

УДК 512.541

Е.В. Кайгородов**О ДВУХ КЛАССАХ ХОПФОВЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП**

В настоящей работе исследуется хопфовость SP -групп и алгебраически компактных абелевых групп. Хопфовость SP -групп сведена к хопфовости их примарных компонент. Для хопфовых алгебраически компактных абелевых групп получено полное описание; построен пример нехопфовой алгебраически компактной абелевой группы.

Ключевые слова: абелева группа, хопфова группа, смешанная группа, SP -группа, алгебраически компактная группа.

1. Введение

На рубеже XIX и XX столетий алгебра претерпела важное качественное изменение, которое можно охарактеризовать как переход к изучению абстрактных систем объектов. До этого момента основное внимание уделялось в алгебре конкретным системам, таким, как различные числовые системы, системы матриц, перестановок и т. п. Новый этап в развитии алгебры ознаменовался полным отвлечением от природы и способов построения объектов системы, и единственным предметом изучения стали отношения между этими объектами. Алгебра стала иметь дело просто с системами объектов, для которых определены некоторые операции и отношения, удовлетворяющие тем или иным требованиям. Что именно стоит за объектами системы – матрицы, уравнения, числа и т. д. – для алгебры безразлично, важно только, чтобы заданные операции и отношения были определены и заданные требования для этих операций и отношений выполнялись.

Простейшим примером такой системы является группа. И именно в рассматриваемый период изучение групп, без каких-бы то ни было предположений о природе их элементов, оформилось в отдельную область алгебры. Выдающуюся роль в создании школы по теории групп сыграл известный отечественный математик О.Ю. Шмидт. Его фундаментальный труд «Абстрактная теория групп» послужил в дальнейшем отправной точкой многих работ многих алгебраистов.

Примерно в то же время внутри только что зародившейся теории групп возникает новое направление исследований, предметом которых стали группы, заданные множествами образующих элементов и соответствующих определяющих соотношений. Это направление привело позже к выделению в теории групп вполне самостоятельной обширной области исследований, называемой ныне комбинаторной теорией групп. Истоки комбинаторной теории групп находятся в работах Шварца, Клейна, Фукса, Пуанкаре и Шоттки, в которых группы возникали как дискретные группы геометрических преобразований.

Исключительно значимой вехой в развитии комбинаторной теории групп являются статьи датского математика Якоба Нильсена 1917–1924 гг. Из результатов статьи Нильсена «О вычислениях с некоммутирующими сомножителями и приложениях к теории групп» [1], вышедшей в норвежском математическом журнале в 1921 г., вытекает одно важное для нас следствие. Оно состоит в том, что конечно порожденная свободная группа не может быть изоморфна своей собственной

факторгруппе, т.е. гомоморфное отображение такой группы на себя всегда имеет тривиальное ядро. В настоящее время это свойство групп называется хопфовостью в честь швейцарского математика Хайнца Хопфа. Основание для этого следующее.

В статьях [2] и [3] Хопф исследовал отображения одного двумерного многообразия в другое. Эти отображения индуцируют гомоморфизмы фундаментальной группы первого многообразия на фундаментальную группу его образа. Хопф показал, что эти группы не могут быть изоморфны никакой своей собственной факторгруппе. Простейший случай – это тот, в котором рассматриваемая фундаментальная группа свободна и имеет конечный ранг. Удивительно, что в течение тридцати лет никто не заметил, что Нильсен уже дал чисто алгебраическое доказательство того факта, что свободные группы конечного ранга хопфовы, – за десять лет до того, как Хопф обозначил свою проблему.

Хопфовы группы (в том числе и абелевы) изучались многими алгебраистами (библиографию см. в [4]). Настоящая статья в какой-то степени продолжает [4]. Второй параграф посвящен изучению хопфовых групп в одном интересном классе смешанных абелевых групп, в третьем параграфе дано полное описание хопфовых алгебраически компактных абелевых групп.

