ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Управление, вычислительная техника и информатика № 44

УДК 517.935.2+517.977.1
DOI: 10.17223/19988605/44/3

Е.А. Перепелкин

УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРОМ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО УСКОРЕНИЮ

Решается задача управления спектром системы второго порядка с обратной связью по вектору ускорения. Установлены ограничения, накладываемые на спектр замкнутой системы. Описан алгоритм расчета матрицы обратной связи, который сводится к последовательному решению квадратного уравнения и системы линейных алгебраических уравнений. Приводится пример решения задачи управления спектром механической системы.
Ключевые слова: система второго порядка; управление спектром; обратная связь по ускорению.

Задача управления спектром линейной стационарной динамической системы в случае статической обратной связи по выходу относится к трудно решаемым задачам математической теории управления [1]. Эту задачу можно рассматривать как обратную проблему собственных значений [2]. Подобного рода задачи встречаются не только в теории автоматического управления, но и в механике, физике, обработке сигналов, вычислительной математике.

Обратная проблема собственных значений, как правило, сводится к решению систем нелинейных алгебраических уравнений. В отличие от систем линейных алгебраических уравнений системы нелинейных алгебраических уравнений могут не иметь действительных решений или иметь конечное число таких решений. Поиск всех действительных решений системы нелинейных алгебраических уравнений в общем случае является достаточно сложной вычислительной задачей.

В данной работе решается задача управления спектром системы второго порядка с двумя переменными входа и двумя переменными выхода. Предполагается, что измерению доступны вторые производные переменных выхода. Управление строится в виде статической обратной связи по вектору измерений. Такого вида обратную связь принято называть обратной связью по ускорению.

В работе рассматриваются условия существования решения задачи управления спектром и ограничения, накладываемые на спектр замкнутой системы. Описывается алгоритм расчета матрицы обратной связи, который сводится к последовательному решению квадратного уравнения и системы линейных алгебраических уравнений.

Аналогичный метод синтеза обратной связи по выходу для системы, заданной передаточной функцией, описан в работе [3]. Необходимо также отметить работы [4–6], в которых представлено решение задачи управления спектром для систем второго порядка с обратной связью по скорости и ускорению. В этом случае синтез обратной связи может быть осуществлен на основе решения линейных матричных уравнений или линейных матричных неравенств. Для систем со статической обратной связью по ускорению этот подход неприменим.

Данная статья дополняет работу [7], в которой получено решение задачи управление спектром системы второго порядка в случае статической обратной связи по выходу.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную динамическую систему, поведение которой описывается уравнением

$$A_0\ddot{y} + A_1\dot{y} + A_2 y = Bu,$$

где u, y – 2-векторы входа и выхода, A_0, A_1, A_2, B – (2 × 2)-матрицы с вещественными элементами. Управление будем искать в виде обратной связи по вектору вторых производных

$$u = -F\ddot{y},$$

где F – (2×2)-матрица обратной связи с вещественными элементами. Замкнутая обратной связью система описывается уравнением

$$(A_0 + BF)\ddot{y} + A_1\dot{y} + A_2 y = 0 .$$

Под спектром разомкнутой системы будем понимать корни характеристического многочлена разомкнутой системы

$$a(s) = \det(A(s)), \qquad A(s) = A_0 s^2 + A_1 s + A_2 .$$

Под спектром замкнутой системы будем понимать корни характеристического многочлена замкнутой системы

$$b(s) = \det\left(A(s) + BFs^2\right).$$

Будем считать, что $\det A_0 \neq 0$, и будем рассматривать только те матрицы обратной связи, при которых $\det(A_0 + BF) \neq 0$. В этом случае спектры разомкнутой и замкнутой систем состоят из четырех чисел, $\deg a(s) = \deg b(s) = 4$.

Задача управления спектром заключается в выборе матрицы обратной связи F, при которой корни многочлена $b(s)$ совпадают с заданным набором комплексных чисел $S = \{s_1; s_2; s_3; s_4\}$. Коэффициенты многочлена $b(s)$ действительные, поэтому комплексные числа s_i должны входить в набор S комплексно сопряженными парами. Для обеспечения асимптотической устойчивости замкнутой системы необходимо также, чтобы числа s_i находились в левой части комплексной плоскости.

