на результаты Е. Баштовой и Е. Чернавской [13], для аппроксимации нестационарного распределения вероятностей используем дискретную гауссовскую аппроксимацию. Обозначим $G(x, T)$ функцию гауссовского распределения с параметрами, определяемые равенствами (14) и (22).

Дадим следующее определение. Дискретной гауссовской аппроксимацией $P_1(i, T)$ нестационарного распределения вероятностей $P(i, T)$ числа $i(T)$ заявок в момент времени $t = T$ в системе $H_2|GI|_\infty$ будем называть распределение вероятностей $P_1(i, T)$, определяемое равенством

$$P_1(i, T) = (G(i + 0,5, T) - G(i - 0,5, T)) [1 - G(-0,5, T)]^{-1}. \quad (23)$$

Для оценки точности предлагаемой аппроксимации будем применять расстояние Колмогорова Δ , определяемое равенством

$$\Delta = \max_{0 \leq i < \infty} \left| \sum_{n=0}^{\infty} (P(n, T) - P_1(n, T)) \right|. \quad (24)$$

При нахождении значений точности Δ оценку исходного нестационарного распределения вероятностей $P(i, T)$ найдем, применяя имитационное моделирование системы $H_2|GI|_\infty$ при заданных значениях параметров $q = 0,5$, $\lambda_1 = 6$ и $\lambda_2 = 30$ гиперэкспоненциального распределения длин интервалов входящего рекуррентного потока $A(x)$, определяемого формулой (1) и заданной функцией распределения $B(x)$ времени обслуживания заявок. Тогда интенсивность входящего потока $\lambda = \frac{1}{a} = 10$.

Функцию распределения $B(x)$, удовлетворяющую свойству (2), возьмем в виде:

$$B(x) = \frac{x^\gamma}{1 + x^\gamma}, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad (25)$$

задав определенное значение параметра $0 < \gamma \leq 1$.

На рис. 3–5 приведены графики распределения вероятностей числа занятых приборов в системе, полученных методом имитационного моделирования и гауссовской аппроксимацией с заданными параметрами.

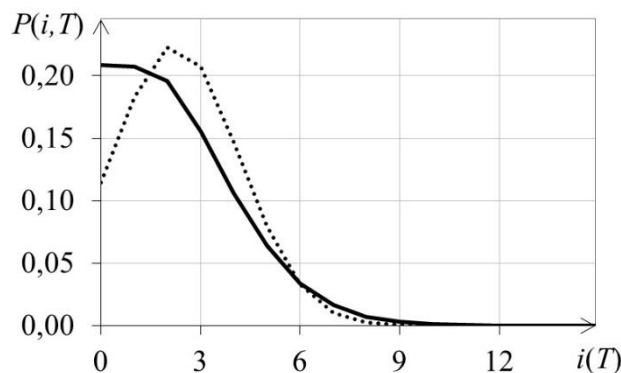


Рис. 3. Распределение вероятностей $P(i, T)$, полученное с помощью имитационного моделирования (пунктирная линия), и гауссовская аппроксимация $P_1(i, T)$ (сплошная линия) при $\gamma = 1$ и $T = 0,25$

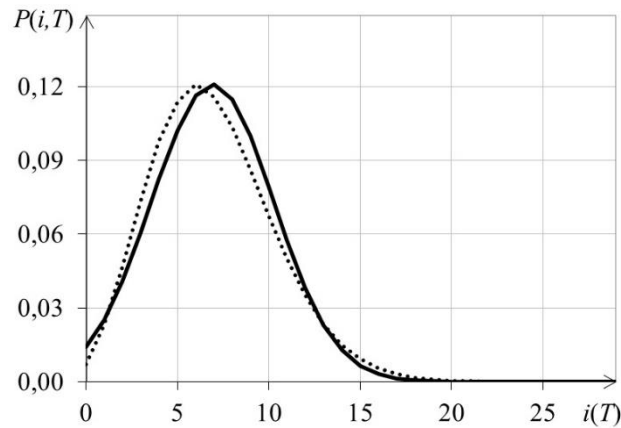


Рис. 4. Распределение вероятностей $P(i, T)$, полученное с помощью имитационного моделирования (пунктирная линия), и гауссовская аппроксимация $P_1(i, T)$ (сплошная линия) при $\gamma = 1$ и $T = 1$

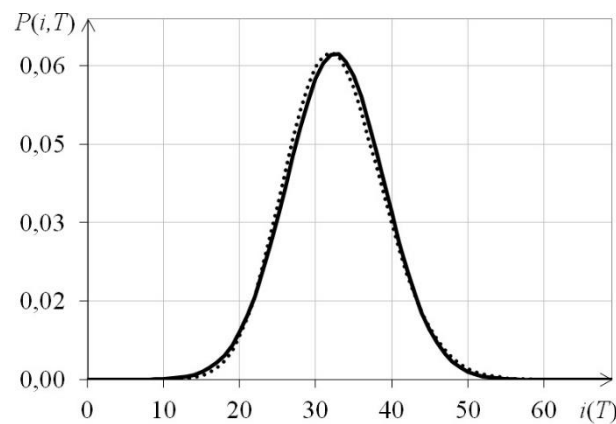


Рис. 5. Распределение вероятностей $P(i, T)$, полученное с помощью имитационного моделирования (пунктирная линия), и гауссовская аппроксимация $P_1(i, T)$ (сплошная линия) при $\gamma = 1$ и $T = 25$

В таблице приведены значения расстояния Колмогорова для указанных распределений при различных значениях параметров γ и T .

Расстояние Колмогорова между результатами имитационного моделирования и гауссовской аппроксимацией

$\gamma \backslash T$	0,25	0,5	1	5	10	25
1	0,118	0,069	0,041	0,020	0,017	0,015
0,5	0,124	0,074	0,044	0,018	0,014	0,011
0,25	0,124	0,083	0,046	0,017	0,012	0,009

Будем считать, что нас удовлетворяет точность $\Delta < 0,05$. Тогда, как видно из результатов численного моделирования, областью применимости гауссовской дискретной аппроксимации является значение параметра времени $T \geq 1$, при котором расстояние Колмогорова Δ дает значение меньше 0,05.

Заключение

В работе получено аналитическое выражение для среднего значения и дисперсии числа заявок в системе массового обслуживания с неограниченным числом приборов и гиперэкспоненциальным рекуррентным входящим потоком, длины интервалов между моментами наступления событий в котором имеют двухфазную гиперэкспоненциальную функцию распределения. С помощью имитационного

