# МАТЕМАТИКА

УДК 512.541

**С.Я. Гриншпон, М.И. Рогозинский**

## *k*-ВПОЛНЕ ТРАНЗИТИВНОСТЬ ОДНОРОДНО РАЗЛОЖИМЫХ ГРУПП[1]

Полностью описаны *k*-вполне транзитивные сепарабельные и однородно разложимые группы без кручения, а также *k*-вполне транзитивные вполне разложимые группы.

**Ключевые слова:** *k-вполне транзитивность*, *однородно разложимая группа*, *сепарабельная группа*, *эндоморфизм.*

Одним из важнейших понятий в теории абелевых групп является понятие вполне транзитивности. Это понятие было рассмотрено И. Капланским в [1] для *p*-групп. Для групп без кручения данное понятие впервые появилось в работе П.А. Крылова [2]. Для произвольной абелевой группы понятие «вполне транзитивность» рассматривалось в [3]. Затем оно уточнилось в [9]. При этом введенное понятие вполне транзитивной абелевой группы согласуется с рассматриваемыми ранее определениями вполне транзитивной *p*-группы и вполне транзитивной группы без кручения. Отметим, что понятие вполне транзитивной группы тесно связано с исследованием вполне характеристических подгрупп абелевых групп [4, 9].

В [5] Д. Кэрролл вводит понятие *k*-вполне транзитивной *p*-группы, тем самым обобщая понятие вполне транзитивности для *p*-групп.

Пусть $G$ – $p$-группа и $k \in \boldsymbol{N}$ . Группа $G$ называется *k-вполне транзитивной*, если из выполнения условий для кортежей $X = (x_1, x_2, ..., x_k), Y = (y_1, y_2, ..., y_k)$ элементов группы $G$

(1) $H(x_i) \le H(y_i), i = \overline{1,k}$;

(2) кортеж $X$ высотно независим, в том смысле, что при $i \ne j, h(rx_i) \ne h(sx_j)$ для любых $r, s \in \boldsymbol{Z}$ , кроме случая $rx_i = sx_j = 0$ ,

следует существование эндоморфизма $\theta \in E(G)$ группы $G$ со свойством $\theta(x_i) = y_i, i = \overline{1,k}$ .

В [6] рассматривается обобщение понятия вполне транзитивности для абелевых групп без кручения.

**Определение 1 [6].** Пусть $G$ – группа без кручения и $k \in \mathbb{N}$ . Кортеж $X = (x_1, x_2, ..., x_k)$ элементов группы $G$ называется *t-независимым*, если при $i \ne j$ типы $t(x_i)$ и $t(x_j)$ несравнимы. Наибольшую длину *t*-независимого кортежа

[1] Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями»; работа выполнена также в рамках темы 2.3684.2011 Томского государственного университета.

группы $G$ назовем *t-длиной* и будем обозначать $k_t(G)$. В случае, если в группе $G$ существует $t$-независимый кортеж длины $k$ для всех $k \in \mathbb{N}$, полагаем $k_t(G) = \infty$.

**Определение 2 [6].** Пусть $G$ – группа без кручения и $k \in \mathbb{N}$. Группу $G$ назовем *k-вполне транзитивной*, если для любых двух кортежей $X = (x_1, x_2, ...x_k)$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_k)$ элементов группы $G$, удовлетворяющих условиям:

(1) $\chi(x_i) \le \chi(y_i)$ для любого $i = \overline{1,k}$;

(2) кортеж $X$ является $t$-независимым,

следует существование эндоморфизма $\theta$ группы $G$ со свойством $\theta(x_i) = y_i \; (i = \overline{1,k})$.

При $k = 1$ получаем понятие вполне транзитивности. Ясно также, что при $k > k_t(G)$ группа $G$ является $k$-вполне транзитивной по определению. В частности, при $k > 1$ всякая однородная группа (в том числе любая делимая группа без кручения и группа без кручения ранга 1) является $k$-вполне транзитивной.

Везде далее в тексте под словом «группа» будем подразумевать абелеву группу без кручения.

Заметим, что условие $t$-независимости исключает возможность равенства элементов кортежа нулю.

В [6] показано, что в определении 2 условие $t$-независимости кортежа $X$ нельзя заменить условием линейной независимости. Однако для $k$-вполне транзитивных групп имеет место следующая связь:

**Теорема 3.** Пусть $k \ge 2$ и $G$ – $k$-вполне транзитивная группа. Тогда всякий $t$-независимый кортеж длины $k$ является линейно независимым.

