

УДК 539.214

П.В. Манахов, О.Б. Федосеев

**ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПЛАСТИЧЕСКИХ  
ДЕФОРМАЦИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ  
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Приведен численный метод решения задач пластичности по теории течения с использованием метода конечных элементов. Основной особенностью метода является непосредственное решение системы нелинейных определяющих уравнений программными средствами, реализующими алгоритм минимизации невязки функции. Представлена работа программы по определению напряженно-деформированного состояния для упругопластической осесимметричной задачи. Указаны преимущества данного метода по сравнению с известными методами расчета пластических течений.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, теория пластического течения, аппроксимация, кривые упрочнения, итерационный процесс, условие пластичности, предел текучести.

**Введение**

В основе теории пластического течения лежит соотношение, связывающее компоненты приращения пластических деформаций  $d\varepsilon_{ij}^p$  с поверхностью текучести  $F$ :

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}},$$

где  $\lambda$  – скалярный множитель;  $\sigma_{ij}$  – составляющие тензора напряжения. Соотношение (1) не интегрируется, то есть не сводится к конечному соотношению между компонентами напряжения и деформации, так как содержит неизвестный скалярный множитель  $\lambda$ , для определения которого нужно располагать дополнительным соотношением.

Современная методика расчета пластических течений [1] предполагает построение упругопластической матрицы  $D_{ep}$ , связывающей приращения напряжений и деформаций:

$$d\sigma = D_{ep}d\varepsilon, \quad (1)$$

где  $D_{ep}$  – упругопластическая матрица, вычисление которой проводят, используя диаграмму одноосного растяжения материала [1, 2].

Процедура установления зависимости (1) характеризуется трудоемкостью, которая связана с необходимостью нахождения упругопластической матрицы по экспериментальным данным на каждом шаге вычислений.

К настоящему времени для определения накопленных пластических деформаций, напряжений и перемещений достаточно хорошо разработаны различные итерационные методы. Основные из них: метод переменной и касательной жесткости, метод начальных напряжений и начальных деформаций.

Суть каждого из этих методов сводится к построению системы линейных уравнений вида

$$M\Delta u = \Delta P + M_p\Delta u$$

и решения полученной системы итерационным способом [1]:

$$M\Delta u_n = \Delta P + M_p\Delta u_{n-1},$$

$$\Delta u_0 = 0, n = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $M = \int_V B^T DB dV$  – упругая матрица жёсткости;  $M_p = \int_V B^T D_p B dV$  – пластическая

матрица жёсткости;  $\Delta P$  – приращение нагрузки;  $\Delta u$  – приращение перемещения;  $n$  – номер итерации;  $B$  – так называемая матрица градиентов, содержащая производные от перемещений. Методом начальных деформаций и напряжений вносят изменения в  $\Delta P$  на каждой итерации:

$$\Delta P = \int_V B^T \Delta \sigma dV, \Delta \sigma = D\Delta \varepsilon + \Delta \sigma_0 \quad \text{– для начальных напряжений,}$$

$$\Delta P = \int_V B^T D \Delta \varepsilon dV, \Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_0 + \frac{\Delta \sigma}{D} \quad \text{– для начальных деформаций,}$$

где  $\Delta \sigma_0$  – приращение начальных напряжений;  $\Delta \varepsilon_0$  – приращение начальных деформаций.

Методом переменной и касательной жёсткости вносят изменения в матрицу упругой жёсткости  $M$ ; в последнем случае расчёт ведут методом Ньютона – Рафсона. Итерационный процесс продолжают до тех пор, пока отличие искомого приращения на соседних итерациях не станет меньше наперед заданного малого числа.

Можно выделить следующие трудности, с которыми сталкиваются исследователи при решении задач по теории пластического течения:

- соотношение, связывающее компоненты приращения пластических деформаций с поверхностью текучести не интегрируется, то есть не сводится к конечному соотношению, так как содержит неизвестный скалярный множитель.

- другая проблема в расчёте пластичности по теории течения состоит в том, что связь между напряжениями и деформациями присутствует лишь с момента достижения напряжениями поверхности текучести; следовательно, на каждом шаге расчёта необходимо изменять напряжения так, чтобы выполнялось условие текучести.

- процедура установления зависимости между напряжениями и деформациями характеризуется трудоёмкостью, которая связана с необходимостью нахождения упругопластической матрицы по экспериментальным данным на каждом шаге вычислений.

