ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Математика и механика № 55

УДК 517.956.22 MSC 33C15, 33C20, 35A08, 35J70
DOI 10.17223/19988621/55/5

А.К. Уринов, Т.Г. Эргашев

КОНФЛЮЭНТНЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К НАХОЖДЕНИЮ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Вводится в рассмотрение новый класс конфлюэнтных гипергеометрических функций многих переменных, изучаются их свойства, строятся интегральные представления и определяется система уравнений с частными производными, которую удовлетворяет данная функция. Оказывается, все фундаментальные решения обобщенного уравнения Гельмгольца с несколькими сингулярными коэффициентами выписываются через нововведенную конфлюэнтную гипергеометрическую функцию. С помощью установленной здесь формулы разложения для конфлюэнтной функции определен порядок особенности фундаментальных решений рассматриваемого эллиптического уравнения.

Ключевые слова: *конфлюэнтная гипергеометрическая функция, функции Лауричелли, фундаментальные решения, обобщенное уравнение Гельмгольца с несколькими сингулярными коэффициентами, формула разложения.*

Нет необходимости говорить о важности свойств гипергеометрических функций. Любой исследователь, имеющий дело с практическими применениями дифференциальных или интегральных уравнений, с ними встречается. Решение самых разных задач, относящихся к теплопроводности и динамике, электромагнитным колебаниям и аэродинамике, квантовой механике и теории потенциалов, приводит к изучению гипергеометрических функций.

Разнообразие задач, приводящих к гипергеометрическим функциям, вызвало быстрый рост их числа. Особенно большие успехи в теории гипергеометрической функции одного переменного стимулировали развитие соответствующих теорий для функций двух и многих переменных. Книги [1] и [2] посвящены систематическому изложению результатов по гипергеометрическим функциям двух и трех переменных соответственно. В литературе принято делить гипергеометрические функции на два вида: полные и конфлюэнтные (определения см. [1]). Конфлюэнтные гипергеометрические функции во всех отношениях значительно мало изучены по сравнению с полными, особенно, когда размерность переменных превышает две. Отметим лишь работы [3, 4], в которых были рассмотрены некоторые конфлюэнтные гипергеометрические функции трех переменных. В настоящей работе мы определим некоторый класс конфлюэнтных гипергеометрических функций многих переменных.

Рассмотрим обобщенное уравнение Гельмгольца с несколькими сингулярными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^{n}\left(u_{x_i x_i}+\frac{2\alpha_i}{x_i}u_{x_i}\right)-\lambda^2 u=0 \tag{1}$$

в области $R_n^+ := \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1 > 0, x_2 > 0, ..., x_n > 0\}$, где n – размерность Эвклидова пространства; $n \geq 2$, α_i – действительные числа, причем $0 < 2\alpha_i < 1$, $i = \overline{1, n}$; λ – действительное или чисто мнимое постоянное.

Как известно, фундаментальные решения играют важную роль при изучении дифференциальных уравнений с частными производными. На них основываются формулировка и решение многих локальных и нелокальных краевых задач. Оказывается, все фундаментальные решения уравнения (1) выписываются через конфлюэнтную гипергеометрическую функцию $(n+1)$ переменных. Найдем эти решения уравнения (1), выпишем формулы разложения для них и с помощью этих формул установим, что фундаментальные решения уравнения (1) имеют особенность порядка $1/r^{n-2}$ при $r \to 0$.

Отметим, что фундаментальные решения уравнения (1) в двух- и трехмерных случаях найдены и исследованы в работах [5–8], а также они применены к решению некоторых краевых задач для уравнения (1) в случае, когда $n = 3$ и $\lambda = 0$ [9, 10].

Прежде чем перейти к изложению основных результатов приведем некоторые известные факты из теории гипергеометрических функций.

Известная гипергеометрическая функция Гаусса $F(a, b; c; x)$ определяется формулой [1]

$$F(a, b; c; x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m \, m!} x^m, \ |x| < 1.$$

Здесь и далее $(\kappa)_\nu$ обозначает символ Похгаммера:

$$(\kappa)_0 = 1, \ (\kappa)_\nu = \frac{\Gamma(\kappa + \nu)}{\Gamma(\kappa)}, \ \nu \in \mathbb{N}, \ \mathbb{N} := \{1, 2, ...\}.$$

Кроме того, в наших исследованиях будут участвовать некоторые гипергеометрические функции многих переменных:

$$F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b_1)_m (b_2)_m}{m! n! (c_1)_m (c_2)_m} x^m y^n, \ \ |x| + |y| < 1; \qquad (2)$$

$$H_2(a, b_1, d_1, d_2; c_1; x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m-n} (b_1)_m (d_1)_n (d_2)_n}{m! n! (c_1)_m} x^m y^n, \ \ |x| < 1, |y| < 1/(1+|x|);$$

$$F_A^{(n)}(a, b_1, ..., b_n; c_1, ..., c_n; x_1, ..., x_n) = \sum_{m_1, ... m_n = 0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1 + ... + m_n} (b_1)_{m_1} ... (b_n)_{m_n}}{m_1! ... m_n! (c_1)_{m_1} ... (c_n)_{m_n}} x_1^{m_1} ... x_n^{m_n},$$

$$|x_1| + |x_2| + ... + |x_n| < 1; \qquad (3)$$

$$F_B^{(n)}(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n; c; x_1, ..., x_n) = \sum_{m_1, ... m_n = 0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m_1} ... (a_n)_{m_n} (b_1)_{m_1} ... (b_n)_{m_n}}{m_1! ... m_n! (c)_{m_1 + ... + m_n}} x_1^{m_1} ... x_n^{m_n},$$

$$\max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|) < 1.$$

Здесь F_2 и H_2 – известные гипергеометрические функции двух переменных [1], а

$F_A^{(n)}$ и $F_B^{(n)}$ – гипергеометрические функции Лауричелли $n \in \mathbb{N}$ переменных [11] (см. также [2]) Легко заметить, что функция F_2 является функцией Лауричелли двух переменных.