***Доказательство.*** Пусть группа $G$ – $k$-вполне транзитивна для некоторого $k \ge 2$ и кортеж $X = (x_1, x_2, ..., x_k)$ – $t$-независим. Предположим, что кортеж $X$ линейно зависим. Тогда существуют целые $m_1, m_2, ..., m_k$, не все равные нулю, такие, что $m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_kx_k = 0 \; (*)$. Пусть $m_j \ne 0 \; (1 \le j \le k)$. Рассмотрим кортеж $Y = (y_1, y_2, ..., y_k)$, где $y_i = x_i$ при $i \ne j$ и $y_j = 2x_j$. Ясно, что $\chi(x_i) \le \chi(y_i) \; (i = \overline{1,k})$. Тогда, в силу $k$-вполне транзитивности группы $G$, существует $\theta \in E(G)$, такой, что $\theta(x_i) = y_i \; (i = \overline{1,k})$. Подействуем эндоморфизмом $\theta$ на обе части равенства (*). Получим $\theta(m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_kx_k) = \sum_{i=1}^{k} m_iy_i = \sum_{i \ne j} m_ix_i + 2m_jx_j = 0$. Перепишем данное равенство в следующем виде: $(m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_kx_k) + m_jx_j = 0 \; (**)$. Учитывая равенство (*), получаем, что $x_j = 0$, что противоречит $t$-независимости кортежа $X$. Таким образом, кортеж $X$ линейно независим. ■

**Следствие 4.** Группа без кручения $G$ конечного ранга не является $k$-вполне транзитивной для всех $k$, удовлетворяющих неравенству $r(G) < k \le k_t(G)$.

***Доказательство.*** Для группы конечного ранга длина линейно независимого кортежа не превосходит $r(G)$. Для $k$-вполне транзитивной группы, в силу теоремы 2, всякий $t$-независимый кортеж является линейно независимым. Следовательно, при $r(G) < k \le k_t(G)$ в группе $G$ не существует $t$-независимого кортежа, который бы являлся линейно независимым, то есть группа $G$ в таком случае не является $k$-вполне транзитивной. ■

**Теорема 5.** Группа $G$ $k$-вполне транзитивна для некоторого $k>1$ тогда и только тогда, когда $k$-вполне транзитивна ее редуцированная часть.

***Доказательство.*** *Необходимость* очевидна, поскольку прямое слагаемое $k$-вполне транзитивной группы само $k$-вполне транзитивно [7].

*Достаточность.* Пусть $k>1$ и $G=R\oplus D$, где $R$ – редуцированная часть группы $G$, $D$ – делимая часть. Пусть также группа $R$ – $k$-вполне транзитивна. Рассмотрим кортежи $X=(x_1,x_2,...,x_k), Y=(y_1,y_2,...,y_k)$, удовлетворяющие условиям определения 2. Имеем $x_i=r_i+d_i; \; y_i=r_i'+d_i'$, где $r_i,r_i'\in R; d_i,d_i'\in D \; (i=\overline{1,k})$. Понятно, что $\chi(x_i)=\chi(r_i)$ и $\chi(y_i)=\chi(r_i')$. Таким образом, условия определения 2 выполнены для кортежей $X_R=(r_1,r_2,...,r_k), Y_R=(r_1',r_2',...,r_k')$, а значит, в силу $k$-вполне транзитивности группы $R$, существует $\varphi\in E(R)$, такое, что $\varphi(r_i)=r_i'$ $(i=\overline{1,k})$. Рассмотрим подгруппу $H$ группы $R$, порожденную элементами $r_1,r_2,...,r_k$. Поскольку кортеж $X_R$ – $t$-независим, то по теореме 2 он линейно независим. Тогда $H=\langle r_1\rangle\oplus\langle r_2\rangle\oplus...\oplus\langle r_k\rangle$. В силу того, что $H$ – свободная абелева группа, всякое отображение $\alpha$ множества $X_R$ в любую абелеву группу $A$ продолжается до гомоморфизма $\psi: H\to A$ [8, теорема 14.2]. Значит, отображение $\alpha: X_R\to D$, где $\alpha(r_i)=d_i' \; (i=\overline{1,k})$, продолжается до гомоморфизма $\psi: H\to D$, т.е. для любого элемента $h\in H$, $h=m_1r_1+m_2r_2+...+m_kr_k$, получаем $\psi(h)=m_1d_1'+m_2d_2'+...+m_kd_k'$.

Поскольку группа $D$ инъективная, гомоморфизм $\psi$ может быть продолжен до гомоморфизма $\sigma$ группы $R$ в группу $D$ [8, с. 119].

Итак, существует гомоморфизм $\sigma\in Hom(R;D)$, такой, что $\sigma(r_i)=d_i'$. Рассмотрим эндоморфизм $\theta$ группы $G$, действующий по правилу $\theta(r+d)=\varphi(r)+\sigma(r)$, где $r\in R, d\in D$. Тогда получим, что $\theta(x_i)=\theta(r_i+d_i)=\varphi(r_i)+\sigma(r_i)=r_i'+d_i'=y_i$.

Следовательно, $G$ также $k$-вполне транзитивная группа. ■

Учитывая аналогичный результат для вполне транзитивных групп [9], далее будем рассматривать только редуцированные группы.