2. Алгоритм синтеза обратной связи

Запишем матрицы *A, B, F* поэлементно:

$$A(s) = \begin{bmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$b(s) = a(s) + c_1(s) f_{11} + c_2(s) f_{12} + c_3(s) f_{21} + c_4(s) f_{22} + c_5(s)(f_{11} f_{22} - f_{21} f_{12}),$$

где

$$a(s) = a_{11}(s)a_{22}(s) - a_{21}(s)a_{12}(s), \qquad c_1(s) = (a_{22}(s)b_{11} - a_{12}(s)b_{21})s^2,$$
$$c_2(s) = (a_{11}(s)b_{21} - a_{21}(s)b_{11})s^2, \qquad c_3(s) = (a_{22}(s)b_{12} - a_{12}(s)b_{22})s^2,$$
$$c_4(s) = (a_{11}(s)b_{22} - a_{21}(s)b_{12})s^2, \qquad c_5(s) = (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})s^4 .$$

Обозначим

$$a(s) = a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4, \qquad c_1(s) = c_{10}s^4 + c_{11}s^3 + c_{12}s^2,$$
$$c_2(s) = c_{20}s^4 + c_{21}s^3 + c_{22}s^2, \qquad c_3(s) = c_{30}s^4 + c_{31}s^3 + c_{32}s^2,$$
$$c_4(s) = c_{40}s^4 + c_{41}s^3 + c_{42}s^2, \qquad c_5(s) = c_{50}s^4 .$$

Следовательно, коэффициенты характеристического многочлена замкнутой системы

$$b(s) = b_0 s^4 + b_1 s^3 + b_2 s^2 + b_3 s + b_4$$

равны

$$b_0 = a_0 + c_{10} f_{11} + c_{20} f_{12} + c_{30} f_{21} + c_{40} f_{22} + c_{50}(f_{11} f_{22} - f_{21} f_{12}),$$
$$b_1 = a_1 + c_{11} f_{11} + c_{21} f_{12} + c_{31} f_{21} + c_{41} f_{22},$$
$$b_2 = a_2 + c_{12} f_{11} + c_{22} f_{12} + c_{32} f_{21} + c_{42} f_{22},$$
$$b_3 = a_3, \qquad b_4 = a_4 .$$

Составим многочлен

$$\bar{b}(s) = b_0(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4) = b_0(s^4 + \bar{b}_1 s^3 + \bar{b}_2 s^2 + \bar{b}_3 s + \bar{b}_4),$$

где s_1, s_2, s_3, s_4 – желаемый спектр замкнутой системы. Приравняем коэффициенты многочленов $b(s)$ и $\bar{b}(s)$. Получим систему уравнений

$$b_0\bar{b}_1 = b_1, \quad b_0\bar{b}_2 = b_2, \quad b_0\bar{b}_3 = a_3, \quad b_0\bar{b}_4 = a_4. \tag{1}$$

Система уравнений (1) является системой нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов обратной связи f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}.

Будем считать, что $a_4 = \det A_2 \neq 0$. Это означает, что спектр разомкнутой системы не содержит нулевых чисел. Из равенств (1) следует, что корни многочлена $\bar{b}(s)$ связаны соотношением

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_4} = -\frac{a_3}{a_4}. \tag{2}$$

Соотношение (2) накладывает ограничение на спектр замкнутой системы. Пусть соотношение (2) выполняется. Тогда в системе уравнений (1) можно оставить первые три уравнения. Запишем эту систему уравнений в матричном виде:

$$Cf = p + qg. \tag{3}$$

Здесь

$$C = \begin{bmatrix} c_{10}\bar{b}_1 - c_{11} & c_{20}\bar{b}_1 - c_{21} & c_{30}\bar{b}_1 - c_{31} & c_{40}\bar{b}_1 - c_{41} \\ c_{10}\bar{b}_2 - c_{12} & c_{20}\bar{b}_2 - c_{22} & c_{30}\bar{b}_2 - c_{32} & c_{40}\bar{b}_2 - c_{42} \\ c_{10}\bar{b}_3 & c_{20}\bar{b}_3 & c_{30}\bar{b}_3 & c_{40}\bar{b}_3 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{bmatrix},$$

$$p = \begin{bmatrix} a_1 - a_0\bar{b}_1 \\ a_2 - a_0\bar{b}_2 \\ a_3 - a_0\bar{b}_3 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} -c_{50}\bar{b}_1 \\ -c_{50}\bar{b}_2 \\ -c_{50}\bar{b}_3 \end{bmatrix}, \quad g = f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}.$$

Пусть строки матрицы C линейно независимы, $\operatorname{rank} C = 3$. Тогда при заданном значении g система уравнений (3) имеет бесконечно много решений. Частное решение, обладающее минимальной нормой, можно построить с помощью псевдообратной матрицы

$$f = C^+(p + qg), \quad C^+ = C^T\left(CC^T\right)^{-1}. \tag{4}$$

Введем матрицу

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Неизвестную переменную g можно записать в виде квадратичной формы:

$$g = f^T G f. \tag{5}$$

Подставим (4) в (5). Получим уравнение

$$r_0 g^2 + r_1 g + r_2 = 0, \tag{6}$$

где

$$r_0 = q^T\left(C^+\right)^T GC^+ q, \quad r_1 = p^T\left(C^+\right)^T GC^+ q + q^T\left(C^+\right)^T GC^+ p - 1,$$

$$r_2 = p^T\left(C^+\right)^T GC^+ p.$$

Пусть $r_1^2 - 4r_0r_2 \geq 0$. Тогда существует одно или два действительных решений g уравнения (6), для которых мы можем получить вещественные решения уравнения (3)

$$f = C^+(p + qg),$$

и, соответственно, матрицы обратной связи, при которых корни характеристического многочлена замкнутой системы совпадают с заданным набором комплексных чисел S.

