

УДК 517.54

С.А. Копанев

ЗАМЕТКА О КРИВИЗНЕ ЛИНИИ УРОВНЯ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Новым способом получена известная точная оценка снизу кривизны линии уровня в классе голоморфных однолистных отображений.

Ключевые слова: голоморфное однолистное отображение, линия уровня, кривизна.

Пусть S – класс голоморфных однолистных в единичном круге $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ отображений $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots$. Образ окружности $|z| = r$, $0 < r < 1$, относительно отображения f называется линией уровня. Кривизна K_r линии уровня в точке $f(z_0)$, $z_0 \in E$, $|z_0| = r$, $0 < r < 1$, как хорошо известно, равна

$$K_r = \frac{1}{r |f'(z_0)|} \operatorname{Re} \left(1 + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)^2} \right).$$

Класс S обладает свойством: отображение $f \in S$ тогда и только тогда, когда отображение $g \in S$, где

$$g(z) = -\frac{e^{i\theta}}{(1-r^2)} f' \left(e^{-i\theta} \frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z} \right) - f(r), \quad z_0 = r e^{i\theta}.$$

Это свойство автоморфизма класса S позволяет задачу об оценке кривизны линии уровня свести к задаче об оценке функционала

$$K_r = \frac{1-r^2}{r} |f'(r)| \operatorname{Re} (1 + r^2 - 2rc_2),$$

где $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots$, в классе S .

Приведем в частном случае ($p = 1$) следствие 3 из работы [1].

На классе S справедлива точная оценка

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{|f'(z)|}{1-r^2},$$

где $|z| = r$, $0 < r < 1$.

Отметим, что равенство имеет место только для семейства отображений

$$f_\lambda(z) = \frac{z}{1 - 2\lambda z + z^2}, \quad -1 \leq \lambda \leq 1.$$

Приведенная оценка позволяет записать для кривизны линии уровня следующую оценку:

$$K_r \geq \frac{(1-r^2)^2}{r^3} |f(r)|^2 \operatorname{Re}(1+r^2-2rc_2).$$

Минимальное значение сомножителя $\operatorname{Re}(1+r^2-2rc_2)$ равное $1-4r+r^2$ достигается на отображении $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ из семейства $f_\lambda(z)$, и, следовательно, на

этом же отображении достигается минимальное значение кривизны линии уровня

$$\min_{f \in S} K_r = \frac{1-4r+r^2}{r} \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^2.$$

Задача о кривизне линии уровня в классе S и в других классах однолистных отображений рассматривалась в работах [2–20]. Ранее точная нижняя оценка кривизны линии уровня в классе S разными способами, отличными от предлагаемого, была получена Г.В. Корицким, Я.С. Мирошниченко, В.В. Черниковым, И.А. Александровым. Наилучшая на сегодняшний день верхняя оценка кривизны линии уровня в классе S принадлежит В.В. Черникову [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И.А., Копанев С.А. О взаимном росте модуля однолистной функции и модуля ее производной // Сиб. матем. журнал. 1966. Т. 7. № 1. С. 23–30.
2. Александров И.А. Об оценке кривизны линий уровня при конформных отображениях // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 3 (23). С. 5–7.
3. Bieberbach L. Neuere Forschungen im Gebiete der konformen Abbildung. Glasnik hrt. Prirod. Drustva, 1921. Bd 33.
4. Александров И.А., Черников В.В. Об экстремальных свойствах однолистных звездообразных отображений // Сиб. матем. журнал. 1963. Т. 4. № 6. С. 1201–1207.
5. Александров И.А., Прохорова А.Е. Оценки кривизны линий уровня на классе // ДАН СССР. 1972. Т. 203. № 2. С. 267–269.
6. Зморевич В.А. О некоторых вариационных задачах теории однолистных функций // Укр. матем. журнал. 1952. Т. 4. № 3. С. 276–298.
7. Копанев С.А., Сыркашев А.Н. Качественный анализ дифференциально-функционального уравнения для одного функционала // Исследования по матем. анализу и алгебре: сб. Вып. 3. Томск, 2001. С. 125–134.
8. Корицкий Г.В. О кривизне линий уровня и их ортогональных траекторий при конформных отображениях // Матем. сб. 1955. 37 (79): 1. С. 103–116.
9. Корицкий Г.В. О кривизне линий уровня при однолистных конформных отображениях // ДАН. 1957. Т. 115. № 4. С. 653–654.
10. Корицкий Г.В. К вопросу о кривизне линий уровня при однолистных конформных отображениях // Успехи матем. наук. 1960, сентябрь-октябрь. Т. XV. Вып. 5 (95). С. 179–182.
11. Корицкий Г.В. К оценке кривизны линий уровня при однолистных конформных отображениях // Труды Томского ун-та. Т. 210. Вопросы геометрической теории функций. 1969. Вып. 6. С. 34–36.
12. Мартынов Ю.А. О геометрических свойствах дуг линий уровня при однолистных конформных отображениях // Труды Томского ун-та. Т. 210. Вопросы геометрической теории функций. 1969. Вып. 6. С. 53–61.
13. Мирошниченко Я.С. Об одной задаче теории однолистных функций // Учен. зап. Сталлинск. пед. ин-та. 1951. Вып. 1. С. 63–75.

14. Мирошниченко Я.С. К вопросу о кривизне линий уровня // Труды Томского ун-та. Т. 210. Вопросы геометрической теории функций. 1969. Вып. 6. С. 62–65.
15. Черников В.В. Об оценке кривизны линий уровня в одном классе однолистных функций // Матем. заметки. 1976. Т. 19. № 3. С. 381–388.
16. Черников В.В. Оценка кривизны линий уровня в классах Σ , Σ^p // Экстремальные задачи теории функций: сб. Томск, 1980. С. 126–129.
17. Черников В.В. Об оценке кривизны линий уровня в классе всех регулярных однолистных в круге функций // Сиб. матем. журнал. 1985. Т. 26. № 2. С. 210–213.
18. Черников В.В., Арендарчук М.А. Об оценке кривизны линий уровня // Труды Томского ун-та. Т. 238. Вопросы геометрической теории функций. 1974. Вып. 7. С. 118–123.
19. Эзрохи Т.Г. О кривизне линий уровня и их ортогональных траекторий в классе функций с ограниченным вращением // Укр. матем. журнал. 1965. Т. 17. № 4. С. 91–99.
20. Югай С.М. Оценка кривизны образов окружностей при отображении их выпуклыми однолиственными в круге функциями // Матем. заметки. Т. 53. Вып. 1. 1993. С. 133–137.

Статья поступила 26.02.2013 г.

Copanev S.A. A NOTE ON THE CURVATURE OF THE LEVEL LINE UNDER THE CONFORMAL MAPPING. A lower bound is established by a new method on the class S for the curvature of level lines under conformal mapping.

Keywords: holomorphic univalent mapping, level line, curvature.

COPANEV Sergey Anatol'evich (Tomsk State University)

E-mail: Copanev_d@mail.ru