

УДК 539.3

В.М. Пестренин, И.В. Пестренина, Л.В.Ландик**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ВБЛИЗИ ОСОБОЙ ТОЧКИ
СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ**

Для изучения напряженно-деформированного состояния в малых окрестностях особых точек составных конструкций предлагается итерационный численно-аналитический подход, основанный на минимизации невязок алгебраических равенств: граничных условий, условий для напряжений и деформаций на контактной поверхности и непосредственно в особой точке. Проводится исследование напряженно-деформированного состояния в окрестности особой точки составной пластинки в условиях плоской задачи.

Ключевые слова: *концентрация напряжений, особые точки, составные конструкции, контактные поверхности.*

В конструкциях, полученных соединением встык посредством пайки, сварки или склеивания и подвергаемых нагружению, возможно возникновение значительной концентрации напряжений в окрестности крайней (особой) точки линии (поверхности) соединения элементов, изготовленных из различных материалов. Концентрация напряжений способствует преждевременному разрушению конструкции, ограничивает предельные нагрузки, поэтому изучению особенностей распределения напряженного состояния вблизи рассматриваемой точки посвящено достаточно большое число публикаций. Теоретические исследования приводятся, например, в работах [1–8]. Так, в [1, 2] рассмотрена упругая задача для плоского составного клина в пространстве изображений по Меллину. На основе анализа корней соответствующего характеристического уравнения прогнозируется возможное поведение решения в окрестности особой точки. В работе [3] предложен аналогичный подход с использованием функции Эри, устанавливается возможность малонапряженного (конечного, несингулярного) состояния вблизи особой точки. В публикациях [4–6] рассматривается пространственная задача для составной конструкции. Анализ возможного поведения решения в малой окрестности точки, принадлежащей ребру (краю) поверхности скрепления различных тел, проводится с использованием корней характеристического уравнения, полученного методом разделения переменных для уравнений равновесия в перемещениях однородной упругой задачи. В работах [7–8] метод исследования напряженного состояния в окрестности края составной конструкции, основанный на изучении собственных значений, распространен на несжимаемые упругопластические тела со степенным упрочнением.

Экспериментальные исследования плоских составных конструкций методом фотоупругости описаны, например, в работах [3, 10–13]. Авторы изучают влияние формы линии стыка и формы образующей свободной поверхности на напряженное состояние конструкции вблизи особой точки. Показано, что оба эти фактора могут использоваться для снижения уровня концентрации напряжений.

Численное исследование распределения напряжений в окрестности особой точки составной конструкции проводится, как правило, методом конечных элементов [9–11]. В статьях [10, 11] рассмотрены плоские и пространственные зада-

чи. Авторы определяют такую форму образующей свободной поверхности вблизи особой точки, которая обеспечивает отсутствие корней в характеристическом уравнении, приведенном в [1,2], с реальной частью, обуславливающей сингулярное поведение решения. Авторами [9] решается оптимизационная задача – разыскивается форма образующей вблизи особой точки соединяемых цилиндрических образцов, обеспечивающая распределение нормальных осевых напряжений на поверхности контакта, близкое к равномерному.

Отметим, что существующие теоретические подходы к изучению напряженно-го состояния составных конструкций вблизи особых точек ограничиваются решением локальной задачи – изучением явлений, обусловленных нагрузкой, приложенной лишь на поверхностях, примыкающих к особой точке. При удалении от этой точки напряжения, порожденные рассматриваемой нагрузкой, должны затухать [1,2]. Такой подход ограничивает использование полученных результатов, так как не учитывает прочие нагрузки, приложенные к конструкции, способные повлиять на концентрацию напряжений в окрестности особой точки.

С другой стороны, применение для исследования напряженного состояния конструкций (включая окрестность особой точки) стандартных прикладных пакетов программ не всегда оказывается эффективным: в частности, получаемые с их использованием значения напряжений непосредственно в особой точке могут не согласовываться с решением, найденным из уравнений механики деформируемого тела.

В данной статье предлагается итерационный метод исследования напряженно-го состояния составных конструкций (в том числе и в окрестности особых точек), основанный на минимизации невязки алгебраических равенств, представляющих собой граничные условия и условия для напряжений и деформаций на контактной поверхности в окрестности особой точки и в самой точке.