3. Пример

Рассмотрим двухмассовую механическую систему с активным демпфированием, движение которой в окрестности положения равновесия подчиняется уравнениям

$$m_1\ddot{y}_1 = -k_1 y_1 - d_1\dot{y}_1 + k_2(y_2 - y_1) + d_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + u_1 - u_2,$$
$$m_2\ddot{y}_2 = -k_2(y_2 - y_1) - d_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + u_2,$$

где y_1, y_2 – отклонения масс от положения равновесия (м); u_1, u_2 – управляющие силы; m_1, m_2 – значения масс (кг); k_1, k_2 – коэффициенты жесткости (Н/м); d_1, d_2 – коэффициенты демпфирования (Нс/м).

Матрицы системы равны

$$A_0 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 \\ -d_2 & d_2 \end{bmatrix},$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Характеристический многочлен разомкнутой системы:

$$a(s) = m_1 m_2 s^4 + ((d_1 + d_2)m_2 + d_2 m_1)s^3 + ((k_1 + k_2)m_2 + k_2 m_1 + d_1 d_2)s^2 + \\ + (k_1 d_2 + k_2 d_1)s + k_1 k_2.$$

Характеристический многочлен замкнутой системы:

$$b(s) = (m_2 f_{11} + m_1 f_{22} - m_2 f_{21} + f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21} + m_1 m_2)s^4 + \\ + (d_2 f_{11} + d_2 f_{12} + d_1 f_{22} + (d_1 + d_2)m_2 + d_2 m_1)s^3 + \\ + \left(k_2(f_{11} + f_{12}) + k_1 f_{22} + (k_1 + k_2)m_2 + k_2 m_1 + d_1 d_2\right)s^2 + \\ + (k_1 d_2 + k_2 d_1)s + k_1 k_2.$$

Ограничение (2) принимает вид:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_4} = -\frac{k_1 d_2 + k_2 d_1}{k_1 k_2}. \tag{7}$$

Пусть $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $k_1 = 2$, $k_2 = 4$, $d_1 = 3$, $d_2 = 5$. Спектр разомкнутой системы равен

$$s_1 = -4{,}242; \quad s_2 = -0{,}94; \quad s_3 = -0{,}24 + 0{,}53i; \quad s_4 = -0{,}24 - 0{,}53i.$$

Зададим желаемый спектр замкнутой системы в виде

$$s_1 = -v + wi; \quad s_2 = -v - wi; \quad s_3 = s_1; \quad s_4 = s_2.$$

Из соотношения (7) следует

$$w^2 = \frac{4k_1 k_2}{k_1 d_2 + k_2 d_1} v - v^2.$$

Например, при $v = 1$ получим $w = 0{,}67$. Составим многочлен, корнями которого являются числа

$$s_1 = -1 + 0{,}67i; \quad s_2 = -1 - 0{,}67i; \quad s_3 = s_1; \quad s_4 = s_2.$$

Ранг матрицы C равен 3, уравнение (6) имеет вещественные решения $g_1 = -8{,}28$; $g_2 = -6{,}1$. Соответственно находим две матрицы обратной связи:

$$F = \begin{bmatrix} -0{,}348 & -3{,}09 \\ -2{,}74 & -0{,}563 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -0{,}59 & -2{,}85 \\ -2{,}26 & -0{,}563 \end{bmatrix},$$

при которых спектр замкнутой системы совпадает с заданными числами.

Заключение

В работе показано, что спектр системы второго порядка с обратной связью по ускорению нельзя назначить произвольно. При выборе допустимого спектра матрицу обратной связи можно найти, решая последовательно две алгебраические задачи – квадратное уравнение и систему линейных алгебраических уравнений. В результате при определенных условиях можно получить две матрицы обратной связи, которые обеспечивают заданный спектр замкнутой системы.