моделирования показано, что возможно применение дискретной гауссовской аппроксимации распределения вероятностей, установлена область применимости этой аппроксимации. Предложенный подход может быть применен к аналогичным задачам для систем с другими рекуррентными входящими потоками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гарайшина И.Р. Исследование математических моделей процессов государственного пенсионного страхования : дис. ... канд. физ.-мат. наук, Томск, 2005. 148 с
2. Афанасьева Л.Г., Руденко И.В. Системы обслуживания $GI|G|_\infty$ и их приложения к анализу транспортных моделей // Теория вероятностей и ее применение. 2012. Т. 57, вып. 3. С. 427–452.
3. Грачёв В.В., Моисеев А.Н., Назаров А.А., Ямпольский В.З. Многофазная модель массового обслуживания системы распределенной обработки данных // Доклады ТУСУРа. 2012. № 2 (26), ч. 2. С. 248–251.
4. Морозова А.С., Моисеева С.П., Одинцов К.М. Математическая модель процесса изменения числа клиентов торговой компании в виде СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов // Научное творчество молодежи : материалы XI Всерос. Науч.-практ. конф., Анжиро-Судженск, 20–21 апр. 2007 г. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2007. Ч. 1. С. 37–39.
5. Riordan J. Telephone traffic time averages // Bell Labs Technic. J. 1951. V. 30, No. 4. P. 1129–1144.
6. Takacs L. An introduction to queueing theory. New York : Oxford University Press, 1962.
7. Downton F. Congestion systems with incomplete service // J. Roy. Statist. Soc. Ser. B (Methodological). 1962. V. 24, No. 1. P. 107–111.
8. Mirasol N. M. Letter to the editor-the output of an $M|G|_\infty$ queueing system is Poisson // Oper. Res. 1963. V. 11, No. 2. P. 282–284.
9. Whitt W. On the heavy-traffic limit theorem for $GI|G|_\infty$ queues // Advances in Applied Probability. 1982. P. 171–190.
10. Yamada K. A heavy traffic limit theorem for $G|M|_\infty$ queueing networks // Probability Theory and Mathematical Statistics. Springer Berlin Heidelberg, 1988. P. 549–564.
11. Pang G., Whitt W. Two-parameter heavy-traffic limits for infinite-server queues // Queueing Systems. 2010, V. 65, No. 4. P. 325–364.
12. Чернавская Е.А. Предельные теоремы для бесконечноканальных систем с тяжелыми хвостами распределений времен обслуживания : дис. ... канд. физ.-мат. наук / МГУ им. М.В. Ломоносова. М., 2016. 93 с.
13. Bashtova E.E., Chernavskaya E.A. Limit theorems for infinite-channel queueing systems with heavy-tailed service times // Analytical and Computational methods in Probability theory and its Applications. 2017. P. 110–112.
14. Puhalskii A.A., Reed J.E. On many-server queues in heavy traffic // Annals of Applied Probability. 2008. V. 20. P. 129–195.
15. Reed J. The $G/GI/N$ queue in the Halfin-Whitt regime // Annals of Applied Probability. 2009. V. 19, is. 6. P. 2211–2269.
16. Fralix B.H., Adan I.J.B.F. An infinite-server queue influenced by a semi-Markovian environment // Queueing Systems. 2009. V. 61. P. 65–84.
17. Моисеев А.Н., Назаров А.А. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2015. 240 с.
18. Machihara F. An infinitely-many-server queue having Markov renewal arrivals and hyperexponential service times // J. of the Operations Research Society of Japan. 1986. V. 29. P. 338–351.
19. Massey W.A., Whitt W. Networks of infinite-server queues with nonstationary Poisson input // Queueing Systems. 1993. V. 13. P. 183–250.
20. Ramaswami V., Neuts M. Some explicit formulas and computational methods for infinite-server queues with phase-type arrival // J. of Applied Probability. 1980. V. 17. P. 498–514.
21. Van Doorn E.A., Jagers A.A. A note on the $GI/GI/\infty$ system with identical service and interarrival-time distributions // Queueing Systems. 2004. V. 47. P. 45–52.
22. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания : учебник. М. : Изд-во РУДН, 1995. 529 с.
23. Моисеев А.Н., Назаров А.А. Исследование системы массового обслуживания $HIGI|GI|_\infty$ // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2 (23). С. 75–83.
24. Моисеев А.Н., Назаров А.А. Асимптотический анализ многофазной системы массового обслуживания с высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком // Автометрия. 2014. Т. 50. № 2. С. 67–76.
25. Назаров А.А., Моисеев А.Н. Исследование открытой немарковской сети массового обслуживания $GI-(GI|_\infty)^K$ с высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком // Проблемы передачи информации. 2013. Т. 49, вып. 2. С. 78–91.

Поступила в редакцию 4 февраля 2018 г.

Nazarov A.A., Khudyashova E.E., Moiseev A.N. (2018) QUEUEING SYSTEM $H_2|GI|_\infty$ WITH AN INFINITE MEAN OF SERVICE TIME. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 44. pp. 72–83

DOI: 10.17223/19988605/44/8

The paper deals with queueing systems with an unlimited number of devices and renewal arrival process, in which the lengths of inter-arrivals have a two-phase hyper-exponential distribution function:

$$A(x) = q(1 - e^{-\lambda_1 x}) + (1 - q)(1 - e^{-\lambda_2 x}). \quad (1)$$

Service times are independent and identically distributed with distribution function $B(x)$ and they have infinite first moments, that is

$$\int_0^{\infty} (1 - B(x)) dx = \infty. \quad (2)$$

Due to expression (2), there is no stationary probability distribution of the number of customers in the considered system. Using the method of dynamic screening, the average value and variance of the number of customers in the system are obtained. Mean of the number of customers in the system at the instant T is given by expression

$$M\{i(T)\} = \frac{1}{a} \int_0^T (1 - B(x)) dx, \quad (3)$$

where $\lambda = \frac{1}{a}$ is an intensity of the arrival process.

Variance of the number of customers in the system at the instant T is determined by the following expression:

$$D\{i(T)\} = \frac{1}{a} \int_0^T (1 - B(x)) dx + \theta \int_0^T v e^{-vy} \left[\int_0^{T-y} (1 - B(x))(1 - B(x+y)) dx \right] dy, \quad (4)$$

where $\theta = 2 \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2 a} \right)^2 \frac{q(1-q)}{a}$, and $v = \lambda_1 \lambda_2 a$.

A numerical implementation of the discrete Gaussian approximation of the probability distribution $P(i, T)$ is proposed. The range of applicability of the proposed approximation is determined using simulation approach.

Keywords: infinite-server queueing system; infinite mean of service time; dynamic screening method.

NAZAROV Anatoly Andreevich (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Russian Federation).

E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

KHUDYASHOVA Ekaterina Evgenievna (National Research Tomsk State University, Russian Federation).

E-mail: kopnova.e@gmail.com

MOISEEV Alexander Nikolaevich (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Russian Federation).

E-mail: moiseev.tsu@gmail.com

REFERENCES

- Garayshina, I.R. (2005) *Issledovaniye matematicheskikh modeley protsessov gosudarstvennogo pensionnogo strakhovaniya* [Research of mathematical models of processes of the state pension insurance]. Physics and Mathematics Cand. Diss. Tomsk.
- Afanasieva, L.G. & Rudenko, I.V. (2012) $G|G|\infty G|G|\infty$ queues and their applications to the transport models analysis. *Teoriya veroyatnostey i yeye primeneniya – Probability Theory and Its Applications*. 57(3). pp. 427–452. (In Russian).
- Grachev, V.V., Moiseyev, A.N., Nazarov, A.A. & Yampolsky, V.Z. (2012) Multistage queueing model of the distributed data processing system. *Doklady TUSURa – Proceedings of Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics*. 2(26). pp. 248–251. (In Russian).
- Morozova, A.S., Moiseeva, S.P. & Odintsov, K.M. (2007) A mathematical model of the process of changing the number of clients of a trading company in the form of a SMO with an unlimited number of servicing devices. *Nauchnoye tvorchestvo molodezhi* [Scientific creativity of youth]. Proc. of the Eleventh All-Russian Conference. Anzhero-Sudzhensk., April 20–21. 2007. Tomsk: Tomsk State University. pp. 37–39. (In Russian).
- Riordan, J. (1951) Telephone traffic time averages. *Bell Labs Technical Journal*. 30(4). pp. 1129–1144. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1951.tb03698.x
- Takacs, L. (1962) *An introduction to queueing theory*. New York: Oxford University Press.
- Downton, F. (1962) Congestion systems with incomplete service. *Journal of the Royal Statistal Society. Ser. B (Methodological)*. 24(1). pp. 107–111.
- Mirasol, N.M. (1963) Letter to the editor-the output of an $M|G|\infty$ queueing system is Poisson. *Oper. Res.* 11(2). pp. 282–284.
- Whitt, W. (1982) On the heavy-traffic limit theorem for $GI/G/\infty$ queues. *Advances in Applied Probability*. 14(1). pp. 171–190. DOI: 10.2307/1426738

