

УДК 512.541

Е.В. Кайгородов

ХОПФОВЫ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫЕ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ¹

Изучается свойство хопфовости в таком известном классе абелевых групп, как вполне разложимые группы. Построен пример нехопфовой вполне разложимой группы без кручения.

Ключевые слова: абелева группа, хопфова группа, вполне разложимая группа, однородная группа, группа без кручения.

Данная работа продолжает начатое автором ранее (см. [1, 2]) исследование хопфовых абелевых групп. В [1] это изучение проводилось в классах делимых групп и прямых сумм циклических групп. Там же приведены общие свойства хопфовых абелевых групп, в частности связанные с прямыми разложениями. На основе описания делимых групп исследование хопфовости произвольных абелевых групп было сведено к исследованию хопфовости редуцированных групп. В [2] получено полное описание хопфовых алгебраически компактных групп. В той же статье исследовались хопфовы SP-группы: установлено, что хопфовость SP-группы эквивалентна хопфовости ее примарных компонент.

Центральным результатом настоящей статьи является теорема 1, представляющая одно из условий хопфовости вполне разложимой группы без кручения. В заключение приводится пример нехопфовой вполне разложимой группы без кручения.

Все обозначения и терминология в работе стандартны и взяты из [3, 4]. Далее в тексте под словом «группа» будет пониматься аддитивно записанная абелева группа.

Теорема 1. Пусть A – вполне разложимая группа без кручения, причем все ее однородные компоненты имеют конечный ранг, а множество типов прямых слагаемых ранга 1 группы A удовлетворяют условию минимальности. Тогда A – хопфова группа.

Доказательство. Запишем каноническое прямое разложение $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где

A_i – однородные компоненты группы A . Согласно условию теоремы, множество типов $\Omega(A) = \{t(A_i) | i \in I\}$ удовлетворяет условию минимальности. Для любого $k \in I$ можно записать $A = A_k \oplus B_k$, где $B_k = \bigoplus_{i \neq k} A_i$.

Предположим, напротив, что группа A нехопфова. Зафиксируем некоторый эпиморфизм φ группы A , не являющийся автоморфизмом, на себя. Докажем, что для любого индекса $k \in I$ и любого отличного от нуля элемента $a_k \in A_k$ верно, что $\varphi(a_k) \notin B_k$, т. е. что $\varphi(a_k)$ имеет ненулевую координату в A_k (в частности, $\varphi(a_k) \neq 0$).

¹ Исследование выполнено при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, соглашение 14.В37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями» и частично в рамках темы 2.3684.2011 Томского государственного университета.

Пусть сначала индекс $k \in I$ таков, что тип $t(A_k)$ минимален в множестве типов $\Omega(A)$. Допустим, что нашелся элемент $a_k \in A_k$ со свойствами: $\varphi(a_k) \neq 0$ и $\varphi(a_k) \in B_k$. Напомним, что для каждого $i \in I$ имеет место прямое разложение $A = A_i \oplus B_i$. Поскольку тип $t(A_k)$ минимален среди типов $t(A_i)$, то $\text{Hom}(B_k, A_k) = 0$. Пусть $\pi_k : A \rightarrow A_k$ – проекция относительно прямого разложения $A = A_k \oplus B_k$. Тогда $A_k \subseteq \pi_k \varphi A_k$ (или, что все равно, $A_k \subseteq \pi_k \varphi|_{A_k} A_k$), учитывая, что φ – эпиморфизм. Из $a_k \in \text{Ker } \pi_k \varphi$ заключаем, что $r(\pi_k \varphi A_k) = r(A_k / \text{Ker } \pi_k \varphi) < r(A_k)$. Но это неравенство противоречит включению $A_k \subseteq \pi_k \varphi A_k$.

Хорошо известно, что множество типов однородных компонент вполне разложимой группы без кручения является дистрибутивной решеткой [3, §85]. Мы знаем также, что в частично упорядоченном множестве условия минимальности и индуктивности эквивалентны [5, §5], поэтому дальнейшее доказательство проведем по индукции. Именно, предположим теперь, что k – такой индекс, что тип $t(A_k)$ не является минимальным в множестве типов $\Omega(A)$ и для всех l , таких, что $t(A_l) < t(A_k)$, утверждение доказано.