1. Напряжения в вершине плоского клина

Прежде всего в декартовой ортонормированной системе координат строятся возможные алгебраические соотношения между напряжениями в вершине A плоского клина (рис. 1), составленного из двух однородных изотропных материалов. Считается, что такой клин является частью какой-либо нагруженной конструкции. Обычно задача о напряженном состоянии в окрестности вершины клина рассматривается в полярной системе координат r, φ с полюсом в точке A . В этом случае в полюсе нарушается однозначное соответствие между точками клина и координатами (в точке A $r=0$, а координата φ может быть любая), поэтому здесь не существует тензор напряжений как объект, инвариантный относительно преобразования координат. В декартовых координатах каких-либо ограничений на существование тензора напряжений в точке A не накладывается.

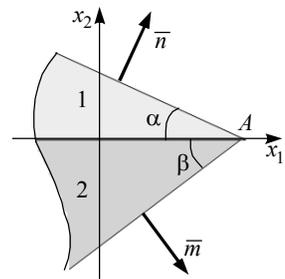


Рис. 1. Составной клин

Для простоты будем считать, что элементы клина соединены по прямой линии, принимаемой за ось x_1 системы координат x_1, x_2 .

Приято: образующие клина свободны от напряжений, \bar{n} и \bar{m} – нормали к образующим клина, углы при вершине составляющих клиньев – α, β . Область изменения α, β :

$$0 < \alpha < 2\pi, \quad 0 < \beta < 2\pi, \quad \alpha + \beta < 2\pi. \quad (1)$$

Напряженное состояние в вершине A клина удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \sigma_n = 0, \quad \tau_n = 0, \quad \sigma_m = 0, \quad \tau_m = 0, \\ \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = \sigma_{22}, \quad \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = \sigma_{12}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь σ_m, σ_n и τ_m, τ_n – нормальные и касательные напряжения на площадках, ориентируемых ортами \vec{m}, \vec{n} ; верхний индекс – номер элемента клина (рис.1). Линия соединения состоит из точек, принадлежащих обоим материалам, поэтому вдоль этой линии должно выполняться равенство относительных удлинений их линейных элементов. В системе координат x_1, x_2 это условие приобретает вид

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)}. \quad (3)$$

Шесть соотношений (2) в точке A клина приводятся к четырем линейным однородным уравнениям относительно искомым величин $\sigma_{11}^{(1)}, \sigma_{11}^{(2)}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha &= 0, \\ (\sigma_{11}^{(1)} - \sigma_{22}) \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= 0, \\ \sigma_{11}^{(2)} \sin^2 \beta - 2\sigma_{12} \sin \beta \cos \beta + \sigma_{22} \cos^2 \beta &= 0, \\ (\sigma_{11}^{(2)} - \sigma_{22}) \sin \beta \cos \beta - \sigma_{12} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Ненулевое решение системы (4) существует лишь в случае, если ее определитель

$$\Delta = \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)$$

обращается в нуль. Уравнение $\Delta = 0$ в области (1) изменения параметров α, β имеет решения

$$\alpha = \pi, \quad \beta = \pi, \quad \alpha + \beta = \pi. \quad (5)$$

Рассмотрим возможные случаи алгебраических зависимостей между напряжениями в особой точке A для линейно-упругих материалов 1 и 2 с модулями Юнга E_1, E_2 и коэффициентами Пуассона ν_1, ν_2 соответственно:

1) $\alpha \neq \pi, \quad \beta \neq \pi, \quad \alpha + \beta \neq \pi$.

Определитель системы уравнений (4) не обращается в нуль, поэтому

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0. \quad (6)$$

Решение (6), очевидно, не зависит от механических свойств скрепляемых материалов. Равенство (3) в рассматриваемом случае выполняется тождественно.

2) $\alpha = \pi, \quad \beta \neq \pi, \quad \alpha + \beta \neq \pi$.

Из уравнений (4) следует

$$\sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0.$$

С использованием равенства (3) убеждаемся, что и $\sigma_{11}^{(1)} = 0$.

3) $\alpha \neq \pi, \quad \beta = \pi, \quad \alpha + \beta \neq \pi$.

Аналогично предыдущему случаю получаем, что все напряжения в особой точке обращаются в нуль.

4) $\alpha \neq \pi, \beta \neq \pi, \alpha + \beta = \pi$.