Для удобства чтения мы приводим здесь некоторый материал, касающийся обозначений и терминологии.

Определение 1.1. Группа A называется *хопфовой*, если всякий эпиморфизм группы A на себя является автоморфизмом.

Далее в тексте под словом «группа» будет пониматься аддитивно записанная абелева группа. Буква p обозначает простое число. Если A – группа, то $r_p(A)$ – p -ранг группы A , $\bigoplus_{\mathfrak{R}} A$ – прямая сумма $\mathfrak{R}$ копий группы A ($\mathfrak{R}$ – некоторое кардинальное число).

2. Хопфовость SP-групп

В конце прошлого века возросло внимание специалистов к смешанным абелевым группам. Согласно определению смешанной группы, такая группа содержит как ненулевые элементы конечных порядков, так и элементы бесконечного порядка. В ряде статей рассматривались смешанные абелевы группы, лежащие между прямой суммой и прямым произведением своих p -компонент. Зададимся вопросом о хопфовости таких групп. До конца параграфа символ A_p обозначает p -компоненту группы A , т.е. наибольшую подгруппу в A , являющуюся p -группой. Здесь и далее подразумевается, что p пробегает множество всех простых чисел, относящихся к A , т.е. множество всех p , для которых $A_p \neq 0$.

Определение 2.1. *SP-группой* называется редуцированная смешанная группа A с бесконечным числом ненулевых p -компонент, такая, что естественное вложение $\bigoplus_p A_p \rightarrow A$ продолжается до сервантного вложения $A \rightarrow \prod_p A_p$.

Таким образом, для SP-группы A можно считать, что $\bigoplus_p A_p \subset A \subseteq \prod_p A_p$, причем A сервантна в $\prod_p A_p$. SP-группы изучались или появлялись во многих работах, в частности [5–9].

Лемма 2.2 [10]. Следующие свойства редуцированной смешанной группы A эквивалентны:

- 1) для каждого p имеет место прямое разложение $A = A_p \oplus B_p$ для некоторой группы B_p , причем $pB_p = B_p$;
- 2) справедливы сервантные вложения $\bigoplus_p A_p \subset A \subseteq \prod_p A_p$, т.е. A – SP-группа;
- 3) справедливы вложения $\bigoplus_p A_p \subset A \subseteq \prod_p A_p$ и $A/T(A)$ – делимая группа.

Теорема 2.3. SP-группа A хопфова тогда и только тогда, когда каждая ее p -компонента A_p хопфова.

Доказательство. Необходимость. Пусть SP-группа A хопфова. Согласно лемме 2.2, для любого p имеет место прямое разложение: $A = A_p \oplus B_p$, где B_p – дополнительное слагаемое и $pB_p = B_p$. Группа A_p хопфова как прямое слагаемое хопфовой группы [4, теорема 2].

Достаточность. Пусть дана SP-группа A и известно, что все ее p -компоненты A_p хопфовы. Так как подгруппы A_p и B_p вполне инвариантны в группе A , то $\text{Hom}(A_p, B_p) = 0$, $\text{Hom}(B_p, A_p) = 0$ и имеет место изоморфизм колец:

$$E(A) \cong \begin{pmatrix} E(A_p) & 0 \\ 0 & E(B_p) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $E(A) = E(A_p) \oplus E(B_p)$ и любой эндоморфизм $\alpha : A \rightarrow A$ действует по координатам.

