

УДК 512.541

А.В. Царев

 T -КОЛЬЦА И ФАКТОРНО ДЕЛИМЫЕ ГРУППЫ РАНГА 1¹

Показано, что классы факторно делимых групп ранга 1 и бесконечных T -колец совпадают.

Ключевые слова: E -кольцо, T -кольцо, факторно делимая группа.

В теории абелевых групп без кручения важную роль играют так называемые E -кольца (ассоциативные кольца с единицей, канонически изоморфные кольцам эндоморфизмов своих аддитивных групп). В 1977 году Р. Боушел и Ф. Шульц рассмотрели и описали E -кольца специального вида, которые они назвали T -кольцами. При изучении самомалых групп конечного ранга А.А. Фомин и У. Уиклесс в 1998 году обобщили понятие факторно делимой группы на класс смешанных групп. Полное описание факторно делимых групп ранга 1 было получено О.И. Давыдовой в 2007 году. Замечено, что класс бесконечных T -колец и класс факторно делимых групп ранга 1 совпадают. Доказательству данного факта и посвящена данная заметка.

Под «группой» в работе подразумевается абелева группа, записанная аддитивно, под «кольцом» – ассоциативное кольцо (не обязательно с единицей); $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{J}_p$ – обозначения колец целых, рациональных и целых p -адических чисел соответственно или их аддитивных групп, $\mathbf{Z}_m$ – кольцо классов вычетов по модулю m , P – множество всех простых чисел, $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел. Если S – подмножество K -модуля M , то через $\langle S \rangle$ и $\langle S \rangle_K$ будем обозначать соответственно подгруппу и подмодуль, порожденные множеством S , а через $\langle S \rangle_*$ – сервантную оболочку множества S , состоящую из всех таких $r \in M$, что $nr \in \langle S \rangle$ при некотором натуральном n . Заметим, что $\langle S \rangle_*$ содержит все элементы из M , имеющие конечные порядки. Элементы $a_1, a_2, \dots, a_n$ группы A будем называть линейно независимыми (над $\mathbf{Z}$), если равенство $m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n = 0$ влечет $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 0$. Бесконечное множество называется линейно независимым, если линейно независимо любое его конечное подмножество. Рангом группы A называется мощность максимального линейно независимого подмножества в A (обозначается $r(A)$). p -рангом группы A называется размерность $\mathbf{Z}_p$ -пространства A/pA (обозначается $r_p(A)$). Рангом (p -рангом) кольца или модуля будем называть ранг (p -ранг) его аддитивной группы. Через $t(A)$ и $t_p(A)$ будем обозначать соответственно периодическую и p -примарную часть группы A . Кольцо и группу эндоморфизмов группы A будем обозначать $E(A)$ и $\text{End } A$ соответственно. Если K – кольцо, то через K^+ будем обозначать его аддитивную группу. Групповая терминология, применяемая к кольцам, относится к их аддитивным группам.

Другие используемые в работе понятия и обозначения можно найти в [1].

¹ Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы. Государственный контракт №14.В37.21.0363.

1. *E*-кольца и *T*-кольца

Определение 1.1. Кольцо K называется *E*-кольцом, если $\text{End } K^+ = \text{End}_K K^+$. Аддитивные группы *E*-колец называются *E*-группами.

Рассмотрим некоторые свойства *E*-колец:

а) K является *E*-кольцом тогда и только тогда, когда всякий эндоморфизм φ аддитивной группы кольца K совпадает с умножением справа кольца K на элемент $\varphi(1)$.

Действительно, если K – *E*-кольцо и $\varphi \in \text{End } K^+$, то $\varphi(r) = \varphi(r \cdot 1) = r\varphi(1)$. Обратно, если $\varphi(r) = r\varphi(1)$, то $\varphi(rs) = (rs)\varphi(1) = r(s\varphi(1)) = r\varphi(s)$.

б) *E*-кольцо K -коммутативно.

Пусть $x \in K$ и L_x – эндоморфизм левого умножения на x ($L_x(y) = xy$), а R_x – эндоморфизм правого умножения на x ($R_x(y) = yx$). Из п. а) следует, что $L_x = R_{L_x(1)} = R_x$. Это влечет $xy = L_x(y) = R_x(y) = yx$.

Предложение 1.1 [2]. Следующие утверждения равносильны:

1. K – *E*-кольцо;
2. Если $\varphi \in E(K^+)$ и $\varphi(1) = 0$, то $\varphi = 0$;
3. Кольцо $E(K^+)$ коммутативно.

Р. Боушел и Ф. Шульц в [3] ввели близкое к *E*-кольцам понятие *T*-кольца.

Определение 1.2. Кольцо K называется *T*-кольцом, если умножение $m: K \otimes K \rightarrow K$, где $m(a \otimes b) = ab$, является изоморфизмом.

