ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Управление, вычислительная техника и информатика № 44

УДК 517.977
DOI: 10.17223/19988605/44/2

К.Б. Мансимов, Ш.Ш. Сулейманова

К ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ В КЛАССИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ УПРАВЛЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Рассматривается одна задача оптимального управления с переменной структурой для системы, описываемой уравнением Гурса–Дарбу. При предположении открытости области управления выведены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков. Исследованы на оптимальность особые, в классическом смысле, управления.
Ключевые слова: система Гурса–Дарбу; особые в классическом смысле управления; необходимые условия оптимальности; вариация функционала; уравнения в вариациях.

К настоящему времени различные аспекты задач оптимального управления для систем, описываемых уравнениями Гурса–Дарбу, изучены в работах многих авторов, начиная с работы А.И. Егорова [1]. Довольно подробный обзор соответствующих результатов имеется, например, в [2–10] и др.

При предположении открытости области управления установлен аналог уравнения Эйлера [11–14]. Далее, применяя модифицированный вариант метода приращений, предложенный и развитый в работах [1–10, 15–21] и др., для систем Гурса–Дарбу выведено довольно общее необходимое условие оптимальности второго порядка. Отдельно изучен случай вырождения аналога условия Лежандра–Клебша (в классическом смысле особый случай [10, 13, 15, 20, 21]).

В отличие от работ [1–10], предлагаемая работа посвящена исследованию задачи оптимального управления с переменной структурой для систем, описываемых уравнениями Гурса–Дарбу.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u,v)=\varphi_1\big(z(t_1,X)\big)+\varphi_2\big(y(t_2,X)\big) \tag{1}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &u(t,x)\in U\subset R^r, \quad (t,x)\in D_1=[t_0,t_1]\times[x_0,X],\\ &v(t,x)\in V\subset R^q, \quad (t,x)\in D_2=[t_1,t_2]\times[x_0,X], \end{aligned} \tag{2}$$

$$z_{tx}=f(t,x,z,u), \quad (t,x)\in D_1, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &z(t_0,x)=a(x), \quad x\in[x_0,X],\\ &z(t,x_0)=b_1(t),\ t\in[t_0,t_1], \end{aligned} \tag{4}$$

$$y_{tx}=g(t,x,y,v), \quad (t,x)\in D_2, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &y(t_1,x)=G\big(z(t_1,x)\big), \quad x\in[x_0,X],\\ &y(t,x_0)=b_2(t),\ t\in[t_1,t_2],\\ &G\big(z(t_1,x_0)\big)=b_2(t_1). \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $f(t,x,z,u)$, $\big(g(t,x,y,v)\big)$ – заданная n (m)-мерная вектор-функция, непрерывная в $D_1\times R^n\times R^r$ $\big(D_2\times R^m\times R^q\big)$ вместе с частными производными по (z,u) $\big((y,v)\big)$ до второго порядка включительно,

$G(z)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая в R^n m-мерная вектор-функция, $a(x)$, $b_i(t)$, $i=1,2$ – заданные вектор-функции соответствующих размерностей, удовлетворяющие условию Липшица с некоторыми константами, t_0, t_1, t_2, x_0, X – заданы, причем $t_0<t_1<t_2$, $x_0<X$, управляющие вектор-функции $u(t,x)$ $(v(t,x))$ всюду в дальнейшем считаются измеримыми по Лебегу на прямоугольнике D_1 (D_2), U (V) – заданное непустое, открытое и ограниченное множество.

Пару $(u(t,x),v(t,x))$ таких управляющих воздействий назовем допустимой.

Предполагается, что при заданном допустимом управлении $(u^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x))$ краевые задачи (3)–(4) и (5)–(6) имеют единственное абсолютно непрерывное (в смысле [2, 3]) решение $z^{\circ}(t,x)$ и $y^{\circ}(t,x)$ соответственно.

Допустимое управление $(u^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x))$, доставляющее минимум функционалу (1), при ограничениях (2)–(6) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),z^{\circ}(t,x),y^{\circ}(t,x))$ – оптимальным процессом.

2. Вычисление вариаций функционала качества

Пусть $(u^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),z^{\circ}(t,x),y^{\circ}(t,x))$ есть фиксированный допустимый процесс. Через $(\bar{u}(t,x)=u^{\circ}(t,x)+\Delta u(t,x),\ \ \bar{v}(t,x)=v^{\circ}(t,x)+\Delta v(t,x),\ \ \bar{z}(t,x)=z^{\circ}(t,x)+\Delta z(t,x),\ \ \bar{y}(t,x)=y^{\circ}(t,x)+$ $+\Delta y(t,x))$ обозначим произвольный допустимый процесс.

Тогда ясно, что приращение $(\Delta z(t,x),\Delta y(t,x))$ состояния $(z^{\circ}(t,x),y^{\circ}(t,x))$ будет решением краевой задачи

$$\Delta z_{tx}=f(t,x,\bar{z},\bar{u})-f(t,x,z^{o},u^{o}),\quad (t,x)\in D_1, \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\Delta z(t_0,x)=0,\quad x\in[x_0,X],\\ \Delta z(t,x_0)=0,\ t\in[t_1,t_2],\end{gathered} \tag{8}$$

$$\Delta y_{tx}=g(t,x,\bar{y},\bar{v})-g(t,x,y^{o},v^{o}),\quad (t,x)\in D_2, \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\Delta y(t_1,x)=\Delta G\left(z^{o}(t_1,x)\right)=G\left(\bar{z}(t_1,x)\right)-G\left(z^{o}(t_1,x)\right),\\ \Delta y(t,x_0)=0,\ t\in[t_1,t_2],\\ G\left(z^{\circ}(t_1,x_0)\right)=b_2(t_1).\end{gathered} \tag{10}$$

Через $\psi_i^{\circ}(t,x)$, $i=1,2$ обозначим пока неизвестные n и m-мерные вектор-функции соответственно. Умножая обе части соотношения (7) ((9)) слева скалярно на $\psi_1^{\circ}(t,x)$ $(\psi_2^{\circ}(t,x))$, а затем интегрируя по области D_1 (D_2) и вводя обозначения

$$H(t,x,z,u,\psi_1^{\circ})=\psi_1^{\circ'}\cdot f(t,x,z,u),\ \ M(t,x,y,v,\psi_2^{\circ})=\psi_2^{\circ'}\cdot g(t,x,y,v),$$

получим

$$\begin{gathered}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\psi_1^{\circ'}(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt=\\ =\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\left[H\left(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)-H\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)\right]dx\,dt,\end{gathered} \tag{11}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X} \psi_2^{o'}(t,x)\Delta y_{tx}(t,x)\,dx\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\Big[M\big(t,x,\bar y(t,x),\bar v(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\big) - M\big(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\big)\Big]dx\,dt. \tag{12}$$

Считая $\psi_i^{o}(t,x)$, $i=1,2$ достаточно гладкими вектор-функциями и учитывая краевые условия (8), можно убедиться в (10) в справедливости тождеств

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X} \psi_1^{o'}(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt = \psi_1^{o'}(t_1,X)\Delta z(t_1,X) - \int_{x_0}^{X}\frac{\partial\psi_1^{o'}(t_1,x)}{\partial x}\Delta z(t_1,x)\,dx -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\psi_1^{o'}(t,X)}{\partial t}\Delta z(t,X)\,dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\frac{\partial^2\psi_1^{o'}(t,x)}{\partial t\,\partial x}\Delta z(t,x)\,dx\,dt\ ,$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X} \psi_2^{o'}(t,x)\Delta y_{tx}(t,x)\,dx\,dt = \psi_2^{o'}(t_2,X)\Delta y(t_2,X) - \int_{x_0}^{X}\frac{\partial\psi_2^{o'}(t_2,x)}{\partial x}\Delta y(t_2,x)\,dx - \psi_2^{o'}(t_1,X)\Delta y(t_1,X) +$$

$$+\int_{x_0}^{X}\frac{\partial\psi_2^{o'}(t_1,x)}{\partial x}\Delta y(t_1,x)\,dx - \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\psi_2^{o'}(t,X)}{\partial t}\Delta y(t,X)\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\frac{\partial^2\psi_2^{o'}(t,x)}{\partial t\,\partial x}\Delta y(t,x)\,dx\,dt.$$