Напряжения $\sigma_{11}^{(1)}, \sigma_{11}^{(2)}$ и σ_{12} выразим через напряжение σ_{22} :

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{22} \operatorname{ctg}^2 \alpha, \quad \sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{22} \operatorname{ctg}^2 \beta, \quad \sigma_{12} = -\sigma_{22} \operatorname{ctg} \alpha = \sigma_{22} \operatorname{ctg} \beta. \quad (7)$$

Условие (3) с использованием равенств (7) приводится к виду

$$\left[\frac{1}{E_1} (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu_1) - \frac{1}{E_2} (\operatorname{ctg}^2 \beta - \nu_2) \right] \sigma_{22} = 0, \quad (8)$$

из которого следует, что напряжение σ_{22} (а вследствие (7) и все другие напряжения) обращаются в нуль в особой точке, если множитель в квадратных скобках не равен нулю. Если этот множитель обращается в нуль, напряжение σ_{22} может быть произвольным. То есть в этом случае на напряжения σ_{22} в точке A не накладываются какие-либо ограничения. Оно находится в результате решения краевой задачи для рассматриваемой конструкции. Введем угол ψ , определяемый равенствами $\alpha = \pi/2 + \psi$, $\beta = \pi/2 - \psi$. Условие возможного необращения σ_{22} в нуль в особой точке для плоскодеформированного и обобщенного плосконапряженного состояния соответственно принимает вид

$$\operatorname{tg}^2 \psi = \frac{E_1 \nu_2 (1 + \nu_2) - E_2 \nu_1 (1 + \nu_1)}{E_1 (1 - \nu_2^2) - E_2 (1 - \nu_1^2)}, \quad \operatorname{tg}^2 \psi = \frac{E_2 \nu_1 - E_1 \nu_2}{E_2 - E_1}. \quad (9)$$

Полученный результат представляется важным, так как позволяет управлять концентрацией напряжений вблизи особой точки. Для иллюстрации рассмотрим следующий пример. Пусть плоская составная конструкция (рис. 2) подвергается растяжению-сжатию в направлении оси x_2 напряжениями σ_0 , приложенными на торцах.

Система координат выбрана так, что ось x_1 составляет с линией скрепления $m-n$ угол ψ , рассчитанный для заданных материальных свойств по формулам (9). Решение данной задачи в стандартном пакете ANSYS показывает, что во всех точках конструкции реализуется однородное напряженное состояние, концентрация напряжений вблизи особой точки отсутствует.

При необходимости соединения элементов конструкции встык по линии, перпендикулярной оси нагружения ($\psi = 0$), отсутствие концентрации напряжений в окрестности особой точки, согласно условию (9), принимает вид (плосконапряженное состояние)

$$E_2 \nu_1 - E_1 \nu_2 = 0. \quad (10)$$

Если условие (10) не выполняется, то, как следует из (8), нормальное напряжение на линии соединения элементов в крайней точке обращается в нуль. Позже (см. п. 3) будет показано, что в этом случае в окрестности крайней точки появляется концентрация напряжений.

На рис. 3 приводятся примеры расчета составных конструкций, работающих на растяжение-сжатие в направлении вертикальной оси в условиях плоского на-

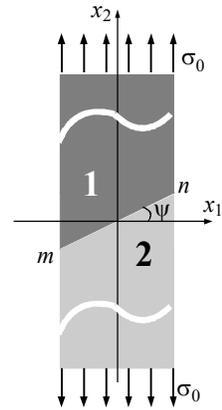


Рис. 2. Схема нагружения конструкции, полученной соединением двух элементов по линии $m-n$

пряженного состояния. При этом углы наклона линии скрепления к горизонтальной оси выбраны из условия (9). В таких конструкциях реализуется однородное напряженное состояние, а концентрация напряжений вблизи особых точек отсутствует.