1. Обобщение функций Лауричелли и его конфлюэнтная форма

А. Эрдейи [12] (см. также [2]) предложил обобщить функций Лауричелли многих переменных в виде

$$H_{p,n}\left(a,b_1,...,b_p,d_{n+1},...,d_p;c_1,...,c_n;\xi_1,...,\xi_p\right)=$$

$$=\sum_{m_1,...,m_p=0}^{\infty}\frac{(a)_{m_1+...+m_n-m_{n+1}-...-m_p}(b_1)_{m_1}...(b_p)_{m_p}(d_{n+1})_{m_{n+1}}...(d_p)_{m_p}}{m_1!...m_p!(c_1)_{m_1}...(c_n)_{m_n}}\xi_1^{m_1}...\xi_p^{m_p}, \quad (4)$$

где p и n целые числа, причем $0 \le n \le p$.

Очевидно, что

$$H_{n,n}=F_A^{(n)},\ H_{n,0}=F_B^{(n)},\ \text{и}\ H_{2,1}=H_2.$$

Гипергеометрическая функция (4) в случае $p=n+1$ принимает вид

$$H_{n+1,n}\left(a,b_1,...,b_n,b_{n+1},d_{n+1};c_1,...,c_n;\xi,\eta\right)=$$

$$=\sum_{m_1,...,m_{n+1}=0}^{\infty}\frac{(a)_{m_1+...+m_n-m_{n+1}}(b_1)_{m_1}...(b_n)_{m_n}(b_{n+1})_{m_{n+1}}(d_{n+1})_{m_{n+1}}}{m_1!...m_{n+1}!(c_1)_{m_1}...(c_n)_{m_n}}\xi_1^{m_1}...\xi_n^{m_n}\eta^{m_{n+1}}. \quad (5)$$

Здесь и далее для краткости принята запись: $\xi := \xi_1,...,\xi_n$.

Из гипергеометрического ряда (5) нетрудно определить следующую конфлюэнтную гипергеометрическую функцию:

$$\mathrm{H}_A^{(n,1)}\left(a,b_1,...,b_n;c_1,...,c_n;\xi,\eta\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}H_{n+1,n}\left(a,b_1,...,b_n,\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon};c_1,...,c_n;\xi,\varepsilon^2\eta\right).$$

При определении конфлюэнтной гипергеометрической функции $\mathrm{H}_A^{(n,1)}$ мы пользовались равенством [2] $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(1/\varepsilon)_k\cdot\varepsilon^k=1$ (где k – натуральное число). Таким образом, конфлюэнтная гипергеометрическая функция многих переменных имеет вид

$$\mathrm{H}_A^{(n,1)}\left(a,b_1,...,b_n;c_1,...,c_n;\xi,\eta\right)=$$

$$=\mathrm{H}_A^{(n,1)}\left[\begin{matrix}a,b_1,...,b_n;\\ c_1,...,c_n;\end{matrix}\ \xi,\eta\right]=\sum_{m_1,...,m_{n+1}=0}^{\infty}\frac{(a)_{m_1+...+m_n-m_{n+1}}(b_1)_{m_1}...(b_n)_{m_n}}{m_1!...m_{n+1}!(c_1)_{m_1}...(c_n)_{m_n}}\xi_1^{m_1}...\xi_n^{m_n}\eta^{m_{n+1}},$$

$$|\xi_1|+...+|\xi_n|<1, \quad (6)$$

Частные случаи конфлюэнтной гипергеометрической функции $\mathrm{H}_A^{(n,1)}$ были известны: в случае двух переменных [1]

$$\mathrm{H}_3\left(a,b;c;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m-n}(b)_m}{m!n!(c)_m}x^m y^n,\ |x|<1$$

и в случае трех переменных [6]

$$\mathrm{A}_2\left(a,b_1,b_2;c_1,c_2;x,y,z\right)=\sum_{m,n,k=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n-k}\left(b_1\right)_m\left(b_2\right)_n}{m!n!k!(c_1)_m\left(c_2\right)_n}x^m y^n z^k,\ |x|+|y|<1.$$

Конфлюэнтные гипергеометрические функции H_3, A_2 и $\mathrm{H}_A^{(n,1)}$ имеют следующие формулы для вычисления производных:

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\partial y^j}\mathrm{H}_3\left(a,b;c;x,y\right)=\frac{(a)_{i-j}\left(b\right)_i}{(c)_i}\mathrm{H}_3\left(a+i-j,b+i;c+i;x,y\right),$$

$$\frac{\partial^{i+j+k}}{\partial x^i\partial y^j\partial z^k}\mathrm{A}_2\left(a,b_1,b_2;c_1,c_2;x,y,z\right)=$$

$$=\frac{(a)_{i+j-k}\left(b_1\right)_i\left(b_2\right)_j}{\left(c_1\right)_i\left(c_2\right)_j}\mathrm{A}_2\left(a+i+j-k,b_1+i,b_2+j;c_1+i,c_2+j;x,y,z\right),$$

$$\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_n+j}}{\partial\xi_1^{i_1}\ldots\partial\xi_n^{i_n}\partial\eta^j}\mathrm{H}_A^{(n,1)}\left(a,b_1,\ldots,b_n;c_1,\ldots,c_n;\xi,\eta\right)=\frac{(a)_{i_1+\ldots+i_n-j}\left(b_1\right)_{i_1}\ldots\left(b_n\right)_{i_n}}{\left(c_1\right)_{i_1}\ldots\left(c_n\right)_{i_n}}\times$$

$$\times\mathrm{H}_A^{(n,1)}\left(a+i_1+\ldots+i_n-j,b_1+i_1,\ldots,b_n+i_n;c_1+i_1,\ldots,c_n+i_n;\xi,\eta\right)\qquad(7)$$