### Методика проведения расчетов

В работе [3] изложен альтернативный алгоритм вычисления пластических деформаций на основе решения системы нелинейных определяющих уравнений, состоящей из соотношений Прандтля – Рейса и условия пластичности Мизеса:

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ij}^p = \lambda s_{ij}, \\ \sigma_i - \sigma_t = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $s_{ij}$  – компоненты деватора напряжения;  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений;  $\sigma_t$  – предел текучести материала.

Для решения системы нелинейных уравнений (2) обращаются к целевой функции, алгоритм работы которой использует начальные значения искомого величин

и базируется на минимизации суммы квадратов входящих в систему функций методами Гаусса – Ньютона и Левенберга – Марквардта. Соответствующим обращением к данной функции можно управлять процессом поиска решений, в частности устанавливать максимальное количество обращений к функциям системы уравнений, устанавливать максимальное количество итераций, прекращать итерации при достижении требуемой точности значений функций.

Предел текучести может быть рассчитан при обращении к экспериментально полученным кривым упрочнения для заданного уровня пластических деформаций, температуре и скорости деформации.

В [4] описан способ аппроксимации кривых упрочнения параболической функцией

$$\sigma_T = A\varepsilon_p^2 + B\varepsilon_p + C, \quad (3)$$

где  $\sigma$  и  $\varepsilon_p$  – напряжения и интенсивность пластических деформаций соответственно;  $A, B, C$  – определяемые коэффициенты, зависящие от скорости деформации и температуры.

Последовательность решения задачи пластичности при заданных температурно-скоростных условиях деформации следующая:

1) проверка условия пластичности Мизеса:

$$\sigma_i - \sigma_i = 0; \quad (4)$$

2) вычисление коэффициентов  $A, B, C$  аппроксимирующей функции (3). Для сталей 20 и 08Х22Н6Т расчет может быть проведен по формулам, указанным в [4];

3) решение системы определяющих уравнений (2) относительно пластических деформаций. Переходя к конечно-разностной форме соотношений Прандтля – Рейса и учитывая формулу (4), система (3) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\Delta\varepsilon_{ij}^p}{\Delta t} - \lambda s_{ij} = 0, \\ \sigma_i - (A\varepsilon_p^2 + B\varepsilon_p + C) = 0, \end{cases}$$

где  $\Delta t$  – временной интервал, который исключается при переходе к безразмерным параметрам;

4) расчет предела текучести  $\sigma_t$  как функции, аппроксимирующей кривые упрочнения для исследуемого материала, по формуле (4). Данное значение предела текучести используется для проверки условия пластичности для следующего шага расчета;

5) модификация глобального вектора нагрузки  $F$  с учетом наличия пластических деформаций и закрепления модели;

6) расчет глобальной матрицы жесткости  $M$  с учетом деформаций;

7) вычисление приращений узловых перемещений  $U$  путем решения (например, методом исключения Гаусса) системы линейных уравнений метода конечных элементов;

8) вычисление накопленных узловых перемещений  $U_\Sigma$ ;

9) расчет компонент вектора полных деформаций для конечных элементов:

$$\varepsilon = BU_\Sigma,$$

где  $B$  – матрица градиентов, содержащая производные от перемещений;

10) расчет упругих деформаций  $\varepsilon_e$ :

$$\varepsilon_e = \varepsilon - \varepsilon_p;$$

11) определение компонент вектора напряжений  $\sigma$ :

$$\sigma = D\varepsilon_e,$$

где  $D$  – матрица упругих констант;

12) вычисление для конечных элементов компонент девиатора напряжений  $s_{ij}$  и интенсивности напряжений  $\sigma_i$ ;

13) переход к следующему шагу вычислений.

### Получение результатов

В работе [5] дан детальный обзор последовательности вычислений напряжений и деформаций при сжатии тела прямоугольного сечения в условиях плоской деформации для линейно упрочняющегося тела (рис. 1).

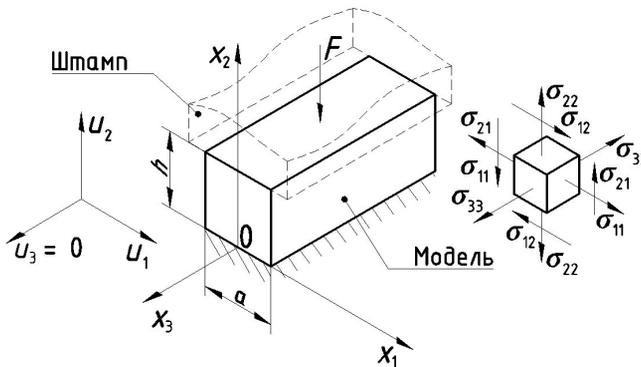


Рис. 1. Расчетная схема для анализа плоской деформации при сжатии тела прямоугольного сечения

На рис. 2 и 3 показаны решения, полученные по разработанному алгоритму. (На графиках  $\sigma_{22}$  – нормальное напряжение, действующее в направлении сжимающей силы.) Результаты показали, что для задачи с граничными условиями в перемещениях (рис. 2) при возрастании коэффициента упрочнения или скорости деформации напряжения приближаются к решению для идеально упругого тела. При решении задачи с силовыми граничными условиями (рис. 3) наблюдается аналогичный характер уменьшения осадки при увеличении коэффициента упрочнения или скорости деформации.

Для сравнения на графиках показаны также решения, полученные методом начальных деформаций. Итерационный процесс по предлагаемому алгоритму обладает более быстрой сходимостью. Так, например, для коэффициента упрочнения  $10^5$  МПа сходимость достигается при 4–6 циклах, тогда как по методу начальных деформаций – за 20–30 циклов. В среднем пластическая задача с использованием разработанного алгоритма решается в 3 раза быстрее по сравнению с использованием метода начальных деформаций.

В [6] разработанный алгоритм решения задач теории пластичности применен для решения осесимметричной задачи.

В системе компьютерной математики MATLAB® создана программа «INDENTOR» для решения упругопластической задачи о вдавливании шарика в тело прямоугольного сечения в условиях плоской деформации.

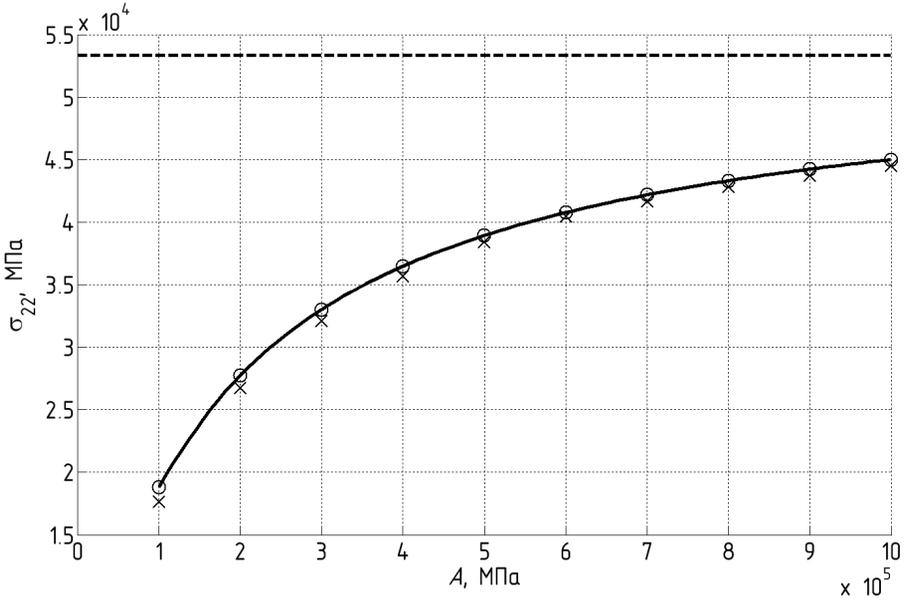


Рис. 2. График зависимости напряжения  $\sigma_{22}$  от коэффициента упрочнения  $A$  при перемещении штампа  $\Delta = 5$  мм.  $\circ$  – решение, полученное по разработанному алгоритму;  $\times$  – решение, полученное методом начальных деформаций

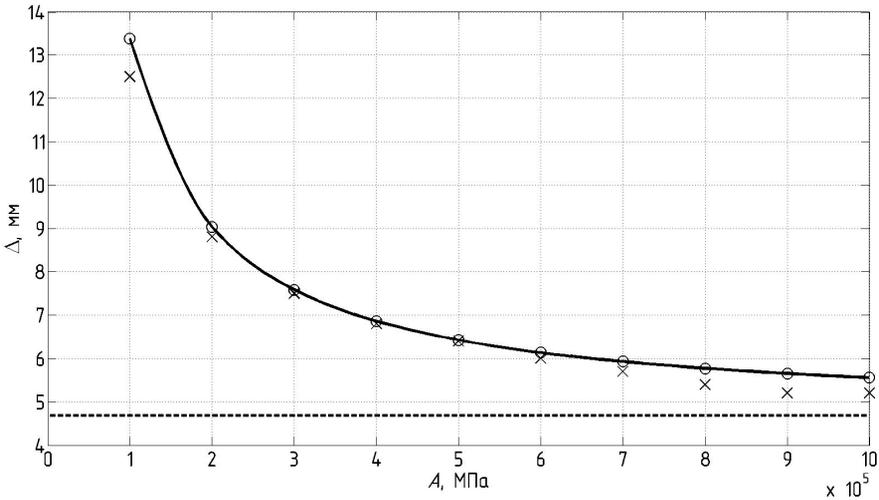


Рис. 3. График зависимости осадки штампа  $\Delta$  от коэффициента упрочнения  $A$  для давления штампа  $F = 5 \cdot 10^4$  МПа.  $\circ$  – решение, полученное по разработанному алгоритму;  $\times$  – решение, полученное методом начальных деформаций

На рис. 4 показано основное окно программы с исходными данными; на рис. 5 можно видеть результаты работы программы с картинками распределения напряжений.

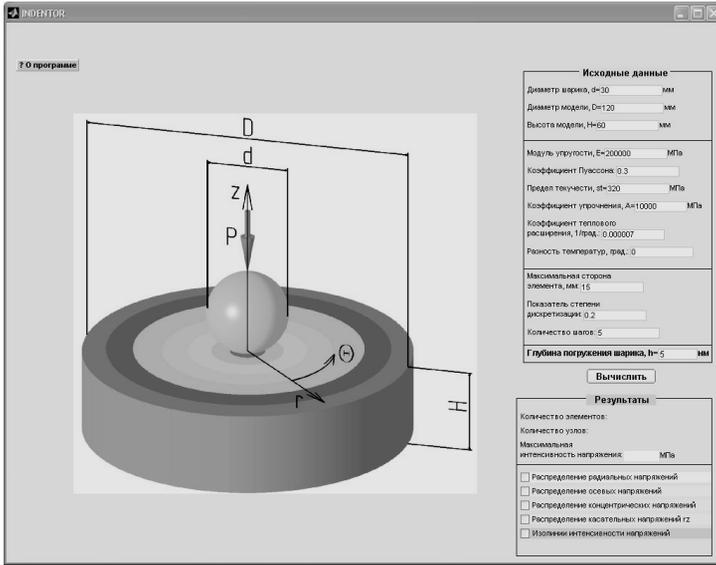
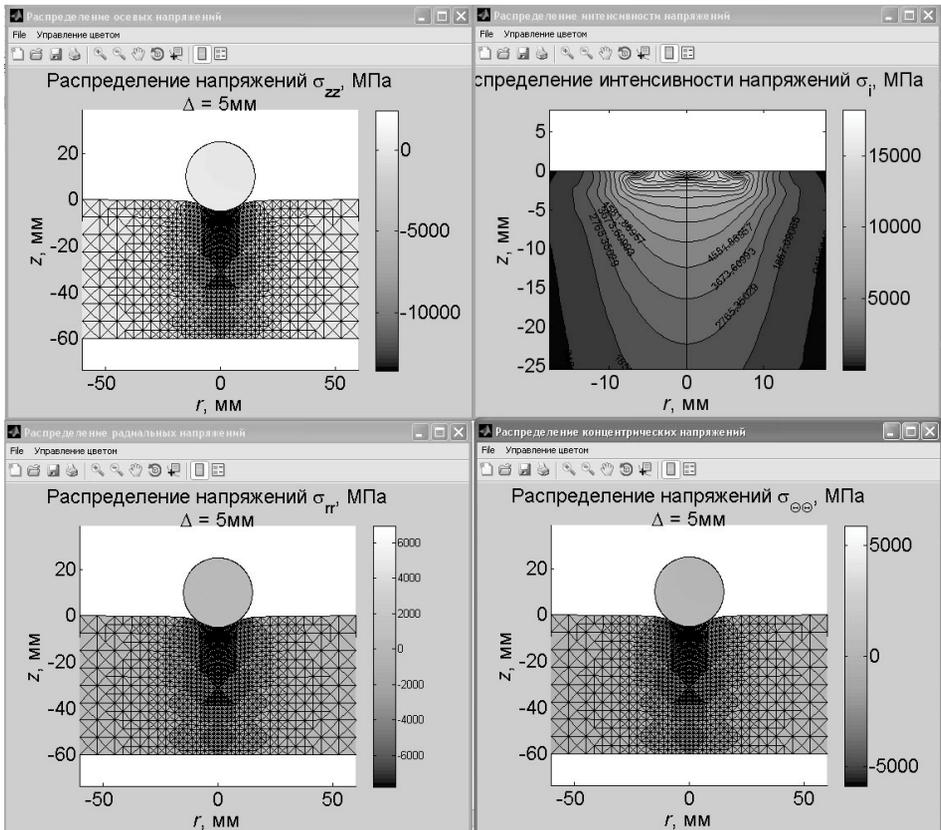


Рис. 4. Основное окно программы «INDENTOR» с исходными данными



Исходными данными являются:

- геометрические размеры шарика и исследуемого тела;
- упругие и пластические характеристики материала тела (модуль упругости, коэффициент Пуассона, предел текучести недеформированного материала, коэффициент упрочнения);
- коэффициент теплового расширения материала;
- разность температур тела и окружающей среды;
- параметры, влияющие на количество конечных элементов (максимальная сторона элемента и степень дискретизации модели);
- количество шагов перемещения шарика;
- глубина погружения шарика.

Программа позволяет получить картины распределения радиальных, осевых, концентрических напряжений, а также распределение интенсивности напряжений. Трение между штампом и моделью отсутствует. Шарик идеально жесткий.

### Заключение

Основными преимуществами предлагаемого алгоритма по сравнению с известными методами расчета пластических течений являются:

- исключение подбора материальных констант для итерационного процесса, таких, как матрица упругих характеристик, начальные напряжения или начальные деформации, – неизвестные параметры находятся непосредственно из системы нелинейных определяющих уравнений (2).

- отсутствие необходимости изменения напряжений на каждой итерации для выполнения условия текучести, что упрощает структуру программы и ускоряет ход вычислительного процесса.

- решение проблемы вычисления упругопластической матрицы (в соотношении (1)) и обращения к экспериментальным данным на каждом шаге вычислений, что автоматизирует и ускоряет вычислительный процесс.

- возможность исследования эволюции полей напряжений и деформаций при различных температурно-скоростных условиях, что расширяет круг рассматриваемых задач и обеспечивает универсальность алгоритму.

Рассмотренный алгоритм соответствует современным подходам к моделированию сложных физических процессов, когда теоретики занимаются разработкой новых вычислительных схем, доказательством сходимости и оценкой точности, а прикладники – разработкой алгоритмов решения, оптимизацией технологических процессов и т.д.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Еременко С.Ю.* Метод конечных элементов в механике деформируемых тел. Харьков: Изд-во «Основа» при Харьк.ун-те, 1991. 272с.
2. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
3. *Манахов П.В., Федосеев О.Б.* Об альтернативном методе вычисления накопленной пластической деформации в пластических задачах с использованием метода конечных элементов // Изв. вузов. Машиностроение. 2007. № 7. С. 16–22.
4. *Манахов П.В., Федосеев О.Б.* Аппроксимация кривых упрочнения стали 08X22H6T и стали 20 параболическими функциями // Вестник машиностроения. 2010. № 4. С. 50–52.
5. *Манахов П.В., Федосеев О.Б.* Альтернативный подход к решению задач теории пластичности на примере упругопластического сжатия тела прямоугольного сечения // Вестник машиностроения. 2009. № 1. С. 25–27.

6. Манахов П.В., Федосеев О.Б. Численное моделирование эволюции полей пластических деформаций при испытаниях на твердость с помощью альтернативного алгоритма решения пластических задач // Вектор науки ТГУ. 2011. № 2(16). С. 114–116.

Статья поступила 24.10.2012 г.

*Manahov P.V., Fedoseev O.B.* OPTIMIZATION OF CALCULATIONS OF PLASTIC DEFORMATIONS IN NONLINEAR PROBLEMS OF DEFORMABLE SOLID MECHANICS. The article gives a numerical method for solving plasticity problems of the flow theory using the finite element method. The main characteristic of the method is the direct solution of a set of nonlinear constitutive equations by means of the software tools that implement residual minimization algorithm of a function. Operation of the program to determine strained-deformed state for the elasto-plastic axisymmetrical problem has been presented. The advantages of this method in comparison with known methods of plastic flow analysis have been pointed out.

Keywords: finite element method, theory of plastic flow, approximation, hardening curves, iterative process, plasticity condition, yield point.

*Manahov Pavel Vladimirovich* (Togliatti State University)

E-mail: Pavel18991@yandex.ru

*Fedoseev Oleg Borisovich* (Togliatti State University)

E-mail: office@tltsu.ru