ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Управление, вычислительная техника и информатика № 44

УДК 519.2
DOI: 10.17223/19988605/44/6

К.И. Лившиц, Е.С. Ульянова

МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ ОДНОРОДНОЙ ПРОДУКЦИИ С РЕЛЕЙНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ ТЕМПОМ ПРОИЗВОДСТВА И ММР-ПОТОКОМ МОМЕНТОВ ПРОДАЖ

Исследуются статистические математические модели производства и сбыта некоторого однородного ресурса (товара) с релейным управлением скоростью производства и ММР-потоком моментов потребления произведенного ресурса. Найдена в диффузионном приближении плотность распределения количества ресурса в стационарном режиме. Получены оптимальные значения параметров релейного управления темпом производства, максимизирующие среднюю прибыль в единицу времени в стационарном режиме.
Ключевые слова: управление запасами; релейное управление; ММР-поток; асимптотическое распределение количества продукции.

Одной из классических задач теории управления запасами является задача производства и сбыта однородной продукции. Систематическое исследование моделей управления запасами началось, по-видимому, еще в 1950-е гг. в работах [1, 2]. К настоящему времени опубликовано огромное количество работ, посвященных данной тематике, в которых либо используется чисто детерминистский подход к решению задачи, требующий полной информации о процессе реализации продукции [3–5], либо рассматриваются стохастические модели. Из работ последнего времени, в которых рассматриваются стохастические модели, отметим, например, работы [6–14].

Целью данной работы является определение асимптотических вероятностных характеристик модели управления запасами с релейным управлением темпом производства и ММР-потоком моментов продаж.

1. Математическая модель

В настоящей работе задача производства и сбыта продукции рассматривается при следующих предположениях. Пусть $S(t)$ – количество продукции в момент времени t. Считается, что продукция производится со скоростью $C(S)$, так что за время Δt поступает $C(S(t))\Delta t$ единиц продукции. Накопленная продукция непрерывно реализуется. Величины покупок являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с плотностью распределения $\varphi(x)$ и моментами $M\left\{x\right\}=a$ и $M\left\{x^2\right\}=a_2$.

Моменты продаж образуют дважды стохастический пуассоновский поток с интенсивностью $\lambda(t)$. Процесс $\lambda(t)$ является однородной цепью Маркова с непрерывным временем и n состояниями $\lambda(t)=\lambda_i$. Такое предположение представляется естественным, так как продажи происходят в принципе в случайные моменты времени, а интенсивность потока продаж с течением времени случайным образом может изменяться. Простейшим примером является изменение количества покупателей в течение дня в продуктовой торговой точке.

Пусть переход из состояния в состояние задается матрицей инфинитезимальных характеристик $Q=\left[q_{ij}\right]$ ранга $n-1$, где $q_{ij}\geq 0$ при $i\neq j$ и

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij}=0. \qquad (1)$$

Обозначим $\gamma_i, i=\overline{1,n}$ – собственные значения матрицы Q, $\gamma_n = 0$. В дальнейшем считается, что все собственные значения – простые. Если при $i=\overline{1,n-1}$ $\gamma_i < 0$, то существуют финальные вероятности состояний π_i, являющиеся решением системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} q_{ij}\pi_i = 0, \tag{2}$$

$$\pi_1 + \pi_2 + ... + \pi_n = 1. \tag{3}$$

Различные варианты выбора функции $C(S)$ приводят к различным моделям производства и сбыта продукции. В простейших случаях, которые и будут в дальнейшем рассматриваться, управление $C(S)$ является релейным с различными вариантами выбора точек переключения управления. Приведем несколько возможных вариантов. Пусть

$$C(S) = \begin{cases} C_0, S < S_0, \\ C_{1,}\ S \ge S_0, \end{cases} \tag{4}$$

где S_0 – пороговое значение желаемого запаса продукции, $C_1 < \lambda_0 a, C_0 > \lambda_0 a$ и $\lambda_0 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\pi_i$ – средняя интенсивность потока покупок. Выбор управления вида (4) гарантирует в стационарном режиме стабилизацию уровня запаса продукции $S(t)$ около желаемого значения S_0. Отрицательные значения запаса $S(t)$ интерпретируются как неудовлетворенный спрос (накопленные заказы подлежат немедленному исполнению при пополнении запаса) [15].

При выборе функции $C(S)$ в виде

$$C(S) = \begin{cases} C, S \le S_0, \\ 0, S > S_0 \end{cases} \tag{5}$$

величина S_0 может интерпретироваться как максимально допустимый уровень запаса. Отметим, что при детерминированной постановке задачи управления производством и сбытом продукции релейное управление вида (5) является оптимальным [4].

Наконец, возможен вариант

$$C(S) = \begin{cases} C, 0 \le S \le S_0, \\ 0, S < 0\ и\ S > S_0. \end{cases} \tag{6}$$

В этом случае неудовлетворенный спрос не учитывается, неудовлетворенные заказы теряются.

2. Функция распределения количества продукции в стационарном режиме

Обозначим

$$P_i(s,t) = P\left\{S(t) < s; \lambda(t) = \lambda_i\right\} \ (i=\overline{1,n})$$

и рассмотрим два близких момента времени t и $t+\Delta t$. Пусть в момент времени t $\lambda(t) = \lambda_j$ количество продукции $S(t) = z$. Вычислим условную вероятность

$$P\left\{S(t+\Delta t) < s, \lambda(t+\Delta t) = \lambda_i \mid S(t) = z, \lambda(t) = \lambda_j\right\}.$$

На интервале времени длиной Δt могли произойти следующие события:

1. Интенсивность $\lambda(t) = \lambda_i$, за время Δt интенсивность не изменилась, продажа продукции не производилась. Вероятность этого события равна $1 + (q_{ii} - \lambda_i)\Delta t + o(\Delta t)$. В этом случае

$$P\left\{S(t+\Delta t) < s, \lambda(t+\Delta t) = \lambda_i \mid S(t) = z, \lambda(t) = \lambda_i\right\} = (1 + q_{ii}\Delta t)(1 - \lambda_i\Delta t) I(s - z - C(z)\Delta t) + o(\Delta t),$$

где $I(z)$ – единичная ступенчатая функция.