Результаты работы могут найти применение при решении задач управления колебаниями механических систем на основе сигналов датчиков ускорений, что подтверждается рассмотренным в статье примером решения задачи управления спектром двухмассовой механической системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика. 2005. № 5. С. 7–46.
2. Chu M., Golub G. Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Application. Oxford : Oxford University Press, 2005. 387 p.
3. Wang Q.-G., Lee T., Hang C. Pole assignment by output feedback: a solution for 2 × 2 plants // Automatica. 1993. V. 29, № 6. P. 1599–1601.
4. Abdelaziz T.H.S. Robust pole placement for second-order linear systems using velocity-plus-acceleration feedback // IET Control Theory & Applications. 2013. V. 7, № 14. P. 1843–1856.
5. Abdelaziz T.H.S. Robust pole assignment using velocity–acceleration feedback for second-order dynamical systems with singular mass matrix // ISA Transactions. 2015. V. 57. P. 71–84.
6. Zhang J., Ouyang H. , Zhang Y., Ye J. Partial quadratic eigenvalue assignment in vibrating systems using acceleration and velocity feedback // Inverse Problems in Science and Engineering. 2015. V. 23, № 3. P. 479–497.
7. Перепелкин Е.А. О задаче управления спектром системы второго порядка // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 11. С. 1555–1558.

Поступила в редакцию 9 марта 2018 г.

Perepelkin E.A. (2018) POLE ASSIGNMENT FOR SECOND-ORDER SYSTEM BY ACCELERATION FEEDBACK. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 44. pp. 25–30

DOI: 10.17223/19988605/44/3

Pole assignment problem for a linear stationary dynamical system with static output feedback belongs to the hard-to-solve problems of mathematical control theory. In general case this problem is reduced to solving systems of nonlinear algebraic equations.

In this paper pole assignment problem for a second-order system with acceleration feedback is solved. The system, the behavior of which is described by the equation

$$A_0\ddot{y} + A_1\dot{y} + A_2 y = Bu\ ,$$

is considered, where u, y are 2-vectors of input and output, A_0, A_1, A_2, B are 2 × 2-matrices with real elements. It is proposed to construct control law in the form of feedback with respect to the second derivative vector, acceleration vector:

$$u = -F\,\ddot{y}\ ,$$

where F is a feedback 2 × 2-matrix with real elements.

The spectrum of open-loop system is the roots of the polynomial

$$a(s) = \det\left(A_0 s^2 + A_1 s + A_2\right) = a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4\ .$$

The spectrum of closed-loop system is the roots of the polynomial

$$b(s) = \det\left((A_0 + BF)s^2 + A_1 s + A_2\right)\ .$$

Pole assignment problem is to selecting a feedback matrix F under which the roots of the polynomial $b(s)$ coincide with a given set of complex numbers $S = \{s_1; s_2; s_3; s_4\}$.

It is shown that the spectrum of a closed-loop system have to satisfy the relation

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_4} = -\frac{a_3}{a_4}\ .$$

If this relation is satisfied, then the solution of pole assignment problem reduces to the sequential solution of the square equation and the system of linear algebraic equations. The conditions under which there exist real feedback matrices providing a given spectrum of a closed-loop system are determined.

The results of the paer can be applied in solving the problems of vibration control of mechanical systems based on the signals of acceleration senso that is confirmed by the example of solving pole assignment problem of a two-mass mechanical system.

Keywords: second-order system; pole assignment; acceleration feedback.

PEREPELKIN Evgenii Alexandrovich (Doctor of Technical Science, Professor, Polzunov Altai State Technical University, Barnaul, Russian Federation).
E-mail: eap@list.ru

REFERENCES

1. Polyak, B.T. & Shcherbakov, P.S. (2005) Hard Problems in Linear Control Theory: Possible Approaches to Solution. *Automation and Remote Control*. 66(5). pp. 681–718. DOI: 10.1007/s10513-005-0115-0
2. Chu, M. & Golub, G. (2005) *Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Application*. Oxford: Oxford University Press.
3. Wang, Q.-G., Lee, T. & Hang, C. (1993) Pole assignment by output feedback: A solution for 2x2 plants. *Automatica*. 29(6). pp. 1599–1601.
4. Abdelaziz, T.H.S. (2013) Robust pole placement for second-order linear systems using velocity-plus-acceleration feedback. *IET Control Theory & Applications*. 7(14). pp. 1843–1856. DOI: 10.1049/iet-cta.2013.0039
5. Abdelaziz, T.H.S. (2015) Robust pole assignment using velocity–acceleration feedback for second-order dynamical systems with singular mass matrix. *ISA Transactions*. 57. pp. 71–84. DOI: 10.1016/j.isatra.2014.11.015
6. Zhang, J., Ouyang, H., Zhang, Y. & Ye, J. (2015) Partial quadratic eigenvalue assignment in vibrating systems using acceleration and velocity feedback. *Inverse Problems in Science and Engineering.* 23(3). pp. 479–497. DOI: 10.1080/17415977.2014.922076
7. Perepelkin, E.A. (2017) Pole assignment problem of a second order system. *Differential Equations.* 53(11). pp. 1524–1527. (In Russian). DOI: 10.1134/S0012266117110167