Поэтому с учетом тождеств (11), (12), а также того, что

$$\Delta y(t_1,x) = G(\bar z(t_1,x)) - G(z^{o}(t_1,x)),$$

формула для приращения критерия качества (1) записывается в виде:

$$\Delta S(u^{o},v^{o}) = S(\bar u,\bar v) - S(u^{o},v^{o}) = \Big[\varphi_1\big(\bar z(t_1,X)\big) - \varphi_1\big(z^{o}(t_1,X)\big)\Big] + \Big[\varphi_2\big(\bar y(t_2,X)\big) - \varphi_2\big(y^{o}(t_2,X)\big)\Big] +$$

$$+\psi_1^{o'}(t_1,X)\Delta z(t_1,X) - \int_{x_0}^{X}\frac{\partial\psi_1^{o'}(t_1,x)}{\partial x}\Delta z(t_1,x)\,dx - \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\psi_1^{o'}(t,X)}{\partial t}\Delta z(t,X)\,dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\frac{\partial^2\psi_1^{o'}(t,x)}{\partial t\,\partial x}\Delta z(t,x)\,dx\,dt + \psi_2^{o'}(t_2,X)\Delta y(t_2,X) - \int_{x_0}^{X}\frac{\partial\psi_2^{o'}(t_2,x)}{\partial x}\Delta y(t_2,x)\,dx - \psi_2^{o'}(t_1,X)\Delta y(t_1,X) +$$

$$+\int_{x_0}^{X}\frac{\partial\psi_2^{o'}(t_1,x)}{\partial x}\Delta y(t_1,x)\,dx - \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\psi_2^{o'}(t,X)}{\partial t}\Delta y(t,X)\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\frac{\partial^2\psi_2^{o'}(t,x)}{\partial t\,\partial x}\Delta y(t,x)\,dx\,dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\Big[H\big(t,x,\bar z(t,x),\bar u(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\big) - H\big(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\big)\Big]dx\,dt - \tag{13}$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\Big[M\big(t,x,\bar y(t,x),\bar v(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\big) - M\big(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\big)\Big]dx\,dt.$$

Полагая

$$N\left(x,\frac{\partial\psi_2^{o}}{\partial x},z(t_1,x)\right) = \frac{\partial\psi_2^{o'}(t_1,x)}{\partial x}y(t_1,x) = \frac{\partial\psi_2^{o'}(t_1,x)}{\partial x}G\big(z(t_1,x)\big),$$

$$Q\big(\psi_2^{o},z(t_1,X)\big) = \psi_2^{o'}(t_1,X)G\big(z(t_1,X)\big)$$

и используя формулу Тейлора из (13), получим

$$\Delta S(u^{o},v^{o}) = \frac{\partial\varphi_1'\big(z^{o}(t_1,X)\big)}{\partial z}\Delta z(t_1,X) + \frac{1}{2}\Delta z'(t_1,X)\frac{\partial^2\varphi_1\big(z^{o}(t_1,X)\big)}{\partial z^2}\Delta z(t_1,X) + o_1\Big(\left\|\Delta z(t_1,X)\right\|^2\Big) +$$

$$+\frac{\partial\varphi_2'\big(y^{o}(t_2,X)\big)}{\partial z}\Delta y(t_2,X) + \frac{1}{2}\,\Delta y'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\big(y^{o}(t_2,X)\big)}{\partial y^2}\Delta y(t_2,X) + o_2\Big(\left\|\Delta y(t_2,X)\right\|^2\Big) +$$

$$+\psi_1^{o'}(t_1,X)\Delta z(t_1,X)-\int_{x_0}^{X}\frac{\partial\psi_1^{o'}(t_1,x)}{\partial x}\Delta z(t_1,x)dx-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\psi_1^{o'}(t,X)}{\partial t}\Delta z(t,X)dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\frac{\partial^2\psi_1^{o'}(t,x)}{\partial t\,\partial x}\Delta z(t,x)dx\,dt+$$

$$+\psi_2^{o'}(t_2,X)\Delta y(t_2,x)-\int_{x_0}^{X}\frac{\partial\psi_2^{o'}(t_2,X)}{\partial x}\Delta y(t_2,x)dx-\frac{\partial Q\left(\psi_2^{o},z^{o}(t_1,X)\right)}{\partial z}\Delta z(t_1,X)-$$

$$-\frac{1}{2}\Delta z'(t_1,X)\frac{\partial^2 Q\left(\psi_2^{o},z(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\Delta z(t_1,X)+o_3\left(\left\|\Delta z(t_1,X)\right\|^2\right)+\int_{x_0}^{X}\frac{\partial N'\left(x,\dfrac{\partial\psi_2^{o}}{\partial x},z(t_1,x)\right)}{\partial z}\Delta z(t_1,x)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{X}\Delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2 N\left(x,\dfrac{\partial\psi_2^{o}}{\partial x},z(t_1,x)\right)}{\partial z^2}\Delta z(t_1,x)dx+\int_{x_0}^{X}o_4\left(\left\|\Delta z(t_1,x)\right\|^2\right)dx-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\psi_2^{o'}(t,X)}{\partial t}\Delta y(t,X)dt+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\frac{\partial^2\psi_2^{o'}(t,x)}{\partial t\,\partial x}\Delta y(t,X)dx\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\left[H_u'\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\Delta u(t,x)-H_z'\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\Delta z(t,x)\right]dx\,dt- \quad (14)$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\left[M_v'\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)\Delta v(t,x)-M_y'\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)\Delta y(t,x)\right]dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\left[\Delta z'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\Delta z(t,x)+2\Delta u'(t,x)\times\right.$$

$$\left.\times H_{uz}\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\Delta z(t,x)+\Delta u'(t,x)H_{uu}\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\Delta u(t,x)\right]dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\left[\Delta y'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)\Delta y(t,x)+2\Delta v'(t,x)\times\right.$$

$$\left.\times M_{vy}\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)\Delta y(t,x)+\Delta v'(t,x)M_{vv}\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)\Delta v(t,x)\right]dx\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}o_5\left(\left[\left\|\Delta z(t,x)\right\|+\left\|\Delta u(t,x)\right\|\right]^2\right)dx\,dt-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}o_6\left(\left[\left\|\Delta y(t,x)\right\|+\left\|\Delta v(t,x)\right\|\right]^2\right)dx\,dt.$$

Если предполагать, что $\psi_i^{o}(t,x)$, $i=1,2$ удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial^2\psi_1^{o}(t,x)}{\partial t\,\partial x}=\frac{\partial H\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)}{\partial z}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial\psi_1^{o}(t_1,x)}{\partial x}=-\frac{\partial N\left(x,\dfrac{\partial\psi_2^{o}}{\partial x},z^{o}(t_1,x)\right)}{\partial z},\quad \frac{\partial\psi_1^{o}(t,X)}{\partial t}=0,$$

$$\psi_1^{o}(t_1,X)=-\frac{\partial\varphi_1\left(z^{o}(t_1,X)\right)}{\partial z}+\frac{\partial Q\left(\psi_2^{o},z(t_1,X)\right)}{\partial z}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2\psi_2^{o}(t,x)}{\partial t\,\partial x}=\frac{\partial M\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)}{\partial y}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial\psi_2^{o}(t_2,x)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\psi_2^{o}(t,X)}{\partial t}=0,$$

$$\psi_2^{\circ}(t_2,X)=-\frac{\partial\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2,X)\right)}{\partial y},\tag{18}$$