Рассмотрим $k$-вполне транзитивные однородно разложимые группы. Напомним, что группа $G$ называется однородной, если все элементы группы $G$ имеют один и тот же тип [10]. Группа $G$ называется однородно разложимой, если ее можно представить в виде прямой суммы однородных групп [10].

Сгруппировав однородные компоненты одного и того же типа, для однородно разложимой группы получим каноническое разложение $G=\bigoplus_{t\in T}G_t$, где $T$ – некоторое множество типов, $G_t$ – однородная группа типа $t$. Обозначим для всякого $T_1\subset T$ $G_{T_1}=\bigoplus_{t\in T_1}G_t\subset G$. Тогда, в частности, $G_T=G; G_{\{t\}}=G_t$. Также, для всякого элемента $g\in G$ однородно разложимой группы обозначим $I_T(g)=\{t\in T;\pi_t(g)\neq 0\}$, где $\pi_t$ – проекция на прямое слагаемое $G_t$.

Пусть $P = \{p_1, p_2, ..., p_n, ...\}$ – множество всех простых чисел, упорядоченных по возрастанию. Для произвольной группы без кручения $G$ обозначим множество $\pi(G) = \{p_i \in P;\ p_i G \neq G\}$.

Тип $t = (\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n, ...)$ назовем $p_i$-делимым для некоторого простого $p_i \in P$, если соответствующая координата типа $t$ $\chi_i = \infty$. Тип $t$ делимый, если он $p_i$-делимый для всех $p_i \in P$.

Напомним, если $t_1 = (\alpha_1, ..., \alpha_n, ...)$, $t_2 = (\beta_1, ..., \beta_n, ...)$, то $t_1 \cdot t_2 = (\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n, ...)$, где $\chi_i = \alpha_i + \beta_i$ и бесконечность плюс нечто есть бесконечность [10].

**Определение 6 [4].** Будем говорить, что однородно разложимая группа $G = \underset{t \in T}{\oplus} G_t$ удовлетворяет условию контрастности для типов, если для всяких двух типов $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$ и любого простого числа $p$, такого, что $pG_{t_1} \neq G_{t_1}$, имеет место $pG_{t_2} = G_{t_2}$.

**Теорема 7 [4]**. Однородно разложимая группа $G = \underset{t \in T}{\oplus} G_t$ вполне транзитивна тогда и только тогда, когда каждая однородная компонента ее канонического разложения вполне транзитивна и $G$ удовлетворяет условию контрастности для типов.

**Предложение 8.** Однородно разложимая редуцированная группа $G = \underset{t \in T}{\oplus} G_t$ удовлетворяет условию контрастности для типов тогда и только тогда, когда для любых различных типов $t_1, t_2 \in T$ тип $t_1 \cdot t_2$ – делимый.

***Доказательство.*** *Необходимость*. Рассмотрим произвольные различные типы $t_1, t_2 \in T$. Рассмотрим множества $\pi(G_{t_1}) = \{p_i \in P;\ p_i G_{t_1} \neq G_{t_1}\}$; $\pi(G_{t_2}) = \{p_i \in P;\ p_i G_{t_2} \neq G_{t_2}\}$. Поскольку группа $G$ редуцированная, множества $\pi(G_{t_1}), \pi(G_{t_2})$ не пусты. Из выполнения условия контрастности для типов следует, что $p_{i_1} G_{t_2} = G_{t_2}$; $p_{i_2} G_{t_1} = G_{t_1}$ для всех $p_{i_j} \in \pi(G_{t_j})$ $(j = 1, 2)$. Таким образом, если $t_1 = (\alpha_1, ..., \alpha_n, ...), t_2 = (\beta_1, ..., \beta_n, ...)$, то для всех $p_{i_1} \in \pi(G_{t_1})$ $\beta_{i_1} = \infty$ и для всех $p_{i_2} \in \pi(G_{t_2})$ $\alpha_{i_2} = \infty$. Тогда $t_1 \cdot t_2 = (\infty, \infty, ..., \infty, ...)$, то есть $t_1 \cdot t_2$ – делимый тип.

*Достаточность*. Пусть $t_1, t_2 \in T$, $t_1 = (\alpha_1, ..., \alpha_n, ...)$, $t_2 = (\beta_1, ..., \beta_n, ...)$. По условию $t_1 \cdot t_2 = (\infty, \infty, ..., \infty, ...)$. Рассмотрим непустые множества $\pi(G_{t_1}) = \{p_i \in P;\ p_i G_{t_1} \neq G_{t_1}\}$; $\pi(G_{t_2}) = \{p_i \in P;\ p_i G_{t_2} \neq G_{t_2}\}$. Если $p_{i_1} \in \pi(G_{t_1})$, то $\alpha_{i_1} \neq \infty$, а значит, $\beta_{i_1} = \infty$, и наоборот, если $p_{i_2} \in \pi(G_{t_2})$, то $\beta_{i_2} \neq \infty$ и $\alpha_{i_2} = \infty$. Другими словами, $p_{i_1} G_{t_2} = G_{t_2}$; $p_{i_2} G_{t_1} = G_{t_1}$. ■

*Семейством Шпернера* множества $E$ [11] называется семейство подмножеств $F$ множества $E$, в котором ни один элемент не является подмножеством другого. Другими словами, если $X, Y \in F$, то $X \not\subset Y$ и $Y \not\subset X$.