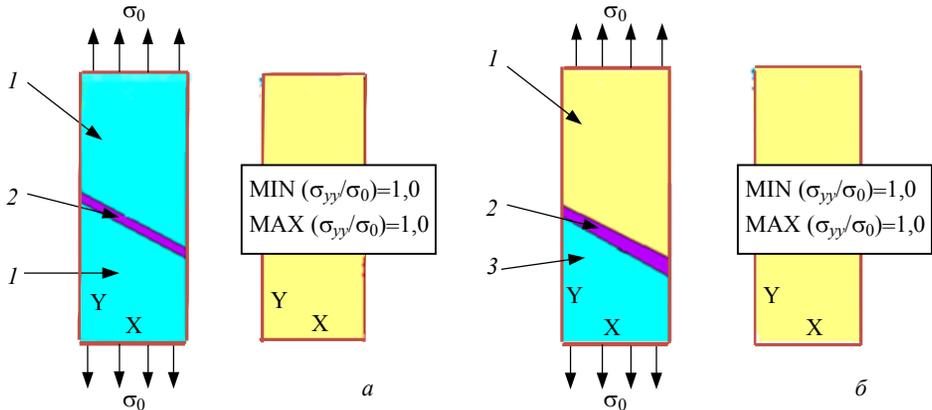


Рис. 3. Примеры составных конструкций, находящихся в однородном напряженном состоянии при растяжении-сжатии (расчетная схема и изолинии σ_{22}/σ_0 в ANSYS- решении)

На рис. 3 приведены: *а* – две пластинки чугуна (1), скрепленные с помощью стекла (2); *б* – пластинка из чугуна (1), скрепленная стеклом (2) с пластинкой стали (3). Механические свойства материалов и тангенсы углов наклона линий скрепления приведены в табл. 1, 2. Во втором случае (рис. 3, б) углы наклонов линий скрепления оказываются различными для каждой пары материалов.

Таблица 1

Механические характеристики скрепляемых материалов

№ п/п	Материал	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона
1	Чугун	110	0,22
2	Стекло	70	0,25
3	Сталь	210	0,28

Таблица 2

Тангенсы углов наклона для плоского напряженного состояния (ПНС) и плоской деформации (ПДС) для скрепляемых пар материалов по формулам (9)

ПНС	ПДС	Пара материалов
0,550000	0,653367	чугун – стекло
0,484768	0,553404	стекло – сталь
0,154000	0,172050	чугун – сталь

В случае, когда параметры состояния (напряжения и деформации) в окрестности особой точки претерпевают значительные градиенты, аналитические решения для полей напряжений становятся затруднительными, а численные, вследствие заложенной в них приближенности выполнения некоторых граничных условий, не обеспечивают достаточную точность вычислений. Так, в методе конечных

элементов (МКЭ), система разрешающих уравнений которого построена на функционале Лагранжа, заложено приближенное выполнение граничных условий в напряжениях, поэтому на поверхностях (линиях), примыкающих к особой точке, эти граничные условия, как правило, точно не выполняются. В то же время граничные условия в перемещениях выполняются всегда точно; эта особенность, а также установленные выше алгебраические соотношения, связывающие напряжения в особой точке, ниже используются для построения численного алгоритма последовательного уточнения решения в ее окрестности.

2. Метод численного анализа напряженного состояния в окрестности особой точки

Предлагаемый метод построения полей напряжений вблизи особой точки составной конструкции основан на применении для построения разрешающих уравнений МКЭ смешанного функционала, в котором независимо варьируются перемещения и деформации [14]. При этом деформации разыскиваются в классе непрерывных функций в областях непрерывности материальных параметров составной конструкции. Применение смешанного функционала позволяет выразить узловые напряжения через узловые перемещения без применения операции дифференцирования приближенного решения.

Основные этапы предлагаемого подхода состоят в следующем:

1. Вблизи особой точки устанавливаются алгебраические равенства, которым должно подчиняться напряженное состояние. Это граничные условия; условия непрерывности напряжений и кинематические условия на контактной поверхности; соотношения, связывающие напряжения непосредственно в особой точке, вытекающие из решения системы уравнений (4). Эти алгебраические равенства устанавливаются аналитически, поэтому точность их выполнения характеризует и точность применяемого вычислительного алгоритма.

2. На заданной конечно-элементной сетке строится решение (нулевое приближение) о распределении напряжений в рассматриваемой конструкции (включая окрестность особой точки) с заданными граничными условиями. Оно может не удовлетворять алгебраическим равенствам (п.1), образуется вектор невязок.

3. Уточнение решения реализуется в процедуре последовательной минимизации вектора невязок. С этой целью узлы конечно-элементной сетки, напряжения в которых входят в алгебраические равенства (п.1), объявляются основными. Напряжения в основных узлах выражаются через все узловые перемещения и подставляются в алгебраические равенства (п.1). Перемещения в основных узлах считаются неизвестными, остальным узловым перемещениям присваиваются значения, полученные ими в последней итерации. В результате алгебраические равенства становятся системой уравнений относительно основных перемещений.