10. Yamada, K. (1988) A heavy traffic limit theorem for $G|M|_\infty$ queueing networks. In: Watanabe, Sh. & Prokhorov, Yu. (eds) *Probability Theory and Mathematical Statistics*. Berlin Heidelberg: Springer. pp. 549–564.
11. Pang, G. & Whitt, W. (2010) Two-parameter heavy-traffic limits for infinite-server queues. *Queueing Systems*. 65(4). pp. 325–364. DOI: 10.1007/s11134-010-9184-z
12. Chernavskaya, E.A. (2016) *Predel'nyye teoremy dlya beskonechnokanal'nykh sistem s tyazhelyimi khvostami raspredeleniy vremen obsluzhivaniya* [Limit theorems for infinite channel systems with heavy tails of distributions of service times]. Physics and Mathematics Cand. Diss. Moscow: Moscow State University.
13. Bashtova, E.E. & Chernavskaya, E.A. (2017) Limit theorems for infinite-channel queueing systems with heavy-tailed service times. In: Rykov, V., Singpurwalla, N. & Zubkov, A.M. (eds) *Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications*. Springer International Publishing. pp.110–112. DOI: 10.1007/978-3-319-71504-9
14. Puhalskii, A.A. & Reed, J.E. (2008) On many-server queues in heavy traffic. *Annals of Applied Probability*. 20. pp. 129–195. DOI: 10.1214/09-AAP604
15. Reed, J. (2009) The $G/GI/N$ queue in the Halfin-Whitt regime. *Annals of Applied Probability*. 19(6). pp. 2211–2269. DOI: 10.1214/09-AAP609
16. Fralix, B.H. & Adan, I.J.B.F. (2009) An infinite-server queue influenced by a semi-Markovian environment. *Queueing Systems*. 61. pp. 65–84. DOI: 10.1007/s11134-008-9100-y
17. Moiseev, A.N. & Nazarov, A.A. (2015) *Beskonechnolinye sistemy i seti massovogo obsluzhivaniya* [Infinite-linear systems and networks of mass maintenance]. Tomsk: NTL.
18. Machihara, F. (1986) An infinitely-many-server queue with Markov renewal arrivals and hyperexponential service times. *Journal of the Operations Research Society of Japan*. 29. pp. 338–351. DOI: 10.15807/jorsj.29.338
19. Massey, W.A. & Whitt, W. (1993) Networks of infinite-server queues with nonstationary Poisson input. *Queueing Systems*. 13. pp. 183–250. DOI: 10.1007/BF01158933
20. Ramaswami, V. & Neuts, M. (1980) Some explicit formulas and computational methods for infinite-server queues with a phase-type arrival. *Journal of Applied Probability*. 17. pp. 498–514. DOI: 10.2307/3213039
21. Van Doorn, E.A. & Jagers, A.A. (2004) A note on the $GI/GI/\infty$ system with the identical service and interarrival-time distributions. *Queueing Systems*. 47. pp. 45–52. DOI: 10.1023/B:QUES.0000032799.30173.b7
22. Bocharov, P.P. & Pechinkin, A.V. (1995) *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [The theory of queueing]. Moscow: RUDN University.
23. Moiseev, A.N. & Nazarov, A.A. (2013) Investigation of the queueing system $HGI|GI|_\infty$. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 75–83. (In Russian).
24. Moiseev, A.N. & Nazarov, A.A. (2014) Asymptotic analysis of a multistage queueing system with a high-rate renewal arrival process. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 50(2). pp. 163–171. DOI: 10.3103/S8756699014020083
25. Nazarov, A.A. & Moiseev, A.N. (2013) Analysis of an open non-Markovian $GI-(GI|_\infty)^K$ queueing network with high-rate renewal arrival process. *Problems of Information Transmission*. 49(2), pp. 167–178. DOI: 10.1134/S0032946013020063

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УДК 614.8; 625.62; 503.56
DOI: 10.17223/19988605/44/9

Е.А. Асламова, М.В. Кривов, В.С. Асламова

ЭКСПЕРТНАЯ СИСТЕМА АГРЕГИРОВАННОЙ ОЦЕНКИ
УРОВНЯ ПРОМЫШЛЕННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Представлена экспертная система для исследования уровня промышленной безопасности методом логико-аксиологического оценивания качества технических систем. Агрегированная оценка уровня безопасности определяется в зависимости от степени выполнения мероприятий (факторов) классов (оценка аудитора), ценности каждого мероприятия и каждого класса в целом для промышленной безопасности (оценки эксперта). Программное обеспечение написано под платформу MS Windows, поддерживающую MS.Net Framework 4.0. Графический интерфейс создан на основе технологии WPF. Для разделения логики приложения от интерфейса применен паттерн проектирования MVVM. В качестве хранилища данных использована СУБД SQLite. С помощью подхода Database-First в Entity Framework 6.0 сгенерирована ORM (Object-Relational Mapping) данных. **Ключевые слова:** классы факторов; агрегированная оценка; экспертная система; объектно-реляционное отображение модели данных; WPF-приложение.

Несмотря на большое число работ в области оценки риска проблема количественного определения уровня промышленной безопасности опасных производственных объектов (ОПО) еще не решена [1]. Уровень промышленной безопасности ОПО оценивают, как правило, вероятностно-статистическими методами по значениям таких эксплуатационных характеристик, как число аварий, случаев смертельного травматизма, отношение числа травмированных работников к объему добытой продукции, величина ущерба последствий от аварий и инцидентов и т.п. [2–7]. Следует отметить, что данные показатели не в состоянии адекватно отразить реальную картину, так как, например, число аварий – от 100 до 200 в год, а общее количество поднадзорных ОПО 110 тыс. [2].

1. Логико-аксиологическое оценивание уровня промышленной безопасности

Большой интерес представляет логико-аксиологическое оценивание качества технических систем, методика которого изложена в работах [8–10]. Используем этот метод для оценки уровня промышленной безопасности на ОПО. Гипотеза: снижение безопасности ОПО обусловлено наличием «НЕ-факторов» – некачественная реализация организационных и технологических мероприятий, неподходящие условия труда, неадекватные средства индивидуальной защиты и тому подобное приводят к авариям и профессиональному поражению (профессиональные заболевания и производственный травматизм) работников. Безаварийное функционирование любого ОПО требует совместного действия всех входящих в него подсистем, и ущерб состояния какой-либо подсистемы влечет за собой ущерб безопасности ОПО в целом. Ущерб описывается набором нечетких причинно-следственных связей (продукций) вида: «Если НЕ- A , то НЕ- B », где B относится к оцениваемому компоненту (уровень безопасности), а A – к одной из непосредственно образующих его подсистем, функциональных элементов (факторов). Состояние каждого из компонентов выражается числами из интервала $[0, 1]$. При этом 1 означает полноценное функционирование компонента, а 0 – его утрату. То есть речь идет о нечеткой

истинности суждений «Компонент *A* функционирует полноценно» и «Компонент *B* функционирует полноценно». Нечеткость формализует и степень влияния ущерба компонента *A* на ущерб компонента *B*, которая оценивается числом из интервала $[0, 1]$. Фактически речь идет об истинности причинно-следственной связи «Ущерб функционирования *A* влечет ущерб функционирования *B*». Истинность этой связи названа *ценностью A для B*.

Система обеспечения безаварийности и промышленной безопасности на ОПО описывается соответствующей системой продукций, например:

НЕ (верно, что)–«обучение и инструктаж персонала проводятся своевременно и качественно» → НЕ (верно, что)–«организационные мероприятия обеспечены и т.п.

Кроме того, используются агрегирующие продукции вида:

НЕ–«организационные мероприятия обеспечены» → НЕ–«уровень промышленной безопасности в норме» и т.д.

Само оценивание выглядит как нечеткий присоединенный вывод на базе знаний (БЗ), сформированной на сложившихся в технической литературе представлениях о принципах безаварийного и безтравматичного выполнения работ на ОПО. Прямой вывод реализуется на основе технологии экспертных систем (знаниевые технологии) как нечеткий присоединенный вывод на БЗ, состоящей из продукций $A \rightarrow B$. Стартовыми фактами выступают оценки состояния исходных функциональных элементов системы производственной безопасности, а результатом – агрегированная оценка уровня промышленной безопасности в целом [11].