и интегральные представления:

$$\mathrm{H}_3\left(a,b;c;x,y\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1\frac{t^{b-1}\left(1-t\right)^{c-b-1}}{\left(1-xt\right)^a}{}_0F_1\left(1-a;-\left(1-xt\right)y\right)dt,$$

$$\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}b>0;$$

$$\mathrm{A}_2\left(a,b_1,b_2;c_1,c_2;x,y,z\right)=\frac{\Gamma\left(c_1\right)\Gamma\left(c_2\right)}{\Gamma\left(b_1\right)\Gamma\left(b_2\right)\Gamma\left(c_1-b_1\right)\Gamma\left(c_2-b_2\right)}\times$$

$$\times\int_0^1\int_0^1\frac{s^{b_1-1}t^{b_2-1}\left(1-s\right)^{c_1-b_1-1}\left(1-t\right)^{c_2-b_2-1}}{\left(1-xs-yt\right)^a}{}_0F_1\left(1-a;-\left(1-xs-yt\right)z\right)dsdt,$$

$$\operatorname{Re}c_1>\operatorname{Re}b_1>0,\ \operatorname{Re}c_2>\operatorname{Re}b_2>0;$$

$$H_A^{(n,1)}\left(a,b_1,\ldots,b_n;c_1,\ldots,c_n;\xi_1,\ldots,\xi_n,\eta\right)=$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{\Gamma\left(c_i\right)}{\Gamma\left(b_i\right)\Gamma\left(c_i-b_i\right)}\cdot\underbrace{\int_0^1\ldots\int_0^1}_{n\text{ раз}}\prod_{i=1}^{n}t_i^{b_i-1}\left(1-t_i\right)^{c_i-b_i-1}\left(1-\xi_1t_1-\ldots-\xi_nt_n\right)^{-a}\times$$

$$\times{}_0F_1\left(1-a;-\left(1-\xi_1t_1-\ldots-\xi_nt_n\right)\eta\right)dt_1\ldots dt_n,$$

$$\operatorname{Re}c_i>\operatorname{Re}b_i>0,\ i=\overline{1,n},$$

где ${}_0F_1\left(a;x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(a)_k\,k!}x^k$ – обобщенная гипергеометрическая функция Гаусса [1].

Теперь, воспользовавшись формулой для вычисления производных (7), нетрудно показать, что конфлюэнтная гипергеометрическая функция (6) удовлетворяет систему уравнений

$$\begin{cases} \xi_i(1-\xi_i)\omega_{\xi_i\xi_i} - \xi_i \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} \xi_j \omega_{\xi_i\xi_j} + \xi_i\eta\omega_{\xi_i\eta} + [c_i - (a+b_i+1)\xi_i]\omega_{\xi_i} - \\ \qquad - b_i \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} \xi_j \omega_{\xi_j} + b_i\eta\omega_\eta - ab_i\omega = 0, \; i = \overline{1,n}, \\ \eta\omega_{\eta\eta} - \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j\omega_{\xi_j} + (1-a)\omega_\eta + \omega = 0, \end{cases} \tag{8}$$

где $\omega(\xi,\eta) = \mathrm{H}_A^{(n,1)}(a, b_1, ..., b_n; c_1, ..., c_n; \xi, \eta)$.

Отметим, что частные случаи (т.е. $n = 2$ и $n = 3$) системы уравнений (8) встречаются в работах [1, 5–8].

Выражение $\omega(\xi,\eta) = \xi_1^{\tau_1} ... \xi_n^{\tau_n} \eta^{\nu} \psi(\xi,\eta)$, где $\psi(\xi,\eta)$ – произвольная функция, а $\tau_1, \ldots, \tau_n$ и ν – постоянные, подлежащие определению, подставим в систему (8). В результате элементарных вычислений получим алгебраическую систему уравнений для определения $\tau_1, \ldots, \tau_n$ и ν, которая, в свою очередь, имеет следующие 2^n решения:

$$C_n^0 = 1 \; \{\tau_1 = 0, \quad \tau_2 = 0, \quad \tau_3 = 0, \quad ... \quad \tau_{n-1} = 0, \quad \tau_n = 0, \quad \nu = 0,$$

$$C_n^1 = n \begin{cases} \tau_1 = 1-c_1, & \tau_2 = 0, & \tau_3 = 0, & ..., & \tau_{n-1} = 0, & \tau_n = 0, & \nu = 0, \\ \tau_1 = 0, & \tau_2 = 1-c_2, & \tau_3 = 0, & ..., & \tau_{n-1} = 0, & \tau_n = 0, & \nu = 0, \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \tau_1 = 0, & \tau_2 = 0, & \tau_3 = 0, & ..., & \tau_{n-1} = 0, & \tau_n = 1-c_n, & \nu = 0, \end{cases}$$