**Теорема Шпернера [11]**. Для любого семейства Шпернера $F$ подмножеств конечного множества, состоящего из $n$ элементов, справедливо $|F| \leq C_n^m$, где $m = \left[\dfrac{n}{2}\right]$, причем верхняя оценка для $|F|$ достижима.

**Предложение 9.** Пусть $G=\underset{t\in T}{\oplus}G_t$ – однородно разложимая редуцированная группа. Если $G$ удовлетворяет условию контрастности для типов, то для любых подмножеств $T_1,T_2\subset T$, образующих семейство Шпернера множества $T$, типы $\inf\limits_{t\in T_1}t$ и $\inf\limits_{t\in T_2}t$ несравнимы.

***Доказательство.*** Пусть $T_1,T_2\subset T$ такие, что $T_1\not\subset T_2$ и $T_2\not\subset T_1$. Выберем $t_1\in T_1\setminus T_2$ и $t_2\in T_2\setminus T_1$. При этом, поскольку $G$ – редуцированная группа, множества $\pi(G_{t_1})$ и $\pi(G_{t_2})$ не пусты. Пусть $p_{i_1}\in\pi(G_{t_1})$, $p_{i_2}\in\pi(G_{t_2})$. Тогда из выполнения условия контрастности для типов следует, что для всех $t\in T$, $t\neq t_j$, $p_{i_j}\notin\pi(G_t)$, $j=1,2$.

Отметим также, что $\pi(G_{T_j})=\bigcup\limits_{t\in T_j}\pi(G_t)$. Получаем, что $p_{i_1}\in\pi(G_{t_1})\subset\pi(G_{T_1})$, $p_{i_1}\notin\pi(G_{T_2})$ и $p_{i_2}\in\pi(G_{t_2})\subset\pi(G_{T_2})$, $p_{i_2}\notin\pi(G_{T_1})$.

Если теперь обозначить $t_{T_1}=\inf\limits_{t\in T_1}t=(\alpha_1,...,\alpha_n,...)$ и $t_{T_2}=\inf\limits_{t\in T_2}t=(\beta_1,...,\beta_n,...)$, заключаем, что $\alpha_{i_1}\neq\infty,\beta_{i_1}=\infty$ и $\beta_{i_2}\neq\infty,\alpha_{i_2}=\infty$. То есть типы $\inf\limits_{t\in T_1}t$ и $\inf\limits_{t\in T_2}t$ несравнимы. ■

**Предложение 10.** Пусть $G=\underset{t\in T}{\oplus}G_t$ – однородно разложимая редуцированная группа. Если $G$ удовлетворяет условию контрастности для типов, то $k_t(G)=C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ при $|T|=n$ и $k_t(G)=\infty$ при $|T|\geq\aleph_0$.

***Доказательство.*** Заметим, что для $t$-независимости кортежа $X=(x_1,...,x_k)$ необходимо, чтобы множества $I_T(x_i)$ образовывали семейство Шпернера. Действительно, если для некоторых $x_i,x_j$ выполнено $I_T(x_i)\subset I_T(x_j)$, то $t(x_i)\geq t(x_j)$.

По теореме Шпернера, максимальная мощность семейства Шпернера в случае $|T|=n$ равна $k=C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$. То есть, если $|T|=n$, то во множестве $T$ существует семейство Шпернера из $k$ элементов. Пусть $\{T_i;i=\overline{1,k}\}$ такое множество. Рассмотрим кортеж $X=(x_1,x_2,...,x_k)$, где $I_T(x_i)=T_i$ $(i=\overline{1,k})$. Из предложения 9 следует, что кортеж $X$ – $t$-независим. Из теоремы Шпернера следует также, что семейства Шпернера большей мощности в группе $G$ не существует, следовательно, не существует $t$-независимого кортежа, состоящего более чем из $k$ элементов.

Если же $|T|\geq\aleph_0$, то для всякого $k\in\mathbb{N}$ в качестве $t$-независимого кортежа можно взять кортеж $X=(g_{t_1},g_{t_2},...,g_{t_k})$, где $g_{t_j}\in G_{t_j}$ $(j=\overline{1,k})$. ■

**Замечание 11.** Учитывая, что $n\leq C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ для любого $n\geq1$, получаем, что для однородно разложимой группы $G=\underset{t\in T}{\oplus}G_t$ справедлива оценка $k_t(G)\geq|T|$, если $T$ конечно.