2. Диаграмма использования экспертной системы

Программный продукт AREOI (Aggregated Risk Estimate of Industrial Accidents) является практической реализацией информационной системы для проведения экспертизы в рамках исследования уровня промышленной безопасности ОПО. Диаграмма использования экспертной системы (ЭС) AREOI приведена на рис. 1.

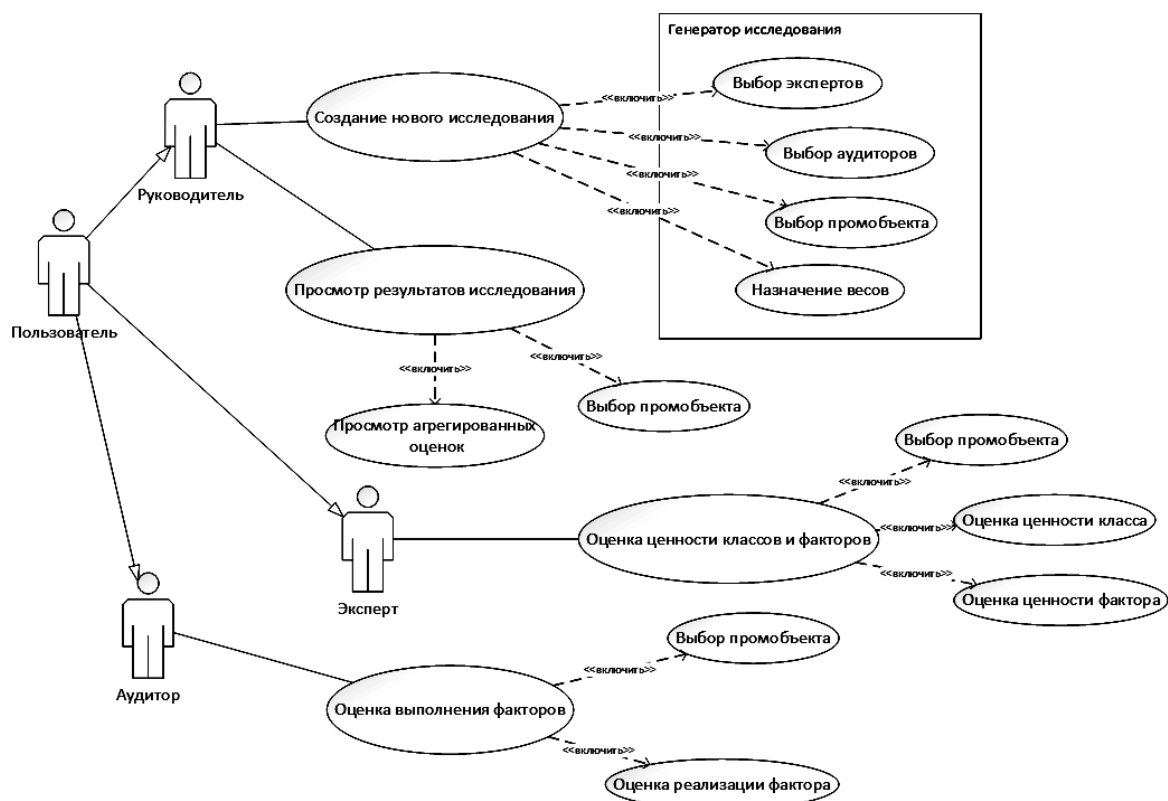


Рис. 1. Диаграмма использования ЭС AREOI

В качестве пользователей могут выступать три категории (разделение прав доступа пользователей предусмотрено, но в данной версии ПО не реализовано): пользователь-руководитель обследования, пользователь-эксперт, пользователь-аудитор.

Пользователь-руководитель обследования может инициировать в программе создание нового обследования (исследования) уровня промышленной безопасности на ОПО. Для реализации этого действия разработан отдельный модуль, который в рамках диалога с пользователем позволяет выбрать производственный объект, назначить аудиторов и экспертов, а также указать значимость (вес) мнения каждого проверяющего.

Для выбора промышленных объектов, экспертов и аудиторов в программе реализована группа расширяемых справочников, и пользователь может в процессе работы привлекать недостающие данные.

Пользователь-эксперт в уже созданном исследовании оценивает ценность влияния каждого фактора на выполнение класса фактора безопасности, а также оценивает степень влияния (ценность) класса на общую оценку уровня промышленной безопасности. После ввода экспертом оценок программа производит перерасчет взвешенной оценки каждого фактора и класса факторов с учетом веса мнения данного эксперта, а также других экспертов, участвующих в обследовании.

Пользователь-аудитор в уже созданном исследовании дает оценку выполнению фактора безопасности на промышленном объекте. После ввода аудитором оценок ЭС производит перерасчет взвешенной оценки каждого фактора с учетом веса мнения данного аудитора, а также других аудиторов, участвующих в обследовании.

3. Архитектура экспертной системы

Архитектура приложения приведена на рис. 2. Программный продукт написан под платформу MS Windows, поддерживающую MS.Net Framework версии 4.0 и выше. То есть программа работает под управлением операционных систем (ОС) MS Windows XP с установленным MS.Net FW 4.0 и более старшими ОС (MS Windows 7, MS Windows 8, MS Windows 10).

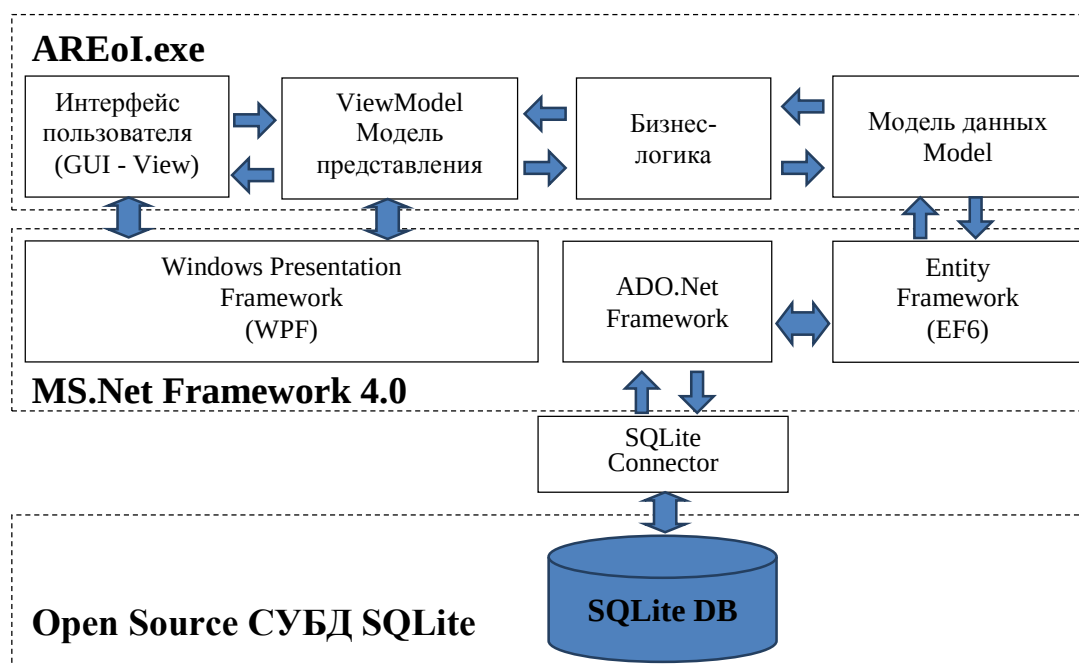


Рис. 2. Архитектура программы AREOI

Программный продукт AREOI является настольным приложением с графическим интерфейсом на основе технологии WPF (Windows presentation foundation). Для разделения логики приложения от интерфейса пользователя был применен паттерн проектирования MVVM (Model–View–ViewModel / модель–представления–модель представления) [12, 13].