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \begin{cases} \tau_1 = 1-c_1 & \tau_2 = 1-c_2 & \tau_3 = 0, & ..., & \tau_{n-1} = 0, & \tau_n = 0, & \nu = 0, \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \tau_1 = 1-c_1, & \tau_2 = 0, & \tau_3 = 0, & ..., & \tau_{n-1} = 0, & \tau_n = 1-c_n, & \nu = 0, \\ \tau_1 = 0, & \tau_2 = 1-c_2, & \tau_3 = 1-c_3, & ..., & \tau_{n-1} = 0, & \tau_n = 0, & \nu = 0, \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \tau_1 = 0, & \tau_2 = 0, & \tau_3 = 0, & ... & \tau_{n-1} = 1-c_{n-1}, & \tau_n = 1-c_n, & \nu = 0, \end{cases}$$

....

$$C_n^n = 1 \; \{\tau_1 = 1-c_1, \quad \tau_2 = 1-c_2, \quad \tau_3 = 1-c_3, \quad ... \quad \tau_{n-1} = 1-c_{n-1}, \quad \tau_n = 1-c_n, \quad \nu = 0.$$

Здесь $C_n^i = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$ и нетрудно заметить, что $1 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + 1 = 2^n$.

Следовательно, система уравнений (8) имеет 2^n линейно независимых решений:

$$1 \{ \mathrm{H}_A^{(n,1)}(a, b_1, ..., b_n; c_1, ..., c_n; \xi, \eta),$$

$$C_n^1 \begin{cases} \xi_1^{1-c_1} \mathrm{H}_A^{(n,1)}(a, 1+b_1-c_1, b_2, ..., b_n; 2-c_1, c_2, ..., c_n; \xi, \eta), \\ .... \\ \xi_n^{1-c_n} \mathrm{H}_A^{(n,1)}(a, b_1, ..., b_{n-1}, 1+b_n-c_n; c_1, ..., c_{n-1}, 2-c_n; \xi, \eta), \end{cases}$$

$$C_n^2\begin{cases} \xi_1^{1-c_1}\xi_2^{1-c_2}\mathrm{H}_A^{(n,1)}(a,1+b_1-c_1,1+b_2-c_2,b_3,...,b_n;2-c_1,c_2,...,c_n;\xi,\eta), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi_1^{1-c_1}\xi_n^{1-c_n}\mathrm{H}_A^{(n,1)}(a,1+b_1-c_1,b_2,...,b_{n-1},1+b_n-c_n;2-c_1,c_2,...,c_{n-1},2-c_n;\xi,\eta), \\ \xi_2^{1-c_2}\xi_3^{1-c_3}\mathrm{H}_A^{(n,1)}(a,b_1,1+b_2-c_2,1+b_3-c_3,b_4,...,b_n;c_1,2-c_2,2-c_3,c_4,...,c_n;\xi,\eta), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi_{n-1}^{1-c_{n-1}}\xi_n^{1-c_n}\mathrm{H}_A^{(n,1)}(a,b_1,...,b_{n-2},1+b_{n-1}-c_{n-1},1+b_n-c_n;c_1,...,c_{n-2},2-c_{n-1},2-c_n;\xi,\eta), \end{cases}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$1\left\{\xi_1^{1-c_1}...\xi_n^{1-c_n}\mathrm{H}_A^{(n,1)}(a,1+b_1-c_1,...,1+b_n-c_n;2-c_1,...,2-c_n;\xi,\eta).\right.$$

С учетом симметричности функции $\mathrm{H}_A^{(n,1)}$ относительно параметров $b_1, \dots, b_n$, $c_1, \dots, c_n$ можно сгруппировать вышеприведенные линейно независимые решения системы уравнений (8). В результате этого уменьшится количество решений системы (8), которые необходимы в дальнейших исследованиях. Таким образом, все решения системы (8) выражаются формулой

$$\omega_k(\xi) = C_k\prod_{i=1}^{k}\xi_i^{1-c_i}\mathrm{H}_A^{(n,1)}\left[\begin{matrix} a,b_1+1-c_1,...,b_k+1-c_k,b_{k+1},...,c_n; \\ 2-c_1,...,2-c_k,c_{k+1},...,c_n; \end{matrix}\xi\right],\quad k=\overline{0,n}, \tag{9}$$

где C_k – произвольные постоянные. Произведение вида $\prod\limits_{i=1}^{0}$ считается равным единице.

2. Формулы разложения

Формулы разложения позволяют представить гипергеометрическую функцию многих переменных через бесконечную сумму произведений нескольких гипергеометрических функций с одной переменной, а это, в свою очередь, облегчает процесс изучения свойств функций многих переменных. Впервые Дж.Берчнелл и Т.Ченди [13,14] разложили многие гипергеометрические функции двух переменных в бесконечную сумму произведений двух гипергеометрических функций Гаусса одной переменной. Например, функция $F_2(a,b_1,b_2;c_1,c_2;x,y)$, определенная формулой (2), разлагается в виде [13]

$$F_2(a,b_1,b_2;c_1,c_2;x,y) =$$
$$=\sum_{=0}^{\infty}\frac{(a)_i(b_1)_i(b_2)_i}{i!(c_1)_i(c_2)_i}x^iy^iF(a+i,b_1+i;c_1+i;x)F(a+i,b_2+i;c_2+i;y).$$

В основе метода Берчнелла – Ченди, который ограничивался функциями двух переменных, лежали следующие взаимно-обратные символические операторы [13]:

$$\nabla(h)=\frac{\Gamma(h)\Gamma(\delta_1+\delta_2+h)}{\Gamma(\delta_1+h)\Gamma(\delta_2+h)},\quad \Delta(h)=\frac{\Gamma(\delta_1+h)\Gamma(\delta_2+h)}{\Gamma(h)\Gamma(\delta_1+\delta_2+h)}, \tag{10}$$

где $\delta_1 = x\dfrac{\partial}{\partial x}$ и $\delta_2 = y\dfrac{\partial}{\partial y}$.

С целью обобщить операторы $\nabla(h)$ и $\Delta(h)$, определенные (10), А. Хасанов и Х.М. Сривастава [15,16] ввели операторы

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{x_1;x_2,\dots,x_n}(h)&=\frac{\Gamma(h)\Gamma(\delta_1+\dots+\delta_n+h)}{\Gamma(\delta_1+h)\Gamma(\delta_2+\dots+\delta_n+h)},\\ \tilde{\Delta}_{x_1;x_2,\dots,x_m}(h)&=\frac{\Gamma(\delta_1+h)\Gamma(\delta_2+\dots+\delta_n+h)}{\Gamma(h)\Gamma(\delta_1+\dots+\delta_n+h)},\end{aligned}\tag{11}$$

где $\delta_i=x_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}\ (i=1,\dots,n)$, с помощью которых им удалось найти формулы разложения целого класса гипергеометрических функций многих переменных. Например, гипергеометрическая функция Лауричелли n переменных $F_A^{(n)}$, определенная формулой (3), имеет разложение [15]

$$\begin{gathered}F_A^{(n)}(a,b_1,\dots,b_n;c_1,\dots,c_n;\xi_1,\dots,\xi_n)=\\ =\sum_{m_2,\dots,m_n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m_2+\dots+m_n}(b_1)_{m_2+\dots+m_n}(b_2)_{m_2}\dots(b_n)_{m_n}}{m_2!\dots m_n!(c_1)_{m_2+\dots+m_n}(c_2)_{m_2}\dots(c_n)_{m_n}}\xi_1^{m_2+\dots+m_n}\xi_2^{m_2}\dots\xi_n^{m_n}\times\\ \times F(a+m_2+\dots+m_n,b_1+m_2+\dots+m_n;c_1+m_2+\dots+m_n;\xi_1)\times\\ \times F_A^{(n-1)}(a+m_2+\dots+m_n,b_2+m_2,\dots,b_n+m_n;c_2+m_2,\dots,c_n+m_n;\xi_2,\dots,\xi_n),\\ n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.\end{gathered}\tag{12}$$

Однако, из-за рекуррентности формулы (12) могут возникать дополнительные трудности в приложениях этого разложения. Дальнейшее изучение свойств операторов (10) и (11) показало, что формулу (12) можно привести к более удобному виду [17]

$$F_A^{(n)}(a,b_1,\dots,b_n;c_1,\dots,c_n;\xi)=\sum_{\substack{m_{i,j}=0\\(2\le i\le j\le n)}}^{\infty}\frac{(a)_{N(n,n)}}{\underset{(2\le i\le j\le n)}{m_{2,2}!m_{2,3}!\cdots m_{i,j}!\cdots m_{n,n}!}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\frac{(b_k)_{M(k,n)}}{(c_k)_{M(k,n)}}\xi_k^{M(k,n)}F(a+N(k,n),b_k+M(k,n);c_k+M(k,n);\xi_k),\ n\in\mathbb{N},\tag{13}$$

где $M(k,n)=\sum\limits_{i=s}^{k}m_{i,k}+\sum\limits_{i=k+1}^{n}m_{k+1,i},\ N(k,n)=\sum\limits_{i=s}^{k+1}\sum\limits_{j=i}^{n}m_{i,j}$.

Теперь, следуя [13–16] и используя формулу (13), нетрудно установить формулу разложения для конфлюэнтной гипергеометрической функции $\mathrm{H}_A^{(n,1)}$, определенной формулой (6):

$$\begin{gathered}\mathrm{H}_A^{(n,1)}(a;b_1,\dots,b_n;c_1,\dots,c_n;\xi,\eta)=\\ =\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\sum_{I(n,k)}d(k,j)C_k^j\Phi(k,i_1,\dots,i_n;\xi)\frac{(-1)^{k+j}\eta^j}{(1-a)_j\,j!}\,{}_0F_1(1-a+j;-\eta)\ \ n\in\mathbb{N},\end{gathered}\tag{14}$$

где
$$d(k,j)=\begin{cases}1, & \text{если } k=0 \text{ и } j=0,\\ j/k, & \text{если } k\ge 1 \text{ и } j>0,\end{cases}$$

$$I(n,k)=\{(i_1,...,i_n):i_1\ge 0,...,i_n\ge 0,\ i_1+...+i_n=k\},$$

$$\Phi(k,i_1,...,i_n;\xi)=\sum_{\substack{m_{i,j}=0\\(2\le i\le j\le n)}}^{\infty}\frac{(a)_{N(n,n)}}{\underset{(2\le i\le j\le n)}{m_{2,2}!m_{2,3}!\cdots m_{i,j}!\cdots m_{n,n}!}}\times$$

$$\times\prod_{s=1}^{n}\frac{(b_s)_{i_s}\xi_s^{i_s}}{(c_s)_{i_s}i_s!}F_A^{(n)}(a+k;b_1+i_1,...,b_n+i_n;c_1+i_1,...,c_n+i_n;\xi).$$

Исследуем гипергеометрическую функцию $\Phi(k,i_1,...,i_n;\xi)$. Для этого функцию $F_A^{(n)}(a+k;b_1+i_1,...,b_n+i_n;c_1+i_1,...,c_n+i_n;\xi)$ выпишем с помощью формулы (13). Применив к каждой $F(a+k+N(k,n),b_k+i_k+M(k,n);c_k+i_k+M(k,n);\xi_k)$ известную формулу [1]

$$F(a,b;c;x)=(1-x)^{-b}F\left(c-a,b;c;\frac{x}{x-1}\right),$$

получим

$$\Phi(k,i_1,...,i_n;\xi)=$$

$$=\sum_{\substack{m_{i,j}=0\\(2\le i\le j\le n)}}^{\infty}\frac{(a)_{N(n,n)}}{\underset{(2\le i\le j\le n)}{m_{2,2}!m_{2,3}!\cdots m_{i,j}!\cdots m_{n,n}!}}\prod_{s=1}^{n}\frac{(b_s)_{i_s+M(s,n)}}{(c_s)_{i_s+M(s,n)}i_s!}(1-\xi_s)^{-b_s}\left(\frac{\xi_s}{1-\xi_s}\right)^{i_s+M(s,n)}\times$$

$$\times F\left(c_s+i_s-a-k+M(s,n)-N(s,n),b_s+i_s+M(s,n);c_s+i_s+M(s,n);\frac{\xi_s}{\xi_s-1}\right).\qquad(15)$$

Формула (15) будет полезна при исследовании фундаментальных решений уравнения (1).

3. Фундаментальные решения

Решение уравнения (1) в области R_n^+ будем искать в виде

$$u(x,x_0)=P(r)\omega(\xi,\eta),\qquad(16)$$

где $x=x_1,...,x_n;\ x_0=x_{01},...,x_{0n};\ P(r)=\left(r^2\right)^{-\alpha},\ \alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-1+\frac{n}{2};$

$$\xi:=\xi_1,...,\xi_n,\ \eta=-\frac{1}{4}\lambda^2r^2;\ \ r^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{0i})^2,\ \ r_k^2=(x_k+x_{0k})^2+\sum_{i=1,i\ne k}^{n}(x_i-x_{0i})^2,$$

$$\xi_k=\frac{r^2-r_k^2}{r^2},\ \ k=\overline{1,n}.$$

Вычислив необходимые производные функции $u(x,x_0)$ и подставив их в уравнение (1), получим

$$\sum_{m=1}^{n}A_m\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi_m^2}+A_{n+1}\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}+\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=m+1}^{n}B_{mk}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi_m\partial\xi_k}+\sum_{m=1}^{n}C_m\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi_m\partial\eta}+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}D_m\frac{\partial\omega}{\partial\xi_m}+D_{n+1}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}+E\omega=0,\qquad(17)$$

где $$A_k=-\frac{4P(r)}{r^2}\frac{x_{0k}}{x_k}\xi_k\left(1-\xi_k\right),\quad C_k=\frac{4P(r)}{r^2}\frac{x_{0k}}{x_k}\xi_k\eta+\frac{\lambda^2}{2}P(r)\xi_k,$$

$$B_{kl}=\frac{4P(r)}{r^2}\left(\frac{x_{0k}}{x_k}+\frac{x_{0l}}{x_l}\right)\xi_k\xi_l,\ k\neq l,\ l=\overline{1,n},$$

$$D_k=-\frac{4P(r)}{r^2}\left\{\left(2\alpha_k-\alpha\xi_k\right)\frac{x_{0k}}{x_k}-\xi_k\sum_{m=1}^{n}\frac{x_{0m}}{x_m}\alpha_m\right\},\ k=\overline{1,n};$$

$$A_{n+1}=\lambda^2P(r)\eta,\quad D_{n+1}=\frac{4P(r)}{r^2}\eta\sum_{m=1}^{n}\frac{x_{0m}}{x_m}\alpha_m+\lambda^2P(r)\alpha,$$

$$E=-\lambda^2P+\frac{4\alpha P(r)}{r^2}\sum_{m=1}^{n}\frac{x_{0m}}{x_m}\alpha_m.$$

С учетом найденных выражений коэффициентов уравнения (17) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}\xi_i\left(1-\xi_i\right)\omega_{\xi_i\xi_i}-\xi_i\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}\xi_j\omega_{\xi_i\xi_j}+\xi_i\eta\omega_{\xi_i\eta}+\left[2\alpha_i-\left(\alpha+\alpha_i+1\right)\xi_i\right]\omega_{\xi_i}-\\ -\alpha_i\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}\xi_j\omega_{\xi_j}+\alpha_i\eta\omega_\eta-\alpha\alpha_i\omega=0,i=\overline{1,n},\\ \eta\omega_{\eta\eta}-\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j\omega_{\xi_j}+\left(1-\alpha\right)\omega_\eta+\omega=0,\end{cases}\tag{18}$$

Теперь, воспользовавшись решениями (9) системы уравнений (8), нетрудно определить решения системы (18), и подставив эти решения в (16), получить фундаментальные решения уравнения (1) в виде

$$q_k\left(x,x_0\right)=\gamma_k\prod_{i=1}^{k}\left(x_ix_{0i}\right)^{1-2\alpha_i}\cdot r^{-2\tilde\alpha}\mathrm{H}_A^{(n,1)}\left[\begin{matrix}\tilde\alpha_k,1-\alpha_1,...,1-\alpha_k,\alpha_{k+1},...,\alpha_n;\\2-2\alpha_1,...,2-2\alpha_k,2\alpha_{k+1},...,2\alpha_n;\end{matrix}\xi,\eta\right],\tag{19}$$

где $$\gamma_k=2^{2\tilde\alpha_k-m}\frac{\Gamma\left(\tilde\alpha_k\right)}{\pi^{m/2}}\prod_{j=1}^{k}\frac{\Gamma\left(1-\alpha_j\right)}{\Gamma\left(2-2\alpha_j\right)}\prod_{i=k+1}^{n}\frac{\Gamma\left(\alpha_i\right)}{\Gamma\left(2\alpha_i\right)},$$

$$\tilde\alpha_k=\frac{n}{2}+k-1-\alpha_1-...-\alpha_k+\alpha_{k+1}+...+\alpha_n,\ k=\overline{0,n}.$$

4. Особенность фундаментальных решений уравнения (1).

