МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

И.А. Александров

ОБ ОЦЕНКЕ КРИВИЗНЫ ЛИНИЙ УРОВНЯ ПРИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

На классе S устанавливается нижняя оценка кривизны линий уровня.

Ключевые слова: *конформное отображение*, *функционал*, *линия уровня.*

Линией уровня голоморфного однолистного отображения

$$f : U \to \boldsymbol{C}, U = \{z \in \boldsymbol{C} : |z| < 1\},$$

нормированного условиями $f(0) = 0,\ f'(0) = 1$ (множество всех таких отображений образует известный класс S), называют образ $L(f,r)$ окружности

$$l_r = \{z \in U : |z| = r\},\ 0 < r < 1,$$

при отображении f, то есть $L(f,r)=f(l_r)$.

Пусть $z_0 \in l_r$. Кривизна замкнутой жордановой аналитической кривой $L(f,r)$ в точке $f(z_0)$, $|z_0|=r$, вычисляется по формуле

$$K(f, z_0) = \frac{\operatorname{Re}\left(1 + \dfrac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)}\right)}{|z_0 f'(z_0)|}.$$

Имеется ряд работ, посвященных нахождению точных оценок кривизны линий уровня на классе S. Известно, что в силу компактности класса S в смысле равномерной сходимости последовательностей на замкнутых ограниченных множествах точные оценки сверху и снизу достигаются на функциях класса S. Вариационным методом доказано, что такие функции отображают круг U на области, полученные из $\boldsymbol{C}$ исключением кривых, составленных из конечного числа аналитических дуг. Так как если $f(z) \in S$, то $g_\alpha(z) = e^{i\alpha} f\left(e^{-i\alpha} z\right) \in S,\ 0 \le \alpha < 2\pi$, и поэтому

$$\overline{K}(f, r) = \max_{f \in S} K(f, z_0) = \max_{g_\alpha \in S} K(g_\alpha, r),$$

$$\underline{K}(f, r) = \min_{f \in S} K(f, z_0) = \min_{g_\alpha \in S} K(g_\alpha, r)$$

при $\alpha = \arg z_0$.

Приведенная далее оценка снизу кривизны линий уровня известна [1, 2]. Новым является способ её получения, не требующий сложных вычислений, и поэтому, может быть, он заслуживает быть отмеченным

Теорема. *Для кривизны линий уровня* $L(f,r)$, $2-\sqrt{3}<r<1$, *на классе S имеет место точная оценка*

$$\underline{K}(f,r)=\frac{\left(r^2-4r+1\right)(1+r)^2}{r(1-r)^2};$$

она реализуется при z = r на функции

$$w=f(z)=\frac{z}{(1+z)^2},$$

*отображающей круг U на плоскость **C** с исключенным лучом от точки ¼ до бесконечности, лежащим на положительной части действительной оси.*

Доказательство. Множество $D(z)=\{w\in \boldsymbol{C}: w=I(f,z)\}$ значений функционала

$$I(f,z)=\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+i\left|zf'(z)\right|,\ f\in S,$$

при фиксированном $z\in U$ ограничено и замкнуто. Из точных оценок Бибербаха [3, с. 48], для $f\in S$

$$a_1(r)\le \operatorname{Re} I(f,r)\le a_2(r),\ b_1(r)\le \operatorname{Im} I(f,r)\le b_2(r),$$

где

$$a_1(r)=\frac{r^2-4r+1}{1-r^2},\ b_1(r)=\frac{r(1-r)}{(1+r)^3},\ a_2(r)=a_1(-r),\ b_2(r)=-b_1(-r),$$

следует, что $D(r)$ лежит в замкнутом прямоугольнике $\Delta(r)$ с вершинами $w_{11}=a_1+ib_1$, $w_{12}=a_1+ib_2$, $w_{21}=a_2+ib_1$, $w_{22}=a_2+ib_2$, то есть $D(r)\subset\Delta(r)$.

В трехмерном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ с декартовой прямоугольной системой координат $O\xi\eta\zeta$ отождествим плоскость $\zeta=0$ с комплексной плоскостью ***C***, полагая $w=\xi+i\eta$. На плоскости $\zeta=0$ прямоугольник $\Delta(r)$ лежит в полуплоскости $\eta>0$. Если $0<r<2-\sqrt{3}$, то $\Delta(r)$ лежит в первом квадранте плоскости $O\xi\eta$. При $2-\sqrt{3}<r<1$ часть прямоугольника $\Delta(r)$ лежит в первом квадранте плоскости $O\xi\eta$, а остальная часть – во втором квадранте: $\xi<0,\eta>0$. Функция $\zeta=\dfrac{\xi}{\eta}$ в $\Delta(r)$, $2-\sqrt{3}<r<1$, однозначна и имеет минимальное значение в точке w_{11}. Оно равно $A(r)=\dfrac{\left(r^2-4r+1\right)(1+r)^2}{r(1-r)^2}$ и достигается на функции $f(z)=\dfrac{z}{(1+z)^2}\in S$. Значит, точка $w_{11}\in D(r)$ и в нестрогом неравенстве

$$A(r)=\min_{\Delta(r)}\frac{\xi}{\eta}\le\min_{D(r)}\frac{\xi}{\eta}=\underline{K}(f,r)$$

реализуется равенство.

Теорема доказана.

Заметим, что как показано в [2], от ограничения $2-\sqrt{3}<r<1$ можно освободиться, сохраняя утверждение теоремы. Область $D(r)$ пока не найдена. Остается открытым вопрос о значении $\overline{K}(f,r)$, $f \in S$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мирошниченко Я.С.* Об одной задаче теории однолистных функций // Учен.записки Донецкого пед. ин-та. 1951. С. 63–75.
2. *Корицкий Г.В.* О кривизне линий уровня и ортогональных траекторий при конформных отображениях // Матем. сб. 1955. № 37. С. 103–116.
3. *Александров И.А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2001.

Статья поступила 21.02.2013 г.

Aleksandrov I.A. ABOUT ESTIMATION OF THE CURVATURE OF LEVEL LINES UNDER CONFORMAL MAPPINGS. A lower bound is established on the class *S* for the curvature of level lines under conformal mappings.

Keywords: conformal mapping, functional, level lines.

ALEKSANDROV Igor’ Alexandrovich (Tomsk State University).
E-mail: ma@math.tsu.ru