4. Найденные основные перемещения принимаются за граничные условия в основных узлах при поиске следующего приближенного решения о напряженном состоянии конструкции в соответствии с п. 2. Этим способом граничные условия в напряжениях и условия непрерывности напряжений на линии контакта (п.1) преобразуются в граничные условия в перемещениях. Таким образом, уточнение решения проводится путем решения обратной задачи – поиска перемещений, обеспечивающих минимум вектора невязок. Далее процесс повторяется.

Предлагаемая итерационная процедура оказывается сходящейся. Зависимость решения от конечно-элементной сетки уменьшается с ее сгущением. Выход из

итерационного процесса осуществляется при достижении величиной невязки заданного значения или при стабилизации решения. Для оценки улучшения решения вводится параметр k (коэффициент улучшения решения), равный отношению среднеквадратического значения величины вектора невязок в нулевом приближении к соответствующему значению в итоговом решении.

3. Растяжение составной пластинки в условиях плоского напряженного состояния

Для примера рассматривается растяжение составной пластинки, изображенной на рис. 2, в случае, когда угол $\psi = 0$. Построим алгебраические равенства, которым должно подчиняться напряженное состояние вблизи особой точки:

а) на линии, свободной от напряжений, обращаются в нуль нормальные и касательные напряжения (кроме особой точки)

$$\sigma_{11}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{12}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{11}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{12}^{(2)} = 0; \quad (11)$$

б) на линии соединения различных материалов выполняются условия непрерывности напряжений (кроме особой точки)

$$\sigma_{22}^{(1)} - \sigma_{22}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{12}^{(1)} - \sigma_{12}^{(2)} = 0; \quad (12)$$

в) в особой точке выполняются граничные условия на свободной поверхности, условия непрерывности напряжений на линии соединения и ограничения, накладываемые на напряжения решением системы уравнений (4) и условием (3):

$$\sigma_{22}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{22}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{12}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{12}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{11}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{11}^{(2)} = 0. \quad (13)$$

Ниже на рис. 4–6 приводятся результаты вычислений напряженного состояния вблизи особой точки по описанной выше процедуре. На рис. 4. представлены результаты вычислений нормальных напряжений на линии соединения элементов конструкции (рис. 2, $\psi = 0$).

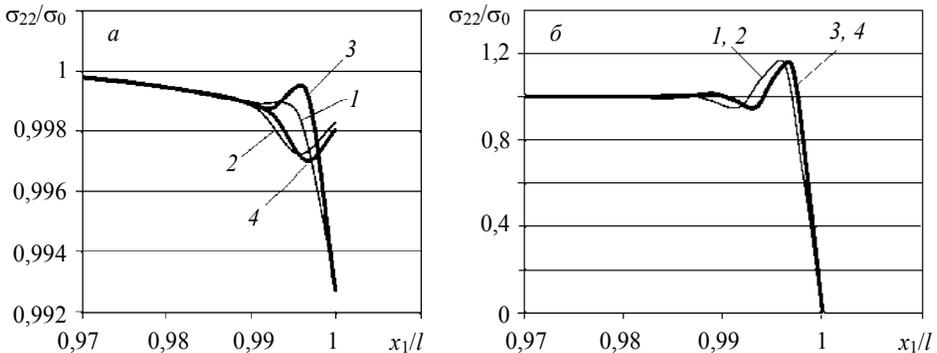


Рис. 4. Нормальные напряжения σ_{22} на линии соединения элементов конструкции:
а) нулевое приближение; б) решение, полученное методом итерации

Цифрами 1 и 2 отмечены напряжения $\sigma_{22}^{(1)}$ и $\sigma_{22}^{(2)}$ соответственно, вычисленные на конечно-элементной сетке со сгущением к особой точке с количеством узлов 2521, цифрами 3 и 4 – те же параметры на конечно-элементной сетке с

количеством узлов 3901. Во всех случаях использовался 8-узловой 4-угольный конечный элемент. Из рисунка видно, что в нулевом приближении (аналог ANSYS-решения) условие для напряжений на линии стыка в окрестности особой точки и в самой точке не выполняются. Измельчение конечно-элементной сетки не улучшает решение.

Использование метода итераций приводит к решению, в котором выполняются на линии стыка вблизи особой точки и равенство нормальных напряжений ($\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}$), и обращение этих напряжений в нуль непосредственно в точке. Коэффициенты улучшения решения в приведенных примерах оказались соответственно равными $k = 32,5$ и $k = 35,6$.

На рис. 5, а приводятся решения на тех же конечно-элементных сетках для параметра σ_{22} вблизи особой точки на линии, свободной от напряжений.

