

МАТЕМАТИКА

УДК 519.711.3

М.С. Бухтяк, А.В. Никульчиков

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ СОТОВОЙ ПАНЕЛИ

Сотовая панель в её первоначальном виде моделируется парой плоских областей, соответствующие точки которых соединены отрезками одинаковой длины, ортогональными обеим плоскостям. Одну из плоских областей совмещаем с некоторой поверхностью, что вызывает локальные искажения длин на полученной граничной поверхности деформированной панели. Соединённость её по нормальям со второй ограничивающей поверхностью вызывает локальные искажения длин и на ней. Мера искажения – отношение соответствующих первых квадратичных форм.

Ключевые слова: *сотовая панель, локальная метрика, первая квадратичная форма, изгибание.*

1. О точечном соответствии двух поверхностей

Практика конструирования содержит различные ситуации, приводящие к целесообразности рассмотрения точечного соответствия двух поверхностей. Например, одна из них – часть плоскости, а вторая – искривленная поверхность, на которую следует изогнуть (как правило, с искажениями локальных длин) первую поверхность. Из механики известны способы оценки деформаций поверхностей – тензоры деформации (например, тензор деформации Коши-Грина в классической сплошной среде). Принцип оценки – в определении положения точек тела после деформации по отношению к положению точек до деформации. Однако такой способ малоприменим, если во время манипуляций с поверхностью изменится ее положение в пространстве. Скажем, плоская выкройка из сетеполотна, сшитая с аналогичными выкройками, будет натянута на каркас параболического рефлектора. Можно заранее указать, какое положение в 3-пространстве займут некоторые точки плоской выкройки. Можно определенно сказать, что точки A и B плоскости, близкие между собой, перейдут в точки-образы A' и B' , тоже между собою близкие. Но нет оснований полагаться на близость, скажем, точек A и A' .

Следует располагать возможностью моделировать точечное соответствие двух поверхностей в том случае, когда указанное соответствие задано, однако любая из этих поверхностей может быть перемещена в пространстве как твердое тело (с сохранением соответствия). Более точно: пусть Σ_1 и Σ_2 – поверхности, f – биективное соответствие этих поверхностей, A – произвольная точка первой поверхности, A' – соответствующая ей точка второй поверхности, g – движение первой поверхности, h – движение второй поверхности. Тогда следующая диаграмма должна быть коммутативной:

$$\begin{array}{ccc}
\Sigma_1 \ni A & \xleftarrow{f} & A' \in \Sigma_2 \\
g \downarrow & & h \downarrow \\
g(\Sigma_1) \ni g(A) & \xleftarrow{f} & h(A') \in h(\Sigma_2)
\end{array}$$

Ясно, что строить модель соответствия, удовлетворяющего указанному требованию, можно лишь на основе евклидовых инвариантов поверхностей. Реально же точечное соответствие устанавливается отнесением обеих поверхностей к криволинейным координатам, общим для них. Осуществимость указанного отнесения обоснована в [4]. Именно, рассмотрены гладкие регулярно параметризованные поверхности

$$\Sigma_1 : \mathbf{R} = \mathbf{r}_1(u, v), \quad \Sigma_2 : \mathbf{R} = \mathbf{r}_2(\hat{u}, \hat{v})$$

и гладкое отображение

$$\varphi : \hat{u}^i = \varphi(u^1, u^2) \quad (i = 1, 2).$$

Оно называется регулярным, если его якобиева матрица имеет максимальный ранг. Там же доказана следующая

Теорема. Если отображение φ регулярно, то в окрестностях соответствующих точек параметризации поверхностей можно выбрать так, чтобы соответствующие точки имели одинаковые (криволинейные) координаты. Тогда локально отображение запишется в виде $\varphi_U : \hat{u}^i = u^i$.

Здесь φ_U , как обычно, сужение отображения φ на окрестность U .

Таким образом, мы имеем дело с параметризованными поверхностями

$$\Sigma_1 : \mathbf{R} = \mathbf{r}_1(u, v), \quad \Sigma_2 : \mathbf{R} = \mathbf{r}_2(u, v). \quad (1)$$

Точки $A = \mathbf{r}_1(u, v)$ и $A' = \mathbf{r}_2(u, v)$ как раз и являются соответствующими.

Некоторые важные инварианты поверхности связаны с кривизной линии. Поскольку кривизна есть величина, обратная радиусу соприкасающейся окружности, то размерность кривизны k линии равна $[k] = \frac{1}{L}$. Такова же и размерность кручения.