Модель представляет бизнес-логику приложения и реализована в формате системы отношений классов сущностей. Эту модель формирует Entity Framework 6.0 [14, 15], являющийся частью платформы MS. Net Framework 4.0. Реализованный в программе механизм взаимодействия с Entity Framework 6.0 считывает из базы данных структуру данных и генерирует данные в форме объектов данных.

В качестве хранилища данных использована свободная (публичное достояние) СУБД SQLite [16]. SQLite представляет внутрипроцессную библиотеку, которая реализует встроенное автономное ядро базы данных SQL без сервера с нулевой конфигурацией. В отличие от большинства других баз данных SQL, SQLite не имеет отдельного серверного процесса. SQLite читает и записывает непосредственно в обычные дисковые файлы. Полная база данных содержится в одном areoi.sqlite. Формат файла базы данных кросс-платформенный, что позволяет свободно копировать базу данных между 32-разрядной и 64-разрядной системами или между различными архитектурами. При всех достоинствах SQLite – это компактная библиотека. При включении всех функций размер библиотеки СУБД может не превышать 500 КБ [17]. С помощью подхода Database-First в Entity Framework 6.0 сгенерирована ORM-модель данных [18]. Имена классов объектной модели классов совпадают с наименованием таблиц БД (таблица).

Структура таблиц базы данных

Имя таблицы данных	Описание сущности
Classes	Множество классов факторов промышленной безопасности
Factors	Множество факторов промышленной безопасности
Expertises	Множество экспертиз промышленной безопасности
Experts	Сведения об экспертах и аудиторах, задействованных в обследовании промышленной безопасности
IndustrialObjects	Множество промышленных объектов
ClassesExpertises	Подмножество классов факторов из Classes, включенных в экспертизы и их экспертная оценка ценности (влияния на промышленную безопасность)
FactorExpertises	Подмножество факторов из Factors, включенных в экспертизу, и их экспертная оценка ценности
FactorsAudits	Оценки аудиторов по экспертизе исполнения факторов промышленной безопасности объектов

Отметим, что в коде, реализующем класс сущности, множественные отношения исполнены обобщенными коллекциями с поддержкой интерфейса ICollection, например такими, как HashSet<...>. В соответствии с паттерном проектирования MVVM, в пространстве имен Areoi.ViewModel созданы модели представлений данных, являющиеся некой оберткой класса (wrapper) модели, поддерживающей интерфейс INotifyPropertyChanged. Реализация данного интерфейса на основе фреймов позволяет динамически обновлять содержимое связанных элементов управления пользовательского интерфейса при изменении данных [12, 13]. То есть главное окно программы, реализованное классом MainWindow, содержит контейнер для размещения фреймов и привязку к контексту данных ApplicationViewModel. В соответствии с диаграммой использования (см. рис. 1) контроллер приложения привязывает представления из пространства имен Areoi.Views, реализованные в виде компонентов, наследуемых от базового класса System.Controls.Frame.

4. Руководство по использованию экспертной системы

При запуске приложения открывается основной экран программы (рис. 3).

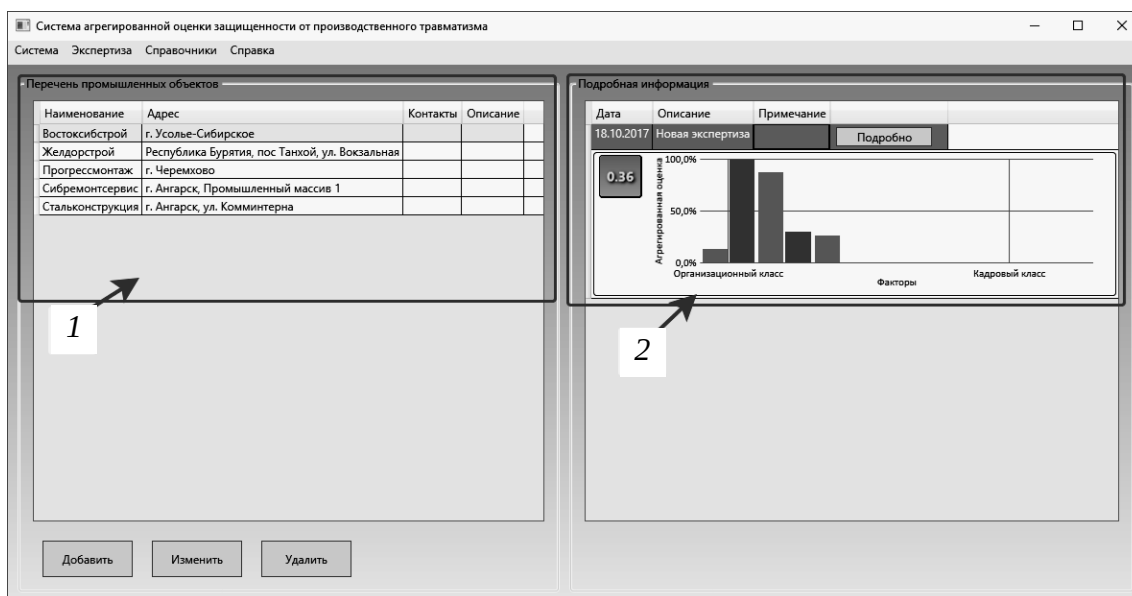


Рис. 3. Главный экран AREOI

В области 1 выводится список промышленных объектов, а в области 2 – список проведенных на выбранном объекте экспертиз промышленной безопасности. При активации экспертизы открывается детализированная информация (рис. 4). В позиции 1 указывается общая информация об экспертизе, включающая описание, заметки и дату проведения экспертизы. В позиции 2 приводится оценка промышленной безопасности и гистограмма распределения степени выполнения факторов и ценности классов факторов промышленной безопасности (позиция 3).

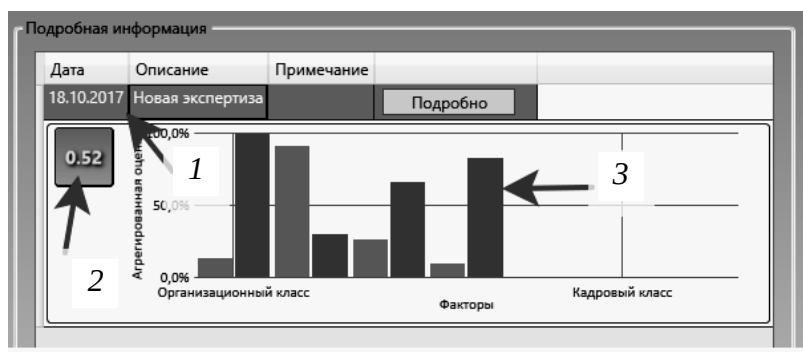


Рис. 4. Сводная информация по экспертизе AREOI

Для детальной информации по экспертизе следует перейти на экран экспертизы, выбрав кнопку «Подобно». Структура классов построена в форме дерева и содержит систематизированный по классам перечень факторов, а также агрегированные оценки этих факторов и классов.

При выборе в дереве фактора промышленной безопасности, например, организационного класса, (рис. 5) область в позиции 2 отведена для просмотра и редактирования оценок аудитора по выбранному фактору. Фактор «отсутствие или некачественное проведение обучения и инструктажа» является ключевым (его экспертная ценность равна 1).