Прежде покажем следующее. Пусть a_k – некоторый ненулевой элемент однородной компоненты A_k . Если b – такой элемент группы A , что $\varphi(b) = a_k$, то его можно представить в виде $b = b_k + y$, где $b_k \in A_k$, $y \in B_k$ и $\varphi(y) \in B_k$. Заметим, что $b_k \neq 0$. Предположим противное. Относительно прямого разложения $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ запишем $b = b_1 + \dots + b_l + b_k + c_1 + \dots + c_t$. Здесь $b_1, \dots, b_l$ – такие элементы, что $\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_l)$ имеют ненулевую координату в A_k . В силу предположения такие элементы обязательно существуют. Элементы $c_1, \dots, c_t$, если они есть, таковы, что $\varphi(c_1), \dots, \varphi(c_t)$ имеют нулевую координату в A_k , т. е. образы этих элементов при эпиморфизме φ содержатся в B_k .

Запишем прямое разложение $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_l \oplus A_k \oplus A'_1 \oplus \dots \oplus A'_t \oplus B$, где A_j и A'_n для всех $j = 1, \dots, l$ и $n = 1, \dots, t$ суть подходящие прямые слагаемые A_i из разложения $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, B – дополнительное слагаемое. Понятно, что для всех j верны неравенства $t(b_j) < t(a_k)$. По предположению индукции, элементы $\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_l)$ имеют ненулевые координаты в $A_1, \dots, A_l$ соответственно. Пусть для определенности тип $t(b_1)$ минимален среди типов $t(b_1), \dots, t(b_l)$. Итак, $\varphi(b_1)$ имеет ненулевую координату в A_1 . Ясно, что среди элементов $c_1, \dots, c_t$ существует хотя бы один такой, что его образ при эпиморфизме φ имеет ненулевую координату в A_1 . Пусть c_1 есть этот элемент. Тогда $t(c_1) < t(b_1) < t(a_k)$. Согласно индуктивному предположению, $\varphi(c_1)$ имеет ненулевую координату в A'_1 . Значит, среди элементов $b_1, \dots, b_l, b_k, c_1, \dots, c_t$ найдется хотя бы один такой, что его образ при эпиморфизме φ имеет ненулевую координату в A'_1 . Обозначим этот

элемент через x . Тогда $t(x) < t(c_1)$. Учтя минимальность типа $t(b_1)$ и то, что $t(c_1) < t(a_k)$, получаем, что x — есть один из элементов $c_2, \dots, c_t$. Пусть для простоты $x = c_2$. Итак, $t(c_2) < t(c_1) < t(a_k)$. Отсюда заключаем, что $\varphi(c_2)$ имеет ненулевую координату в A_2 . Далее рассуждаем аналогично для элементов $c_2, \dots, c_t$ и, ввиду конечности их числа, приходим к противоречию. Так что $b_1 = \dots = b_l = 0$, и потому $b = b_k + c_1 + \dots + c_t = b_k + y$. Вспоминая, что элементы $\varphi(c_1), \dots, \varphi(c_t)$ имеют нулевую координату в A_k , получаем $\varphi(y) \in B_k$.

Вернемся к доказательству нашего утверждения. Допустим, что нашелся элемент $a_k \in A_k$, для которого $\varphi(a_k) \neq 0$ и $\varphi(a_k) \in B_k$. Выберем в группе A элемент b со свойством $\varphi(b) = a_k$. По доказанному $b = b_k + y$, где $b_k \in A_k$, $y \in B_k$ и $\varphi(y) \in B_k$ (как уже было замечено, $b_k \neq 0$).

Применяя лемму 86.8 [3], получим прямое разложение $A_k = \langle a_k \rangle_* \oplus C$ для некоторой группы C . Запишем элемент b_k относительно этого разложения: $b_k = a' + c_k$. При этом $c_k \neq 0$. Действительно, если $c_k = 0$, то $a_k = \varphi(b) = \varphi(b_k) + \varphi(y) = \varphi(a') + \varphi(y)$. Но $a' \in \langle a_k \rangle_*$, а $\varphi(a_k) \in B_k$, поэтому и $\varphi(a') \in B_k$. Отсюда $a_k \in B_k$, что невозможно. Далее, $\varphi(b_k) = \varphi(b) - \varphi(y) \in \langle a_k \rangle_* \oplus B_k$ и $\varphi(c_k) = \varphi(b_k) - \varphi(a') \in \langle a_k \rangle_* \oplus B_k$.