Теорема 1.2 [3]. Следующие утверждения равносильны:

1. K – *T*-кольцо;
2. Отображение $d: K \rightarrow K \otimes K$, действующее по закону $d(a) = 1 \otimes a$, является изоморфизмом, обратным к m ;
3. K – *E*-кольцо и $K \otimes K = K \otimes_K K$;
4. $a \otimes b = b \otimes a$ для любых $a, b \in K$.

Теорема 1.3 [3]. Следующие утверждения равносильны:

1. K – *T*-кольцо;
2. $K/t(K)$ изоморфно подкольцу поля $\mathbf{Q}$, и если $t_p(K) \neq 0$, то $t_p(K)$ – циклическая группа и $K/t(K)$ делится на p .

Примерами *T*-колец служат подкольца (с единицей) поля $\mathbf{Q}$ и кольца классов вычетов. Кольцо целых p -адических чисел $\mathbf{J}_p$ является *E*-кольцом, но не является *T*-кольцом (так как $r(\mathbf{J}_p) > 1$).

Пусть K – *T*-кольцо, тогда, учитывая п. 2 теоремы 1.3 и изоморфизм

$$K/pK \cong [K/\oplus_{q \neq p} t_q(K)]/[pK/\oplus_{q \neq p} t_q(K)],$$

получаем, что $r_p(K) \leq 1$ для любого простого p .

Лемма 1.4. Пусть A – редуцированная группа, все p -ранги которой конечны, тогда ее первая ульмовская подгруппа – нулевая.

Доказательство. Рассмотрим первую ульмовскую подгруппу A^1 группы A , $A^1 = \bigcap_{m \in \mathbf{N}} mA$, и построим ее нулевой ульмовский фактор $A_0 = A/A^1$. Так как все p -ранги группы A конечны, то и все p -ранги группы A_0 конечны. Следовательно, $t_p(A_0)$ – конечная группа для всякого простого p . Пусть p^n – верхняя грань порядков элементов группы $t_p(A_0)$. Элемент $a \in A^1$ имеет бесконечную p -высоту в группе A , следовательно, уравнение $p^{n+1}y = a$ имеет решение $y = y_0$ в группе A . Тогда $p^{n+1}(y_0 + A^1) = a + A^1 = 0$ и $y_0 + A^1 \in t_p(A_0)$, а значит, $p^n y_0 \in A^1$. Таким образом, уравнение $px = a$ имеет решение $x = p^n y_0$ в группе A^1 , т.е. A^1 – p -делимая группа. В силу произвольности выбора простого числа p получаем, что A^1 – делимая группа, т.е. $A^1 = 0$.

Пусть $\chi = (m_p)$ – произвольная характеристика (т.е. последовательность целых неотрицательных чисел и символов ∞ , занумерованная простыми индексами). Рассмотрим кольцо $\mathbf{Z}_\chi = \prod_{p \in P} K_p$, где $K_p = \mathbf{Z}_{p^{m_p}}$ – кольцо классов вычетов по модулю p^{m_p} при $m_p < \infty$ и $K_p = \mathbf{J}_p$ – кольцо целых p -адических чисел при $m_p = \infty$.

Следствие 1.5. *Всякое редуцированное T -кольцо плотно и сервантно вкладывается в некоторое кольцо $\mathbf{Z}_\chi$.*

Доказательство. Так как все p -ранги T -кольца K не превосходят 1, то его $\mathbf{Z}$ -адическое пополнение $K^\wedge$ изоморфно некоторому кольцу $\mathbf{Z}_\chi$. Тогда, учитывая лемму 1.4, получаем, что кольцо K плотно и сервантно вкладывается в кольцо $K^\wedge \cong \mathbf{Z}_\chi$.

2. Факторно делимые группы ранга 1

При работе с аддитивными группами колец важную роль играют факторно делимые группы. В случае групп без кручения факторно делимые группы были введены Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом [4] еще в 1961 году. Более общее определение (затрагивающее и смешанные группы) было дано А.А. Фоминым и У. Уиклессом в [5].

Определение 2.1. Группа A называется *факторно делимой*, если она не содержит периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что A/F – периодическая делимая группа.

Базисом факторно делимой группы A будем называть всякий базис свободной группы F .

Факторно делимым группам ранга 1 посвящена статья О.И. Давыдовой [6]. Рассмотрим некоторые основные результаты этой работы.

Определение 2.2. Для элемента a из группы A и простого числа p определим m_p как наименьшее целое неотрицательное число, такое, что элемент $p^{m_p}a$ делится на любую степень p в группе A . Если такого числа не существует, полагаем $m_p = \infty$. Характеристика $(m_{p_1}, m_{p_2}, \dots, m_{p_n}, \dots)$ называется *кохарактеристикой* элемента a в группе A и обозначается $\text{cochar}(a)$.