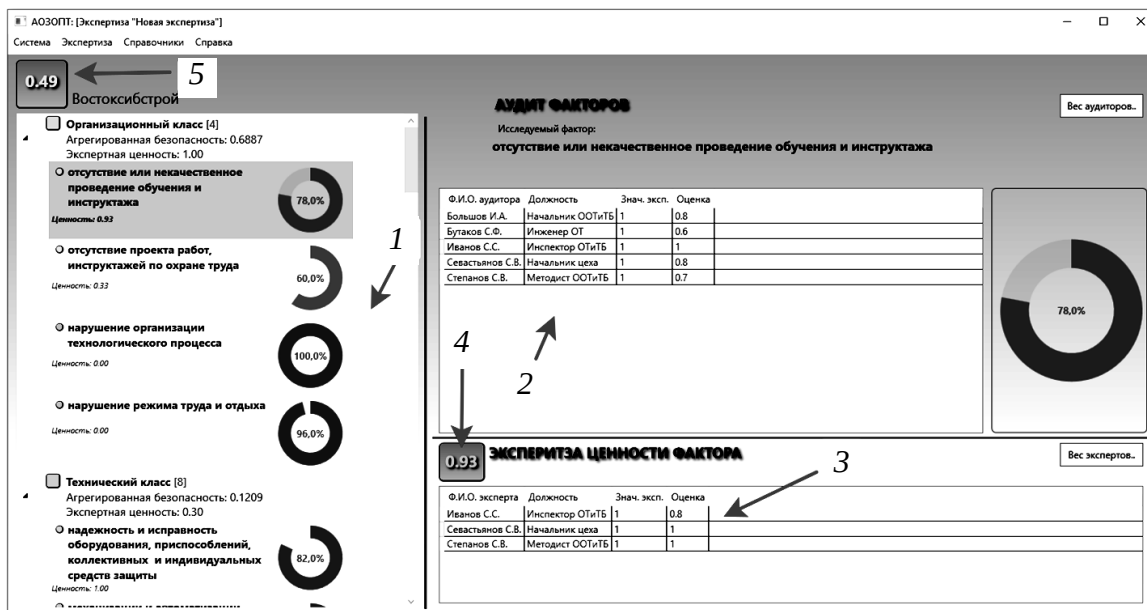


Рис. 5. Детальные сведения об экспертизе (выбор фактора)

В таблице рис. 5 указываются фамилия и инициалы аудитора, должность, вес эксперта (задаются при создании экспертизы) и выставленная им оценка. Изменение оценки приводит к пересчету всех показателей экспертизы. Круговая диаграмма в области 2 выводит взвешенную оценку аудита с учетом весов аудиторов. Взвешенные оценки мнений экспертов и аудиторов определялись с учетом их компетентности [19]. Область в позиции 3 посвящена экспертизе ценности выбранного фактора. Также в таблице приведены фамилии, инициалы, должности, вес эксперта и его оценка. Элемент в поз. 4 выводит взвешенное значение ценности влияния фактора на промышленную безопасность. При изменении оценки ценности производится перерасчет всех показателей экспертизы.

При выборе, например, организационного класса факторов (рис. 6) приводится гистограмма распределения степени выполнения факторов организационного класса на ОПО (по мнению аудиторов), позволяющая визуально оценить, какие факторы сыграли решающую роль в снижении уровня промышленной безопасности.

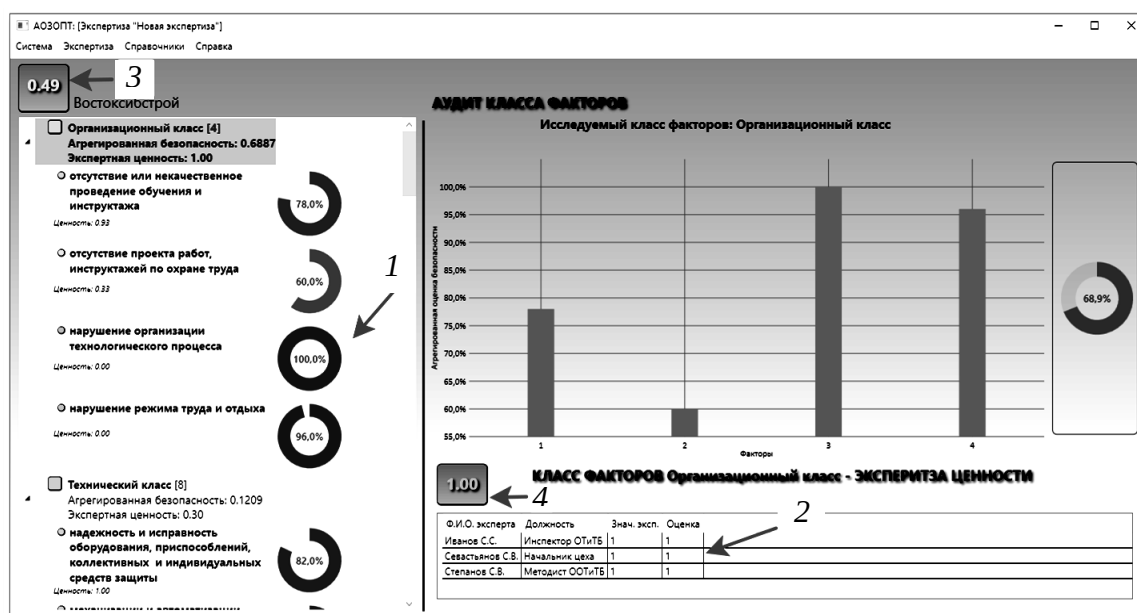


Рис. 6. Детальные сведения об экспертизе (выбор класса фактора)

Перемещая бегунок в области 1 можно проследить взвешенную степень выполнения всякого фактора каждого класса, по мнению аудиторов, а в левом верхнем углу – рассчитанные агрегированные оценки по данному классу и уровня промышленной безопасности (по всем классам). Кроме того, имеется возможность внести оценки экспертов.

Важным этапом работы программы является создание новой экспертизы. Этот процесс реализован в форме «мастера», представляющего многошаговый диалог с пользователем. Активизируется он с помощью меню ЭКСПЕРТИЗА | НОВАЯ ЭКСПЕРТИЗА. Вначале запрашивается общая информация, далее пользователь должен выбрать промышленный объект. При отсутствии в списке необходимого объекта пользователь может его тут же добавить, внося новую запись в справочник объектов. Затем следует выбрать экспертов и аудиторов и установить их компетентностные веса. После ввода всей информации программа генерирует новые данные для проведения опроса экспертов и аудиторов и вычисления агрегированной оценки.

Справочники для работы информационной системы реализованы в форме ленточных форм с вызовом редакторов. Для редактирования, например, справочника экспертов требуется вызвать пункт меню ЭКСПЕРТИЗА | МЕНЕДЖЕР ЭКСПЕРТОВ.

Системные требования программы AREOI: операционная система Microsoft Windows 7 и выше; установленный MS .Net Framework v. 4.0 и выше. Требования к частоте процессора – минимум 1 ГГц. Размер ОЗУ – минимум 512 МБ. Свободное место на диске (минимум): 32-разрядная версия ОС – 850 МБ, 64-разрядная версия ОС – 2 ГБ.

Заключение

Разработанная экспертная система может быть использована как при проведении аудита и экспертизы промышленной безопасности, так и при разработке мероприятий, направленных по повышение уровня безопасности. Экспертная система выводит гистограмму распределения классов факторов промышленной безопасности, из которой наглядно видно, за счет какого класса факторов снижается уровень промышленной безопасности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузьмин А.А., Чириков А.Г. Подход к оценке уровня безопасности опасных производственных объектов с использованием элементов теории квалиметрии // Научные и образовательные проблемы гражданской защиты. 2010. № 4. С. 1–9.
2. Буйко К.В., Пантюхова Ю.В. Подходы к оценке уровня промышленной безопасности в организациях, эксплуатирующих опасные производственные объекты. URL: <http://kalugatechnadzor.ru/analitika/371-podxody-k-ocenke-urovnya-promyshlennoj-bezopasnosti-v-organizacziyax-eksplu-atiruyushhix-opasnye-proizvodstvennyye-obekty> (дата обращения: 23.11.2017).
3. Кузнецова С.Н. Методы проектирования математического обеспечения систем прогнозирования природных, техногенных и экологических рисков : автореф. дис. ...канд. техн. наук. СПб., 2009. 20 с.
4. Методика оценки риска аварий на опасных производственных объектах нефтегазоперерабатывающей, нефте- и газохимической промышленности. М. : ЗАО «НТЦ исследований проблем промышленной безопасности», 2014. Сер. 09, вып. 38. 44 с.
5. Veltri A., Pagell M., Behm M., Das A. A Data-Based Evaluation of the Relationship between Occupational Safety and Operating Performance // Journal of SH&E Research. 2007. V. 4, No. 1. P. 1–22.
6. Ateekh-ur-Rehman L. Safety Management in a Manufacturing Company: Six Sigma Approach // Engineering. 2012. No. 4. P. 400–407.
7. Anvari A., Zulkifli N., Yusuff R.M. Evaluation of Approaches to Safety in Lean Manufacturing and Safety Management Systems and Clarification of the Relationship Between Them // World Applied Sciences Journal. 2011. No. 15 (1). P. 19–26.
8. Аршинский Л.В. Логико-аксиологический подход к оценке состояния систем // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2013. № 3 (39). С. 140–146.
9. Аршинский Л.В. Логико-аксиологическая оценка качественного состояния системы // Транспортная инфраструктура Сибирского региона : материалы Четвертой всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием, 13–17 мая 2013 г., Иркутск : в 2 т. Иркутск : Изд-во ИрГУПС, 2013. Т. 1. С. 57–62.
10. Аршинский Л.В. Методика агрегированного оценивания систем с поддержкой ключевых компонентов // Онтология проектирования. 2015. Т. 5, № 2 (16). С. 223–232.