2. За время Δt значение интенсивности $\lambda(t)=\lambda_j$ поменялось на $\lambda(t+\Delta t)=\lambda_i$, продажа продукции не производилась. Вероятность этого события $q_{ji}\Delta t+o(\Delta t)$. В этом случае

$$P\left\{S(t+\Delta t)<s,\lambda(t+\Delta t)=\lambda_i \mid S(t)=z,\lambda(t)=\lambda_j\right\}=q_{ji}\Delta t I(s-z-C(z)\Delta t)+o(\Delta t).$$

3. Интенсивность $\lambda(t)=\lambda_i$, за время Δt интенсивность не изменилась, произошла продажа продукции в количестве x. Вероятность этого события $\lambda_i\Delta t\varphi(x)dx+o(\Delta t)$. В этом случае после усреднения получим

$$P\left\{S(t+\Delta t)<s,\lambda(t+\Delta t)=\lambda_i \mid S(t)=z,\lambda(t)=\lambda_i\right\}=\lambda_i\Delta t\int_0^\infty I(s-z-C(z)\Delta t+x)\varphi(x)dx+o(\Delta t).$$

4. Вероятность иных событий равняется $o(\Delta t)$.

Используя формулу полной вероятности и усредняя по $P_i(z,t)$, получим

$$P_i(s,t+\Delta t)=(1+\left(q_{ii}-\lambda_i\right)\Delta t)\int_{-\infty}^{\infty} I(s-z-C(z)\Delta t)dP_i(z,t)+$$

$$+\sum_{j\neq i}q_{ji}\int_{-\infty}^{\infty} I(s-z)dP_j(z,t)\Delta t+\lambda_i\Delta t\int_{-\infty}^{\infty} dP_i(z,t)\int_0^\infty I(s-z+x)\varphi(x)dx+o(\Delta t).$$

При малых Δt уравнение $z=s-C(z)\Delta t$ имеет корень $z=s-C(s)\Delta t+o(\Delta t)$. Поэтому

$$P_i(s,t+\Delta t)=(1-\lambda_i\Delta t)P_i(s-C(s)\Delta t,t)+\sum_{j=1}^{m}q_{ji}P_i(s,t)\Delta t+\lambda_i\Delta t\int_0^\infty P_i(s+z,t)\varphi(z)dz+o(\Delta t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим, что функции $P_i(s,t)$ удовлетворяют во всех точках непрерывности системе уравнений

$$\frac{\partial P_i(s,t)}{\partial t}+C(s)\frac{\partial P_i(s,t)}{\partial s}=-\lambda_i P_i(s,t)+\sum_{j=1}^{n}q_{ji}P_j(s,t)++\lambda_i\int_0^\infty P_i(s+x,t)\varphi(x)dx.$$

Рассмотрим далее стационарный случай. Обозначим

$$P_i(s)=\lim_{t\to\infty}P_i(s,t). \tag{7}$$

Функции $P_i(s)$ будут удовлетворять уравнениям

$$C(s)\dot{P}_i(s)=-\lambda_i P_i(s)+\sum_{j=1}^{n}q_{ji}P_j(s)+\lambda_i\int_0^\infty P_i(s+x)\varphi(x)dx \tag{8}$$

с вытекающими из их определения условиями нормировки

$$\lim_{s\to\infty}P_i(s)=\pi_i, \tag{9}$$

где π_i – финальная вероятность состояния λ_i.

Функция распределения количества продукции $P(s)$ в стационарном режиме будет, очевидно, равна

$$P(s)=\sum_{k=1}^{n}P_i(s).$$

3. Асимптотическое распределение количества продукции в стационарном режиме

Рассмотрим наиболее подробно случай, когда функция $C(S)$ определяется соотношением (5). Система уравнений (8) тогда перепишется в виде

$$-\lambda_i P_i(s)+\sum_{j=1}^{n}q_{ji}P_j(s)+\lambda_i\int_0^\infty P_i(s+x)\varphi(x)dx=0,\quad s>S_0, \tag{10}$$

$$C\dot{P}_i\ (s) = -\lambda_i P_i\ (s) + \sum_{j=1}^{n} q_{ji} P_j\ (s) + \lambda_i \int_0^\infty P_i\ (s+x)\varphi(x)dx, \quad s \le S_0. \tag{11}$$

Решения уравнений (10) с учетом граничных условий (9) и соотношений (2) имеют, очевидно, вид:

$$P_i(s) = \pi_i, \quad s > S_0. \tag{12}$$

Отсюда при $s \le S_0$

$$C\dot{P}_i\ (s) = -\lambda_i P_i\ (s) + \sum_{j=1}^{n} q_{ji} P_j\ (s) + \lambda_i \int_0^{S_0 - s} P_i\ (s+x)\varphi(x)dx + \lambda_i \pi_i \int_{S_0 - s}^\infty \varphi(x)dx, \quad s \le S_0. \tag{13}$$

Получить точное решение системы уравнений (13) при произвольных n и $\varphi(x)$ не удается. Поэтому в дальнейшем рассматривается случай, когда

$$C = (1+\theta)\lambda_0 a \tag{14}$$

и параметр $\theta \to 0$. Такое предположение является довольно естественным, так как темп производства $C(S)$ должен быть согласован со средней величиной спроса в единицу времени $\lambda_0 a$ и большие отклонения $C(S)$ от $\lambda_0 a$ должны приводить либо к перепроизводству, либо к дефициту продукции. Для решения уравнений (13) воспользуемся методикой из [16].