Предложение 2.1 [6]. *Если x – базисный элемент факторно делимой группы A ранга 1, то $\text{cochar}(x) \geq \text{cochar}(a)$ для любого $a \in A$. В частности, кохарактеристики двух различных базисных элементов в группе A совпадают.*

Определение 2.3. *Кохарактеристикой факторно делимой группы A ранга 1 называется кохарактеристика любого ее базисного элемента (обозначается $\text{cochar}(A)$).*

Рассмотрим кольцо $\mathbf{Z}_\chi = \prod_{p \in P} K_p$. Если тип $[\chi]$ отличен от нулевого, то определим кольцо $R^\chi = \langle 1 \rangle_* \subset \mathbf{Z}_\chi$. Если $[\chi] = 0$, то определим кольцо $R^\chi = \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Z}_\chi$.

Теорема 2.2 [6]. *Если A – факторно делимая группа ранга 1 кохарактеристики χ , то A изоморфна аддитивной группе кольца R^χ , а ее кольцо эндоморфизмов $E(A)$ изоморфно кольцу R^χ .*

Теорема 2.3. *Всякое кольцо R^χ является T -кольцом. Любое бесконечное T -кольцо изоморфно некоторому кольцу R^χ .*

Доказательство. Справедливость первого утверждения вытекает из теоремы 1.3 и построения колец R^χ .

Пусть K – произвольное бесконечное T -кольцо и пусть $K^\wedge \cong \mathbf{Z}_\chi$. Нетрудно видеть, что если K^+ не является редуцированной группой, то $K \cong \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Z}_m = R^\chi$ (см, например, [2]). Поэтому далее будем считать, что K^+ – редуцированная группа, т.е. K – подкольцо кольца $\mathbf{Z}_\chi$. Рассмотрим факторгруппу $K^+/\langle 1 \rangle$, которая в силу

теоремы 1.3 является периодической. Покажем, что $K^+/\langle 1 \rangle$ – делимая группа. Возьмем элемент $a = (\alpha_p) \in K^+$, где $\alpha_p \in K_p$. Для каждого простого числа $q \neq p$ элемент α_p делится на q . Если $0 \leq m_p < \infty$, то $\alpha_p = a_0 + a_1p + \dots + a_{m_p-1}p^{m_p-1}$, и тогда $\alpha_p - a_01_p$ делится на p , где 1_p – единица кольца $\mathbf{Z}_p^{m_p}$. Аналогично, если $m_p = \infty$, то $\alpha_p = a_0 + a_1p + \dots + a_sp^s + \dots \in \mathbf{J}_p$ и тогда $\alpha_p - a_01_p$ делится на p , где 1_p – единица кольца $\mathbf{J}_p$. В обоих случаях получаем, что $a = pb + a_01$, причем, поскольку K^+ – плотная сервантная подгруппа в $\mathbf{Z}_\chi$, то $b \in K$. Следовательно, $a + \langle 1 \rangle$ делится на любое простое число p в группе K^+ , то есть $K^+/\langle 1 \rangle$ – делимая группа.

Так как $K \subset \prod_{p \in P} K_p$, то K не содержит делимых периодических подгрупп. Следовательно, K^+ является факторно делимой группой ранга 1. Кроме того, очевидно, что $\text{cochar}(K^+) = \text{cochar}(1) = \chi$. Тогда из теоремы 2.2 вытекает, что $K \cong R^\chi$.

Отметим в заключение, что конечные T -кольца – это в точности кольца классов вычетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. М.: Мир, 1974, 1977.
2. Schultz P. The endomorphism ring of the additive group of a ring // J. Austral. Math. Soc. 1973. V. 15. P. 60–69.
3. Bowshell R.A., Schultz P. Unital rings whose additive endomorphisms commute // Math. Ann. 1977. V. 228. No. 3. P. 197–214.
4. Beaumont R., Pierce R. Torsion free rings // Ill. J. Math. 1961. V. 5. P. 61–98.
5. Fomin A.A., Wickless W. Quotient divisible abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. P. 45–52.
6. Давыдова О.И. Факторно делимые абелевы группы ранга 1 // Фунд. и прикл. матем. 2007. Т. 13. № 3. С. 25–33.

Статья поступила 14.05.2013 г.

Tsarev A.V. T -RINGS AND QUOTIENT DIVISIBLE GROUPS OF RANK 1. We prove that the class of quotient divisible groups of rank 1 coincides with the class of infinite T -rings.

Key words: E -ring, T -ring, quotient divisible group.

TSAREV Andrey Valer'evich (Moscow State Pedagogical University)

E-mail: an-tsarev@yandex.ru