то формула приращения (14) примет вид:

$$\begin{gathered}
\Delta S\left(u^{\circ},v^{\circ}\right)=-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}H_u'\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)\Delta u(t,x)\,dx\,dt-\\
-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}M_v'\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\Delta v(t,x)\,dx\,dt+
\end{gathered}\tag{19}$$

$$+\frac{1}{2}\Delta z'(t_1,X)\frac{\partial\varphi_1\left(z^{\circ}(t_1,X)\right)}{\partial z}\Delta z(t_1,X)+\frac{1}{2}\,\Delta y'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2,X)\right)}{\partial z^2}\Delta y(t_2,X)-$$

$$-\frac{1}{2}\Delta z'(t_1,X)\frac{\partial^2 Q\left(\psi_2^{\circ},z^{\circ}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\Delta z(t_1,x)-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{X}\Delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2 N\left(x,\dfrac{\partial\psi_2^{\circ}}{\partial x},z(t_1,x)\right)}{\partial z^2}\Delta z(t_1,x)\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\Big[\Delta z'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)\Delta z(t,x)+2\Delta u'(t,x)\times$$

$$\times H_{uz}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)\Delta z(t,x)+\Delta u'(t,x)H_{uu}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)\Delta u(t,x)\Big]dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\Big[\Delta y'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\Delta y(t,x)+2\Delta v'(t,x)\times$$

$$\times M_{vy}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\Delta y(t,x)+\Delta v'(t,x)M_{vv}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\Delta v(t,x)\Big]dx\,dt+$$

$$+o_1\left(\left\|\Delta z(t_1,X)\right\|^2\right)+o_2\left(\left\|\Delta y(t_2,X)\right\|^2\right)+o_3\left(\left\|\Delta z(t_1,X)\right\|^2\right)+\int_{x_0}^{X}o_4\left(\left\|\Delta z(t_1,x)\right\|^2\right)dx-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}o_5\left(\left[\left\|\Delta z(t,x)\right\|+\left\|\Delta u(t,x)\right\|\right]^2\right)dx\,dt-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}o_6\left(\left[\left\|\Delta y(t,x)\right\|+\left\|\Delta v(t,x)\right\|\right]^2\right)dx\,dt.$$

Краевую задачу (15)–(18) назовем сопряженной системой в задаче оптимального управления (1)–(6).

Поскольку множества U и V открытые, то специальное приращение допустимого управления $\left(u^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x)\right)$ можно определить по формуле:

$$\begin{aligned}
\Delta u_{\varepsilon}(t,x)&=\varepsilon\,\delta u(t,x),\\
\Delta v_{\varepsilon}(t,x)&=\varepsilon\,\delta v(t,x).
\end{aligned}\tag{20}$$

Здесь ε достаточно малое по абсолютной величине произвольное число, а $\delta u(t,x)$ и $\delta v(t,x)$ произвольные измеримые и ограниченные соответственно *r* и *q*-мерные вектор-функции со значениями из R^r и R^q соответственно.

Такие $\delta u(t,x)$ и $\delta v(t,x)$ назовем допустимыми вариациями управляющих функций $u^o(t,x)$ и $v^o(t,x)$ соответственно.

Через $\left(\Delta z_{\varepsilon}(t,x;\varepsilon),\Delta y_{\varepsilon}(t,x;\varepsilon)\right)$ обозначим специальное приращение состояния $\left(z^{\circ}(t,x),y^{\circ}(t,x)\right)$, отвечающее приращению (20) управления $\left(u^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x)\right)$.

Из оценок, установленных, например, в [1–3], следует, что

$$\left\|\Delta z(t,x)\right\|\le L_1\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\left\|\Delta u(\tau,s)\right\|ds\,d\tau,\tag{21}$$

$$\left\|\Delta y(t,x)\right\| \le L_2\left[\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\left\|\Delta v(\tau,s)\right\|ds\,d\tau+\left\|\Delta z(t_1,x)\right\|\right], \tag{22}$$

где $L_i = \text{const} > 0$, $i=1,2$ – некоторое постоянное.

Из (22) с учетом (21) получаем, что

$$\left\|\Delta y(t,x)\right\| \le L_3\left[\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\left\|\Delta v(\tau,s)\right\|ds\,d\tau+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\left\|\Delta u(\tau,s)\right\|d\tau\,ds\right], \tag{23}$$

где $L_3 = \text{const} > 0$ – некоторое постоянное.

Из оценок (21), (23) следует, что $\left\|\Delta z(t,x;\varepsilon)\right\|$ и $\left\|\Delta y(t,x;\varepsilon)\right\|$ имеют порядок малости ε. А из краевых задач (7)–(10) получаем, что $\left(\Delta z_\varepsilon(t,x),\Delta y_\varepsilon(t,x)\right)$ является решением линеаризованной краевой задачи

$$\Delta z_{tx}(t,x;\,\varepsilon)= f_z\left(t,x,z^{\mathrm o}(t,x),u^{\mathrm o}(t,x)\right)\Delta z(t,x;\,\varepsilon)+\varepsilon\, f_u\left(t,x,z^{\mathrm o}(t,x),u^{\mathrm o}(t,x)\right)\delta u(t,x)+o(\varepsilon;\,t,x), \tag{24}$$

$$\Delta z(t_0,x;\,\varepsilon)=0,\quad \Delta z(t,x_0;\,\varepsilon)=0, \tag{25}$$

$$\Delta y_{tx}(t,x;\,\varepsilon)= g_y\left(t,x,y^{\mathrm o}(t,x),v^{\mathrm o}(t,x)\right)\Delta y(t,x;\,\varepsilon)+\varepsilon\, g_v\left(t,x,y^{\mathrm o}(t,x),v^{\mathrm o}(t,x)\right)\delta v(t,x)+o(\varepsilon;t,x), \tag{26}$$

$$\begin{gathered}\Delta y(t_1,x;\,\varepsilon)=G_z\left(z^{\mathrm o}(t_1,x)\right)\Delta z(t_1,x;\,\varepsilon)+o(\varepsilon;x),\\ \Delta y(t,x_0;\varepsilon)=0.\end{gathered} \tag{27}$$

При помощи (24)–(27) по схеме, аналогичной, например, схеме из [13], доказывается

Теорема 1. Для специального приращения $\left(\Delta z(t,x;\varepsilon),\Delta y_\varepsilon(t,x;\varepsilon)\right)$ состояния $\left(z^{\mathrm o}(t,x),y^{\mathrm o}(t,x)\right)$ имеют место разложения

$$\begin{gathered}\Delta z(t,x;\varepsilon)=\varepsilon\,\delta z(t,x)+o(\varepsilon;t,x),\\ \Delta y(t,x;\varepsilon)=\varepsilon\,\delta y(t,x)+o(\varepsilon;t,x).\end{gathered} \tag{28}$$

Здесь $\left(\delta z(t,x),\delta y(t,x)\right)$ – вариация вектора состояния $\left(z^{\mathrm o}(t,x),y^{\mathrm o}(t,x)\right)$, являющаяся решением уравнения в вариациях

$$(\delta z)_{tx}= f_z\left(t,x,z^{\mathrm o}(t,x),u^{\mathrm o}(t,x)\right)\delta z+ f_u\left(t,x,z^{\mathrm o}(t,x),u^{\mathrm o}(t,x)\right)\delta u(t,x), \tag{29}$$

$$\begin{gathered}\delta z(t_0,x)=0,\quad x\in[x_0,X],\\ \delta z(t,x_0)=0,\quad t\in[t_0,t_1],\end{gathered} \tag{30}$$

$$(\delta y)_{tx}= g_y\left(t,x,y^{\mathrm o}(t,x),v^{\mathrm o}(t,x)\right)\delta y+ g_v\left(t,x,y^{\mathrm o}(t,x),v^{\mathrm o}(t,x)\right)\delta v(t,x), \tag{31}$$

$$\begin{gathered}\delta y(t_1,x)=G_z\left(z^{\mathrm o}(t_1,x)\right)\delta z(t_1,x),\\ \delta y(t,x_0)=0.\end{gathered} \tag{32}$$