Пусть φ – эпиморфизм группы A на себя. Обозначим ограничение этого эпиморфизма на p -компоненте A_p через φ_p . Покажем, что все отображения $\varphi_p : A_p \rightarrow A_p$ являются эпиморфизмами. Поскольку φ – эпиморфизм, то для произвольного элемента a' подгруппы A_p найдется такой элемент a группы A , что $\varphi(a) = a'$. Прямое разложение $A = A_p \oplus B_p$ позволяет однозначно представить элемент a в виде $a = a_p + b_p$, где $a_p \in A_p$, $b_p \in B_p$. Применим φ к обеим частям последнего равенства: $\varphi(a) = \varphi(a_p) + \varphi(b_p)$. Учтя вполне инвариантность прямых слагаемых A_p и B_p в группе A , получим $\varphi(b_p) = 0$. Следовательно, $a' = \varphi(a_p)$ или, что то же самое, $a' = \varphi_p(a_p)$. Таким образом, для элемента $a' \in A_p$ мы нашли прообраз $a_p \in A_p$ при отображении φ_p , чем обосновали, что отображение φ_p – эпиморфизм. Из условия теоремы все прямые слагаемые A_p хопфовы, поэтому каждый эпиморфизм φ_p является автоморфизмом.

Осталось убедиться, что эпиморфизм φ является автоморфизмом. Чтобы это установить, достаточно показать, что его ядро тривиально. Пусть a – произвольный элемент из $\text{Ker } \varphi$, тогда $\varphi(a) = 0$. Представляя $a = a_p + b_p$, получим $\varphi(a_p) + \varphi(b_p) = 0$, или $\varphi(a_p) = -\varphi(b_p)$. Левая часть последнего равенства есть

элемент из A_p , а правая – элемент из B_p , откуда $\varphi(a_p) = \varphi(b_p) = 0$. В частности, отсюда следует, что $\varphi_p(a_p) = 0$. Но все φ_p – автоморфизмы, поэтому и $a_p = 0$.

Из справедливости включения $A \subseteq \prod_p A_p$ ясно, что любой элемент группы A можно отождествить с бесконечным вектором $(\dots, a_p, \dots)$ прямого произведения $\prod_p A_p$. Значит, равенства $a_p = 0$ влекут $a = 0$. Получаем окончательно: $\text{Ker } \varphi = 0$ и φ – автоморфизм группы A . Итак, группа A хопфова. Теорема доказана.

3. Хопфовость алгебраически компактных абелевых групп

Алгебраически компактные группы играют очень важную роль в теории абелевых групп. В описании алгебраически компактных групп участвуют целые p -адические числа. Они находят широкое применение и в других ветвях теории абелевых групп. Будем использовать символы $\mathbb{Q}_p^*$ для кольца целых p -адических чисел и J_p – для группы целых p -адических чисел, являющейся аддитивной группой кольца $\mathbb{Q}_p^*$.

Определение 3.1 [11]. Группа A называется *алгебраически компактной*, если она выделяется прямым слагаемым из всякой группы G , содержащей ее в качестве сервантной подгруппы.

Пусть A – алгебраически компактная группа. Так как любая группа является прямой суммой делимой группы и редуцированной группы [11, теорема 21.3], то можем записать $A = D \oplus R$, где D – делимая часть группы A , а R – ее редуцированная часть.

В [4, следствие 7] установлено, что группа является хопфовой в точности тогда, когда ее редуцированная часть есть хопфова группа, а делимая часть, если она ненулевая, есть конечная прямая сумма копий рациональной группы $\mathbb{Q}$. Поэтому, не теряя общности, можно ограничиться в наших рассуждениях лишь редуцированными алгебраически компактными группами.

Дальнейшее упрощение становится возможным ввиду следующего результата Капланского [6]. Именно, редуцированная группа A алгебраически компактна тогда и только тогда, когда она имеет вид $A = \prod_p A_p$, где каждая группа A_p полна в своей p -адической топологии.

Группа A_p есть $\mathbb{Q}_p^*$ -модуль, полный в p -адической топологии и называемый p -адической компонентой группы A . Группы A_p однозначно определяются группой A . Редуцированная алгебраически компактная группа A обладает полной и независимой системой инвариантов, состоящей из рангов p -базисных подгрупп A_p .