**Замечание 12.** Как следствие из предложения 10, для вполне разложимой группы ранга $n$ получаем верхнюю оценку $t$-длины $k_t(G) \le C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

**Замечание 13.** В предложениях 9 и 10 группы удовлетворяют условию контрастности для типов, но не обязаны быть вполне транзитивными.

Следует отметить, что во вполне транзитивной однородно разложимой группе, в силу выполнения условия контрастности для типов, каждое однородное слагаемое $G_t$ является вполне характеристической подгруппой.

**Предложение 14**. Если однородно разложимая группа $G = \underset{t \in T}{\oplus} G_t$ вполне транзитивна, то для любых элементов $a, b \in G$ из $\chi(a) \le \chi(b)$ следует $I_T(b) \subset I_T(a)$.

***Доказательство***. Пусть $a, b \in G$ и $\chi(a) \le \chi(b)$. Из вполне транзитивности группы $G$ следует существование $\theta \in E(G)$, такого, что $\theta(a) = b$.

Получаем $b = \theta(a) = \theta(\sum\limits_{t \in I_T(a)} a_t) = \sum\limits_{t \in I_T(a)} \theta(a_t) \in \underset{t \in I_T(a)}{\oplus} G_t$, то есть $I_T(b) \subset I_T(a)$. ■

**Теорема 15.** Пусть $G = \underset{t \in T}{\oplus} G_t$ – однородно разложимая группа, причем $|T| > 2$. Если $G$ вполне транзитивна, то $G$ не является $k$-вполне транзитивной для всех $1 < k \le k_t(G)$.

***Доказательство.*** Пусть $|T| \ge \aleph_0$ и $k > 1$. По предложению 10 $k_t(G) = \infty$. Рассмотрим кортежи $X = (x_1, x_2, ..., x_k)$ и $Y = (y_1, y_2, ..., y_k)$, где $x_i = g_{t_i} + g_{t_{i+1}}$, $y_1 = g_{t_2}$, $y_2 = 2g_{t_2}$, $y_j = x_j$, $g_{t_i} \in G_{t_i}$ $(i = \overline{1,k};\ j = \overline{3,k})$. Поскольку группа $G$ вполне транзитивна, $G$ удовлетворяет условию контрастности для типов. Тогда из предложения 9 следует, что кортеж $X$ – $t$-независим. Ясно также, что условие (1) определения 2 выполнено. Предположим, что $G$ – $k$-вполне транзитивна. Тогда существует $\theta \in E(G)$, такой, что $\theta(x_i) = y_i$ $(i = \overline{1,k})$. Рассмотрим подробнее эти равенства. Имеем $\theta(x_1) = \theta(g_{t_1} + g_{t_2}) = \theta g_{t_1} + \theta g_{t_2} = y_1 = g_{t_2}$ и $\theta(x_2) = \theta(g_{t_2} + g_{t_3}) = = \theta g_{t_2} + \theta g_{t_3} = y_2 = 2g_{t_2}$. Поскольку каждая однородная компонента $G_t$ является вполне характеристической подгруппой группы $G$, из приведенных равенств следует, что $\theta g_{t_2} = g_{t_2}$ и $\theta g_{t_2} = 2g_{t_2}$. Приходим к противоречию.

Пусть теперь $|T| = n$. Из предложения 10 следует, что $k_t(G) = C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$. Если $n < k \le C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$, то во всяком $t$-независимом кортеже $(a_1, ..., a_k)$ найдутся два элемента $a_i, a_j \in G$, такие, что $I_T(a_i) \cap I_T(a_j) \ne \varnothing$. Зафиксируем такой кортеж $A = (a_1, a_2, ..., a_k)$, где $a_i \in G$ $(i = \overline{1,k})$.

Пусть $\tilde{t} \in I_T(a_i) \cap I_T(a_j)$, $a_i = g_{\tilde{t}} + \overline{a}_i$, $a_j = h_{\tilde{t}} + \overline{a}_j$, где $g_{\tilde{t}}, h_{\tilde{t}} \in G_{\tilde{t}}$, $\tilde{t} \notin \left(I_T(\overline{a}_i) \cup I_T(\overline{a}_j)\right)$. Построим кортежи $X = (x_1, x_2, ..., x_k)$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_k)$ следующим образом.