Используя разложения (28) и (20) из формулы приращения (19) получаем справедливость соотношения

$$\begin{aligned}\Delta S_\varepsilon\left(u^{\mathrm o},v^{\mathrm o}\right)&=S\left(u^{\mathrm o}+\Delta u_\varepsilon,v^{\mathrm o}+\Delta v_\varepsilon\right)-S\left(u^{\mathrm o},v^{\mathrm o}\right)=\\ &=-\varepsilon\left[\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}H'_u\left(t,x,z^{\mathrm o}(t,x),u^{\mathrm o}(t,x),\psi_1^{\mathrm o}(t,x)\right)\delta u(t,x)\,dx\,dt+\right.\\ &\left.+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}M'_v\left(t,x,y^{\mathrm o}(t,x),v^{\mathrm o}(t,x),\psi_2^{\mathrm o}(t,x)\right)\delta v(t,x)\,dx\,dt\right]+\end{aligned} \tag{33}$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{\delta z'(t_1,X)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^{\circ}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\delta z(t_1,X)-\delta z'(t_1,X)\frac{\partial^2 Q\left(\psi_2^{\circ},z^{\circ}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\delta z(t_1,X)-\right.$$

$$-\int_{x_0}^{X}\delta z(t_1,x)\frac{\partial^2 N\left(x,\frac{\partial\psi_2^{\circ}}{\partial x},z^{\circ}(t_1,x)\right)}{\partial z^2}\delta z(t_1,x)dx+\delta y'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\delta y(t_2,X)-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\Big[\delta z'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)\delta z(t,x)+2\delta u'(t,x)\times$$

$$\times H_{uz}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)\delta z(t,x)+\delta u'(t,x)H_{uu}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)\delta u(t,x)\Big]dx\,dt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\Big[\delta y'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\delta y(t,x)+2\delta v'(t,x)M_{vy}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\times$$

$$\left.\times\delta y(t,x)+\delta v'(t,x)M_{vv}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\delta v(t,x)\Big]dx\,dt\right\}+o\left(\varepsilon^2\right).$$

Из разложения (33) следует, что первая и вторая вариации (в классическом смысле) функционала качества (1) имеют вид:

$$\delta^1 S\left(u^{\circ},v^{\circ};\,\delta u,\delta v\right)=-\left[\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}H_u'\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)\delta u(t,x)dx\,dt+\right.$$
$$\left.+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}M_v'\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\delta v(t,x)dx\,dt\right],\qquad(34)$$

$$\delta^2 S\left(u^{\circ},v^{\circ};\,\delta u,\delta v\right)=\delta z'(t_1,X)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^{\circ}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\delta z(t_1,X)-\delta z'(t_1,X)\frac{\partial^2 Q\left(\psi_2^{\circ},z^{\circ}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\delta z(t_1,X)-$$

$$-\int_{x_0}^{X}\delta z(t_1,x)\frac{\partial^2 N\left(x,\frac{\partial\psi_2^{\circ}}{\partial x},z^{\circ}(t_1,x)\right)}{\partial z^2}\delta z^{\circ}(t_1,x)dx-\delta y'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\delta y(t_2,X)-\qquad(35)$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\Big[\delta z'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)\delta z(t,x)+2\delta u'(t,x)\times$$

$$\times H_{uz}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)\delta z(t,x)+\delta u'(t,x)H_{uu}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)\delta u(t,x)\Big]dx\,dt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\Big[\delta y'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\delta y(t,x)+2\delta v'(t,x)M_{vy}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\times$$

$$\times\delta y(t,x)+\delta v'(t,x)M_{vv}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\delta v(t,x)\Big]dx\,dt.$$

3. Необходимые условия оптимальности

Из результатов классического вариационного исчисления (см. напр.: [11–14]) следует, что вдоль оптимального управления $\left(u^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x)\right)$ первая вариация функционала качества равна нулю, а вторая неотрицательна, т.е. для всех $\left(\delta u(t,x),\delta v(t,x)\right)$

$$\delta^1 S\left(u^{\circ},v^{\circ};\,\delta u,\delta v\right)=0\,,\qquad(36)$$

$$\delta^2 S\left(u^{\circ},v^{\circ};\,\delta u,\delta v\right)\ge 0\,.\qquad(37)$$

При помощи (36) по схеме, например, из [13, 22] доказывается справедливость утверждения

Теорема 2. Для оптимальности допустимого управления $\left(u^{o}(t,x),v^{o}(t,x)\right)$ необходимо, чтобы соотношения

$$H_u\left(\theta,\xi x^{o}(\theta\xi),u^{o}(\theta\xi),\psi_1^{o}(\theta,\xi)\right)=0\,, \tag{38}$$

$$M_v\left(\theta,\xi,y^{o}(\theta,\xi),v^{o}(\theta,\xi),\psi_2^{o}(\theta,\xi)\right)=0 \tag{39}$$

выполнялись для всех $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,X)$ и $(\theta,\xi)\in[t_1,t_2)\times[x_0,X)$ соответственно.

Здесь и в дальнейшем $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,X)$ $\left((\theta,\xi)\in[t_1,t_2)\times[x_0,X)\right)$ – произвольная правильная точка (точка Лебега) [2, 3] управления $u(t,x)$ $\left(v(t,x)\right)$.

Соотношения (38), (39) представляют собой аналог уравнения Эйлера [11–14] для рассматриваемой задачи и являются необходимым условием оптимальности первого порядка.

Каждое допустимое управление $\left(u^{o}(t,x),v^{o}(t,x)\right)$, удовлетворяющее уравнению Эйлера, назовем классической экстремалью для рассматриваемой задачи.

Неравенство (37) есть необходимое условие для оптимальности классических экстремалей, заданное в неявном виде. С его помощью получим необходимые условия оптимальности, явно выраженные через параметры задачи (1)–(6).

Через $R_i(t,x;\tau,s)$, $i=1,2$ – обозначим решения матричных интегральных уравнений

$$R_1(t,x;\tau,s)=E_1+\int_\tau^t\int_s^x R_1(t,x;\alpha,\beta)\,f_z\left(\alpha,\beta,z^{o}(\alpha,\beta),u^{o}(\alpha,\beta)\right)d\alpha\,d\beta\,,\quad (t,x)\in D_1\,,$$

$$R_2(t,x;\tau,s)=E_2+\int_\tau^t\int_s^x R_2(t,x;\alpha,\beta)\,g_y\left(\alpha,\beta,y^{o}(\alpha,\beta),v^{o}(\alpha,\beta)\right)d\alpha\,d\beta\,,\quad (t,x)\in D_2\,.$$

Уравнения в вариациях (29), (31) являются линейными неоднородными дифференциальными уравнениями гиперболического типа с краевыми условиями Гурса (30), (32) соответственно. Решения краевых задач (29)–(30) и (31)–(32) допускают в соответствии с представлением [23]

$$\delta z(t,x)=\int_{t_0}^t\int_{x_0}^x R_1(t,x;\tau,s)\,f_u\left(\tau,s,z^{o}(\tau,s),u^{o}(\tau,s)\right)\delta u(\tau,s)\,ds\,d\tau\,, \tag{40}$$

$$\delta y(t,x)=\int_{t_1}^t\int_{x_0}^x R_2(t,x;\tau,s)\,g_v\left(\tau,s,y^{o}(\tau,s),v^{o}(\tau,s)\right)\delta v(\tau,s)\,ds\,d\tau+\int_{x_0}^x R_2(t,x;t_1,s)\frac{\partial\delta y(t_1,s)}{\partial s}ds\,. \tag{41}$$