Для поверхности

$$\sigma : \mathbf{R} = \mathbf{r}_1(u, v) \in C^2, \quad (u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$$

определяют четыре квадратичных дифференциальных формы [5]. Из них алгебраически независимы лишь две. В качестве базисных форм следует взять первую (метрическую) и вторую (главная часть отклонения точек поверхности, близких к точке $M \in \sigma$ от касательной плоскости, взятой в точке M). Первая квадратичная форма

$$ds^2 = d\mathbf{r}^2 = (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv)^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (2)$$

Данная квадратичная форма индуцирует в касательной плоскости поверхности в точке $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ метрику, обусловленную матрицей Грама базиса $\{\mathbf{r}_u(u_0, v_0), \mathbf{r}_v(u_0, v_0)\}$, то есть матрицей

$$\Gamma(\mathbf{r}_u(u_0, v_0), \mathbf{r}_v(u_0, v_0)) = \begin{pmatrix} E(u_0, v_0) & F(u_0, v_0) \\ F(u_0, v_0) & G(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^0 & F^0 \\ F^0 & G^0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Для прояснения свойств указанной метрики мы задаём такую же метрику, но не в плоскости, погруженной в E_3 , а в плоскости E_2 (на этом пути возникает ещё и удобный способ визуализации). С этой целью в плоскости E_2 задаем помимо стандартного ортонормированного репера $\{O, i, j\}$ еще и аффинный репер $\{O, e_1, e_2\}$, для которого матрица Грама такая же, как в (3). При этом пусть $e_1 \uparrow i$. Тем самым первая координатная ось аффинного репера соответствует касательной к линии $v = v_0$ на поверхности. Полагая

$$e_1 = ai, e_2 = bi + cj$$

и требуя условия

$$\Gamma(e_1, e_2) = \begin{pmatrix} E^0 & F^0 \\ F^0 & G^0 \end{pmatrix},$$

получим соотношения на константы a, b, c в виде

$$a^2 = E^0, \quad ab = F^0, \quad b^2 + c^2 = G^0.$$

Ограничиваясь лишь положительными решениями (для наших целей этого достаточно), имеем, что

$$a = \sqrt{E_0}, \quad b = \frac{F_0}{\sqrt{E_0}}, \quad c = \sqrt{\frac{E_0 G_0 - F_0^2}{E_0}}.$$

Искомый аффинный базис таков:

$$e_1 = \{\sqrt{E_0}, 0\}, e_2 = \left\{ \frac{F_0}{\sqrt{E_0}}, \sqrt{\frac{E_0 G_0 - F_0^2}{E_0}} \right\}. \quad (4)$$

Пусть в плоскости параметров

$$du = \cos t, \quad dv = \sin t.$$

Тогда в плоскости с репером $\{O, e_1, e_2\}$ получим квадрику, пробегаемую концевой точкой радиус-вектора

$$V = e_1 \cos t + e_2 \sin t = xi + yj.$$

Учитывая (4), находим, что

$$x = \sqrt{E^0} \cos t + \frac{F^0 \sin t}{\sqrt{E^0}}, \quad y = \sqrt{\frac{E^0 G^0 - (F^0)^2}{E^0}}.$$

Данная квадрика – эллипс:

$$(E^0 G^0 - (F^0)^2)x^2 - 2xyF^0 \sqrt{E^0 G^0 - (F^0)^2} + ((E^0)^2 + (F^0)^2)y^2 = E^0 (E^0 G^0 - (F^0)^2).$$

Он есть результат деформации единичной окружности в плоскости параметров при «перенесении» её в касательную плоскость поверхности при касательном отображении. Проведя указанные построения для двух поверхностей (1), используя при этом одну и ту же плоскость E_2 , получаем два эллипса, отнесенных к одной и той же точке (u_0, v_0) плоскости параметров, что позволяет судить о локальных искажениях длин в каждом направлении, исходящем из этой точки. Следует иметь в виду, что каждому направлению, проведенному из указанной точки плос-

кости параметров, соответствуют два касательных направления: одно – в точке $M_1 = r_1(u_0, v_0)$ первой поверхности, второе – в точке $M_2 = r_2(u_0, v_0)$ второй поверхности.

Форма (2) определяет внутреннюю геометрию поверхности (свойства, сохраняющиеся при изометрических отображениях). Заметим, что переменные u, v мы должны считать безразмерными величинами. Тогда

$$[ds^2] = [E] = [F] = [G] = L^2.$$

Для первых квадратичных форм наших поверхностей примем обозначения ds_1^2 и ds_2^2 соответственно. Тогда

$$ds_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1 dudv + G_1 dv^2, \quad ds_2^2 = E_2 du^2 + 2F_2 dudv + G_2 dv^2.$$

Отношение данных квадратичных форм

$$p = \frac{ds_2^2}{ds_1^2}$$

есть величина безразмерная. Величина p есть функция от $du : dv$ (если u и v фиксированы).