11. Аршинский Л.В., Асламова Е.А. Разработка системы агрегированной оценки производственной безопасности на предприятии на основе знаний технологий // Транспортная инфраструктура Сибирского региона : материалы Восьмой междунар. науч.-практ. конф., посвященной 355-летию со дня основания города Иркутска, 28 марта – 01 апреля 2016 г., Иркутск : в 2 т. Иркутск : ИрГУПС, 2017. Т. 1. С. 401–405.
12. My MVVM article in MSDN Magazine | Josh Smith on WPF. MVVM: полное понимание (+WPF) Ч. 1. URL: <https://habrahabr.ru/post/338518/> (дата обращения: 23.08.2017).
13. Patterns – WPF Apps With The Model-View-ViewModel Design Pattern. MSDN Magazine. URL: <https://msdn.microsoft.com/en-us/magazine/dd419663.aspx>, MSDN/ (дата обращения: 18.07.2017).
14. Hirani Z., Tenny L., Gupta N., Driscoll B., Vettor R. Entity Framework 6 Recipes. APress, 2013. 548 p. URL: <http://www.apress.com/us/book/9781430257882> (access date: 18.07.2017).
15. Кляйн С. Профессионально о Entity Framework 4.0 / Pro Entity Framework 4.0. About SQLite. 2010. URL: <http://www.sqlite.org/about.html> (дата обращения: 18.07.2017).
16. СУБД SQLite. URL: <http://www.sqlite.org> (access date: 28.07.2017).
17. Scott W. Ambler: Mapping Objects to Relational Databases: O/R Mapping In Detail. URL: <http://www.agiledata.org/essays/mappingObjects.html> (access date: 18.07.2017).
18. McDonald M. WPF: Windows Presentation Foundation в .NET 4.0 с примерами на C# 2010. М. : Вильямс, 2011. 1020 с. URL: <http://dugtor-focus.ru/forum/viewtopic.php?t=348214> (дата обращения: 02.08.2017).
19. Гуцыкова С. Метод экспертных оценок. Теория и практика. М. : Ин-т психологии РАН, 2011. 144 с. (In Russian).

Поступила в редакцию 28 января 2018 г.

Aslamova E.A., Krivov M.V., Aslamova V.S. (2018) EXPERT SYSTEM OF THE AGGREGATE ASSESSMENT OF THE LEVEL OF INDUSTRIAL SAFETY. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 44. pp. 84–92

DOI: 10.17223/19988605/44/9

The software product is a practical implementation of the information system for the examination in the framework of researching the level of industrial safety of production facilities using the method of logical and axiological evaluation of the quality of technical systems. The aggregated safety assessment is automatically determined according to the level of performance of class events (the auditor's assessment), the degree of influence of each activity and each class as a whole on industrial safety (expert assessments). The advantage of logical-axiological evaluation is the possibility of introducing key factors and classes of factors. Key factors are factors (classes of factors), the absence (unrealized) of which devalues the entire system. It's new in such an assessment.

As users, there are three categories of users: user-supervisor of the survey, user-expert, user-auditor.

The user-manager of the survey can initiate in the program the creation of a new survey of the level of industrial safety at the production facility. To implement this action, a separate module has been developed that allows you to select a production facility, assign auditors and experts as part of a dialogue with the user, and also indicate the weight (importance) of the opinion of each inspector.

For the selection of industrial facilities, experts and auditors, the program implemented a group of expandable directories. Their user can add missing information during the work.

The user-expert evaluates the degree of influence of each factor on the completeness of the implementation of the corresponding class of security factors in the form of a so-called value; with the help of value, it also determines the degree of influence of the class of factors on the overall assessment of the state of industrial safety. For a key factor, the failure of which leads to an accident, personal injury, the value is one.

After the expert enters the evaluations, the program recalculates the weighted estimate of each factor and factor class, taking into account the weight of the expert's opinion, as well as other experts participating in the survey.

The user-auditor in the already created research assesses the performance of safety factors at the industrial site. After the auditor enters the estimates, the program calculates an aggregate assessment of the state of industrial safety of the enterprise, taking into account the opinions of experts and auditors. Preliminary recalculation of the weighted estimation of each factor taking into account weight of opinion of the given auditor, and also other auditors participating in inspection is made.

When developing the expert system (ES), modern information technologies were used. The information expert system "Areoi" for the aggregate assessment of the level of industrial safety and protection against occupational injuries is written under the MS Windows platform supporting MS.Net Framework version 4.0 and higher. The graphical interface is based on WPF (Windows Presentation foundation) technology based on frames. To separate the application logic from the user interface, the MVVM design pattern was applied, which represents the separation of the application's business logic and is implemented in the format of an entity-class relationship system. The free software of SQLite DBMS is used as data storage. Using the Database-First approach, an ORM object-relational mapping of the data model is generated in Entity Framework 6.0.

The developed expert system can be used both during the audit and examination of industrial safety, and in the development of activities aimed at improving the level of safety.

Keywords: classes of factors; the aggregate estimate; expert system; object-relational mapping of the data model; WPF application.

ASLAMOVA Elizaveta Alexandrovna (Irkutsk State Transport University, Russian Federation).
E-mail: liza.ocean@mail.ru

KRIVOV Maksim Viktorovich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Angarsk State Technical University, Russian Federation).
E-mail: vmk@angtu.ru

ASLAMOVA Vera Sergeevna (Doctor of Technical Sciences, Professor, Irkutsk State Transport University, Russian Federation).
E-mail: aslamovav@yandex.ru