Выясним, как устроены эндоморфизмы группы A . Для этого запишем

$$A = \prod_p A_p = A_p \oplus \prod_{q \neq p} A_q.$$

Из равенств $\text{Hom}(A_p, \prod_{q \neq p} A_q) = 0$ и $\text{Hom}(\prod_{q \neq p} A_q, A_p) = 0$ вытекает, что подгруппа A_p вполне инвариантна в группе A для любого p . Значит, эндоморфизм φ группы $\prod_p A_p$ индуцирует некоторый эндоморфизм φ_p группы A_p . Иными словами, любой эндоморфизм $\varphi: A \rightarrow A$ действует по координатам, т. е. $\varphi = (\dots, \varphi_p, \dots)$. Отсюда, в частности, следует, что хопфовость редуцированной алгебраически компактной группы эквивалентна хопфовости каждой p -адической компоненты такой группы. Поэтому далее считаем, что A – p -адическая редуцированная алгебраически компактная группа.

Известно, что копериодическая группа выделяется прямым слагаемым из всякой группы, содержащей ее в качестве подгруппы, факторгруппа по которой не имеет кручения [11, §54]. Отсюда легко вывести, что все алгебраически компактные группы являются копериодическими. Благодаря этому обстоятельству, для произвольной p -адической редуцированной алгебраически компактной группы A существует прямое разложение $A = B \oplus C$, где B – p -адическая редуцированная алгебраически компактная группа без кручения, а C – p -адическая урегулированная алгебраически компактная группа [11, теорема 55.5].

Покажем, что подгруппа C вполне инвариантна в группе A . Для этого используем группу расширений. С различными аспектами теории расширений абелевых групп можно познакомиться по книге [11]. Имеем $C \cong \text{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, T)$, где T – периодическая часть группы A . Обозначим $T^\bullet = \text{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, T)$. Группа $T^\bullet$ называется копериодической оболочкой группы T . Из точности последовательности

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{\alpha} T^\bullet \xrightarrow{\beta} T^\bullet/T \longrightarrow 0$$

по теореме Картана – Эйленберга [11, § 44] вытекает точность индуцированной последовательности

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(T^\bullet/T, G) \xrightarrow{\beta^*} \text{Hom}(T^\bullet, G) \xrightarrow{\alpha^*} \text{Hom}(T, G)$$

для любой группы G . Положим теперь $G = B$. Так как $T^\bullet/T$ – делимая группа без кручения [11, теорема 58.1], то $\text{Hom}(T^\bullet/T, B) = 0$. Далее, $\text{Hom}(T, B) = 0$, поскольку T – периодическая группа, а B – группа без кручения. Следовательно, $\text{Hom}(T^\bullet, B) = 0$ и, очевидно, $\text{Hom}(C, B) = 0$.

В силу [4, теоремы 2 и 5] группа A хопфова тогда и только тогда, когда группы B и C хопфовы. Итак, остается найти критерии хопфовости p -адической редуцированной алгебраически компактной группы без кручения и p -адической урегулированной алгебраически компактной группы. Рассмотрим сначала случай без кручения.

Теорема 3.2. Пусть A – p -адическая редуцированная алгебраически компактная группа без кручения. Тогда группа A хопфова, если и только если ее p -ранг конечен, и, таким образом, A есть прямая сумма конечного числа копий группы J_p .

Доказательство. *Необходимость.* Пусть группа A хопфова. Предположим противное, т. е. пусть $r_p(A)$ – бесконечное кардинальное число. Для некоторого базисного подмодуля B группы A (рассматриваемой как $\mathbb{Q}_p^*$ -модуль) имеем

$$B = \bigoplus_{r_p(A)} J_p = \left(\bigoplus_{\mathfrak{M}} J_p \right) \oplus \left(\bigoplus_{\mathfrak{N}} J_p \right),$$

где $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} = r_p(A)$. Обозначая $\bigoplus_{\mathfrak{M}} J_p = B_1$, $\bigoplus_{\mathfrak{N}} J_p = B_2$, можно далее записать $B = B_1 \oplus B_2$.

Так как A – есть p -адическое пополнение группы B , т. е. $A = \hat{B}$, то $A = \hat{B}_1 \oplus \hat{B}_2$. В силу выбора кардинальных чисел $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ имеем $B_1 \cong B$, откуда получаем $\hat{B}_1 \cong \hat{B}$ или, что то же самое, $\hat{B}_1 \cong A$. Зафиксируем некоторый изоморфизм $\varphi: \hat{B}_1 \rightarrow A$ и продолжим его до эндоморфизма $\alpha: A \rightarrow A$, считая, что α аннулирует $\hat{B}_2$, т. е. $\alpha(\hat{B}_2) = 0$. Очевидно, что α – эпиморфизм, но не автоморфизм, поскольку его ядро совпадает с группой $\hat{B}_2$, а она, в свою очередь, не нулевая. Имеем $\text{Ker } \alpha \neq 0$, чего не может быть, потому что группа A по условию хопфова. Противоречие.

Достаточность. Пусть $r_p(A) = n$, $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что $\varphi: A \rightarrow A$ – эпиморфизм. Легко показать, что $\text{Ker } \varphi$ – чистая подгруппа в группе A . Кроме этого, группа $\text{Ker } \varphi$ будет замкнутой в p -адической топологии. Для доказательства этого факта нужно установить, что она совпадает со своим замыканием, т. е. что $\overline{\text{Ker } \varphi} = \text{Ker } \varphi$.

Включение $\text{Ker } \varphi \subseteq \overline{\text{Ker } \varphi}$ очевидно. Покажем справедливость обратного включения. Пусть a – произвольный элемент из $\overline{\text{Ker } \varphi}$. Имеем: $a = \lim a_i$, где $a_i \in \text{Ker } \varphi$ для любого i . Так как φ – гомоморфизм, то $\varphi(a) = \varphi(\lim a_i) = \lim \varphi(a_i) = 0$, поэтому $a \in \text{Ker } \varphi$. Итак, $\overline{\text{Ker } \varphi} \subseteq \text{Ker } \varphi$, откуда $\overline{\text{Ker } \varphi} = \text{Ker } \varphi$.

Применяя [13, теорема 11.10], получаем, что подгруппа $\text{Ker } \varphi$ выделяется прямым слагаемым в группе A , т. е. можно записать $A = C \oplus \text{Ker } \varphi$. Но $A \cong A/\text{Ker } \varphi$, поэтому $C \cong A$. Справедливо равенство

$$r_p(A) = r_p(C) + r_p(\text{Ker } \varphi).$$

Отсюда $r_p(\text{Ker } \varphi) = 0$, следовательно, $\text{Ker } \varphi = 0$. Таким образом, φ – автоморфизм группы A . Теорема доказана.

Теперь рассмотрим случай, когда A – произвольная p -адическая урегулированная алгебраически компактная группа. Нам потребуется такой результат.

Теорема 3.3. Пусть A – p -адическая алгебраически компактная группа, B – некоторая ее p -базисная подгруппа. Тогда любой эпиморфизм $\varphi: B \rightarrow B$ единственным образом продолжается до эпиморфизма $\hat{\varphi}: A \rightarrow A$.

Доказательство. Так как A – полная в p -адической топологии группа [11, §40], [14, §2], то любой эндоморфизм φ группы B продолжается, причем единственным образом, до эндоморфизма $\hat{\varphi}$ группы A [11, теорема 34.1]. Убедимся, что отображение $\hat{\varphi}$ сюръективно.

Пусть a – произвольный элемент группы A . Тогда $a = \lim b_i$, $i \geq 1$, где $b_i \in B$. Выберем в подгруппе B элемент c_1 , для которого окажется $b_1 = \varphi(c_1)$. Имеем: $b_2 - b_1 \in pA \cap B$. Но $pA \cap B = pB$, так как подгруппа B является p -сервантной в группе A [11, §34]. Значит, $b_2 - b_1 \in pB$ и найдется такой элемент $x_1 \in B$, что $b_2 - b_1 = px_1$. Далее, пусть y_1 – такой элемент группы B , что $\varphi(y_1) = x_1$. Положим $c_2 = c_1 + py_1$. Очевидно, что $c_2 \in B$ и $c_2 - c_1 \in pB$. Действуя эпиморфизмом φ на элемент c_2 , получим $\varphi(c_2) = \varphi(c_1) + p\varphi(y_1) = b_1 + px_1$, т. е. $\varphi(c_2) = b_2$.

Предположим, что в группе B мы нашли элементы $c_1, c_2, \dots, c_n$, $n \geq 2$, обладающие двумя свойствами: $\varphi(c_k) = b_k$ и $c_k - c_{k-1} \in p^{k-1}B$, где $1 \leq k \leq n$. Определим элемент $c_{n+1} \in B$ следующим образом. Имеем $b_{n+1} - b_n \in p^n A \cap B$ или, что то же самое, $b_{n+1} - b_n \in p^n B$. Можно записать $b_{n+1} - b_n \in p^n x_n$, где $x_n \in B$. Так как $\varphi: B \rightarrow B$ – эпиморфизм, то для элемента x_n найдется такой $y_n \in B$, что $\varphi(y_n) = x_n$. Индуктивно полагаем $c_{n+1} = c_n + p^n y_n$, получая рекуррентную формулу для вычисления всех членов бесконечной последовательности $\{c_i\}_{i \geq 1}$. Ясно, что $c_{n+1} - c_n \in p^n B$. Применение эпиморфизма φ к обеим частям рекуррентной формулы дает равенство $\varphi(c_{n+1}) = \varphi(c_n) + p^n \varphi(y_n) = b_n + p^n x_n$, или $\varphi(c_{n+1}) = b_{n+1}$.

Заметим, что для элементов построенной выше последовательности сохраняются свойства $\varphi(c_n) = b_n$ и $c_{n+1} - c_n \in p^n B$ при любом натуральном n . Покажем, что эта последовательность является чистой последовательностью Коши (чистые последовательности Коши определены в [13, §3] и [14, §20]). Нужно установить, что для всякого натурального числа n имеет место включение $c_i - c_n \in p^n B$, если $i \geq n$. Представим разность $c_i - c_n$ в следующем виде:

$$c_i - c_n = (c_i - c_{i-1}) + (c_{i-1} - c_{i-2}) + \dots + (c_{n+2} - c_{n+1}) + (c_{n+1} - c_n).$$

Все слагаемые, стоящие в скобках, суть элементы из $p^n B$. В самом деле, выполняются следующие включения: $c_i - c_{i-1} \in p^{i-1}B$, $c_{i-1} - c_{i-2} \in p^{i-2}B$, ..., $c_{n+2} - c_{n+1} \in p^{n+1}B$ и, наконец, $c_{n+1} - c_n \in p^n B$. Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ включение $c_i - c_n \in p^n B$, если $i \geq n$, справедливо.

Таким образом, последовательность $\{c_i\}_{i \geq 1}$ является чистой последовательностью Коши, а значит, и последовательностью Коши. В самом деле, из справедливости включений $c_i - c_n \in p^n B$ и $c_j - c_n \in p^n B$ немедленно вытекает справедливость включения $c_i - c_j \in p^n B$ при любом натуральном n для всех $i, j \geq n$.

Пусть c – предел последовательности $\{c_i\}_{i \geq 1}$. Имеем теперь $a = \lim b_i = \lim \varphi(c_i) = \hat{\varphi}(\lim c_i) = \hat{\varphi}(c)$. Итак, для произвольного элемента $a \in A$ нашелся такой элемент $c \in A$, что $a = \hat{\varphi}(c)$. Значит, $\hat{\varphi}$ – эпиморфизм группы A на себя. Теорема доказана.

Следующая теорема дает описание хопфовых урегулированных p -адических алгебраически компактных групп.

Теорема 3.4. Урегулированная p -адическая алгебраически компактная группа хопфова в точности тогда, когда она конечна.

Доказательство. Необходимость. Пусть A – урегулированная p -адическая алгебраически компактная хопфова группа, B – ее некоторая базисная подгруппа. Если группа A – периодическая, то она ограниченная ([11, следствие 40.3]), и значит, A есть прямая сумма циклических p -групп [11, теорема 17.2]. По теореме 9 статьи [4] такая группа конечна. Рассмотрим случай, когда A – смешанная группа. Предположим противное, т. е. пусть группа A – бесконечна. Ее базисная подгруппа B имеет прямое разложение:

$$B = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \bigoplus_{\mathfrak{M}_k} \mathbb{Z}(p^k),$$

где $\mathfrak{M}_k$ – некоторые кардинальные числа.

В базисной подгруппе B можно выделить прямое слагаемое C , являющееся прямой суммой счетного числа циклических p -групп. Группу C можно представить в виде $C = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus \dots$, где все C_i – циклические p -группы, порядки которых возрастают с возрастанием значений индекса i . Очевидно, что можно построить сюръективный эндоморфизм φ группы C с нетривиальным ядром. Именно, пусть φ переводит C_1 в ноль, а каждую группу C_i на группу C_{i-1} , $i > 1$. Следовательно, C – нехопфова группа. Тогда базисная подгруппа B тоже нехопфова как группа, содержащая нехопфово прямое слагаемое [4, теорема 2]. Применяя теорему 3.3, получаем, что A – нехопфова группа, что противоречит условию теоремы.

Достаточность. Обратное утверждение имеет место, поскольку любая конечная группа хопфова. Теорема доказана.

Полученные выше результаты, безусловно, позволяют утверждать, что существуют многочисленные примеры нехопфовых алгебраически компактных групп. Поэтому естественно попытаться построить хотя бы один такой пример. В наших рассуждениях, главным образом, мы будем исходить из свойств p -адических алгебраически компактных групп как модулей, полных в своей p -адической топологии.

Начнем с двух известных лемм.

Лемма 3.5 [13]. Пусть N – подмодуль модуля M . Тогда N – замкнутый подмодуль в точности тогда, когда M/N не имеет элементов бесконечной высоты.

Лемма 3.6 [13]. Пусть N – такой подмодуль полного модуля M , что M/N не имеет элементов бесконечной высоты. Тогда M/N – полный модуль.

Докажем еще один полезный результат общего характера.

Лемма 3.7. Если B – p -сервантная подгруппа группы A , то $(B + A[p^n]) / A[p^n]$ – p -сервантная подгруппа факторгруппы $A / A[p^n]$.

Доказательство. Пусть произвольный смежный класс $(b + a) + A[p^n]$ ($b \in B$, $a \in A[p^n]$) факторгруппы $(B + A[p^n]) / A[p^n]$ делится на p^k в факторгруппе $A / A[p^n]$. Тогда в группе $A / A[p^n]$ найдется такой смежный класс $x_0 + A[p^n]$ ($x_0 \in A$), что $(b + a) + A[p^n] = p^k(x_0 + A[p^n])$ или, что то же самое, $b + A[p^n] = p^k x_0 + A[p^n]$. Это значит, что $b - p^k x_0 \in A[p^n]$. Можно записать

$b = p^k x_0 + c$, где $c \in A[p^n]$. Умножая левую и правую части последнего равенства на p^n , получаем $p^n b = p^{k+n} x_0$. Получается, что x_0 – решение уравнения $p^{k+n} x = p^n b$ в группе A . Но подгруппа B p -сервантна в группе A , поэтому уравнение $p^{k+n} x = p^n b$ будет иметь решение и в группе B , т. е. верно равенство $p^n b = p^{k+n} y_0$, $y_0 \in B$. Отсюда $p^n(b - p^k y_0) = 0$, следовательно, $b - p^k y_0 \in A[p^n]$. На языке смежных классов

$$b + A[p^n] = p^k y_0 + A[p^n] = p^k (y_0 + A[p^n]),$$

где $y_0 + A[p^n] \in (B + A[p^n]) / A[p^n]$. Итак, смежный класс $(b + a) + A[p^n] \in (B + A[p^n]) / A[p^n]$ делится на p^k в факторгруппе $(B + A[p^n]) / A[p^n]$. Лемма доказана.