Отыскание стационарных значений для p сводится к нахождению собственных чисел пары квадратичных форм [1, с. 85] и приводит к уравнению

$$p^2(E_1 G_1 - F_1^2) + p(2F_1 F_2 - E_1 G_2 - E_2 G_1) + (E_2 G_2 - F_2^2) = 0. \quad (5)$$

Корни p_1, p_2 (безразмерные) данного уравнения суть наибольшее и наименьшее локальное искажение длин в данной точке.

Касательные направления $du : dv$, доставляющие величине p стационарные значения, суть главные направления пары квадратичных форм [1, с. 86]. Там же доказано, что если собственные числа p_1, p_2 различны, то главные направления ортогональны. Уравнение главных направлений имеет вид

$$\begin{vmatrix} E_2 du + F_2 dv & E_1 du + F_1 dv \\ F_2 du + G_2 dv & F_1 du + G_1 dv \end{vmatrix} = 0.$$

Для дальнейших целей важна следующая элементарная задача. С каждой точкой ориентируемой поверхности

$$\sigma : R = r(u, v) \in C^2, \quad (u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$$

связан вектор hn , где n – единичный вектор нормали, $h = \text{const}$ и ориентация базиса $\{r_u, r_v, n\}$ неизменна. Требуется вычислить коэффициенты первой квадратичной формы поверхности

$$\sigma_h : R = r(u, v) + hn \in C^2, \quad (u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2. \quad (6)$$

Заметим, что $n = \frac{[r_u, r_v]}{g}$, где $g = \sqrt{EG - F^2}$, $R = r + h \frac{[r_u, r_v]}{g}$ и соответственно

$$R_u = r_u + h \frac{[r_u, r_v]_u g - g_u [r_u, r_v]}{g^2}, \quad R_v = r_v + h \frac{[r_u, r_v]_v g - g_v [r_u, r_v]}{g^2}. \quad (7)$$

Далее используем формулу (2).

2. Моделирование изгиба сотовой панели

Задача о соответствии пары поверхностей тесно связана с моделированием изгиба листа материала, состоящего из двух поверхностей, пространство между которыми заполнено конструкцией ячеистого типа. Впрочем, конфигурация заполнителя может быть различной. Приводим заимствованный в [7] рисунок, отражающий разнообразие конструкций с сотовым заполнителем.

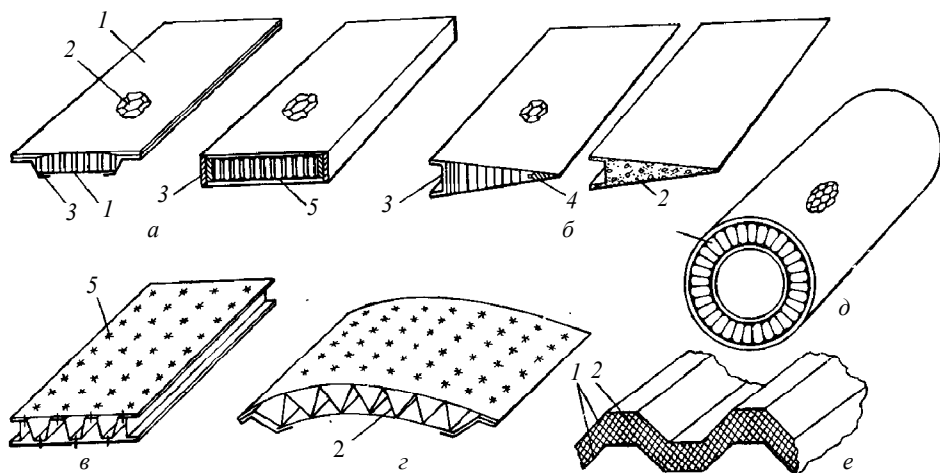


Рис. 1. Конструкции с заполнителем: *а* – плоские панели с сотовым заполнителем, *б* – клиновидные панели с сотовым и сплошным заполнителем, *в* – плоская панель с гофривым заполнителем, *г* – криволинейная панель с гофривым заполнителем, *д* – оболочка с сотовым заполнителем, *е* – ребристая плита. 1 – несущие слои, 2 – заполнитель, 3 – элементы каркаса, 4 – законцовка, 5 – соединение (клей, припой, сварка)

Мы примем модель, согласно которой лист указанного материала представляет собой пару поверхностей, для которых установлено точечное соответствие, при котором точка M_1 поверхности Σ_1 соответствует точке M_2 поверхности Σ_2 таким образом, что отрезок M_1M_2 нормален к обеим поверхностям и имеет постоянную длину, к тому же при совместной деформации обеих поверхностей оба указанных свойства отрезка сохраняются.