REFERENCES

1. Kuzmin, A.A. & Chirikov, A.G. (2010) Podkhod k otsenke urovnya bezopasnosti opasnykh proizvodstvennykh ob'yektov s ispol'zovaniyem elementov teorii kvalimetrii [Approach to assessing the level of safety of hazardous production facilities using elements of the theory of qualimetry]. *Nauchnyye i obrazovatel'nyye problemy grazhdanskoy zashchity – Scientific and Educational Problems of The Civil Defence*. 4. pp. 1–9.
2. Buyko, K.V. & Pantukhova, Yu.V. (2017) Podkhody k otsenke urovnya promyshlennoy bezopasnosti v organizatsiyakh, ekspluatiruyushchikh opasnyye proizvodstvennyye ob'yekty [Approaches to assessing the level of industrial safety in organizations operating hazardous production facilities]. [Online] Available from: <http://kalugatechnadzor.ru/analitika/371-podxody-k-ocenke-urovnya-promyshlennoj-bezopasnosti-v-organizatsiyax-ekspluatiruyushchix-opasnye-proizvodstvennyye-obekty>. (Accessed: 23rd November 2017).
3. Kuznetsova, S.N. (2009) *Metody proyektirovaniya matematicheskogo obespecheniya sistem prognozirovaniya prirodnykh, tekhnogennykh i ekologicheskikh riskov* [Methods of designing the mathematical support of systems for forecasting natural, technogenic and environmental risks]. Abstract of Engineering Cand. Diss. St. Petersburg.
4. Radionova, S.G. et al. (2014) *Metodika otsenki riska avari na opasnykh proizvodstvennykh ob'yektakh neftegazopererabatyvayushchey, nefte- i gazokhi-micheskoy promyshlennosti* [The methodology for assessing the risk of accidents at hazardous production facilities of oil and gas refining, oil and gas chemical industries]. Vol. 38. Moscow: NTTS issledovaniy problem promyshlennoy bezopasnosti.
5. Veltri, A., Pagell, M., Behm, M. & Das, A. (2007) A Data-Based Evaluation of the Relationship between Occupational Safety and Operating Performance. *Journal of SH & E Research*. 4(1) pp. 1–22.
6. Ateekh-ur-Rehman, L. (2012) Safety Management in a Manufacturing Company: Six Sigma Approach. *Engineering*. 4. pp. 400–407. DOI: 10.4236/eng.2012.47053
7. Anvari, A., Zulkifli, N. & Yusuff, R.M. (2011) Evaluation of Approaches to Safety in Lean Manufacturing and Safety Management Systems and Clarification of the Relationship Between Them. *World Applied Sciences Journal*. 15(1). pp. 19–26.
8. Arshinsky, L.V. (2013a) Logic axiological approach to assessment of systems. *Sovremennyye tekhnologii. Sistemnyy analiz. Modelirovaniye – Modern technologies. System analysis. Modeling*. 3(39). pp.140–146. (In Russian).
9. Arshinsky, L.V. (2013b) [Logical-axiological assessment of the qualitative state of the system]. *Transportnaya infrastruktura Sibirskogo regiona* [Transport infrastructure of the Siberian region]. Proc. of the Fourth All-Russian Conference with International Participation. Irkutsk. May 13–17, 2013. Irkutsk: IrGUPS. pp. 57–62. (In Russian).
10. Arshinsky, L.V. (2015) Aggregated method of estimating systems with support of key components. *Ontologiya proyektirovaniya – Ontology of Designing*. 2(16). pp. 223–232. (In Russian). DOI: 10.18287/2223-9537-2015-5-2-223-232
11. Arshinsky, L.V. & Aslamova, E.A. (2017) [Development of the system of the aggregate assessment of industrial safety at the enterprise based on knowledge technologies]. *Transportnaya infrastruktura Sibirskogo regiona* [Transport infrastructure of the Siberian region]. Proc. of the Eighth International Conference. Irkutsk. March 28 – April 1, 2016. Irkutsk. pp. 401–405. (In Russian).
12. Anon. (n.d.) MVVM: polnoye ponimaniye (+WPF) CH. 1. [MVVM: full understanding (+ WPF) Part 1]. [Online] Available from: <https://habrahabr.ru/post/338518/>. (Accessed: 23rd August 2017).
13. Smith, J. (2009) Patterns – WPF Apps With The Model-View-ViewModel Design Pattern. *MSDN Magazine*. February 2009. [Online] Available from: <https://msdn.microsoft.com/en-us/magazine/dd419663.aspx>. (Accessed: 18th July 2017).
14. Hirani, Z., Tenny, L., Gupta, N., Driscoll, B. & Vettor, R. (2013) *Entity Framework 6 Recipes*. [Online] Available from: <http://www.apress.com/us/book/9781430257882>. (Accessed: 18th July 2017).
15. Klein, S. (2010) *Professionally about Entity Framework 4.0 / Pro Entity Framework 4.0. About SQLite*. [Online] Available from: <http://www.sqlite.org/about.html>. (Accessed: 18th July 2017).
16. *SQLite DBMS*. [Online] Available from: <http://www.sqlite.org>. (Accessed: 18th July 2017).
17. Ambler, S.W. (n.d.) *Mapping Objects to Relational Databases: O / R Mapping In Detail*. [Online] Available from: <http://www.agiledata.org/essays/mappingObjects.html>. (Accessed: 18th July 2017).
18. McDonald, M. (2011) *WPF: Windows Presentation Foundation in .NET 4.0 with examples in C # 2010*. Moscow: Williams. [Online] Available from: <http://dugtor-focus.ru/forum/viewtopic.php?t=348214>. (Accessed: 2nd August 2017).
19. Gutsikova, S. (2011) *Metod ekspertnykh otsenok. Teoriya i praktika* [Method of Expert Assessments. Theory and Practice]. Moscow: RAS.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АСЛАМОВА Вера Сергеевна – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры техносферной безопасности Иркутского государственного университета путей сообщения. E-mail: aslamovav@yandex.ru

АСЛАМОВА Елизавета Александровна – аспирант кафедры информационных систем и защиты информации Иркутского государственного университета путей сообщения. E-mail: liza.ocean@mail.ru

ДОМБРОВСКИЙ Владимир Валентинович – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой информационных технологий и бизнес аналитики Института экономики и менеджмента Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: dombrovs@ef.tsu.ru

КИМ Константин Станиславович – аспирант кафедры исследования операций Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: kks93@rambler.ru

КРИВОВ Максим Викторович – доцент, кандидат технических наук, заведующий кафедрой вычислительных машин и комплексов Ангарского государственного технического университета. E-mail: vmk@angtu.ru

ЛЕМЕШКО Борис Юрьевич – профессор, доктор технических наук, главный научный сотрудник кафедры теоретической и прикладной информатики факультета прикладной математики и информатики Новосибирского государственного технического университета. E-mail: Lemeshko@ami.nstu.ru

ЛЕМЕШКО Станислав Борисович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник кафедры теоретической и прикладной информатики факультета прикладной математики и информатики Новосибирского государственного технического университета. E-mail: skyer@mail.ru

ЛИВШИЦ Климентий Исаакович – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: kim47@mail.ru

МАНСИМОВ Камил Байрамали оглы – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической кибернетики Бакинского государственного университета, руководитель лаборатории «Управление в сложных динамических системах» Института систем управления НАН Азербайджана (г. Баку). E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

МОИСЕЕВ Александр Николаевич – доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры программной инженерии Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: moiseev.tsu@gmail.com.

МОКРОВ Евгений Владимирович – ассистент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей факультета физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов (г. Москва). E-mail: melkor77@yandex.ru

НАЗАРОВ Анатолий Андреевич – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

ПАШИНСКАЯ Татьяна Юрьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий и бизнес аналитики Института экономики и менеджмента Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: tatyana.obedko@mail.ru

ПЕРЕПЕЛКИН Евгений Александрович – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики Алтайского государственного технического университета им. И.И. Ползунова (г. Барнаул). E-mail: eap@list.ru

САМУЙЛОВ Константин Евгеньевич – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей факультета физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов (г. Москва). E-mail: samuylov_ke@pfur.ru

СЕМЕНОВА Мария Александровна – кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной информатики факультета прикладной математики и информатики Новосибирского государственного технического университета. E-mail: vedernikova.m.a@gmail.com

СМАГИН Валерий Иванович – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры исследования операций Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: vsm@mail.tsu.ru

СУЛЕЙМАНОВА Шабнам Шакир кызы – преподаватель Азербайджанского государственного педагогического университета, аспирант Института систем управления НАН Азербайджана (г. Баку). E-mail: kmansimov@mail.ru

УЛЬЯНОВА Екатерина Сергеевна – аспирант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: ulyanovaeks@gmail.com

ХУДЯШОВА Екатерина Евгеньевна – аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: kopnova.e@gmail.com

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

2018. № 44

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 24.09.2018 г. Формат 60x84^{1/8}.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 11,2.
Тираж 250 экз. Заказ № 3355. Цена свободная.

Дата выхода в свет 28.09.2018 г.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru