ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2013 Математика и механика № 4(24)

УДК 514.752

Н.М. Онищук

ЭКСТРЕМАЛИ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО КРУЧЕНИЯ НЕГОЛОНОМНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В трёхмерном евклидовом пространстве рассматривается 2-мерное гладкое неголономное распределение. Основное внимание уделено изучению геодезического кручения кривых распределения, в частности – экстремалей геодезического кручения. В исследованиях используется метод внешних форм Картана [1].

Ключевые слова: *неголономная геометрия, распределение, уравнение Пфаффа, векторное поле.*

Двумерное распределение в $\boldsymbol{E}_3$ – это гладкое отображение Δ, сопоставляющее $\forall M \in E_3$ (или области $G \subset E_3$) плоскость π, проходящую через M [2, с. 683]. По распределению Δ однозначно определяется уравнение Пфаффа. Распределение называется неголономным, если соответствующее ему уравнение Пфаффа не вполне интегрируемо. Его интегральные кривые, проходящие через точку *M*, касаются в этой точке плоскости π и называются кривыми распределения. Пара (M, π) называется плоским элементом; плоскость π – плоскостью распределения в точке *M*; прямая *l*, проходящая через *M* ортогонально π, – нормалью распределения в точке *M*. Множество всех плоских элементов (график распределения) представляет собой трёхмерное многообразие, что позволяет использовать метод внешних форм Картана.

1. Предварительные сведения

К каждому элементу (M, π) присоединим ортонормированный репер $(M, \vec{e}_i)$, где $\vec{e}_3$ – единичный вектор нормали распределения в точке *M*. Деривационные формулы репера запишем в виде

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \omega^i \vec{e}_i, \\ d\vec{e}_i &= \omega_i^j \vec{e}_j, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки *M*,

$$\omega_i^j = -\omega_j^i,\ d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i,\ d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j$$
$$(i, j, k = 1, 2, 3).$$

Формы Пфаффа ω_3^i, ω^j – главные формы [1, с.288]. Из них ω^i – базисные формы, поэтому

$$\omega_3^i = A_j^i \omega^j. \tag{1.2}$$

По матрице (A_j^i) определяем линейный оператор *A*, для которого $A(d\vec{r}) = d\vec{e}_3$.

Уравнение Пфаффа, соответствующее распределению Δ, – это уравнение

$$\omega^3 = 0. \qquad (1.3)$$

Плоскость π относительно выбранного репера имеет уравнение $x^3 = 0$.

Сужение оператора A на плоскость π обозначим A^*.

Собственные значения оператора A^*, взятые с противоположными знаками, являются главными кривизнами 2-го рода, а его собственные векторы определяют главные направления 2-го рода. Произведение главных кривизн 2-го рода – это полная кривизна второго рода, а их полусумма – средняя кривизна. Кривая распределения, в каждой точке которой касательный вектор имеет одно из главных направлений 2-го рода, называется линией кривизны 2-го рода. Она характеризуется тем, что вдоль неё нормали распределения описывают торс [3, с. 49].

Введём обозначения: $k_1^{(2)}, k_2^{(2)}$ – главные кривизны 2-го рода, $K_2 = k_1^{(2)} k_2^{(2)}$ – полная кривизна 2-го рода, $H = \dfrac{k_1^{(2)} + k_2^{(2)}}{2}$ – средняя кривизна. Инвариант $H^2 - K_2$ называют (по аналогии с теорией поверхностей) эйлеровой разностью. От него зависит, какими будут главные кривизны 2-го рода. А именно: 1) если $H^2 - K_2 > 0$, то $k_1^{(2)}, k_2^{(2)}$ – вещественные различные числа; 2) если $H^2 - K_2 < 0$, то $k_1^{(2)}, k_2^{(2)}$ – комплексные числа; 3) $H^2 - K_2 = 0$, то $k_1^{(2)} = k_2^{(2)}$. Соответственно через точку M в случае 1) проходят две линии кривизны 2-го рода; в случае 2) через M не проходят действительные линии кривизны 2-го рода; в случае 3) через M проходит только одна линия кривизны 2-го рода. Линейный оператор A^* для неголономного распределения не симметричен, и потому его можно представить в виде $A^* = B^* + B$, где B^* – симметричный оператор, а B – кососимметричный оператор с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{A_2^1 - A_1^2}{2} \\ \dfrac{A_1^2 - A_2^1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\dfrac{A_2^1 - A_1^2}{2} = \rho$. Распределение Δ голономно тогда и только тогда, когда $\rho = 0$. Поэтому ρ называется *скаляром неголономности* [4, с. 63].

Собственные значения оператора B^*, взятые с противоположными знаками, являются главными кривизнами 1-го рода, а его собственные векторы определяют главные направления 1-го рода. Произведение главных кривизн 1-го рода называется полной кривизной 1-го рода. Кривая распределения, в каждой точке которой касательная направлена по одному из главных направлений 1-го рода, называется линией кривизны 1-го рода.

Обозначим: $k_1^{(1)}, k_2^{(1)}$ – главные кривизны 1-го рода, K_1 – полная кривизна 1-го рода. Для них имеем

$$H = \frac{k_1^{(1)} + k_2^{(1)}}{2} = \frac{k_1^{(2)} + k_2^{(2)}}{2}; \ K_1 = k_1^{(1)} k_2^{(1)}; \ K_2 = K_1 + \frac{\rho^2}{4}. \qquad (1.4)$$

Так как оператор B^* симметричен, то главные кривизны 1-го рода – вещественные числа. Если $k_1^{(1)} \neq k_2^{(1)}$, то в точке M существуют два ортогональных главных направления 1-го рода. Если же $k_1^{(1)} = k_2^{(1)}$, то в такой точке всякое направление будет главным направлением 1-го рода.

Элементы A_3^1, A_3^2 матрицы основного оператора A определяют вектор кривизны линии тока нормалей распределения Δ.

2. Основные инварианты линии неголономного распределения

Пусть $\vec{r} = \vec{r}(s) -$ кривая распределения Δ, параметризованная дугой. Введём обозначения:

$$\vec{I}_3 = \vec{e}_3, \ \vec{I}_1 = \frac{d\vec{r}}{ds}, \ \vec{I}_2 = [\vec{I}_3, \vec{I}_1].$$

Так как $\vec{I}_1, \vec{I}_2, \vec{I}_3 -$ единичные взаимно ортогональные векторы, то

$$\begin{aligned} &\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{I}_1, \\ &\frac{d\vec{I}_1}{ds} = k_g \vec{I}_2 + k_n \vec{I}_3, \\ &\frac{d\vec{I}_2}{ds} = -k_g \vec{I}_1 + \varkappa_g \vec{I}_3, \\ &\frac{d\vec{I}_3}{ds} = -k_n \vec{I}_1 - \varkappa_g \vec{I}_2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Величины $k_n, k_g, \varkappa_g -$ инварианты линии распределения. Они носят названия: $k_n -$ нормальная кривизна кривой (проекция вектора кривизны кривой на нормаль распределения); $k_g -$ геодезическая кривизна кривой распределения (проекция вектора кривизны кривой на плоскость π); $\varkappa_g -$ геодезическое кручение кривой распределения. Геометрическая характеристика геодезическому кручению будет дана ниже.

Теорема 1. *Только для линии кривизны 2-го рода в каждой её точке геодезическое кручение* $\varkappa_g$ *равно нулю.*

Доказательство. Как было отмечено выше, линия кривизны 2-го рода характеризуется тем, что вдоль неё нормали распределения образуют торс, то есть для неё $\left(\frac{d\vec{r}}{ds}, \vec{I}_3, \frac{d\vec{I}_3}{ds}\right) = 0.$ Отсюда получаем $(\vec{I}_1, \vec{I}_3, -\varkappa_g \vec{I}_2) = \varkappa_g = 0.$ ■

Найдём выражение кривизны и кручения для произвольной линии распределения через инварианты $k_n, k_g, \varkappa_g$. Из (2.1) для вектора кривизны кривой имеем $k\vec{n} = k_g \vec{I}_2 + k_n \vec{I}_3,$ где $k -$ кривизна кривой. Отсюда следует

$$k = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}. \tag{2.2}$$

Вычислим кручение κ кривой распределения. Используя (2.1), находим

$$\kappa = \frac{1}{k_n^2 + k_g^2}\left(k_g \frac{dk_n}{ds} - k_n \frac{dk_g}{ds}\right) + \kappa_g. \tag{2.3}$$

Определение 1. *Линия распределения, для которой геодезическая кривизна равна нулю, называется геодезической прямейшей линией.*

Через каждую точку M в каждом направлении в плоскости π проходит одна и только одна геодезическая прямейшая линия распределения [5, с. 26]. Из формулы (2.3) следует: *геодезическое кручение кривой распределения в точке M – это кручение геодезической прямейшей, имеющей с данной кривой в этой точке общую касательную.*

Заметим также, что кривизна геодезической прямейшей линии совпадает с её нормальной кривизной (см. (2.2)), а кручение – равно её геодезическому кручению (см. (2.3)).

Определение 2. *Линия распределения, для которой в каждой её точке нормальная кривизна равна нулю, называется асимптотической линией* [4, с. 62].

Из (2.2) и (2.3) следует: *в каждой точке асимптотической линии её кривизна совпадает с геодезической кривизной, а кручение – с геодезическим кручением.*

3. Выражение нормальной кривизны и геодезического кручения кривой распределения через главные кривизны 1-го рода

Так как главные направления 1-го рода – это направления собственных векторов $\vec{\xi}(\xi^1, \xi^2, 0)$ симметричного оператора B^*, то они находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} &(A_1^1 - \lambda)\xi^1 + \frac{A_2^1 + A_1^2}{2}\xi^2 = 0, \\ &\frac{A_2^1 + A_1^2}{2}\xi^1 + (A_2^2 - \lambda)\xi^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Направим векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ по главным направлениям 1-го рода. Тогда

$$\lambda_1 = A_1^1 = -k_1^{(1)}, \;\; \lambda_2 = A_2^2 = -k_2^{(1)}, \;\; A_2^1 = \frac{\rho}{2}, \;\; A_1^2 = -\frac{\rho}{2}.$$

После этого формулы (1.2) примут вид

$$\begin{aligned} &\omega_3^1 = -k_1^{(1)}\omega^1 + \frac{\rho}{2}\omega^2 + a\omega^3, \\ &\omega_3^2 = -\frac{\rho}{2}\omega^1 - k_2^{(1)}\omega^2 + b\omega^3, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $a = A_3^1, b = A_3^2$; вектор $a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ – это вектор кривизны линии тока векторного поля нормалей распределения.

Итак, в точке M имеем канонический репер $(M; \vec{e}_i)$, отнесённый к линиям кривизны 1-го рода, и репер $(M, \vec{I}_i)$ для произвольной линии $\vec{r} = \vec{r}(s)$ распределения. Выразим векторы $\vec{I}_i$ через $\vec{e}_i$. Пусть α – угол между $\vec{I}_1$ и $\vec{e}_1$, тогда

$$\vec{I}_1 = \vec{e}_1 \cos\alpha + \vec{e}_2 \sin\alpha,$$
$$\vec{I}_2 = -\vec{e}_1 \sin\alpha + \vec{e}_2 \cos\alpha, \qquad (3.3)$$
$$\vec{I}_3 = \vec{e}_3.$$

Кривая распределения Δ – это интегральная кривая уравнения Пфаффа $\omega^3 = 0$, поэтому для неё

$$d\vec{r} = \omega^1 \vec{e}_1 + \omega^2 \vec{e}_2. \qquad (3.4)$$

Так как $d\vec{r} = \vec{I}_1 ds$, то

$$d\vec{r} = \vec{e}_1 \cos\alpha + \vec{e}_2 \sin\alpha. \qquad (3.5)$$

И следовательно, $\omega^1 = \cos\alpha ds$, $\omega^2 = \sin\alpha ds$. Используя формулы (2.1), (1.1), (3.2), (3.3), получаем

$$k_n = k_1^{(1)} \cos^2\alpha + k_2^{(1)} \sin^2\alpha\,; \qquad (3.6)$$

$$\kappa_g = \frac{\rho}{2} + \frac{1}{2}(k_2^{(1)} - k_1^{(1)})\sin 2\alpha. \qquad (3.7)$$

Исследуя k_n как функцию угла α на экстремум, приходим к следующему выводу:

Главные кривизны 1-го рода в точке М – это экстремальные значения нормальных кривизн распределения в этой точке. Направление касательной к кривой, имеющей в данной точке экстремальное значение нормальной кривизны, есть главное направление 1-го рода. Линия распределения, в каждой точке которой касательная направлена по главному направлению 1-го рода, является линией кривизны 1-го рода.

При $k_1^{(1)} \neq k_2^{(1)}$ через точку проходят точно две взаимно ортогональных линии кривизны 1-го рода. В выбранном нами каноническом репере линии кривизны 1-го рода определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \omega^1\omega^2 &= 0, \\ \omega^3 &= 0. \end{aligned} \qquad (3.8)$$

При $k_1^{(1)} = k_2^{(1)}$ из (3.6) следует $k_n = k_1^{(1)} = k_2^{(1)}$. В этом случае через точку M в каждом направлении плоскости π проходит линия кривизны 1-го рода, все эти линии имеют одинаковую нормальную кривизну.

Теорема 2. *Для линий кривизны 1-го рода и только для них геодезическое кручение равно половине скаляра неголономности.*

Доказательство. При $k_1^{(1)} \neq k_2^{(2)}$ для линий кривизны 1-го рода имеем $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. Тогда из формулы (3.7) для обеих линий кривизны 1-го рода получаем $\kappa_g = \frac{\rho}{2}$. Если же $k_1^{(1)} = k_2^{(1)}$, то также для каждой линии кривизны 1-го рода $\kappa_g = \frac{\rho}{2}$. ■

4. Экстремали геодезического кручения

Исследуем геодезическое кручение на экстремум. Из (3.7) получаем $\kappa'_g = (k_2^{(1)} - k_1^{(1)})\cos(2\alpha)$. Возможны два случая: 1) $k_2^{(1)} \neq k_1^{(1)}$, 2) $k_2^{(1)} = k_1^{(1)}$.

Рассмотрим первый случай.

1) Пусть $k_2^{(1)} > k_1^{(1)}$. Тогда $\kappa'_g = 0$ при $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ и при $\alpha_2 = -\frac{\pi}{4}$. Находим производную 2-го порядка $\kappa''_g = -2(k_2^{(1)} - k_1^{(1)})\sin(2\alpha)$. Отсюда видим, что $\kappa''_g\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0, \kappa''_g\left(-\frac{\pi}{4}\right) > 0$. То есть при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ функция κ_g имеет максимум, а при $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ – минимум.

Итак, *экстремальные значения геодезического кручения имеют кривые, касательные к которым делят пополам углы между линиями кривизны 1-го рода.*

Минимальное и максимальное значения геодезического кручения следующие:

$$\kappa_{g\min} = \frac{\rho}{2} - \frac{1}{2}(k_2^{(1)} - k_1^{(1)}); \ \kappa_{g\max} = \frac{\rho}{2} + (k_2^{(1)} - k_1^{(1)}). \tag{4.1}$$

Отсюда получаем

$$\kappa_{g\max} + \kappa_{g\min} = \rho; \tag{4.2}$$

$$\kappa_{g\max} \times \kappa_{g\min} = -(H^2 - K_2). \tag{4.3}$$

Из (4.2) и (4.3) следует: *сумма экстремальных значений геодезического кручения равна скаляру неголономности, а произведение – эйлеровой разности, взятой с противоположным знаком.*

2) Пусть в точке M $k_2^{(1)} = k_1^{(1)}$, тогда из (3.7) следует, что в этой точке геодезическое кручение для всех кривых распределения одинаково и равно половине скаляра неголономности.

Определение 3. *Линия распределения называется экстремалью геодезического кручения, если в каждой её точке геодезическое кручение равно одному из его экстремальных значений* [5, с. 66; 4, с. 69].

Из вышесказанного вытекает: *в неомбилической точке* $(k_2^{(1)} \neq k_1^{(1)})$ *экстремали геодезического кручения взаимно ортогональны и делят пополам углы между линиями кривизны 1-го рода.*

В выбранном нами каноническом репере уравнения экстремалей геодезического кручения имеют вид

$$\begin{aligned} &(\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 = 0, \\ &\omega^3 = 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

При этом для кривых

$$\begin{aligned} &\omega^1 - \omega^2 = 0, \\ &\omega^3 = 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

геодезическое кручение κ_g имеет максимальное значение, а для кривых

$$\begin{aligned} &\omega^1 + \omega^2 = 0, \\ &\omega^3 = 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

– минимальное значение.

Предложение 1. *Если через точку M проходит только одна линия кривизны 2-го рода, то она будет одной из экстремалей геодезического кручения с нулевым геодезическим кручением. Геодезическое кручение второй экстремали будет равно скаляру неголономности.*

Справедливость утверждения следует из формул (4.2) и (4.3). ■

Теорема 3. *Существует единственное (с точностью до положения в пространстве) распределение Δ с постоянным скаляром неголономности и прямыми линиями тока нормалей, для которого через каждую точку M проходит одна и только одна линия кривизны 2-го рода.*

Доказательство. Так как через точку *M* проходит лишь одна линия кривизны 2-го рода, то $H^2 - K_2 = 0.$ Тогда из (4.3) следует $\kappa_{g\max} \cdot \kappa_{g\min} = 0.$ Пусть $\kappa_{g\min} = 0$, тогда кривая (4.6) будет линией кривизны 2-го рода, совпадающей с одной из экстремалей геодезического кручения. Для второй экстремали геодезического кручения имеем $\kappa_{g\max} = \rho = \mathrm{const}$. Из (4.1) получаем $k_2^{(1)} = \rho + k_1^{(1)}$. А так как $a = b = 0,$ то формулы (3.2) принимают вид

$$\begin{aligned} &\omega_3^1 = -k_1^{(1)}\omega^1 + \frac{\rho}{2}\omega^2, \\ &\omega_3^2 = -\frac{\rho}{2}\omega^1 - (k_1^{(1)} + \rho)\omega^2. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Дифференцируем внешним образом (4.7) и затем применяем лемму Картана. В результате получим $k_1^{(1)} = -\frac{\rho}{2},\ k_2^{(1)} = \frac{\rho}{2}$, а

$$\omega_1^2 = 0, d(\omega^1 + \omega^2) = 0,\ \omega_3^1 = \frac{\rho}{2}(\omega^1 + \omega^2),\ \omega_3^2 = -\omega_3^1. \tag{4.8}$$

Так как $d(\omega^1 + \omega^2) = 0,$ то можно положить

$$\omega^1 + \omega^2 = du. \tag{4.9}$$

Система уравнений

$$\begin{aligned} &d\vec{r} = \omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2 + \omega^3\vec{e}_3, \\ &d\vec{e}_1 = -\frac{\rho}{2}du\vec{e}_3, \\ &d\vec{e}_2 = \frac{\rho}{2}du\vec{e}_3, \\ &d\vec{e}_3 = \frac{\rho}{2}du\vec{e}_1 - \frac{\rho}{2}du\vec{e}_2 \end{aligned} \tag{4.10}$$

становится вполне интегрируемой и при $\rho = \mathrm{const}$ имеет единственное решение. Проинтегрируем систему (4.10). Пусть $\omega^1 - \omega^2 = dv + t_1du,\ \omega^3 = dw + t_2du.$ Используя формулы (4.8), (4.9) и (4.10), находим $t_1 = \rho w,\ t_2 = -\frac{\rho v}{2}.$ И тогда

$$d\vec{r}=\frac{1}{2}[(\rho w+1)du+dv]\vec{e}_1+\frac{1}{2}[(1-\rho w)du-dv]\vec{e}_2+(dw-\frac{\rho v}{2}du)\vec{e}_3. \qquad (4.11)$$

Из (4.10) и (4.11) получаем

$$\vec{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2}}\right)\vec{\varepsilon}_1+\sin\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2}}\right)\vec{\varepsilon}_2+\vec{\varepsilon}_3\right],$$
$$\vec{e}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\cos\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2}}\right)\vec{\varepsilon}_1-\sin\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2}}\right)\vec{\varepsilon}_2+\vec{\varepsilon}_3\right],$$
$$\vec{e}_3=\sin\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2}}\right)\vec{\varepsilon}_1-\cos\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2}}\right)\vec{\varepsilon}_2, \qquad (4.12)$$
$$\vec{r}=\left[\sin\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2}}\right)w+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2}}\right)v\right]\vec{\varepsilon}_1+$$
$$+\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2}}\right)v-\cos\left(\frac{\rho u}{\sqrt{2}}\right)w\right]\vec{\varepsilon}_2+\frac{u}{\sqrt{2}}\vec{\varepsilon}_3.$$

Векторы $\{\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_3\}$ образуют постоянный ортонормированный базис. Координаты точки M(x,y,z) относительно неподвижной декартовой системы координат с базисом $\{\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_3\}$ определяются формулами

$$x=w\sin(\rho z)+\frac{v}{\sqrt{2}}\cos(\rho z),$$
$$y=\frac{v}{\sqrt{2}}\sin(\rho z)-w\cos(\rho z), \qquad (4.13)$$
$$z=\frac{u}{\sqrt{2}}.$$

Из (4.12) и (4.13) видим, что существует единственное векторное поле нормалей

$$\vec{e}_3=\sin(\rho z)\vec{\varepsilon}_1-\cos(\rho z)\vec{\varepsilon}_2$$

распределения, удовлетворяющего условиям теоремы. А следовательно, уравнение Пфаффа для такого распределения имеет вид

$$\sin(\rho z)dx-\cos(\rho z)dy=0. \qquad (4.14)\ \blacksquare$$

Уравнение вида (4.14) было получено при рассмотрении неголономных цилиндров 2-го рода в работе [6, с. 52]. Сопоставляя утверждение доказанной здесь теоремы и теоремы 6 работы [6], приходим к следующему выводу. *Если через каждую точку M гладкого двумерного распределения с постоянным скаляром неголономности и прямыми линиями тока нормалей проходит одна и только одна линия кривизны 2-го рода* (*она является одной из экстремалей геодезического кручения*), *то такое распределение является минимальным неголономным цилиндром 2-го рода с постоянным скаляром неголономности.*

5. Линейчатые поверхности, описываемые нормалями распределения вдоль экстремалей геодезического кручения

Заметим, что экстремали геодезического кручения в каноническом репере, отнесённом к линиям кривизны 1-го рода, имеют уравнения

$$(\omega^1)^2-(\omega^2)^2=0,$$
$$\omega^3=0.$$

Предложение 2. *В общем случае* $(\kappa_{g\max} \neq \kappa_{g\min}, \kappa_{g\max} \neq 0, \kappa_{g\min} \neq 0)$ *линейчатые поверхности, описываемые нормалями распределения вдоль экстремалей геодезического кручения, являются косыми линейчатыми поверхностями.*

Доказательство. Пусть L_1 – линейчатая поверхность, описываемая нормалями распределения вдоль экстремали геодезического кручения

$$\omega^1 = \omega^2, \omega^3 = 0. \tag{5.1}$$

Для неё $(d\vec{r}, \vec{e}_3, d\vec{e}_3) = 2\kappa_{g\max}\omega^2 \neq 0.$ То есть линейчатая поверхность L_1 представляет собой косую линейчатую поверхность. Аналогично доказывается, что линейчатая поверхность L_2, состоящая из нормалей распределения в точках второй экстремали геодезического кручения $\omega^1 + \omega^2 = 0,\ \omega^3 = 0$, является косой линейчатой поверхностью. ■

Найдём горловые линии линейчатых поверхностей L_1 и L_2. Воспользуемся формулой

$$\vec{R} = \vec{r} - \frac{(d\vec{r}, d\vec{e}_3)}{(d\vec{e}_3, d\vec{e}_3)}\vec{e}_3,$$

а также формулами (3.2), (4.1) и уравнениями экстремалей геодезического кручения. В результате получим, что горловые линии линейчатых поверхностей L_1 и L_2 определяются соответственно уравнениями

$$\vec{R} = \vec{r} + \frac{H}{H^2 + \kappa_{g\max}^2}\vec{e}_3 \tag{5.2}$$

и

$$\vec{R} = \vec{r} + \frac{H}{H^2 + \kappa_{g\min}^2}\vec{e}_3. \tag{5.3}$$

Заметим, что *при* $H \neq 0$ *горловые линии линейчатых поверхностей* L_1 *и* L_2 *не совпадают с экстремалями геодезического кручения.*

Предложение 3. *Горловые линии линейчатых поверхностей* L_1 *и* L_2 *совпадают с экстремалями геодезического кручения тогда и только тогда, когда эти экстремали совпадают с асимптотическими линиями.*

Доказательство. Находим уравнения асимптотических линий. Для них $(d^2\vec{r}, \vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0.$ Отсюда, используя формулы (3.2), получаем

$$\begin{gathered} k_1^{(1)}(\omega^1)^2 + k_2^{(1)}(\omega^2)^2 = 0, \\ \omega^3 = 0. \end{gathered} \tag{5.4}$$

Сравнивая уравнения (5.4) с уравнениями (4.4), определяющими экстремали геодезического кручения, заключаем, что они совпадают лишь при $H = 0.$ Но в этом (и только в этом случае) горловые линии (5.2) и (5.3) линейчатых поверхностей L_1 и L_2 являются экстремалями геодезического кручения. ■

Предложение 4. *Если средняя кривизна* H *неголономного распределения равна нулю, то асимптотические плоскости линейчатых поверхностей* L_1 *и* L_2 *ортогональны. При этом асимптотическая плоскость линейчатой поверхности* L_1

совпадает с касательной плоскостью линейчатой поверхности L_2 в точке M и, наоборот, асимптотическая плоскость линейчатой поверхности L_2 совпадает с касательной плоскостью линейчатой поверхности L_1 в точке M.

Доказательство. Находим касательную плоскость к L_1 в произвольной точке прямой $\vec{R}=\vec{r}+t\vec{e}_3$. При $\omega^1=\omega^2, \omega^3=0$ получаем

$$\left(\vec{R}-\vec{r},\vec{e}_3,\vec{e}_1+\vec{e}_2+t\left((\frac{\rho}{2}-k_1^{(1)})\vec{e}_1-(\frac{\rho}{2}+k_2^{(1)})\vec{e}_2\right)\right)=0.$$

Это уравнение в координатах относительно канонического репера имеет вид

$$\left[1-t\left(k_2^{(1)}+\frac{\rho}{2}\right)\right]x^1-\left[1+t\left(-k_1^{(1)}+\frac{\rho}{2}\right)\right]x^2=0. \quad (5.5)$$

В точке M $(t=0)$ касательной плоскостью к L_1 будет плоскость

$$x^1-x^2=0. \quad (5.6)$$

При $t\neq 0$ имеем

$$\left[\frac{1}{t}-\left(k_2^{(1)}+\frac{\rho}{2}\right)\right]x^1-\left[\frac{1}{t}+\left(\frac{\rho}{2}-k_1^{(1)}\right)\right]x^2=0. \quad (5.7)$$

Отсюда видим, что при $t\to\infty$ предельное положение плоскости (5.7) (то есть асимптотическая плоскость линейчатой поверхности L_1) есть плоскость

$$\left(k_2^{(1)}+\frac{\rho}{2}\right)x^1+\left(\frac{\rho}{2}-k_1^{(1)}\right)x^2=0. \quad (5.8)$$

Касательная плоскость к L_2 в точке M – это плоскость

$$x^1+x^2=0. \quad (5.9)$$

А асимптотическая плоскость для L_2- это плоскость

$$\left(\frac{\rho}{2}-k_2^{(1)}\right)x^1-\left(\frac{\rho}{2}+k_1^{(1)}\right)x^2=0. \quad (5.10)$$

Из уравнений (5.6), (5.8), (5.9) и (5.10) легко видеть, что касательная плоскость поверхности L_1 в точке M совпадает с асимптотической плоскостью поверхности L_2, а касательная плоскость поверхности L_2 в точке M совпадает с асимптотической плоскостью поверхности L_1 тогда и только тогда, когда $H=\dfrac{k_1^{(1)}+k_2^{(1)}}{2}=0.$ При этом асимптотические плоскости линейчатых поверхностей L_1 и L_2 ортогональны. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
2. *Дубровин Б.А., Новиков С.П.Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
3. *Синцов Д.М.* Работы по неголономной геометрии. Киев: Вища школа, 1972.
4. *Слухаев В.В.* Геометрия векторных полей. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982.
5. *Аминов Ю.А.* Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990.

6. *Онищук Н.М.*, *Цоколова О.В.* Минимальные неголономные торсы 2-го рода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 3(7). С. 42–55.

Статья поступила 10.03.2013 г.

Onishchuk N.M. EXTREMAL CURVES OF GEODESIC TORSION ON A NONHOLONOMIC DISTRIBUTION. Nonholonomic 2-dimensional smooth distributions in the 3-dimensional Euclidean space are considered. Main attention is paid to studying geodesic torsion of invariant curves of the distribution.

Keywords: nonholonomic geometry, distribution of planes, Pfaffian equation, vector field.

ONISHUK Nadezhda Maksimovna (Tomsk State University)
E-mail: onichuk.nadezhda@yandex.ru