Ясно, что наша модель имеет смысл не для любой конструкции, что хорошо видно на вышеприведенном рисунке. Впрочем, аналогичная конструкция использована и в [8]. Авторы прибегают к модели, приведенной ниже:

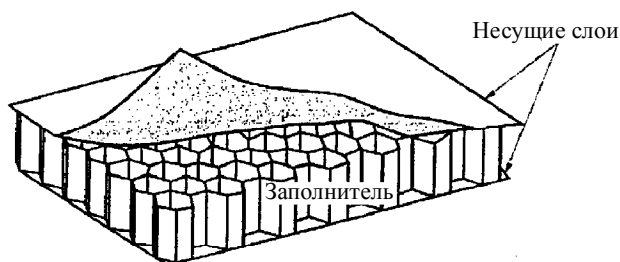


Рис. 2. Принципиальная схема панели с заполнителем (из [8])

Отметим, что полагать в модели точку M_1 совершенно произвольной точкой первой поверхности (и соответственно полагать, что вторая точка M_2 – пробегает всю вторую поверхность) есть слишком сильное требование, к тому же не согласующееся с реальностью, ибо в таком случае вместо слоя, заполненного не сплошь мы получаем просто некоторое тело в пространстве. Такое допущение мы можем принять только для первого, весьма грубого приближения.

Основная задача, которую мы здесь ставим, такова. Плоская панель с заполнением, описываемом нашей моделью, подвергается деформации, цель которой – придать одной из плоскостей («ведущей плоскости») конфигурацию некоторой наперед заданной поверхности. Требуется определить, сколь велики локальные искажения длин второй ограничивающей плоскости («ведомой плоскости»).

До деформации ведущую плоскость можно снабдить системой декартовых координат таким образом, что точки M_1 окажутся на прямых, параллельных координатным осям, причем расстояния между соседними прямыми одинаковы. Эта конечная координатная сеть после деформации перейдет в сеть линий уже на искривленной поверхности. При этом вид этой новой сети существенно зависит от того, какое именно точечное соответствие φ установлено между плоскостью панели и той поверхностью, с которой должна совместиться ведущая плоскость после деформации. Следовательно, соответствие φ повлияет и на искажения локальных длин на второй («ведомой») плоскости панели.

Отмеченное выше грубое приближение позволяет, однако, применять стандартные методы математического анализа и дифференциальной геометрии. Используем сначала именно такое приближение.

Пример 1. Пусть «ведущая» плоскость задана вектор-функцией $R_1 = [u, v, 0]$, $-2 \leq u \leq 2$, $-2 \leq v \leq 2$. Поверхность, на которую должна деформироваться наша плоскость (вместе с соответствием!) задана также вектор-функцией

$$R_2 = [u, v, a \cdot u + b \cdot v^3 + c \cdot u^3],$$

$$-2 \leq u \leq 2, -2 \leq v \leq 2, a = 0,3, b = 0,03, c = -0,04.$$

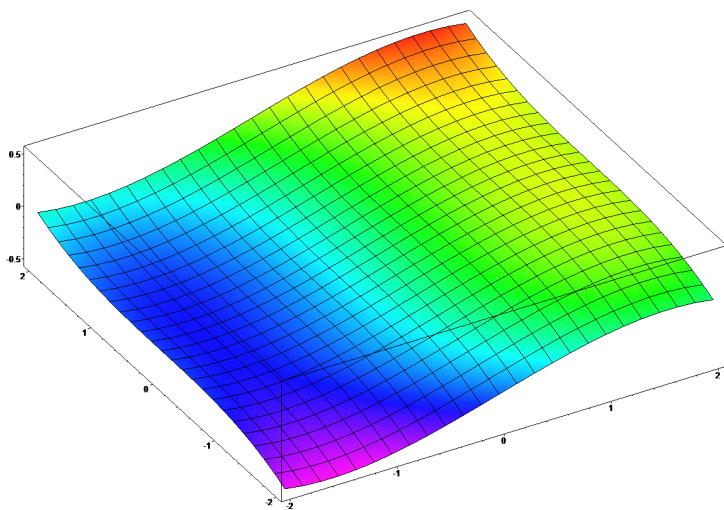


Рис. 3. Поверхность R_2

Корни уравнения (5) для нашего примера:

$$p_1=1, \quad p_2=0,0144 u^4 + 1,09 + 0,0081 v^4 - 0,072 u^2.$$

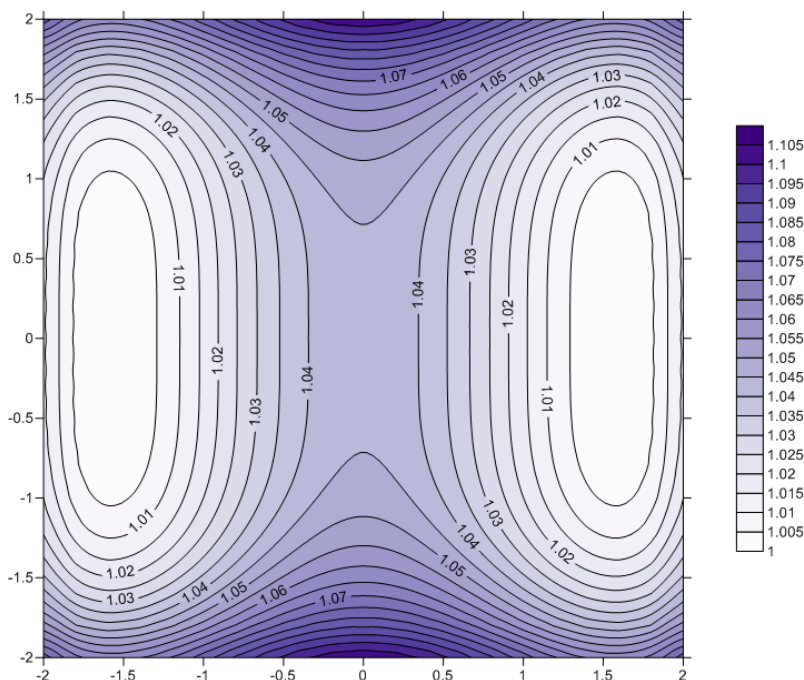


Рис. 4. Наибольшее относительное искажение локальных длин в каждой точке первой плоскости, обусловленное приведением её в положение искривлённой поверхности

Наименьшее искажение локальных длин (второй корень уравнения (5)) в каждой точке равно, как видно, 1 и в визуализации не нуждается.

Пусть, далее, толщина сотовой панели равна h . Тогда для второй – «ведомой» поверхности получаем параметрическое задание (6)



Рис. 5. Ограничивающие поверхности изогнутой сотовой панели.

Формулы (7) позволяют вычислить коэффициенты первой квадратичной формы. Для неизменной «ведущей» плоскости и для второй поверхности проведем ту же процедуру, что и выше. Тогда получаем, аналогично рис. 4, визуализацию уже обоих корней уравнения (5) – оба нетривиальны.