Полагаем $y_m = x_m = a_m$ при $m \neq i, m \neq j$; $x_i = g_t + \overline{a}_i, x_j = g_t + \overline{a}_j$, $y_i = g_t, y_j = 2g_t$, где $g_t \in G_{\tilde{t}}$. Из построения следует, что кортежи удовлетворяют условиям определения 2. Предположим, что $G$ – $k$-вполне транзитивная группа. Тогда существует $\theta \in E(G)$, такой, что $\theta(x_i) = y_i$ $(i = \overline{1,k})$. Получаем, что $\theta(x_i) = \theta g_t + \theta(\overline{a}_i) = y_i = g_t$ и $\theta(x_j) = \theta g_t + \theta(\overline{a}_j) = y_j = 2g_t$. Но тогда $\theta g_t = g_t$ из первого равенства и $\theta g_t = 2g_t$ из второго. Приходим к противоречию.

Осталось рассмотреть случай $k \leq n$. Рассмотрим кортежи $X = (x_1, x_2, ..., x_k)$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_k)$, где $x_i = g_{t_i} + g_{t_{i+1}}$, $x_k = g_{t_k} + g_{t_1}$, $y_1 = g_{t_2}$, $y_2 = 2g_{t_2}$, $y_j = x_j, g_{t_i} \in G_{t_i}, g_{t_k} \in G_{t_k}$ $(i = \overline{1,k-1};\ j = \overline{3,k})$. $X$, $Y$ удовлетворяют условию (1) определения 2, кортеж $X$ является $t$-независимым по предложению 9. Предполагая, что $G$ – $k$-вполне транзитивна, получаем, что существует $\theta \in E(G)$, такой, что $\theta(x_i) = y_i$ $(i = \overline{1,k})$. Из первых двух равенств, аналогично случаю $|T| \geq \aleph_0$, приходим к противоречию. ■

**Теорема 16.** Однородно разложимая группа $G = \underset{t \in T}{\oplus} G_t$ является $k$-вполне транзитивной для всех $k \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда $G$ удовлетворяет одному из двух условий:

(I) $G$ – однородная вполне транзитивная группа;

(II) $G = G_{t_1} \oplus G_{t_2}$, где $G_{t_1}, G_{t_2}$ – вполне транзитивные группы и $t_1 \cdot t_2$ – делимый тип.

***Доказательство.*** *Необходимость.* Пусть $G = \underset{t \in T}{\oplus} G_t$ $k$-вполне транзитивна для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда, в частности, $G$ вполне транзитивна и 2-вполне транзитивна. Из теоремы 15 и 2-вполне транзитивности группы G следует, что $|T| \leq 2$. Если $|T| = 1$, получаем случай (I). Пусть $|T| = 2$, то есть $G = G_{t_1} \oplus G_{t_2}$. Тогда каждая однородная компонента $G_{t_1}, G_{t_2}$ вполне транзитивна и из вполне транзитивности группы $G$ и предложения 8 следует, что $t_1 \cdot t_2$ – делимый тип.

*Достаточность.* В случае (I) получаем, что группа $G$ вполне транзитивна и $k_t(G) = 1$, то есть $G$ $k$-вполне транзитивна для всех $k > 1$.

Пусть $G = G_{t_1} \oplus G_{t_2}$, причем $G_{t_1}, G_{t_2}$ – вполне транзитивные группы и $t_1 \cdot t_2$ – делимый тип. Из предложения 8 следует, что $G$ удовлетворяет условию контрастности для типов, то есть $G$ – вполне транзитивная группа. Ясно также, что $k_t(G) = 2$, то есть $G$ – $k$-вполне транзитивна для всех $k > 2$.

Докажем, что $G$ – 2-вполне транзитивна. Рассмотрим кортежи $X = (x_1, x_2)$; $y = (y_1, y_2)$, удовлетворяющие условиям определения 2. Поскольку типы $t(x_1)$ и $t(x_2)$ несравнимы, то, не умаляя общности, можно считать, что $t(x_1) = t_1$ и $t(x_2) = t_2$. Из предложения 14 получаем также, что $t(y_1) = t_1$ и $t(y_2) = t_2$. Таким образом, $x_i, y_i \in G_{t_i}$ и $\chi(x_i) \leq \chi(y_i)$ $(i = 1, 2)$.

Поскольку группы $G_{t_i}$ вполне транзитивны $(i=1,2)$, существуют $\theta_i \in E(G_{t_i})$, такие, что $\theta_i(x_i)=y_i$ $(i=1,2)$. Рассмотрим эндоморфизм $\theta \in E(G)$, $\theta=\theta_1\pi_{t_1}+\theta_2\pi_{t_2}$, где $\pi_{t_i}$ – проекция на прямое слагаемое $G_{t_i}$. Получаем тогда: $\theta(x_i)=\theta_i\pi_{t_i}x_i=\theta_i x_i=y_i$ $(i=1,2)$. Таким образом, искомый эндоморфизм найден, то есть $G$ – 2-вполне транзитивная группа. ■

Напомним определение однородно сепарабельной группы. Абелева группа $G$ без кручения называется однородно сепарабельной [4], если существует такое семейство **C** однородных прямых слагаемых этой группы, что каждое конечное множество элементов группы $G$ можно вложить в прямое слагаемое этой группы, являющееся прямой суммой некоторых групп семейства **C**. Заметим, что однородно сепарабельными группами являются, в частности, вполне разложимые группы без кручения, сепарабельные группы без кручения, однородно разложимые группы.