Из (41) получим

$$\delta y(t,x)=R_2(t,x;t_1,x)\delta y(t_1,x)-\int_{x_0}^x\frac{\partial R_2(t,x;t_1,s)}{\partial s}\delta y(t_1,s)\,ds+$$
$$+\int_{t_1}^t\int_{x_0}^x R_2(t,x;\tau,s)\,g_v\left(\tau,s,y^{o}(\tau,s),v^{o}(\tau,s)\right)\delta v(\tau,s)\,ds\,d\tau.$$

Поскольку

$$\delta y(t_1,s)=G_z\left(z^{o}(t_1,s)\right)\delta z(t_1,s),$$

то из (41) получаем, что

$$\delta y(t,x)=R_2(t,x;t_1,x)G_z\left(z^{o}(t_1,x)\right)\delta z(t_1,x)-\int_{x_0}^x\frac{\partial R_2(t,x;t_1,s)}{\partial s}G_z\left(z^{o}(t_1,s)\right)\delta z(t_1,s)\,ds+$$
$$+\int_{t_1}^t\int_{x_0}^x R_2(t,x;\tau,s)\,g_v\left(\tau,s,y^{o}(\tau,s),v^{o}(\tau,s)\right)\delta v(\tau,s)\,ds\,d\tau. \tag{42}$$

Введя обозначения

$$f_u(t,x) \equiv f_u\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x)\right), \quad g_v(t,x) \equiv g_v\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x)\right)$$

и принимая во внимания представление (40), формулу (42) представим в виде:

$$\delta y(t,x) = \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} R_2(t,x;t_1,x) G_z\left(z^{o}(t_1,x)\right) R_1(t_1,x;\tau,s) f_u(\tau,s)\delta u(\tau,s)\,ds\,d\tau -$$

$$-\int_{x_0}^{x}\left[\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{s} \frac{\partial R_2(t,x;t_1,s)}{\partial s} G_z\left(z^{o}(t_1,s)\right) R_1(t_1,x;\tau,\beta) f_u(\tau,\beta)\delta u(\alpha,\beta)\,d\tau\,d\beta\right] ds +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} R_2(t,x;\tau,s) g_v(\tau,s)\delta v(\tau,s)\,ds\,d\tau.$$

Используя формулу Дирихле, получим

$$\delta y(t,x) = \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} R_2(t,x;t_1,x) G_z\left(z^{o}(t_1,x)\right) R_1(t_1,x;\tau,s) f_u(\tau,s)\delta u(\tau,s)\,ds\,d\tau - \tag{43}$$

$$-\int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{s}^{x} \frac{\partial R_2(t,x;t_1,\beta)}{\partial s} G_z\left(z^{o}(t_1,\beta)\right) R_1(t_1,x;\tau,s)\,d\beta\right] f_u(\tau,s)\delta u(\tau,s)\,d\tau\,ds +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} R_2(t,x;\tau,s) g_v(\tau,s)\delta v(\tau,s)\,ds\,d\tau.$$

Полагая

$$Q(t,x;\tau,s) = R_2(t,x;t_1,x) G_z\left(z^{o}(t_1,x)\right) R_1(t_1,x;\tau,s) - \int_{s}^{x} \frac{\partial R_2(t,x;t_1,\beta)}{\partial s} G_z\left(z^{o}(t_1,\beta)\right) R_1(t_1,x;\tau,s)\,d\beta,$$

формула (43) записывается в виде:

$$\delta y(t,x) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x} Q(t,x;\tau,s) f_u(\tau,s)\delta u(\tau,s)\,ds\,d\tau + \int_{t_1}^{t}\int_{x_0}^{x} R_2(t,x;\tau,s) g_v(\tau,s)\delta v(\tau,s)\,ds\,d\tau. \tag{44}$$

Представления (40), (44) позволяют вывести необходимые условия оптимальности второго порядка, явно выраженные через параметры задачи (1)–(6).

Используя произвольность $\delta u(t,x)$ и $\delta v(t,x)$, предположим, что $\delta v(t,x)=0$. Тогда неравенство (37) с учетом (35) примет вид:

$$\delta z'(t_1,X)\frac{\partial^2 \varphi_1\left(z^{o}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\delta z(t_1,X) - \delta z'(t_1,X)\frac{\partial^2 Q\left(\psi_2^{o}, z(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\delta z(t_1,X) -$$

$$-\int_{x_0}^{X}\delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2 N\left(x,\dfrac{\partial \psi_2^{o}}{\partial x}, z^{o}(t_1,x)\right)}{\partial z^2}\delta z(t_1,x)\,dx + \delta y'(t_2,X)\frac{\partial^2 \varphi_2\left(y^{o}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\delta y(t_2,X) -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\Big[\delta z'(t,x) H_{zz}\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\delta z(t,x) + 2\delta u'(t,x)\times \tag{45}$$

$$\times H_{uz}\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\delta z(t,x) + \delta u'(t,x) H_{uu}\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\delta u(t,x)\Big]dx\,dt -$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\delta y'(t,x) M_{yy}\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)\delta y(t,x)\,dx\,dt \ge 0,$$

При этом представление (44) примет вид:

$$\delta y(t,x) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x} Q(t,x;\tau,s) f_u(\tau,s)\delta u(\tau,s)\,ds\,d\tau. \tag{46}$$

Используя представления (40), (45), доказывается справедливость тождеств

$$\delta z'(t_1,X)\left[\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^{\circ}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 Q\left(\psi_2^{\circ},z^{\circ}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\right]\delta z(t_1,X)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\delta u'(\tau,s)\,f_u'(\tau,s)R_1'(t,x;\tau,s)\times$$
$$\times\left[\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^{\circ}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 Q\left(\psi_2^{\circ},z^{\circ}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\right]R_1(t_1,X;\alpha,\beta)\,f_u(\alpha,\beta)\delta u(\alpha,\beta)\,ds\,d\tau\,d\alpha\,d\beta, \quad (47)$$

$$\int_{x_0}^{X}\delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2 N\left(x,\dfrac{\partial\psi_2^{\circ}}{\partial x},z^{\circ}(t_1,x)\right)}{\partial z^2}\delta z(t_1,x)\,dx=\int_{x_0}^{X}\left[\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x}\delta u'(\tau,s)\,f_u'(\tau,s)R_1'(t_1,x;\tau,s)\times\right. \quad (48)$$
$$\left.\times\frac{\partial^2 N\left(x,\dfrac{\partial\psi_2^{\circ}}{\partial x},z^{\circ}(t_1,x)\right)}{\partial z^2}R_1(t_1,x;\alpha,\beta)\,f_u(\alpha,\beta)\delta u(\alpha,\beta)\,d\tau\,ds\,d\alpha\,d\beta\right]dx=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\int_{x_0}^{X}\delta u'(\tau,s)\,f_u'(\tau,s)\left[\int_{\max(s,\beta)}^{X}R_1'(t_1,x;\tau,s)\frac{\partial^2 N\left(x,\dfrac{\partial\psi_2^{\circ}}{\partial x},z(t_1,x)\right)}{\partial z^2}R_1(t_1,x;\alpha,\beta)\,dx\right]\times$$
$$\times f_u(\alpha,\beta)\delta u(\alpha,\beta)\,d\tau\,ds\,d\alpha\,d\beta,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\delta z'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)\delta z(t,x)\,dx\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\delta u'(\tau,s)\,f_u'(\tau,s)\times$$
$$\times\left[\int_{\max(\tau,\alpha)}^{t_1}\int_{\max(s,\beta)}^{X}R_1'(t_1,x;\tau,s)H_{zz}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)R_1(t_1,x;\alpha,\beta)\,dx\,dt\right]\times \quad (49)$$
$$\times f_u(\alpha,\beta)\delta u(\alpha,\beta)\,d\tau\,ds\,d\alpha\,d\beta,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\delta u'(t,x)H_{uz}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)\delta z(t,x)\,dx\,dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\left[\int_{t}^{t_1}\int_{x}^{X}\delta u'(\tau,s)H_{uz}\left(\tau,s,z^{\circ}(\tau,s),u^{\circ}(\tau,s),\psi_1^{\circ}(\tau,s)\right)R_1(\tau,s;t,x)\,d\tau\,ds\right]f_u'(t,x)\delta u(t,x)\,dx\,dt,$$