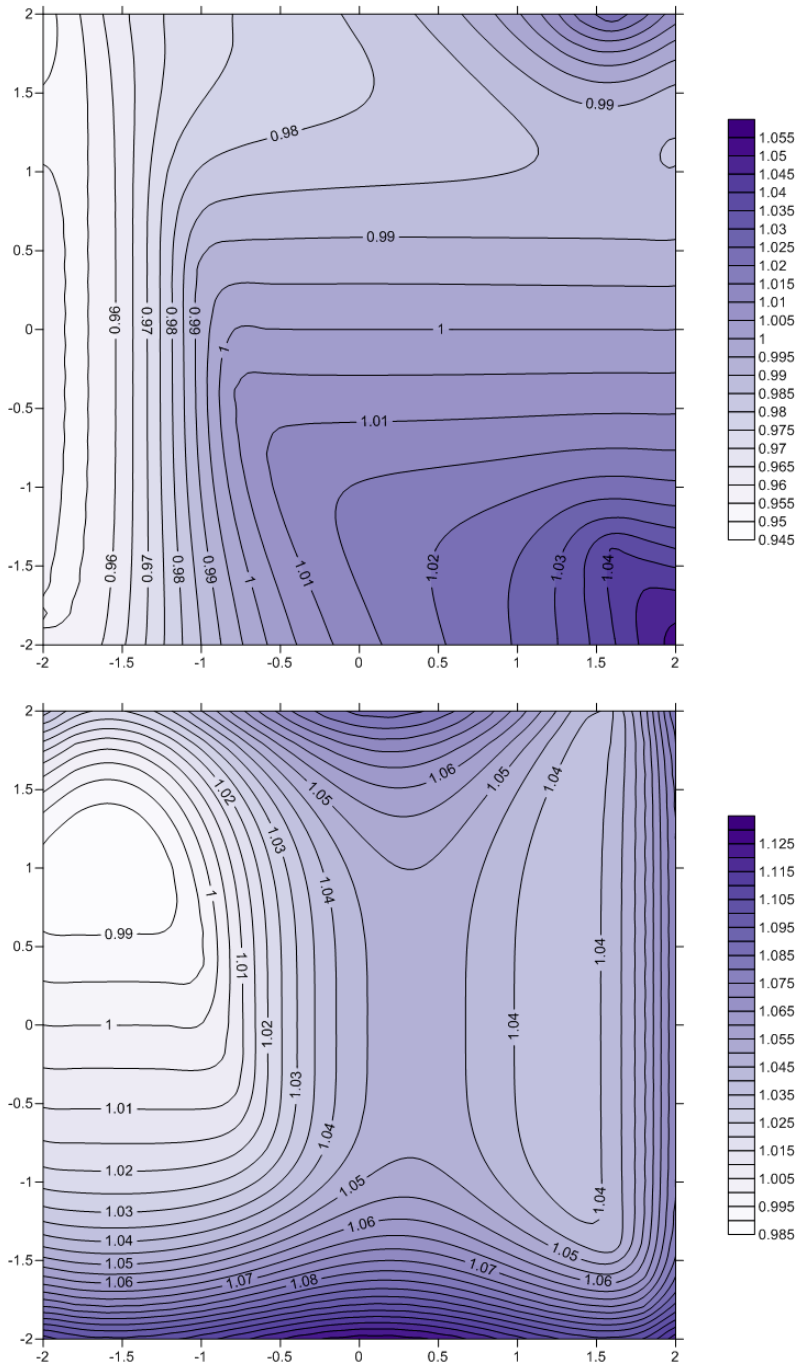


Рис. 6. Экстремальные относительные искажения локальных длин в каждой точке второй плоскости, обусловленные приведением её в положение искривлённой поверхности

Наконец, проведем аналогичную процедуру, взяв в качестве первой поверхности криволинейную поверхность, полученную из первой плоскости, а в качестве второй – поверхность, полученную из второй плоскости.

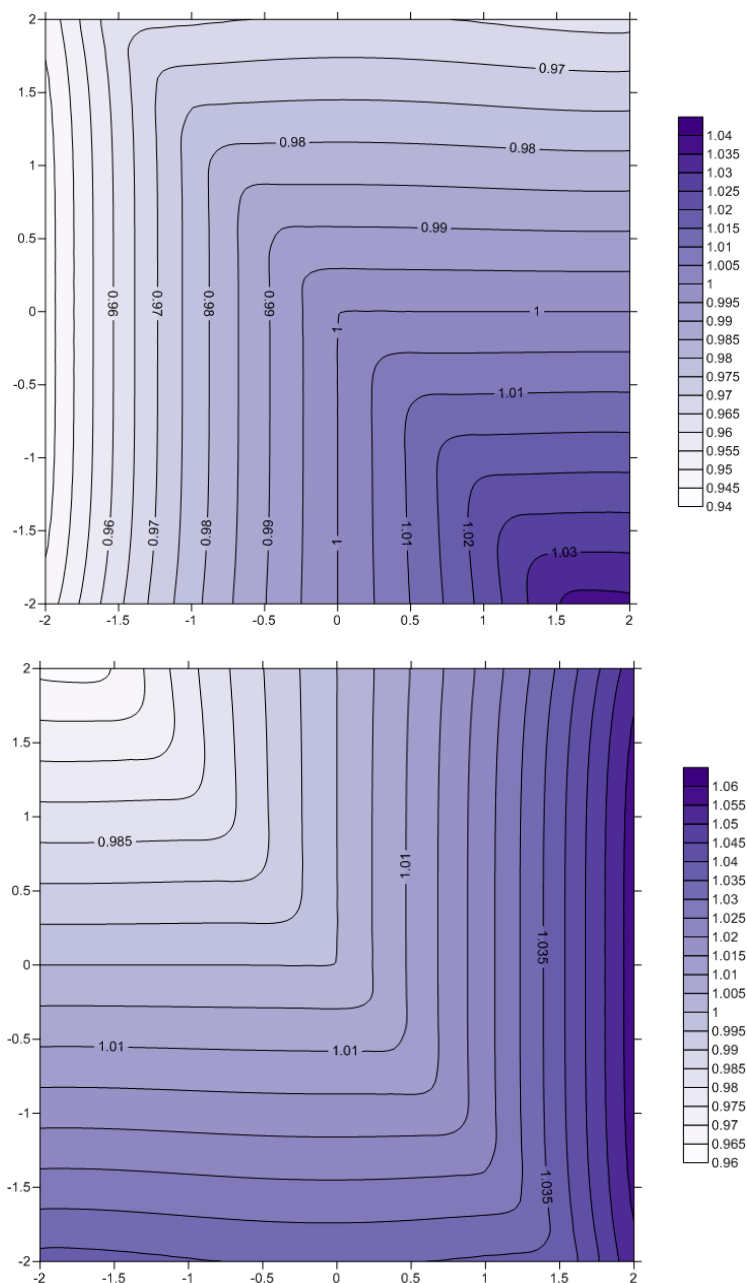


Рис. 7. Экстремальные относительные искажения локальных длин в каждой точке второй поверхности в сравнении с локальными длинами в соответствующих точках первой поверхности

Пример 2. Рассмотрим теперь пару поверхностей – плоскость $[u, v, 0]$ и поверхность $P = [u, v, 0, 3v^2 - 0, 4u^2]$.