Теперь запишем прямое разложение $A_k = \langle a_k \rangle_* \oplus \langle c_k \rangle_* \oplus E$ для какой-то группы E . Выполним затем аналогичный шаг. Именно, существует элемент $d \in A$ со свойством $\varphi(d) = c_k$. Тогда $d = d_k + z$, где $d_k \in A_k$, $d_k \neq 0$, $\varphi(z) \in B_k$. Запишем $d_k = a'' + c'' + e_k$, где $a'' \in \langle a_k \rangle_*$, $c'' \in \langle c_k \rangle_*$, $e_k \in E$. Здесь снова $e_k \neq 0$, поскольку из $e_k = 0$ получаем $c_k = \varphi(d) = \varphi(d_k) + \varphi(z) = \varphi(a'') + \varphi(c'') + \varphi(z)$, поэтому $c_k \in \langle a_k \rangle_* \oplus B_k$. Но это невозможно. Следовательно, имеет место прямое разложение $A_k = \langle a_k \rangle_* \oplus \langle c_k \rangle_* \oplus \langle e_k \rangle_* \oplus G$ для некоторой группы G , причем $\varphi(e_k) \in \langle a_k \rangle_* \oplus \langle c_k \rangle_* \oplus B_k$.

Рассуждая далее аналогично, будем получать прямые разложения однородной компоненты A_k со сколь угодно большим числом прямых слагаемых ранга 1. Но этого не может быть в силу конечности ранга группы A_k . Получили противоречие. Итак, мы доказали, что для любого $k \in I$ и любого ненулевого $a_k \in A_k$ будет $\varphi(a_k) \notin B_k$.

Выберем теперь в группе A такой ненулевой элемент a , что $\varphi(a) = 0$. Запишем $a = a_1 + \dots + a_n$, где $a_i \in A_i$, причем $\varphi(a_i) \neq 0$ для каждого i . Пусть для определенности тип $t(a_1)$ минимален среди типов $t(a_1), \dots, t(a_n)$. Утверждаем, что $\varphi(a_2) \in B_1, \dots, \varphi(a_n) \in B_1$. Если, например, $\varphi(a_2) \notin B_1$, то $\varphi(a_2)$ имеет ненулевую координату w в A_1 . Следовательно, $t(a_2) \leq t(w) = t(a_1)$. Строгое неравенство невозможно на основании минимальности $t(a_1)$. Имеем $t(a_2) = \dots = t(a_n) = t(a_1)$, откуда $\varphi(a_2) \in B_1, \dots, \varphi(a_n) \in B_1$. Ясно, что тогда $\varphi(a_1) \in B_1$. Получили, что $a_1 \in A_1$,

а $\varphi(a_1) \in B_1$. Но такая ситуация невозможна, как установлено выше, поэтому наше предположение о нехопфовости группы A неверно. Теорема доказана.

Опираясь на доказанную теорему, нетрудно понять, что существуют разнообразные нехопфовы вполне разложимые группы без кручения. Полезно построить примеры таких групп. Сформулируем сначала один вспомогательный вопрос и дадим на него ответ. Пусть A, B, C – группы без кручения ранга 1, причем $t(B) < t(A)$ и $t(C) < t(A)$. Выясним, когда существует эпиморфизм $B \oplus C \rightarrow A$.

Так как $t(B) < t(A)$ и $t(C) < t(A)$, то группы B и C можно считать подгруппами в A . В таком случае существование эпиморфизма $B \oplus C \rightarrow A$ равносильно выполнению равенства $t(B + C) = t(A)$. Действительно, пусть $\varphi: B \oplus C \rightarrow A$ – некоторый эпиморфизм. Тогда $\varphi(B \oplus C) = \varphi(B) + \varphi(C) = A$. Ясно, что ограничения $\varphi|_B: B \rightarrow A$, $\varphi|_C: C \rightarrow A$ суть мономорфизмы. Следовательно, $\varphi(B) \cong B$ и $\varphi(C) \cong C$. Если мы считаем B и C подгруппами в A , то группы $\varphi(B)$ и B квазиравны, аналогично квазиравны группы $\varphi(C)$ и C . Тогда квазиравны группы $B + C$ и A . Следовательно, $t(B + C) = t(A)$.

Обратно, предположим, что $t(B + C) = t(A)$. Тогда группы $B + C$ и A квазиравны. Более точно, $B + C = nA$ для некоторого натурального числа n . Теперь несложно построить эпиморфизм $B \oplus C \rightarrow A$. Пусть $\varphi: B \oplus C \rightarrow B + C$ – сумма некоторых изоморфизмов $B \cong B$ и $C \cong C$. Затем возьмем изоморфизм $\psi: nA \rightarrow A$, $\psi: na \mapsto a$. Композиция $\psi\varphi$ будет эпиморфизмом $B \oplus C \rightarrow A$.

Итак, существование эпиморфизма $B \oplus C \rightarrow A$ равносильно равенству $t(B + C) = t(A)$, если считать B и C подгруппами в A .

Следующий простой факт можно вывести из теоремы 1.4 [6], содержащей описание факторгрупп группы без кручения ранга 1.