Учитывая, что однородно сепарабельная вполне транзитивная группа является однородно разложимой [4], получаем

**Теорема 17.** Однородно сепарабельная группа $G$ – $k$-вполне транзитивна для всех $k \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда $G$ – однородная вполне транзитивная группа или $G$ представима в виде $G=G_{t_1}\oplus G_{t_2}$, где $G_{t_1}, G_{t_2}$ – однородные вполне транзитивные группы различных типов $t_1, t_2$, причем $t_1 \cdot t_2$ – делимый тип.

Учитывая, что однородная сепарабельная группа является вполне транзитивной [4], для сепарабельных групп получаем такой результат:

**Теорема 18.** Сепарабельная группа $G$ – $k$-вполне транзитивна для всех $k \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда $G$ – однородная группа или $G$ представима в виде прямой суммы двух однородных групп различных типов $t_1, t_2$, причем $t_1 \cdot t_2$ – делимый тип.

Для вполне разложимых групп критерий $k$-вполне транзитивности для всех $k \in \mathbb{N}$ можно представить в следующем виде:

**Теорема 19**. Пусть $G$ – вполне разложимая группа и $G=\bigoplus_{t\in T} G_t$ – ее каноническое разложение. Эквивалентны следующие утверждения:

Группа $G$ $k$-вполне транзитивна для всех $k \in \mathbb{N}$;

$G$ – однородная группа или $G=G_{t_1}\oplus G_{t_2}$, причем $t_1 \cdot t_2$ – делимый тип;

$G$ удовлетворяет условию контрастности для типов и $k_t(G) \le 2$;

$G$ удовлетворяет условию контрастности для типов и $|T| \le 2$;

$G$ удовлетворяет условию контрастности для типов и для любых элементов $a,b \in G$ с несравнимыми типами справедливо $I_T(a) \cap I_T(b)=\varnothing$.

***Доказательство.*** Эквивалентность условий I и II следует из теоремы 16.

Из предложения 8 также следует эквивалентность условий II и IV.

Покажем эквивалентность условий III и IV. Пусть $G$ удовлетворяет условию контрастности для типов и $|T| \le 2$ . Если $|T| = 1$, по предложению 10 получаем, что $k_t(G) = C_1^{\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil} = C_1^0 = 1$ . Если же $|T| = 2$ , то $k_t(G) = C_2^1 = 2$ . В обоих случаях получаем, что $k_t(G) \le 2$ .

Обратно, пусть $k_t(G) \le 2$ . Из замечания 11 следует, что $2 \ge k_t(G) \ge |T|$ , то есть $|T| \le 2$ .

Осталось показать эквивалентность условий I и V.

I $\Rightarrow$ V. Пусть $G$ – $k$-вполне транзитивная группа для всех $k \in \mathbb{N}$ . Тогда из вполне транзитивности группы $G$ следует выполнение условия контрастности для типов.

Пусть $a, b \in G$ и тип $t(a)$ несравним с типом $t(b)$ . Предположим, существует $t \in I_T(a) \bigcap I_T(b)$ . Тогда имеют место разложения $a = a_t + \overline{a}$; $b = b_t + \overline{b}$ , где $a_t, b_t \in G_t$ и $t \notin I_T(\overline{a}) \bigcup I_T(\overline{b})$ . Рассмотрим кортежи следующего вида: $X = (x_j + \overline{a}; y_j + \overline{b})$; $Y = (x_j; 2y_j)$ , где $x_j, y_j \in A_j \subset G_t$, $r(A_j) = 1$ .

Поскольку $t(x_j) = t(y_j) = t(A_j) = t(G_t) = t(a_t) = t(b_t)$ , получаем, что тип $t(x_j + \overline{a})$ несравним с типом $t(y_j + \overline{b})$ . Таким образом, кортежи $X,Y$ удовлетворяют условию определения 2. Так как $G$ является, в том числе, 2-вполне транзитивной, существует $\theta \in E(G)$ , такое, что $\theta(x_j + \overline{a}) = x_j$ и $\theta(y_j + \overline{b}) = 2y_j$ (*).

Поскольку $x_j, y_j \in A_j$ , найдутся $m, n \in \mathbb{Z}$ , такие, что $mx_j = ny_j$ (**).

Из вполне транзитивности группы $G$ следует, что каждая однородная компонента канонического разложения $G_t$ является вполне характеристической. Тогда из равенства (*) следует, что $\theta(x_j) = x_j$ и $\theta(y_j) = 2y_j$ . Учитывая (**), получаем $mx_j = \theta(mx_j) = \theta(ny_j) = 2ny_j$ , что противоречит (**). Таким образом, выполнение второго условия пункта V также доказано.