$$\delta y'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\delta y(t_2,X)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\delta u'(\tau,s)\,f_u'(\tau,s)Q'(t_2,X;\tau,s)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\times \quad (50)$$
$$\times Q(t_2,X;\alpha,\beta)\,f_u(\alpha,\beta)\delta u(\alpha,\beta)\,ds\,d\tau\,d\alpha\,d\beta,$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\delta y'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\delta y(t,x)\,dx\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\int_{x_0}^{X}\delta u'(\tau,s)\,f_u'(\tau,s)\times$$
$$\times\left[\int_{t_1}^{t_2}\int_{\max(s,\beta)}^{X}Q'(t,x;\tau,s)M_{yy}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)Q(t,x;\alpha,\beta)\,dx\,dt\right]f_u(\alpha,\beta)\delta u(\alpha,\beta)\,ds\,d\tau\,d\alpha\,d\beta.$$

Введя обозначение

$$K(\tau,s;\,\alpha,\beta)=-\left[\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^{\circ}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 Q\left(\psi_2^{\circ},z^{\circ}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\right]+$$

$$+\int\limits_{\max(s,\beta)}^{X} R_1'(t_1,x;\tau,s)\frac{\partial^2 N\left(x,\dfrac{\partial\psi_2^{\circ}}{\partial x},z(t_1,x)\right)}{\partial z^2}R_1(t_1,x;\alpha,\beta)\,dx-$$

$$-Q'(t_2,X;\tau,s)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}Q(t_2,X;\alpha,\beta)+$$

$$+\int\limits_{\max(\tau,\alpha)}^{t_1}\int\limits_{\max(s,\beta)}^{X} R_1'(t,x;\tau,s)H_{zz}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)R_1(t,x;\alpha,\beta)\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\max(s,\beta)}^{X} Q'(t,x;\tau,s)M_{yy}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)Q(t,x;\alpha,\beta)\,dx\,dt,$$

и учитывая тождества (47)–(50), из неравенства (45) получим

$$\int\limits_{D_1}\int\limits_{D_1}\delta u'(\tau,s)\,f_u(\tau,s)K(\tau,s;\alpha,\beta)\,f_u(\alpha,\beta)\delta u(\alpha,\beta)\,ds\,d\tau\,d\alpha\,d\beta+ \tag{51}$$

$$+2\int\limits_{D_1}\left[\int\limits_{t}^{t_1}\int\limits_{x}^{X}\delta u'(\tau,s)H_{uz}\left(\tau,s,z^{\circ}(\tau,s),u^{\circ}(\tau,s),\psi_1^{\circ}(\tau,s)\right)R_1(\tau,s;t,x)\,d\tau\,ds\right]f_u(t,x)\delta u(t,x)\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{D_1}\delta u'(t,x)H_{uu}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)\delta u(t,x)\,dx\,dt\le 0.$$

Теперь предположим, что $\delta u(t,x)\equiv 0$, $\delta v(t,x)\ne 0$. При этом предположении неравенство (37) примет вид:

$$\delta y'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\delta y(t_2,X)-\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_0}^{X}\Big[\delta y'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\delta y(t,x)+$$

$$+2\delta v'(t,x)M_{vy}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\delta y(t,x)+ \tag{52}$$

$$+\delta v'(t,x)M_{vv}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\delta v(t,x)\Big]dx\,dt\ge 0.$$

Используя представление (44) (с учетом того, что $\delta u(t,x)=0$), получим

$$\delta y'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\delta y(t_2,X)=$$

$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_0}^{X}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_0}^{X}\delta v'(\tau,s)g_v'(\tau,s)R_2'(t_2,X;\tau,s)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}R_2(t_2,X;\alpha,\beta)g_v(\alpha,\beta)\delta v(\tau,s)\,ds\,d\tau\,d\alpha\,d\beta, \tag{53}$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_0}^{X}\delta v'(t,x)M_{vy}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\delta y(t,x)\,dx\,dt=$$

$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_0}^{X}\left[\int\limits_{t}^{t_2}\int\limits_{x_0}^{X}\delta v'(\tau,s)M_{vy}\left(\tau,s,y^{\circ}(\tau,s),v^{\circ}(\tau,s),\psi_2^{\circ}(\tau,s)\right)R_2(\tau,s;t,x)\,ds\,d\tau\right]g_v(t,x)\delta v(t,x)\,dx\,dt. \tag{54}$$

Далее имеет место тождество

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_0}^{X}\delta y'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\delta y(t,x)\,dx\,dt= \tag{55}$$

$$=\int\limits_{D_1}\int\limits_{D_2}\delta v'(\tau,s)g_v'(\tau,s)\left[\int\limits_{t=\max(\tau,x)}^{t_2}\int\limits_{x=\max(s,\beta)}^{X}R_2'(t,x;\tau,s)M_{yy}\left(\tau,s,y^{\circ}(\tau,s),v^{\circ}(\tau,s),\psi_2^{\circ}(\tau,s)\right)R_2(t,x;\alpha,\beta)\,dx\,dt\right]\times$$

$$\times g_v(\alpha,\beta)\delta v(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta.$$

Введя обозначение

$$N(\tau,s;\alpha,\beta)=\int\limits_{t=\max(\tau,\,x)}^{t_2}\int\limits_{x=\max(s,\beta)}^{X} R_2'(t,x;\tau,s)M_{yy}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)R_2(t,x;\alpha,\beta)\,dx\,dt-$$

$$-R_2(t_2,x;\tau,s)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}R_2(t_2,x;\alpha,\beta)$$

и учитывая тождества (53)–(55), из неравенства (52) получим

$$\int\limits_{D_1}\int\limits_{D_1}\delta v'(\tau,s)g_v'(\tau,s)N(\tau,s;\alpha,\beta)g_v(\alpha,\beta)\delta v(\alpha,\beta)\,d\tau\,ds\,d\alpha\,d\beta+ \tag{56}$$

$$+2\int\limits_{D_2}\left[\int\limits_{t}^{t_2}\int\limits_{x}^{X}\delta v'(\tau,s)M_{vy}\left(\tau,s,y^{\circ}(\tau,s),v^{\circ}(\tau,s),\psi_2^{\circ}(\tau,s)\right)R_2(\tau,s;t,x)\,d\tau\,ds\right]g_v(t,x)\delta v(t,x)\,dt\,dx+$$

$$+\int\limits_{D_2}\delta v'(t,x)M_{vv}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\delta v(t,x)\,dx\,dt\le 0.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Для оптимальности классической экстремали $\left(u^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x)\right)$ в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы неравенства (51), (56) выполнялись для всех $\delta u(t,x)\in R^r$, $(t,x)\in D_1$ и $\delta v(t,x)\in R^q$, $(t,x)\in D_2$ соответственно.

Неравенства (51) и (56) являются довольно общими необходимыми условиями оптимальности второго порядка. Из них можно получить ряд более легко проверяемых необходимых условий оптимальности, и в частности аналог условия Лежандра–Клебша.