Лемма 2 [6, § 1, упр. 1.6]. Если B и C – подгруппы группы без кручения A ранга 1, то $t(B + C) = \sup\{t(B), t(C)\}$.

Эта лемма вместе с предыдущими рассуждениями приводит к такому результату.

Следствие 3. Пусть A, B, C – группы без кручения ранга 1, причем $t(B) < t(A)$ и $t(C) < t(A)$. Тогда существование эпиморфизма $B \oplus C \rightarrow A$ равносильно справедливости равенства $\sup\{t(B), t(C)\} = t(A)$.

Отметим, что лемму 2 и следствие 3 можно распространить на любое конечное множество подгрупп группы без кручения ранга 1 [6, § 1, упражнение 1.6].

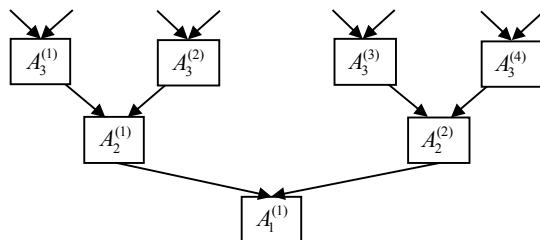
С помощью следствия 3 теперь можно легко строить нехопфовы вполне разложимые группы без кручения, все однородные компоненты которых имеют конечный ранг. Именно, можно выбрать группы $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, A_2^{(2)}$ без кручения ранга 1 так, что существует эпиморфизм $A_2^{(1)} \oplus A_2^{(2)} \rightarrow A_1^{(1)}$. Затем выбираем группы $A_3^{(1)}$ и $A_3^{(2)}$, $A_3^{(3)}$ и $A_3^{(4)}$, для которых имеются эпиморфизмы $A_3^{(1)} \oplus A_3^{(2)} \rightarrow A_2^{(1)}$, $A_3^{(3)} \oplus A_3^{(4)} \rightarrow A_2^{(2)}$. Далее повторяем аналогичные построения для каждой из групп $A_3^{(1)}, A_3^{(2)}, A_3^{(3)}, A_3^{(4)}$ и т. д.

Пусть A обозначает прямую сумму

$$A_1^{(1)} \oplus (A_2^{(1)} \oplus A_2^{(2)}) \oplus (A_3^{(1)} \oplus A_3^{(2)} \oplus A_3^{(3)} \oplus A_3^{(4)}) \oplus \dots$$

всех построенных указанным способом групп $A_i^{(j)}$, $i, j \in \mathbb{N}$. Отображение, переводящее группу $A_1^{(1)}$ в ноль, совпадающее на $A_2^{(1)} \oplus A_2^{(2)}$ с каким-то эпиморфизмом $A_2^{(1)} \oplus A_2^{(2)} \rightarrow A_1^{(1)}$, на $A_3^{(1)} \oplus A_3^{(2)}$ с каким-то эпиморфизмом $A_3^{(1)} \oplus A_3^{(2)} \rightarrow A_2^{(1)}$ и т. д., будет эпиморфизмом, но не автоморфизмом группы A . Поэтому A – нехопфова группа.

Группу A можно изобразить в виде дерева:



Положив, в частности, $t(A_1^{(1)}) = [(1, 1, 1, 1, \dots)]$, $t(A_2^{(1)}) = [(1, 0, 1, 0, \dots)]$, $t(A_2^{(2)}) = [(0, 1, 0, 1, \dots)]$ и т. д., получим конкретный пример нехопфовой вполне разложимой группы без кручения.

Очевидно, что существуют и более сложно устроенные нехопфовы вполне разложимые группы. В вершинах соответствующих деревьев, изображающих такие группы, могут находиться прямые суммы каких-то групп ранга 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кайгородов Е.В. Хопфовы абелевы группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 2 (18). С. 5–12.
2. Кайгородов Е.В. О двух классах хопфовых абелевых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 2 (22). С. 22–33.
3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы: в 2 т. М.: Мир, 1977. Т. 2. 417 с.
4. Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2006. 512 с.
5. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973. 400 с.
6. Arnold David M. Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings. Lecture Notes in Mathematics. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1982.

Статья поступила 07.06.2013 г.

Kaygorodov E.V. HOPFIAN COMPLETELY DECOMPOSABLE TORSION-FREE GROUPS. The paper is devoted to the study of the property of Hopficity in a well-known class of Abelian groups – completely decomposable groups. An example of a non-Hopfian completely decomposable torsion-free group is presented.

Keywords: Abelian group, Hopfian group, completely decomposable group, homogeneous group, torsion-free group.

KAYGORODOV Evgeniy Vladimirovich (Tomsk State University)

E-mail: gazetaintegral@gmail.com