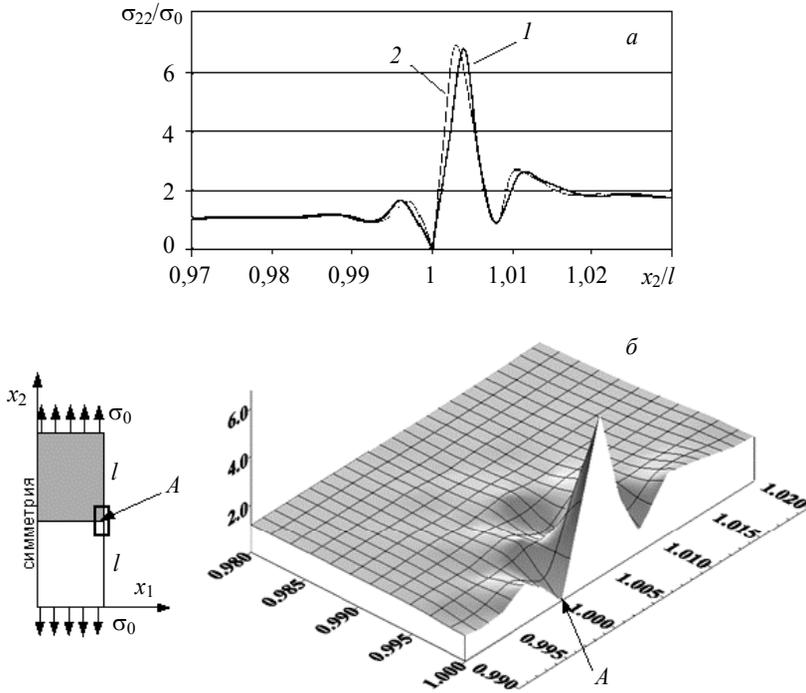


Рис. 5. Напряжения σ_{22}/σ_0 : а – на линии, свободной от напряжений в окрестности особой точки: 1 – для 2521 узлов разбивки; 2 – для 3901 узлов; б – поверхность напряжений в окрестности особой точки

Заметим, что с измельчением сетки экстремальные значения напряжений практически не изменяются (рис. 5, а). Своего максимального значения напряжение σ_{22} достигает вблизи особой точки на линии, свободной от напряжений, в более жестком элементе конструкции. На рис. 5, б видно, что область, в которой сказывается влияние особой точки, относительно мала, при этом изменения напряженного состояния в этой области весьма значительны.

Рис. 6 иллюстрирует зависимость коэффициентов концентрации напряжения σ_{22} от материальных параметров скрепляемых элементов. Графики изменения коэффициентов концентрации $\sigma_{22}^{\max}/\sigma_0$ приводятся в зависимости от коэффициента Пуассона ν_2 . При указанных материальных параметрах условие, отвечающее однородному напряженному состоянию конструкции (10), выполняется для всех трех кривых, представленных на рис. 6, а. Коэффициент концентрации в этом случае равен единице (точки *f*, *g*, *h*).

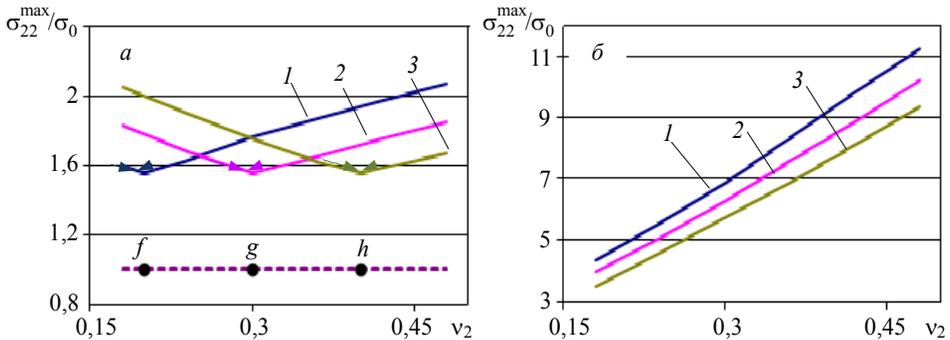


Рис. 6. Коэффициенты концентрации напряжения $\sigma_{22}^{\max}/\sigma_0$ в зависимости от материальных параметров скрепляемых элементов: *a* – $E_1/E_2=1$, *б* – $E_1/E_2=5$; 1 – $\nu_1=0,2$; 2 – $\nu_1=0,3$, 3 – $\nu_1=0,4$

В окрестности этих точек коэффициенты концентрации скачком изменяют свои значения от единицы до, примерно, величины 1,55 (расчетное значение). С удалением от точек *f*, *g*, *h* коэффициенты концентрации возрастают. В рассматриваемой области изменения коэффициентов Пуассона с ростом отношения E_1/E_2 концентрация напряжений увеличивается (рис. 6).