Решение системы уравнений (13) будем искать в виде:

$$P_i(s) = f_i(\theta s, \theta), \tag{15}$$

считая функции $f_i(z,\theta)$ монотонно возрастающими и дважды дифференцируемыми по z, за исключением, возможно, точки $z_0 = \theta S_0$. Будем также считать, что $S_0 = S_0(\theta)$ и что при $\theta \to 0$ $S_0(\theta) \to \infty$, но так, что существует конечный предел

$$\lim_{\theta \to 0} \theta S_0(\theta) = z_0. \tag{16}$$

Подставляя функции (15) в уравнения (13), после замены переменных $z = \theta s$, получим в области $z < z_0$

$$C\theta \dot{f}_i(z,\theta) = -\lambda_i f_i(z,\theta) + \sum_{j=1}^{n} q_{ji} f_j(z,\theta) + \lambda_i \int_0^\infty f_i(z+\theta x, \theta)\varphi(x)dx + R_i(z,\theta), \ . \tag{17}$$

где

$$R_i(z,\theta) = -\lambda_i \int_{\frac{z_0 - z}{\theta}}^\infty f_i(z+\theta x, \theta)\varphi(x)dx + \lambda_i \pi_i \int_{\frac{z_0 - z}{\theta}}^\infty \varphi(x)dx.$$

Функции $f_i(z,\theta)$ предполагаются дифференцируемыми и, следовательно, ограниченными. Поэтому при $z < z_0$

$$\int_{\frac{z_0 - z}{\theta}}^\infty f_i(z+\theta x)\varphi(x)dx \le \max_z f_i(z,\theta) \int_{\frac{z_0 - z}{\theta}}^\infty \varphi(x)dx \le const \frac{\theta^2}{(z_0 - z)^2} \int_{\frac{z_0 - z}{\theta}}^\infty x^2 \varphi(x)dx < o(\theta^2),$$

так как по условию второй момент $a_2 = M\left\{x^2\right\}$ конечен. Аналогично можно оценить и второе слагаемое. Поэтому слагаемое $R_i(z,\theta)$ в (17) в дальнейшем учитываться не будет.

Переходя в уравнениях (17) к пределу при $\theta \to 0$, получим

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ji} f_j(z,0) = 0. \tag{18}$$

Так как $\mathrm{Rang}\, Q = n-1$, то из сравнения систем уравнений (18) и (2) будем иметь

$$f_j(z,0) = \pi_j f(z), \tag{19}$$

где $f(z)$ – не определенная пока функция.

Пусть теперь

$$f_j(z,\theta) = \pi_j f(z) + h_j(z)\theta + o(\theta). \tag{20}$$

Подставляя выражения (20) в уравнения (17), раскладывая подынтегральные функции в ряд по θ и ограничиваясь членами, имеющими порядок θ, получим после предельного перехода при $\theta \to 0$

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ji} h_j(z) = -\left(\lambda_i - \lambda_0\right) a \pi_i \dot{f}(z) \quad . \tag{21}$$

Пусть

$$f_i(z,\theta) = \pi_i f(z) + h_i(z)\theta + g_i(z)\theta^2 + o(\theta^2). \tag{22}$$

Подставляя разложения (22) в уравнения (17), раскладывая подынтегральные функции в ряд по θ и ограничиваясь членами, имеющими порядок не выше $\theta^{\,2}$, получим, учитывая (19) и (21), после предельного перехода при $\theta \to 0 \to 0$

$$-\sum_{\partial=1}^{n} q_{ji} g_j(z) = \frac{\lambda_i a_2}{2} \pi_i \ddot{f}(s) + (\lambda_i - \lambda_0) a \dot{h}_i(s) + \lambda_0 a \pi_i \dot{f}(s) \ . \tag{23}$$

Просуммировав, наконец, все соотношения (23) по i, получим с учетом (1), что

$$\frac{\lambda_0 a_2}{2} \ddot{f}(s) + \lambda_0 a \dot{f}(s) - \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_0) a \dot{h}_i(s) = 0 \, . \tag{24}$$

Из системы уравнений (21)

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ji} h_j(z) = -(\lambda_i - \lambda_0) a \pi_i \ddot{f}(z). \tag{25}$$

Пусть матрица

$$V = Q^T = R\gamma P, \tag{26}$$

где $R = \left[R_{ij}\right]$ – матрица собственных векторов матрицы V, матрица $P = \left[P_{ij}\right] = R^{-1}$, матрица $\gamma = \mathrm{diag}\left(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}, 0\right)$ – диагональная матрица из собственных значений матрицы V. Из соотношений (2) вытекает, что $R_{in} = \pi_i$. Далее, из соотношений (26) и (1)

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} R_{jk}\right] \gamma_k P_{ki} = 0 \, .$$

Так как столбцы матрицы P линейно независимы, то при $k = \overline{1, n-1}$

$$\sum_{j=1}^{n} R_{jk} = 0 \, .$$

Элементы n-й строки матрицы P должны удовлетворять соотношениям

$$\sum_{j=1}^{n} P_{nj} R_{jk} = 0, \ k = \overline{1, n-1}, \quad \sum_{j=1}^{n} P_{nj} \pi_j = 1 \, .$$

Откуда следует, что $P_{nk} = 1, \ k = \overline{1, n}$. Учитывая разложение (26), уравнения (25) можно переписать как

$$\gamma_t \sum_{j=1}^{n} P_{tj} \dot{h}_j(s) = -\sum_{i=1}^{n} P_{ti} (\lambda_i - \lambda_0) \pi_i a \ddot{f}(s) \, .$$

Или

$$\sum_{j=1}^{n} P_{tj} \dot{h}_j(s) = -\frac{1}{\gamma_t} \sum_{i=1}^{n} P_{ti} (\lambda_i - \lambda_0) \pi_i a \ddot{f}(s) \ t = \overline{1, n-1},$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ni} \dot{h}_i(s) = c(s) \, ,$$

где $c(s)$ – произвольная функция. Отсюда

$$\dot{h}_i(s) = \sum_{t=1}^{n-1} R_{it} \frac{1}{\gamma_t} \sum_{j=1}^{n} P_{tj} (\lambda_0 - \lambda_j) \pi_j a \ddot{f}(s) + \pi_i c(s) \, . \tag{27}$$

Подставляя (27) в уравнение (24), получим, наконец, уравнение относительно функции $f(s)$:

$$A_2\ddot{f}(s) - A_1\dot{f}(s) = 0, \tag{28}$$

где

$$A_1 = \lambda_0 a, \tag{29}$$

$$A_2 = \frac{\lambda_0 a_2}{2} - a^2\sum_{t=1}^{n-1}\frac{1}{\gamma_t}\sum_{i=1}^{n}(\lambda_0-\lambda_i)R_{it}\sum_{j=1}^{n}P_{tj}(\lambda_0-\lambda_j)\pi_j. \tag{30}$$

Покажем, что квадратичная форма

$$W = \sum_{t=1}^{n-1}\frac{1}{\gamma_t}\sum_{i=1}^{n}(\lambda_0-\lambda_i)R_{it}\sum_{j=1}^{n}P_{tj}(\lambda_0-\lambda_j)\pi_j$$

отрицательно определена. Обозначим

$$x_t = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_0-\lambda_i)R_{it}.$$

Тогда $\lambda_0 - \lambda_j = \sum_{t=1}^{n} x_t P_{tj}$ и после несложных преобразований

$$W = \sum_{t=1}^{n-1}\frac{x_t}{\gamma_t}\sum_{k=1}^{n}x_k\omega_{tk} = \sum_{t=1}^{n-1}\frac{x_t}{\gamma_t}\sum_{k=1}^{n-1}x_k\omega_{tk},$$

где

$$\omega_{tk} = \sum_{j=1}^{n}P_{tj}P_{kj}\pi_j.$$

Так как $P_{nj} = 1$ и при $t \neq n$ t-я строка матрицы P ортогональна столбцу $\begin{bmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n\end{bmatrix}^T$, то $\omega_{tn} = 0$. Так как матрица P не вырождена, $\pi_j \geq 0, \sum_j \pi_j = 1$, то матрица $\omega = \left[\omega_{ij}\right] > 0$. Поэтому все главные миноры k-го порядка этой матрицы $\Delta_k(\omega) > 0$. Миноры матрицы квадратичной формы W k-го порядка $\Delta_k = \prod_{j=1}^{k}\frac{1}{\gamma_j}\Delta_k(\omega)$. Так как $\gamma_k < 0$, то знаки миноров Δ_k чередуются. Поэтому квадратичная форма W отрицательно определена.

Решение уравнения (28) будет иметь вид

$$f(z) = B_1 + B_2 e^{\frac{A_1}{A_2}(z-z_0)}.$$

Так как $P_i(-\infty) = 0$, то $f(-\infty) = 0$, и окончательно

$$f(z) = Be^{\frac{A_1}{A_2}(z-z_0)}, \quad z < z_0. \tag{31}$$

Таким образом, при $s < S_0$

$$P_i(s) = B\pi_i e^{\frac{A_1}{A_2}\theta(s-S_0)} + O(\theta). \tag{32}$$

Соотношение (31) и, соответственно, соотношения (32) были получены в предположении, что $s \neq S_0$ $(z \neq z_0)$. При $s = S_0$ уравнения (13) дают

$$C\dot{P}_i(S_0) = -\lambda_i P_i(S_0) + \sum_{j=1}^{n}q_{ji}P_j(S_0) + \lambda_i\pi_i. \tag{33}$$

Подставляя в (33) выражения (32) и суммируя соотношения (33), получим

$$B = \frac{1}{1+\theta\dfrac{aA_1}{A_2}} + o(\theta). \tag{34}$$

Таким образом, при $\theta << 1$

$$P_i(s) = \begin{cases} \dfrac{\pi_i}{1+\theta\dfrac{aA_1}{A_2}} e^{\frac{A_1}{A_2}\theta(s-S_0)} + O(\theta), & s \le S_0, \\ \pi_i, & s > S_0. \end{cases} \quad (35)$$

Рассмотрим коротко случай, когда функция $C(S)$ определяется соотношением (6). В этом случае система уравнений (8) перепишется в виде:

$$-\lambda_i P_i(s) + \sum_{j=1}^{n} q_{ji} P_j(s) + \lambda_i \int_0^\infty P_i(s+x)\varphi(x)dx = 0, \quad s<0, s>S_0, \quad (36)$$

$$C\dot{P}_i(s) = -\lambda_i P_i(s) + \sum_{j=1}^{n} q_{ji} P_j(s) + \lambda_i \int_0^\infty P_i(s+x)\varphi(x)dx, \quad 0 \le s \le S_0. \quad (37)$$

Решения уравнений (36) имеют вид:

$$P_i(s) = 0, \quad s<0, \qquad P_i(s) = \pi_i, \quad s > S_0. \quad (38)$$

Условная вероятность

$$P\left\{s(t+\Delta t) = 0, \lambda(t+\Delta t) = \lambda_i \mid s(t) = z, \lambda(t) = \lambda_j\right\} = o(\Delta t),$$

$$P\left\{s(t+\Delta t) = 0, \lambda(t+\Delta t) = \lambda_i \mid s(t) = z, \lambda(t) = \lambda_i\right\} = \lambda_i \Delta t \int_z^\infty \varphi(x)dx + o(\Delta t).$$

Откуда в стационарном режиме

$$P_i(0) = 0. \quad (39)$$

Решение уравнений (37) опять будем искать в виде (15), придя в конце концов к соотношению на функцию

$$f(z) = B_1 + B_2 e^{\frac{A_1}{A_2}z}.$$

Условие (39) дает $f(0) = 0$. Откуда $B_2 = -B_1$ и при $0 \le s < S$

$$P_i(s) = B\pi_i(1 - e^{\frac{A_1}{A_2}\theta s}) + O(\theta). \quad (40)$$

Подставляя соотношения (40) в (33), получим

$$B = \frac{1}{1 - (1+\theta\dfrac{aA_1}{A_2})e^{\frac{A_1}{A_2}\theta S_0}} + o(\theta) \quad (41)$$

и окончательно

$$P_i(s) = \begin{cases} 0, & s<0, \\ \dfrac{\pi_i(1-e^{\frac{A_1}{A_2}\theta s})}{1-(1+a\dfrac{A_1}{A_2}\theta)e^{\frac{A_1}{A_2}\theta S_0}} + O(\theta), & 0 \le s \le S_0, \\ \pi_i & s > S_0. \end{cases} \quad (42)$$

4. Распределение количества продукции для случая потока с двумя состояниями и экспоненциального распределения величин покупок

Для оценки точности асимптотических соотношений (35) рассмотрим случай, когда число состояний потока моментов продаж равняется двум: $\lambda(t) = \lambda_1$ или $\lambda(t) = \lambda_2$, а величины покупок имеют экспоненциальное распределение $\varphi(x)=\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}$. Решение системы уравнений (13), которая перепишется как

$$C\dot{P}_k(s)=-\lambda_k P_k(s)+\sum_{j=1}^{2}q_{jk}P_j(s)+\frac{\lambda_k}{a}\int_0^{S_0-s}P_k(s+x)e^{-\frac{x}{a}}dx+\lambda_k\pi_k e^{\frac{s-S_0}{a}},\quad s\le S_0, \tag{43}$$

будем искать в виде

$$P_k(s)=A_{k1}e^{\gamma_1(s-S_0)}+A_{k2}e^{\gamma_2(s-S_0)},\quad k=1,2. \tag{44}$$

Подставляя соотношения (44) в уравнения (43) и приравнивая коэффициенты при линейно независимых функциях $e^{\gamma_j(s-S_0)}$ и $e^{\frac{s-S_0}{a}}$, получим систему соотношений

$$\frac{A_{k1}}{1-\gamma_1 a}+\frac{A_{k2}}{1-\gamma_2 a}=\pi_k,\quad k=1,2, \tag{45}$$

$$\begin{aligned}&A_{1k}(q_{11}-C\gamma_k+\frac{\lambda_1 a\gamma_k}{1-a\gamma_k})+q_{21}A_{2k}=0,\\ &q_{12}A_{1k}+(q_{22}-C\gamma_k+\frac{\lambda_2 a\gamma_k}{1-a\gamma_k})A_{2k}=0,\quad \mathrm{k}=1,2.\end{aligned} \tag{46}$$

Однородные системы (46) имеют ненулевые решения, если их определители $\Delta(\gamma_k)$ равны нулю. Так как матрица $\left[q_{ij}\right]$ вырождена, то один корень уравнения $\Delta(\gamma_k)=0$ $\gamma_k=0$. Остальные корни являются решениями уравнения

$$f(z)=z(C-\frac{\lambda_1 a}{1-az})(C-\frac{\lambda_2 a}{1-az})-(q_{11}+q_{22})(C-\frac{\lambda_0 a}{1-az})=0. \tag{47}$$

Пусть k – корень уравнения $C-\frac{\lambda_0 a}{1-az}=0$, т.е. $k=\frac{C-\lambda_0 a}{Ca}$. Тогда

$$f(k)=k\frac{(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\lambda_2)a^2}{(1-ak)^2}<0,$$

так как либо $\lambda_0-\lambda_1<0$, либо $\lambda_0-\lambda_2<0$. С другой стороны,

$$f(0)=-(q_{11}+q_{22})(C-\lambda_0 a)>0\,.$$

Поэтому существует корень $\gamma_1\in\left(0,k\right)$ уравнения (47). Далее, при $z\to 1/a$ $f(z)\to\infty$. Поэтому существует корень $\gamma_2\in(k,1/a)$ уравнения (47). Наконец, при $z\to-\infty$ $f(z)\to-\infty$. Следовательно, третий корень уравнения (47) $\gamma_3<0$. Так как при $s\to-\infty$ $P_k(s)\to 0$, то он не может входить в выражения (44).