V $\Rightarrow$ I. Пусть условия пункта V выполнены. Тогда получаем, что $G$ является вполне транзитивной. Осталось показать $k$-вполне транзитивность группы $G$ при $k > 1$ .

Пусть $k \ge 2$ и кортежи $X = (x_1, ..., x_k)$; $Y = (y_1, ..., y_k)$ удовлетворяют условиям определения 2. Из $t$-независимости элементов кортежа $X$ и пункта V теоремы следует, что при $i \ne j$ $I_T(x_i) \bigcap I_T(x_j) = \varnothing$ . В силу того, что $\chi(x_i) \le \chi(y_i)$ , группа $G$ вполне транзитивна, из предложения 11 следует, что $I_T(y_i) \subset I_T(x_i)$ . Тогда группу $G$ можно представить следующим образом: $G = \overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} \tilde{G}_i \oplus \left( \underset{t \in \overline{T}}{\oplus} G_t \right)$, где $\tilde{G}_i = \underset{t \in I_T(x_i)}{\oplus} G_t$ , $\overline{T} = T \setminus (\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_T(x_i))$ . Группы $\tilde{G}_i$ также вполне транзитивны, поэтому существуют $\theta_i \in E(\tilde{G}_i)$ , такие, что $\theta_i(x_i) = y_i$ $(i = \overline{1,k})$ . Рассмотрим эндоморфизм

$\theta \in E(G)$, действующий по правилу: для всякого элемента $g \in G$ полагаем $\theta(g) = \theta\left(\sum_{j \in I(g)} g_j\right) = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{t \in I_T(g) \bigcap I_T(x_i)} \theta_i(g_t)\right)$. Тогда очевидно, что $\theta(x_i) = \theta_i(x_i) = y_i$ $(i = \overline{1,k})$. Таким образом, $G$ – $k$-вполне транзитивная группа. ■

ЛИТЕРАТУРА


1. *Kaplansky I.* Infinite Abelian Groups. Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1954.
2. *Крылов П.А.* О вполне характеристических подгруппах абелевых групп без кручения // Сб. аспирантских работ по матем. Томск, 1973. С. 15–20.
3. *Гриншпон С.Я.*, *Мисяков В.М.* О вполне транзитивных абелевых группах // Абелевы группы и модули. – Томск, 1986. – С. 12–27.
4. *Гриншпон С.Я.* Вполне транзитивные однородно сепарабельные группы // Матем. заметки. 1997. № 62. С. 471–474.
5. *Carroll D.* Multiple transitivity in abelian groups // Arch. Math. 1994. V. 63. P. 9–16.
6. *Рогозинский М.И.* О $k$-вполне транзитивности вполне разложимых абелевых групп без кручения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 4 (20). С. 25–35.
7. *Рогозинский М.И.* $k$-вполне транзитивные абелевы группы без кручения // Современные проблемы математики и механики: материалы II Всерос. молод. науч. конф. Томск, 2011. С. 41–44.
8. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1.
9. *Гриншпон С.Я.* Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность // Фундамент. и прикл. матем. 2002. Т. 8. № 2. С. 407–473.
10. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2.
11. *Engel K.* Sperner Theory. Camb. Univ. Press, 1997.
12. *Добрусин Ю.Б.* О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1986. Вып. 4. С. 36–53.
13. *Крылов П.А.* Сильно однородные абелевы группы без кручения // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24. № 2. С. 77–84.
14. *Крылов П.А.* Вполне транзитивные абелевы группы без кручения // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 5. С. 549–560.
15. *Крылов П.А.*, *Чехлов А.Р.* Абелевы группы без кручения с большим числом эндоморфизмов // Тр. ИММ УрО РАН. 2001. Т. 7. № 2. С. 194–207.
16. *Чехлов А.Р.* О разложимых вполне транзитивных группах без кручения // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 3. С. 714–719.
17. *Чехлов А.Р.* Об одном классе эндотранзитивных групп // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 6. С. 944–949.


Статья поступила 02.04.2013 г.

*Grinshpon S. Y.*, *Rogozinsky M. I.* $k$-FULL TRANSITIVITY OF HOMOGENEOUSLY DECOMPOSABLE GROUPS. In this article we introduce the concept of $k$-full transitivity for torsion free abelian groups. A complete description of $k$-fully transitive separable and homogeneously decomposable groups, as well as of $k$-fully transitive completely decomposable groups is presented.

Keywords: $k$-full transitivity, homogeneously decomposable group, separable group, endomorphism

*GRINSHPON Samuil Yakovlevich* (Tomsk State University)
E-mail: Grinshpon@math.tsu.ru

*ROGOZINSKY Mikhail Ivanovich* (Tomsk State University)
E-mail: Rogozinsky_mikhail@mail.ru