Заключение

Основные результаты проведенного исследования состоят в следующем.

- Предложен способ построения всех возможных алгебраических соотношений между компонентами напряжений в особых точках составных конструкций в условиях плоской задачи.

- Выявлены зависимости между материальными константами и геометрическими параметрами, при которых в составных конструкциях, подвергаемых растяжению-сжатию в условиях плоской задачи, реализуется однородное напряженное состояние.

- Предложен итерационный численно-аналитический метод исследования значительно изменяющихся полей напряжений в малых окрестностях особых точек составных конструкций. Данный подход позволяет оценить величину области, где параметры решения имеют высокие градиенты, изучить в ней закономерности поведения напряжений, вычислить коэффициенты их концентрации.

Вычисления выполнялись на суперкомпьютере Тесла-ПГУ НОЦ ПИРВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vogy D.B.* Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions // *Trans. ASME. Ser. E.* 1971. V. 38. No. 2. P. 87–96.
2. *Vogy D.B.* Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading // *J. Appl. Mechanics.* 1968. V. 35. P. 460–466, 1968.
3. *Чобанян К.С.* Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.
4. *Аксентян О.К.* Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // *Прикладная математика и механика.* 1967. № 1. С. 178–186.
5. *Аксентян О.К., Луцик О.Н.* Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного клина // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* 1978. № 5. С. 102–108.
6. *Аксентян О.К., Луцик О.Н.* Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины стыкового соединения // *Прикладная механика.* 1982. Т.18. № 7. С.66–73.
7. *Задоян М.А.* Об условиях малонапряженности составных плит // *Докл. РАН.* 1993. Т. 332. № 3. С. 319–321.
8. *Задоян М.А.* Прочность соединения составных плит // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* 2003. № 1. С. 111–122.
9. *Матвеевко В.П., Федоров А.Ю.* Оптимизация геометрии составных упругих тел как основа совершенствования методик испытаний на прочность клеевых соединений // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2011. Т. 4. № 4. С.63–70.
10. *Xu L.R., Kuai H., Sengupta S.* Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part I. A biologically inspired design // *Experimental Mechanics.* 2004. V. 44. No. 6. P. 608–615.
11. *Xu L.R., Kuai H., Sengupta S.* Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part II. An integrated numerical analysis // *Experimental Mechanics.* 2004. V. 44. No. 6. P. 616–621.
12. *Рябов И.А.* Безопасность механически неоднородных элементов конструкций нефтегазового комплекса: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Уфа: ГУП «ИПТЭР», 2009. 26 с.
13. *Геворкян Г.В., Задоян М.А., Саакян Г.Р., Саркисян С.М.* Экспериментальные исследования прочности составных плит при изгибе // *Прикладная механика и техническая физика.* 2000. Т. 41. № 4. С. 211–215.
14. *Пестренин В.М., Пестренина И.В.* Механика композитных материалов и элементов конструкций. Пермь: Изд. Перм. гос. ун-та, 2005. 364 с.

Статья поступила 13.03.2013 г.

Pestrenin V. M., Pestenina I. V., Landik L. V. THE STRESS STATE NEAR A SINGULAR POINT OF A FLAT COMPOSITE DESIGN. To study the stress-deformed state in small neighborhoods of singular points of compound designs, an iterative numerical-analytical approach based on minimizing residuals of algebraic equalities representing boundary conditions, conditions for stress and strains on the contact surface and directly in the singular point is proposed. The stress-strain state is studied in a vicinity of a singular point for a flat compound design.

Keywords: stress concentration, singular points, compound designs, contact surfaces.

PESTRENIN Valery Mihailovich (Perm State University)
E-mail: pestreninVM@mail.ru

PESTRENINA Irena Vladimirovna (Perm State University)
E-mail: IPestrenina@gmail.com

LANDIK Lidia Vladimirovna (Perm State University)
E-mail: LidiaLandik@gmail.com