Из соотношений (46) имеем теперь

$$A_{2k}=v_k A_{1k},\quad v_k=-\frac{1}{q_{21}}(q_{11}+\frac{\lambda_1 a\gamma_k}{1-a\gamma_k}-C\gamma_k), \tag{48}$$

и система уравнений (45) перепишется как

$$\begin{aligned}&\frac{A_{11}}{1-a\gamma_1}+\frac{A_{12}}{1-a\gamma_2}=\pi_1,\\ &\frac{A_{11}v_1}{1-a\gamma_1}+\frac{A_{12}v_2}{1-a\gamma_2}=\pi_2.\end{aligned} \tag{49}$$

Откуда

$$\begin{aligned}&A_{11}=\frac{(\pi_1 v_2-\pi_2)(1-a\gamma_1)}{v_2-v_1},\qquad A_{12}=\frac{(\pi_1 v_1-\pi_2)(1-a\gamma_2)}{v_1-v_2},\\ &A_{21}=v_1\frac{(\pi_1 v_2-\pi_2)(1-a\gamma_1)}{v_2-v_1},\quad A_{22}=v_2\frac{(\pi_1 v_1-\pi_2)(1-a\gamma_2)}{v_1-v_2}.\end{aligned} \tag{50}$$

На рис. 1 приведены безусловные функции распределения количества продукции

$$P(s) = P_1(s) + P_2(s),$$

вычисленные по точным формулам (44) (сплошные линии) и по приближенным формулам (35) (пунктирные линии) при $\theta = 0{,}01;\ 0{,}1;\ 0{,}25$. Параметры $\lambda_1 = 15,\ \lambda_2 = 5,\ a = 1,\ C = (1+\theta)\lambda_0 a$, $q_{11} = -2$, $q_{22} = -1,\ S_0 = 20$.

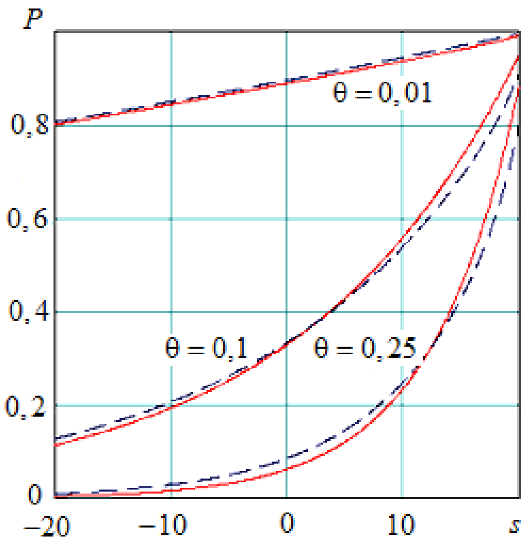

Рис. 1. Функция распределения количества продукции (сплошные линии) и ее аппроксимация (пунктирные линии) при экспоненциальном распределении величин покупок

Как следует из приведенных графиков, в рассмотренном простейшем случае приближенные соотношения (35) дают хорошую аппроксимацию функции распределения.

5. Средняя прибыль в стационарном режиме

Обозначим через β продажную цену единицы продукции, считая себестоимость равной 1, и через α – стоимость хранения единицы продукции. Если $\varphi(x)$ – плотность распределения величин покупок, то при принятой релейной стратегии управления темпом производства средняя прибыль в единицу времени

$$W = \beta\lambda_0 \int_0^{S_0} \psi(s)dP(s) - \alpha \int_0^{S_0} s dP(s) - CP(S_0), \tag{51}$$

где

$$\psi(s) = \int_0^{s} x\varphi(x)dx + s\int_s^{\infty} \varphi(x)dx, \tag{52}$$

так как реализация возможна лишь при наличии продукции. При этом необходимо учитывать, что продукция, произведенная на данном временном промежутке, может быть реализована только на последующих временных промежутках. В рассматриваемом нами асимптотическом случае выражение (51) принимает вид:

$$W(\theta, S_0) = \beta\lambda_0 \frac{\gamma\theta}{1+a\gamma\theta} \int_0^{S_0} e^{\gamma\theta(s-S_0)}\psi(s)ds - \frac{\alpha}{1+a\gamma\theta}\left(S_0 - \frac{1}{\gamma\theta}(1-e^{-\gamma\theta S_0})\right) - \lambda_0 a \frac{1+\theta}{1+a\gamma\theta}, \tag{53}$$

где $\gamma = \dfrac{A_1}{A_2}$. Оптимальные значения параметров θ и S_0 будут определяться, очевидно, условиями

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial S_0} = 0. \tag{54}$$

Получить аналитическое решение системы (54) не удается.

На рис. 2 приведена зависимость средней прибыли $W(\theta, S_0)$ от параметров θ, S_0 для простейшего случая экспоненциального распределения покупок. Параметры $\beta = 2$, $\lambda_1 = 15$, $\lambda_2 = 5$, $a = 1$, $q_{11} = -2$, $q_{22} = -1$.