Теорема 4. (Аналог условия Лежандра–Клебша) Для оптимальности классической экстремали $\left(u^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x)\right)$ необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$u'H_{uu}\left(\theta,\xi x^{\circ}(\theta\xi),u^{\circ}(\theta\xi),\psi_1^{\circ}(\theta,\xi)\right)u\le 0, \tag{57}$$

для всех $u\in R^r$, $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,X)$,

$$v'M_{vv}\left(\theta,\xi,y^{\circ}(\theta,\xi),v^{\circ}(\theta,\xi),\psi_2^{\circ}(\theta,\xi)\right)v\le 0, \tag{58}$$

для всех $v\in R^q$, $(\theta,\xi)\in[t_1,t_2)\times[x_0,X)$.

Неравенства (57), (58) являются аналогом условия Лежандра–Клебша.

Рассмотрим случай вырождения аналога условия Лежандра–Клебша.

Определение. Классическую экстремаль назовем особым, в классическом смысле, управлением, если для всех $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,X)$ и $u\in R^r$

$$u'H_{uu}\left(\theta,\xi x^{\circ}(\theta\xi),u^{\circ}(\theta\xi),\psi_1^{\circ}(\theta,\xi)\right)u=0, \tag{59}$$

а для всех $(\theta,\xi)\in[t_1,t_2)\times[x_0,X)$ и $v\in R^q$

$$v'M_{vv}\left(\theta,\xi,y^{\circ}(\theta,\xi),v^{\circ}(\theta,\xi),\psi_2^{\circ}(\theta,\xi)\right)v=0. \tag{60}$$

Имеет место

Теорема 5. Для оптимальности особого в классическом смысле, управления $\left(u^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x)\right)$ необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$u'\left[f_u'(\theta,\xi)K(\theta,\xi;\,\theta,\xi)f_u(\theta,\xi)+0,5H_{uz}\left(\theta,\xi,z^{\circ}(\theta,\xi),u^{\circ}(\theta,\xi),\psi_1^{\circ}(\theta,\xi)\right)f_u(\theta,\xi)\right]u\le 0, \tag{61}$$

для всех $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,X)$, $u\in R^r$,

$$v'\left[g_v(\theta,\xi)N(\theta,\xi;\theta,\xi)g_v(\theta,\xi)+0,5M_{vy}\left(\theta,\xi,y^{\circ}(\theta,\xi),v^{\circ}(\theta,\xi),\psi_2^{\circ}(\theta,\xi)\right)g_v(\theta,\xi)\right]v\le 0, \tag{62}$$

для всех $(\theta,\xi)\in[t_1,t_2)\times[x_0,X)$ и $v\in R^q$.

Докажем, например, соотношение (61). Неравенство (62) доказывается симметричными рассуждениями. Считая $\left(u^{\circ}(t,x), v^{\circ}(t,x)\right)$ классически особым оптимальным управлением, вариацию $\delta u(t,x)$ управляющей функции $u^{\circ}(t,x)$ определим по формуле

$$\delta u_{\mu}(t,x)=\begin{cases} u, & (t,x)\in\left[\theta,\theta+\sqrt{\mu}\right)\times\left[\xi,\xi+\sqrt{\mu}\right), \\ 0, & (t,x)\in D_1\setminus\left[\theta,\theta+\sqrt{\mu}\right)\times\left[\xi,\xi+\sqrt{\mu}\right), \end{cases} \tag{63}$$

где $\mu>0$ достаточно малое произвольное число, такое что $\theta+\sqrt{\mu}<t_1$, $\xi+\sqrt{\mu}<X$, а $u\in R^r$ произвольный вектор.

Принимая во внимание (63) в неравенстве (51) и учитывая (59), после некоторых преобразований получим

$$\mu^2\left\{u'\left[f_u'(\theta,\xi)K(\theta,\xi;\theta,\xi)f_u(\theta,\xi)+0{,}5H_{uz}\left(\theta,\xi,z^{\circ}(\theta,\xi),u^{\circ}(\theta,\xi),\psi_1^{\circ}(\theta,\xi)\right)f_u(\theta,\xi)\right]u\right\}+o\left(\mu^2\right)\le 0.$$

Отсюда в силу произвольности $\mu>0$ следует неравенство (61). Этим теорема 5 доказана.

Заключение

В статье рассматривается одна задача оптимального управления, описываемая системой гиперболических уравнений с краевыми условиями Гурса. При предположении открытости областей управления установлены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков. Отдельно изучен случай вырождения аналога условия Лежандра–Клебша. Выведено необходимое условие оптимальности (в классическом смысле особых управлений).

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А.И. Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1964. № 5. С. 613–623.
2. Плотников В.И., Сумин В.И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемые системой Гурса–Дарбу // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. № 1. С. 61–77.
3. Новоженов М.М., Сумин В.И., Сумин М.И. Методы оптимального управления системами математической физики. Горький : Изд-во Горьковского гос. ун-та, 1986. 87 с.
4. Ахмедов К.Т., Ахиев С.С. Необходимые условия оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления // Доклады АН Азербайджанской ССР. 1972. № 5. С. 12–16.
5. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения. Новосибирск : Наука, 1990. Ч. 2: Оптимальное управление. 151 с.
6. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Н. Новгород : Изд-во Нижегородского гос. ун-та, 1992. Ч. 1. 110 с.
7. Срочко В.А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. Иркутск : Изд-во Иркутского гос. ун-та, 1989. 160 с.
8. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Принцип максимума для терминальной задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу в классе функций с суммируемой смешанной производной // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. № 2. С. 52–67.
9. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса–Дарбу. Баку : Изд-во ЭЛМ, 2010. 360 с.
10. Меликов Т.К. Особые в классическом смысле управления в системах Гурса–Дарбу. Баку : Изд-во ЭЛМ, 2003. 96 с.
11. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевич В.В. и др. Методы оптимизации. Минск : Четыре четверти, 2011. 472 с.
12. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М. : Физматлит, 2005. 335 с.
13. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. : Наука, 2013. 256 с.
14. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М. : Высшая школа, 2005. 335 с.
15. Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра. Баку : Изд-во ЭЛМ, 2013. 224 с.
16. Мансимов К.Б. Об одной схеме исследования особого случая в системах Гурса–Дарбу // Известия АН Азербайджана. 1981. № 2. С. 100–104.

17. Мансимов К.Б. Об оптимальности квазиособых управлений в системах Гурса–Дарбу // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, № 11. С. 1952–1960.
18. Мансимов К.Б. Интегральные необходимые условия оптимальности квазиособых управлений в системах Гурса–Дарбу // Автоматика и телемеханика. 1993. № 5. С. 36–43
19. Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности особых процессов в задачах оптимального управления : автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. Баку, 1994. 42 с.
20. Мансимов К.Б. К теории необходимых условий оптимальности в одной задаче с распределенными параметрами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. № 10. С. 1505–1520.
21. Мансимов К.Б. Условия оптимальности второго порядка в системах Гурса–Дарбу при наличии ограничений // Дифференциальные уравнения. 1990. № 6. С. 954–965.
22. Мордухович Б.Ш. Методы апроксимаций в задачах оптимизации и управления. М. : Наука, 1988. 359 с.
23. Ахиев С.С., Ахмедов К.Т. Об интегральном представлении решений некоторых дифференциальных уравнений // Известия АН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и матем. наук. 1973. № 2. С. 116–120.

Поступила в редакцию 8 апреля 2018 г.