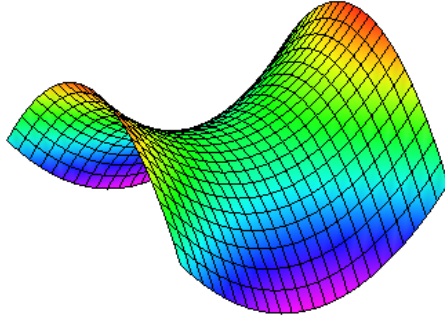


Рис. 8. Поверхность P

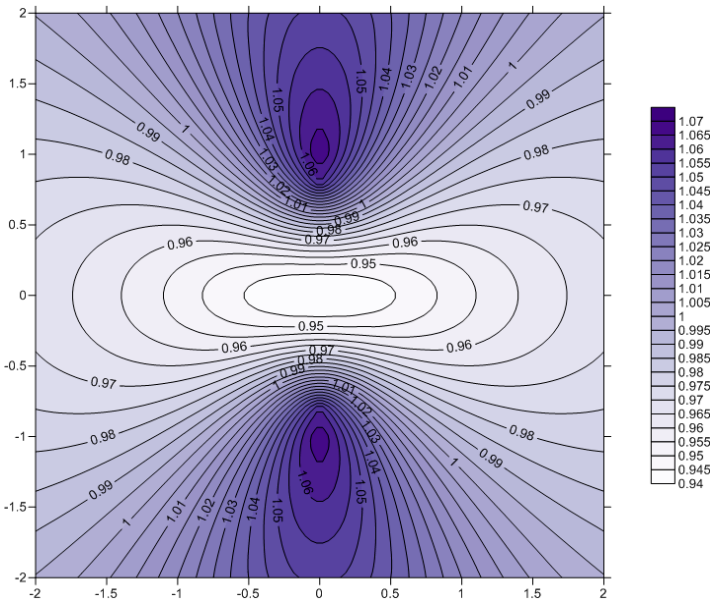


Рис. 9. Значения первого корня уравнения (5)

Заметим, что для практических задач, связанных с деформацией панелей с соевым заполнением, одной визуализации недостаточно. Если важна информация о границе, разделяющей различные области на рис. 9, то следует располагать числовым описанием этой границы. Нами разработана программа, которая формирует массив точек, в которых значение (допустим, первого корня уравнения (5)) равно критическому значению H (как в вышеприведенном примере, это 1) с отклонением (по абсолютной величине) не более указанного нами числа ε . Для построения массива прямоугольник $(u_1 \leq u \leq u_2, v_1 \leq v \leq v_2)$ в плоскости параметров разбивается равномерной сеткой, полученной делением каждой из его сторон на n равных частей. Программа сохраняет те узловые точки, в которых значение исследуемой функции находится в пределах $H \pm \varepsilon$.

Принимая $H = 1$, $\varepsilon = 0,001$, $n = 100$, получаем массив из 208 точек с их координатами. Не приводя координат точек, ограничимся изображением этого массива на рис. 10.

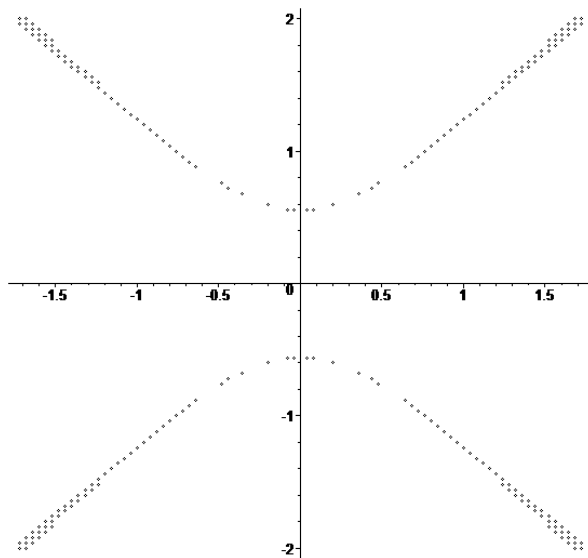


Рис. 10. Граница критической области для первого корня уравнения (5)