Определим порядок особенности фундаментальных решений (19) при $r\to 0$. Возьмем решение

$$q_0\left(x,x_0\right)=\gamma_0r^{-2\tilde\alpha_0}\mathrm{H}_A^{(n,1)}\left(\tilde\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n;2\alpha_1,...,2\alpha_n;\xi,\eta\right).$$

Воспользовавшись формулами (14) и (15), получим

$$q_0\left(x,x_0\right)=r^{2-n}\prod_{i=1}^{n}r_i^2\cdot f\left(r^2,r_1^2,...,r_n^2\right),$$

где

$$f\left(r^2,r_1^2,...,r_n^2\right)=\gamma_0\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\sum_{I(n,k)}d(k,j)C_k^j\frac{(-1)^{k+j}\eta^j}{(1-\tilde{\alpha}_0)_j\,j!}\,{}_0F_1(1-\tilde{\alpha}_0+j;-\eta)\times$$

$$\times\sum_{\substack{m_{i,j}=0\\(2\le i\le j\le n)}}^{\infty}\frac{(\tilde{\alpha}_0)_{N(n,n)}}{\underset{(2\le i\le j\le n)}{m_{2,2}!m_{2,3}!\cdots m_{i,j}!\cdots m_{n,n}!}}\prod_{s=1}^{n}\frac{(\alpha_s)_{i_s+M(s,n)}}{(2\alpha_s)_{i_s+M(s,n)}\,i_s!}\left(1-\frac{r^2}{r_s^2}\right)^{i_s+M(s,n)}\times$$

$$\times F\left(2\alpha_s+i_s-\tilde{\alpha}_0-k+M(s,n)-N(s,n),\alpha_s+i_s+M(s,n);2\alpha_s+i_s+M(s,n);1-\frac{r^2}{r_s^2}\right).$$

Теперь в $f\left(r^2,r_1^2,...,r_n^2\right)$, перейдя к пределу при $r\to 0$ и несколько раз применив к полученному выражению известную формулу

$$F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\quad c\ne 0,-1,-2,...,\ \mathrm{Re}(c-a-b)>0,$$

имеем

$$f\left(0,r_1^2,...,r_n^2\right)=\frac{4^{\alpha_1+...+\alpha_n-1}}{\pi^{n/2}}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right),\ p>2.$$

Таким образом, фундаментальное решение $q_0(x,x_0)$ при $r\to 0$ имеет особенность порядка $1/r^{n-2}$. Аналогичным образом устанавливается, что фундаментальные решения $q_k(x,x_0)$ ($k=\overline{1,n}$) при $r\to 0$ также имеют особенность порядка $1/r^{n-2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
2. *Srivastava H.M., Karlsson P.W.* Multiple Gaussian Hypergeometric Series. New York; Chichester; Brisbane and Toronto: Halsted Press, 1985. 428 p.
3. *Jain R.N.* The confluent hypergeometric functions of three variables // Proc. Nat. Acad. Sci. India Sect. A. 1966. V. 36. P. 395–408.
4. *Exton H.* On certain confluent hypergeometric of three variables // Ganita. 1970. V. 21. No. 2. P. 79–92.
5. *Уринов А.К.* Фундаментальные решения для некоторых уравнений эллиптического типа с сингулярными коэффициентами // Научный вестник Ферганского государственного университета. 2006. № 1. С. 5–11.
6. *Hasanov A.* Fundamental solutions bi-axially symmetric Helmholtz equation // Complex Variables and Elliptic Equations. 2007. V. 52. No. 8. P. 673–683.
7. *Hasanov A., Karimov E.T.* Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients // Applied Mathematic Letters. 2009. V. 22. P. 1828–1832.
8. *Urinov A.K., Karimov E.T.* On fundamental solutions for 3D singular elliptic equations with a parameter // Applied Mathematic Letters. 2011. V. 24. P. 314–319.
9. *Karimov E.T.* On a boundary problem with Neumann's condition for 3D singular elliptic equations // Applied Mathematics Letters. 2010. V. 23. P. 517–522.
10. *Karimov E.T.* A boundary-value problem for 3-D elliptic equation with singular coefficients // Progress in Analysis and its Applications. 2010. P. 619–625.
11. *Lauricella G.* Sille funzioni ipergeometriche a più variabili // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1893. V. 7. P. 111–158.

12. *Erdélyi A.* Integraldarstellungen für Produkte Whittakerscher Funktionen // Nieuw Arch. Wisk. 1939. No. 2(20). P. 1–34.
13. *Burchnall J.L.*, *Chaundy T.W.* Expansions of Appell's double hypergeometric functions // Quart. J. Math. (Oxford). 1940. Ser. 11. P. 249–270.
14. *Burchnall J.L.*, *Chaundy T.W.* Expansions of Appell's double hypergeometric functions. II // Quart. J. Math. (Oxford). 1941. Ser. 12. P. 112–128.
15. *Hasanov A.*, *Srivastava H.M.* Some decomposition formulas associated with the Lauricella function $F_A^{(r)}$ and other multiple hypergeometric functions // Applied Mathematic Letters. 2006. 19(2). P. 113–121.
16. *Hasanov A.*, *Srivastava H.M.* Decomposition Formulas Associated with the Lauricella Multivariable Hypergeometric Functions // Computers and Mathematics with Applications. 2007. 53(7). P. 1119–1128.
17. *Ergashev T.G.* Fundamental solutions for a class of multidimensional elliptic equations with several singular coefficients. ArXiv:1805.03826. 9 p.