Mansimov K.B., Suleymanova Sh.Sh. (2018) TO THE OPTIMALITY OF SINGULAR CONTROLS IN THE CLASSICAL SENSE IN ONE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL OF SYSTEMS WITH VARIABLE STRUCTURE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 44. pp. 10–24

DOI: 10.17223/19988605/44/2

The paper deals with the problem of the minimization the functional

$$S(u,v)=\varphi_1\left(z(t_1,X)\right)+\varphi_2\left(y(t_2,X)\right),$$

under constraints

$$u(t,x)\in U\subset R^r,\quad (t,x)\in D_1=[t_0,t_1]\times[x_0,X],$$
$$v(t,x)\in V\subset R^q,\quad (t,x)\in D_2=[t_1,t_2]\times[x_0,X],$$
$$z_{tx}=f(t,x,z,u),\quad (t,x)\in D_1,$$
$$z(t_0,x)=a(x),\quad x\in[x_0,X],$$
$$z(t,x_0)=b_1(t),\ t\in[t_0,t_1],$$
$$y_{tx}=g(t,x,y,v),\quad (t,x)\in D_2,$$
$$y(t_1,x)=G\left(z(t_1,x)\right),\quad x\in[x_0,X],$$
$$y(t,x_0)=b_2(t),\ t\in[t_1,t_2],$$
$$G\left(z(t_1,x_0)\right)=b_2(t_1).$$

Here $f(t,x,z,u)$, $\left(g(t,x,y,v)\right)$ is a given n (m)-dimensional vector-function continuous in $D_1\times R^n\times R^r$ $\left(D_2\times R^m\times R^q\right)$ together with their partial derivatives with respect to (z,u) $\left((y,v)\right)$ up to the second order inclusive, $G(z)$ is a given twice continuously differentiable in R^n m-dimensional vector-function, $a(x)$, $b_i(t)$, $i=1,2$, are given vector-functions of the corresponding dimensions satisfying a Lipschitz condition with some constants, t_0, t_1, t_2, x_0, X are given, so that $t_0<t_1<t_2$, $x_0<X$, control vector-function $u(t,x)$ $\left(v(t,x)\right)$ everywhere is Lebesgue measurable on a rectangle D_1 (D_2), U (V) is a given non-empty, open, and bounded set.

When the control domain is open, the first and second orders necessary optimality conditions are derived. Optimal singular controls in the classical sense are studied.

Keywords: Goursat–Darboux system; singular control the classical sense; necessary optimality conditions; variation of the functional; equations in variations.

MANSIMOV Kamil Bayramali ogly (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Baku State University, Institute of Control Problems of Azerbaijan National Academy of Sciences , Baku, Azerbaijan).
E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

SULEYMANOVA Shabnam Shakir gyzy (Institute of Control problems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan).
E-mail: kmansimov@mail.ru

REFERENCES

1. Egorov, A.I. (1964) Ob optimal'nom upravlenii protsessami v nekotorykh sistemakh s raspredelennymi parametrami [On the optimal control of processes in some systems with distributed parameters]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control.* 5. pp. 613–623.
2. Plotnikov, V.I. & Sumin, V.I. (1972) The optimization of objects with distributed parameters, described by Goursat–Darboux systems. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheckoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1. pp. 61–77. (In Russian).
3. Novozhenov, M.M., Sumin, V.I. & Sumin, M.I. (1986) *Metody optimal'nogo upravleniya sistemami matematicheskoy fiziki* [Methods of optimal control of systems of mathematical physics]. Gorkiy: Gorky State University.
4. Akhmedov, K.T. & Akhiyev, S.S. (1972) Neobkhodimyye usloviya optimal'nosti dlya nekotorykh zadach teorii optimal'nogo upravleniya [Necessary pptimality conditions for some problems in optimal control theory]. *Doklady AN Azerbaydzhanskoy SSR*. 5. pp. 12–16.
5. Vasilyev, O.V., Srochko, V.A. & Terletskiy, V.A. (1990) *Metody optimizatsii i ikh prilozheniya* [Optimization methods and their applications]. Vol. 2. Novosibirsk: Nauka.
6. Sumin, V.I. (1992) *Funktsional'nyye vol'terrovy uravneniya v teorii optimal'nogo upravleniya raspredelennymi sistemami* [Functional Volterra equations in the theory of optimal control of distributed systems]. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University.
7. Srochko, V.A. (1989) *Variatsionnyy printsip maksimuma i metody linearizatsii v zadachakh optimal'nogo upravleniya* [Variational Maximum Principle and Linearization Methods in Optimal Control Problems]. Irkutsk: Irkutsk State University.
8. Lisachenko, I.V. & Sumin, V.I. (2011) The maximum principle for terminal optimization problem connected with Goursat–Darboux system in the class of functions having summable mixed derivatives. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science.* 2. pp. 52–67. (In Russian).
9. Mansimov, K.B. & Mardanov, M.J. (2010) *Kachestvennaya teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami Gursa–Darbu* [Qualitative theory of optimal control of Goursat-Darboux systems]. Baku: ELM.
10. Melikov, T.K. (2003) *Osobyye v klassicheskom smysle upravleniya v sistemakh Gursa–Darbu* [Special in the classical sense of control in Goursat-Darboux systems]. Baku: ELM.
11. Gabasov, R., Kirillova, F.M., Alsevich, V.V. & etc. (2011) *Metody optimizatsi* [Methods of optimization]. Minsk: Chetyre chetverti.
12. Alekseyev, V.M., Fomin, S.V. & Tikhomirov, V.M. (1979) *Optimal'noye upravleniye* [Optimal control]. Moscow: Nauka.
13. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (1973) *Osobyye optimal'nyye upravleniya* [Special optimal controls]. Moscow: Nauka.
14. Demyanov, V.F. (2005) *Usloviya ekstremuma i variatsionnoye ischisleniye* [Extremum conditions and calculus of variations]. Moscow: Vysshaya Shkola.
15. Abdullayev, A.A. & Mansimov, K.B. (2013) *Neobkhodimyye usloviya optimal'nosti v protsessakh, opisyvayemykh sistemoy integral'nykh uravneniy tipa Vol'terra* [Necessary optimality conditions in processes described by a system of integral equations of Volterra type]. Baku: ELM.
16. Mansimov, K.B. (1981) Ob odnoy skheme issledovaniya osobogo sluchaya v sistemakh Gursa–Darbu [On a scheme for investigating a special case in Goursat-Darboux systems]. *Izvestiya AN Azerbaidjana*. 2. pp. 100–104.
17. Mansimov, K.B. (1986) Optimality of quasisingular controls in Goursat–Darboux systems. *Differentsial'nyye uravneniya – Differential Equations*. 22(11). pp. 1952–1960. (In Russian).
18. Mansimov, K.B. (1993) Integral necessary conditions for optimality of quasi-singular controls in Goursat-Darboux systems. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 5. pp. 36–43. (In Russian).
19. Mansimov, K.B. (1994) *Neobkhodimyye usloviya optimal'nosti osobykh protsessov v zadachakh optimal'nogo upravleniya* [Necessary conditions for optimality of special processes in optimal control problems]. Abstract of Physics and Mathematics Dr. Diss. Baku.
20. Mansimov, K.B. (2001) On the theory of necessary optimality conditions in a problem with distributed parameters. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheckoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 10. pp. 1505–1520. (In Russian).
21. Mansimov, K.B. (1990) Conditions for second-order optimality in Goursat–Darboux systems in the presence of constraints. *Differentsial'nyye uravneniya – Differential Equations*. 6. pp. 954–965. (In Russian).
22. Mordukhovich, B.Sh. (1988) *Metody aproksimatsiy v zadachakh optimizatsii i upravleniya* [Approximation methods in optimization and control problems]. Moscow: Nauka.
23. Akhiyev, S.S. & Akhmedov, K.T. (1973) Ob integral'nom predstavlenii resheniy nekotorykh differentsial'nykh uravneniy [On the integral representation of solutions of certain differential equations]. *Izvestiya AN Azerbaidjana. Seriya Fiziko-Tekhnicheskikh i Matemematicheskikh Nauk*. 2. pp. 116–120.