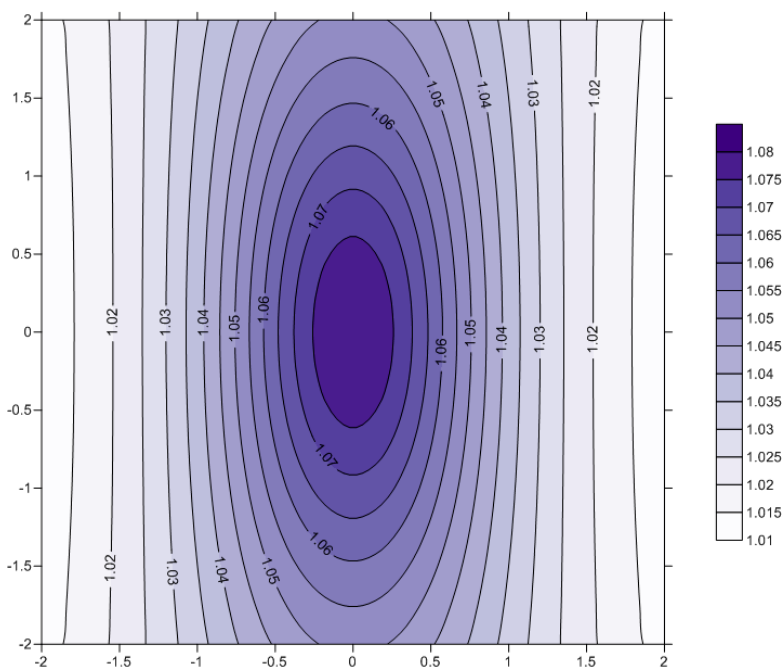
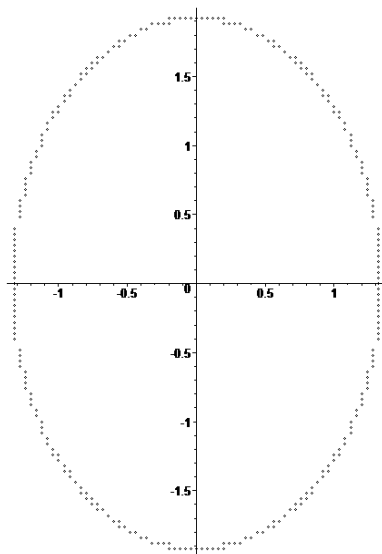


Рис. 11. Значения второго корня уравнения (5)



На рис. 10 утолщение граничной линии указывает на области, где различие между «докритическим» и «сверхкритическим» значением исследуемой функции не столь принципиально, как в области, где граничная линия тонка.

Принимая $H = 1,5$, $\varepsilon = 0,01$, $n = 100$, получаем массив из 260 точек с их координатами. Не приводя координат точек, ограничимся изображением этого массива на следующем рисунке.

Рис. 12. Граница критической области для второго корня уравнения (5)

Авторы выражают признательность профессору В.Г. Бутову за участие в обсуждении вопросов, затронутых в данной статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 760 с.
2. Иванов А.О., Тужилин А.А. Лекции по классической дифференциальной геометрии. Новая университетская библиотека, 2009. 233 с.
3. Раишевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 428 с.
4. Шапуков Б.Н. Дифференциальная геометрия и основы тензорного анализа. Казань: КГУ. 135 с.
5. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. М.: ГИТТЛ, 1960. 559 с.
6. Бляшке В. Дифференциальная геометрия. М.-Л.: ОНТИ НКТП, 1935 330 с.
7. Панин В.Ф., Гладков Ю.А. Конструкции с заполнителем: справочник. М.: Машиностроение, 1991. 272 с.
8. Whitead S., McDonald M., and Bartholomeusz R.A. Loading, degradation and repair of F-III bonded honeycomb sandwich panels – preliminary study // Australian Defence Science & Technology Organization (DSTO) Report. – TR-1041.

Статья поступила 12.12.2012 г.

Bukhtyak M.S., Nikulchikov A.V. HONEYCOMB PANEL DEFORMATION MODELING. A honeycomb panel in its initial form is modeled with a pair of plane domains the corresponding points of which are joined by segments with equal lengths orthogonally to both the planes. One of the plane domains is superimposed on a surface, which causes local distortions of lengths on the obtained boundary surface of the deformed panel. Lengths on the second bounding surface are also locally distorted due to joints along normal lines. The ratio of the corresponding first quadratic forms serves as a measure of the distortion.

Keywords: honeycomb panel, local metric, first quadratic form, bending.

BUKHTYAK Mikhail Stepanovich (Tomsk State University)
E-mail: bukhtyakm@mail.ru

NIKULCHIKOV Andrey Viktorovich (Tomsk State University)
E-mail: tracesofdeath@mail2000.ru