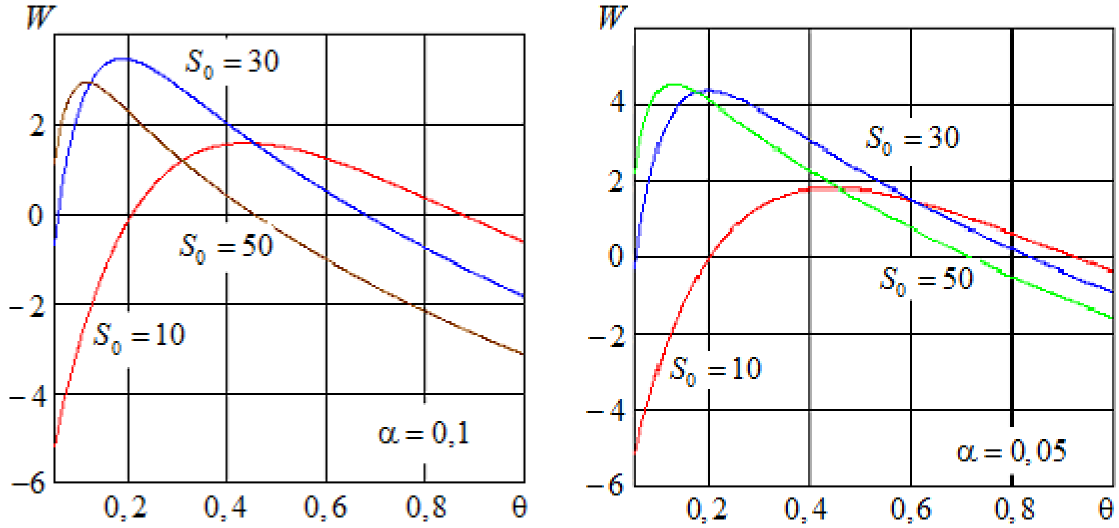

Рис.2. Зависимость средней прибыли от параметров θ и S_0
при экспоненциальном распределении величин покупок

Как следует из приведенных графиков, средняя прибыль $W(\theta, S_0)$ имеет максимум как по параметру θ, так и по параметру S_0, положение которого зависит, в частности, от стоимости хранения единицы продукции α. Как следует из рис. 2, оптимальное значение параметра θ в рассматриваемом примере равно примерно 0,1–0,2.

Заключение

В работе получены асимптотические выражения для распределения количества производимой однородной продукции при релейном управлении темпом производства и MMP-потоке моментов продаж продукции при дополнительном предположении, что темп производства «почти совпадает» с темпом продаж. Для случая экспоненциального распределения величин покупок показано хорошее совпадение асимптотических результатов с истинным распределением. Проанализировано влияние выбора порога алгоритма релейного управления и темпа производства на величину средней прибыли.

Предлагаемая методика расчета статистических характеристик может быть использована для анализа более сложных вариантов управления темпом производства и интенсивностью потока продаж, например для одновременного учета зависимости интенсивности потока продаж от меняющейся продажной цены продукции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Arrow K.J., Harris Th.E., Marschak J. Optimal Inventory Policy // Econometrica. 1951. V. 19 (3). P. 205–272.
2. Dvoretzky A., Kiefer J., Wolfowitz J. On the optimal character of the (S, s) policy in inventory theory // Econometrica. 1953. V. 21. P. 586–596.
3. Горский А.А., Локшин Б.Я. Математическая модель процесса производства и продажи для управления и планирования производства // Фундаментальная и прикладная математика. 2002. Т. 8, № 1. С. 34–45.
4. Параев Ю.И. Решение задачи об оптимальном производстве, хранении и сбыте товара // Известия РАН. Теория и системы управления. 2000. № 2. С. 103–107.
5. Параев Ю.И. Игровой подход к решению задачи производства, хранения и сбыта товара // Автоматика и телемеханика. 2005. № 2. С. 115–123.

6. Chopra S., Meindl P. Supply chain management: Strategy, Planning and Operation. New Jersey : Pearson Education, 2013. 529 p.
7. Beyer D., Cheng F., Sethi S.P., Taksar M. Markovian demand inventory models. New York : Springer, 2010. 255 p.
8. Nazarov A., Broner V. Inventory Management System with On/Off Control of Input Product Flow // Communications in Computer and Information Science. 2017. № 800. P. 370–381.
9. Назаров А.А., Бронер В.И. Система управления запасами с гиперэкспоненциальным распределением объемов потребления ресурсов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 1 (34). С. 43–49.
10. Лившиц К.И., Ульянова Е.С. Диффузионная аппроксимация процесса производства и сбыта скоропортящейся продукции // Известия высших учебных заведений. Физика. 2015. Т. 58, № 11-2. С. 281–285.
11. Livshits K., Ulyanova E. Switch-hysteresis control of the production process in model with perishable goods // Communications in Computer and Information Sciences. 2016. № 638. P. 192–206.
12. Livshits K., Ulyanova E. Switch-hysteresis control of the selling times flow in a model with perishable goods // Communications in Computer and Information Science. 2015. № 564. P. 263–274.
13. Zhang D., Xu Y., Wu Y. Single and multi–period optimal inventory control models with risk–averse constraints // European Journal of Operational Research. 2009. V. 199. P. 420–434.
14.Zhang J., Chen J. A multi-period pricing and inventory control model // Journal of Systems Science and Complexity. 2009. V. 23. P. 249–260.
15. Карлин С.М. Основы теории случайных процессов. М. : Мир, 1971. 536 с.
16. Лившиц К.И., Бублик Я.С. Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1 (10). С. 66–77.

Поступила в редакцию 9 марта 2018 г.

Livshits K.I., Ulyanova E.S. (2018). MODEL OF INVENTORY CONTROL OF HOMOGENEOUS PRODUCTS WITH RELAY CONTROL OF PRODUCTION RATE AND MMP-FLOW OF SALES MOMENTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 44. pp. 50–61

DOI: 10.17223/19988605/44/6

In this paper, we consider a mathematical model of a system of inventory management, on the input of which some resources (goods) come with a speed $C(S(t))$, where $S(t)$ is the volume of accumulated resources in the system at the time *t*. Consumption of the resource (sales) is carried out at random moments of time by batches of random volume, having an arbitrary density distribution $\varphi(x)$ and moments $M\{x\} = a$, $M\{x^2\} = a_2$. The moments of resource consumption time form a MMP-flow with *n* states and matrix of infinitesimal characteristics $\left[q_{ij}\right]$.