Статья поступила 18.07.2018 г.

Urinov A.K., Ergashev T.G. (2018) CONFLUENT HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS OF MANY VARIABLES AND THEIR APPLICATION TO THE FINDING OF FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF THE GENERALIZED HELMHOLTZ EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENTS *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 55. pp. 45–56

DOI 10.17223/19988621/55/5

Keywords: confluent hypergeometric function, Lauricella functions, fundamental solutions, generalized Helmholtz equation with several singular coefficients, decomposition formula.

An investigation of applied problems related to heat conduction and dynamics, electromagnetic oscillations and aerodynamics, quantum mechanics and potential theory leads to the study of various hypergeometric functions. The great success of the theory of hypergeometric functions of one variable has stimulated the development of the corresponding theory for functions of two and more variables. In the theory of hypergeometric functions, an increase in the number of variables will always be accompanied by a complication in the study of the function of several variables. Therefore, the decomposition formulas that allow us to represent the hypergeometric function of several variables in terms of an infinite sum of products of several hypergeometric functions in one variable are very important, and this, in turn, facilitates the process of studying the properties of multidimensional functions. Confluent hypergeometric functions in all respects, including the decomposition formulas, have been little studied in comparison with other types of hypergeometric functions, especially when the dimension of the variables exceeds two. In this paper, we define a new class of confluent hypergeometric functions of several variables, study their properties, give integral representations, and establish decomposition formulas. An important application of confluent functions has been found. It turns out that all fundamental solutions of the generalized Helmholtz equation with singular coefficients are written out through one new introduced confluent hypergeometric function of several variables. Using the decomposition formulas, the order of the singularity of the fundamental solutions of the above elliptic equation is determined.

AMS Mathematical Subject Classification: 33C15, 33C20, 35A08, 35J70

URINOV Ahmadzhon Kushakovich (Fergana State University, Fergana, Uzbekistan). E-mail: urinovak@mail.ru

ERGASHEV Tuhtasin Gulamzhanovich (V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: ertuhtasin@mail.ru

REFERENCES

1. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G. (1953) *Higher Transcendental Functions. 1*. New York, Toronto and London: McGraw-Hill Book Company.
2. Srivastava H.M., Karlsson P.W. (1985) *Multiple Gaussian Hypergeometric Series*. New York, Chichester, Brisbane and Toronto: Halsted Press.
3. Jain R.N. (1966) The confluent hypergeometric functions of three variables. *Proc. Nat. Acad. Sci. India Sect. A*. 36. pp. 395–408.
4. Exton H. (1970) On certain confluent hypergeometric of three variables. *Ganita*. 21(2). pp. 79–92.
5. Urinov A.K. (2006) Fundamental'nye resheniya dlya nekotoryh uravnenij ellipticheskogo tipa s singulyarnymi koefficientami [Fundamental solutions for the some elliptic equations with singular coefficients]. *Nauchnyj vestnik Ferganskogo gosudarstvennogo universiteta – Scientific Records of Fergana State University*. 1. pp. 5–11.
6. Hasanov A. (2009) Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 52(8). pp. 673–683. DOI: 10.1080/17476930701300375.
7. Hasanov A., Karimov E.T. (2009) Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients. *Applied Mathematic Letters*. 22. pp. 1828–1832. DOI: 10.1016/j.aml.2009.07.006.
8. Urinov A.K., Karimov E.T. (2011) On fundamental solutions for 3D singular elliptic equations with a parameter. *Applied Mathematic Letters*. 24. pp. 314–319. DOI: 10.1016/j.aml.2010.10.013.
9. Karimov E.T. (2010) On a boundary problem with Neumann's condition for 3D singular elliptic equations. *Applied Mathematics Letters*. 23. pp. 517–522. DOI: 10.1016/j.aml.2010.01.002.
10. Karimov E.T. (2010) A boundary-value problem for 3-D elliptic equation with singular coefficients. *Progress in analysis and its applications*. pp. 619–625.
11. Lauricella G. (1893) Sulle funzioni ipergeometriche a più variabili. *Rend. Circ. Mat. Palermo*. 7. pp. 111–158.
12. Erdélyi A. (1939) Integraldarstellungen für Produkte Whittakerscher Funktionen. *Nieuw Arch. Wisk.* (2) 20. pp. 1–34.
13. Burchnall J.L., Chaundy T.W. (1940) Expansions of Appell's double hypergeometric functions. *Quart. J. Math. (Oxford)*. 11. pp. 249–270.
14. Burchnall J.L., Chaundy T.W. (1941) Expansions of Appell's double hypergeometric functions. II. *Quart. J. Math.(Oxford)*. 12. pp. 112–128.
15. Hasanov A., Srivastava H.M. (2006) Some decomposition formulas associated with the Lauricella function $F_A^{(r)}$ and other multiple hypergeometric functions. *Applied Mathematic Letters*. 19(2). pp. 113–121. DOI: 10.1016/j.aml.2005.03.009.
16. Hasanov A., Srivastava H.M. (2007) Decomposition Formulas Associated with the Lauricella Multivariable Hypergeometric Functions. *Computers and Mathematics with Applications*. 53(7). pp. 1119–1128. DOI: 10.1016/j.camwa.2006.07.007.
17. Ergashev T.G. (2018) Fundamental solutions for a class of multidimensional elliptic equations with several singular coefficients. *ArXiv*:1805.03826. 9 p.