For a stationary distribution $P_i(s) = P\{S(t) < s; \lambda(t) = \lambda_i\}$ of process $S(t)$ and intensity $\lambda(t)$ equation

$$C(s)\dot{P}_i(s) = -\lambda_i P_i(s) + \sum_{j=1}^{n} q_{ji} P_j(s) + \lambda_i \int_0^\infty P_i(s+x)\varphi(x)dx$$

is obtained.

The main attention is paid to the case when the function $C(S(t))$ is determined by the relation $C(S) = C$ at $S \le S_0$ and $C(S) = 0$ with $S > S_0$, the magnitude $C = (1+\theta)\lambda_0 a$ and the parameter $\theta << 1$. It is proved that in this case

$$P_i(s) = \begin{cases} \dfrac{\pi_i}{1 + \theta \dfrac{aA_1}{A_2}} e^{\frac{A_1}{A_2}\theta(s - S_0)} + O(\theta), & s \le S_0, \\ \pi_i, & s > S_0, \end{cases}$$

where π_i is the final probability of the state λ_i, $A_1 = \lambda_0 a$, $A_2 = \dfrac{\lambda_0 a_2}{2} - a^2 \sum_{t=1}^{n-1} \dfrac{1}{\gamma_t} \sum_{i=1}^{n} (\lambda_0 - \lambda_i) R_{it} \sum_{j=1}^{n} P_{tj} (\lambda_0 - \lambda_j) \pi_j$, λ_0 is the average intensity of the flow of purchases, the matrix $\left[R_{ij}\right]$ is the matrix of the eigenvectors of the matrix $\left[q_{ij}\right]$, the matrix $\left[P_{ij}\right]$ is the matrix inverse to the matrix $\left[R_{ij}\right]$.

Based on a comparison of the proposed asymptotic distribution with the exact one in the case of a two-state flow and the exponential distribution of the quantities of purchases, it was concluded that the proposed asymptotic distribution can be applied. The dependence of the average profit on the quantities *C* and S_0 has been analyzed.

Keywords: Inventory control; relay control; MMP flow; asymptotic distribution of quantity of products.

LIVSHITS Klimenty Isaakovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: kim47@mail.ru

ULYANOVA Ekaterina Sergeevna (National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: ulyanovaeks@gmail.com

REFERENCES

1. Arrow, K.J., Harris, Th.E. & Marschak, J. (1951) Optimal Inventory Policy. *Econometrica.* 19(3). pp. 205–272. DOI: 10.2307/1906813
2. Dvoretzky, A., Kiefer, J. & Wolfowitz, J. (1953) On the optimal character of the (S, s) policy in inventory theory. *Econometrica.* 21. pp. 586–596.
3. Gorsky, AA. & Lokshin, B.Ya. (2002) A mathematical model of goods production and sale for production supervision and planning. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika – Fundamental and Applied Mathematics.* 8(1). pp. 34–45. (In Russian).
4. Paraev, Yu.I. (2000) Resheniye zadachi ob optimal'nom proizvodstve, khranenii i sbyte tovara [Solution of the problem of optimal production, storage and sale of goods]. *Izvestia RAN Teoria i sistemy Upravlenia – International Journal of Computer and Systems Sciences.* 2. pp. 103–107.
5. Paraev, Yu.I. (2005) A game approach to production, storage, and marketing problems. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 2. pp. 115–123. (In Russian).
6. Chopra, S. & Meindl, P. (2013) *Supply chain management: Strategy, Planning and Operation*. New Jersey: Pearson Education.
7. Beyer, D., Cheng, F., Sethi, S.P. & Taksar, M. (2010) *Markovian demand inventory models*. New York: Springer.
8. Nazarov, A. & Broner, V. (2017) Inventory Management System with On/Off Control of Input Product Flow. *Communications in Computer and Information Science*. 800. pp. 370–381.
9. Nazarov, A.A. & Broner, V.I. (2016) Inventory model with hyperexponential distribution of demand's batch size. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(34). pp. 43–49. (In Russian). DOI: 10.17223/19988605/34/5
10. Livshits, K.I. & Ulyanova, E.S. (2015) Diffusion approximation of the production and selling of perishable products. *Russian Physics Journal.* 58(11–2). pp. 281–285. (In Russian).
11. Livshits, K. & Ulyanova, E.(2016) Switch-Hysteresis Control of the Production Process in Model with Perishable Goods. *Communications in Computer and Information Sciences.* 638. pp. 192–206. DOI: 10.1007/978-3-319-44615-8_17
12. Livshits, K. & Ulyanova, E.(2015) Switch-hysteresis control of the selling times flow in a model with perishable goods. *Communications in Computer and Information Science*. 564 . pp. 263–274. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4_23
13. Zhang, D., Xu, Y. & Wu, Y. (2009) Single and multi–period optimal inventory control models with risk–averse constraints. *European Journal of Operational Research.* 199. pp. 420–434. DOI: 10.1016/j.ejor.2008.11.047
14. Zhang, J. & Chen, J. (2009) A multi–period pricing and inventory control model. *Journal of Systems Science and Complexity.* 23. pp. 249–260. DOI: 10.1007/s11424-010-7066-4
15. Karlin, S. (1968) *A first course in stochastic processes*. New York and London: Academic press.
16. Livshits, K.I. & Bublik, Ya.S. (2010) Ruin probability of an insurance company under double stochasticpayment current. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 1(10). pp. 66–77. (In Russian).