Перейдем к построению примера. Пусть A – такая p -адическая алгебраически компактная группа, что группа $B = \mathbb{Z}(p) \oplus \mathbb{Z}(p^2) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}(p^n) \oplus \mathbb{Z}(p^{n+1}) \oplus \dots$ служит для нее p -базисной подгруппой. Прежде установим, что подгруппа $A[p^n]$ замкнута в p -адической топологии. Нужно убедиться в том, что $A[p^n] = \overline{A[p^n]}$. Понятно, что $A[p^n] \subseteq \overline{A[p^n]}$. Обратно, пусть a – произвольный элемент из $\overline{A[p^n]}$. Тогда $a = \lim a_i$, где $a_i \in A[p^n]$ для любого i . Получаем $p^n a = p^n \lim a_i = \lim p^n a_i = 0$, следовательно, $a \in A[p^n]$ и $\overline{A[p^n]} \subseteq A[p^n]$. Таким образом, $A[p^n] = \overline{A[p^n]}$, или, иначе, подгруппа $A[p^n]$ замкнута в p -адической топологии. Применяя последовательно леммы 3.5 и 3.6 (каждую абелеву группу можно естественным образом рассматривать как $\mathbb{Z}$ -модуль, поэтому все понятия и факты теории модулей применимы к абелевым группам), выводим, что группа $A / A[p^n]$ полна в своей p -адической топологии, т. е. является p -адической алгебраически компактной группой.

Теперь докажем, что группа $(B + A[p^n]) / A[p^n]$ служит p -базисной подгруппой группы $A / A[p^n]$. Согласно определению p -базисной подгруппы, необходимо проверить выполнение условий:

а) подгруппа $(B + A[p^n]) / A[p^n]$ является прямой суммой циклических p -групп и бесконечных циклических групп;

б) группа $(B + A[p^n]) / A[p^n]$ есть p -сервантная подгруппа группы $A / A[p^n]$;

с) факторгруппа $(A / A[p^n]) / ((B + A[p^n]) / A[p^n])$ является p -делимой группой.

а) Нужный результат, очевидно, будет получен, если мы докажем, что $(B + A[p^n]) / A[p^n] \cong B$. Имеем

$$(B + A[p^n]) / A[p^n] \cong B / (B \cap A[p^n]) = B / B[p^n].$$

Ясно, что

$$B[p^n] = \mathbb{Z}(p)[p^n] \oplus \mathbb{Z}(p^2)[p^n] \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}(p^n)[p^n] \oplus \mathbb{Z}(p^{n+1})[p^n] \oplus \dots$$

Обозначим образующие элементы циклических p -групп $\mathbb{Z}(p)$, $\mathbb{Z}(p^2)$, $\mathbb{Z}(p^3)$, ... соответственно через b_1 , b_2 , b_3 , Запишем $B = \langle b_1 \rangle \oplus \langle b_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle b_n \rangle \oplus \langle b_{n+1} \rangle \oplus \dots$. Заметим, что $\mathbb{Z}(p)[p^n] = \mathbb{Z}(p)$, $\mathbb{Z}(p^2)[p^n] = \mathbb{Z}(p^2)$, ..., $\mathbb{Z}(p^n)[p^n] = \mathbb{Z}(p^n)$. Тогда

$$\begin{aligned} B[p^n] &= \langle b_1 \rangle \oplus \langle b_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle b_n \rangle \oplus \langle pb_{n+1} \rangle \oplus \langle p^2 b_{n+2} \rangle \oplus \\ &\quad \oplus \dots \oplus \langle p^k b_{n+k} \rangle \oplus \langle p^{k+1} b_{n+k+1} \rangle \oplus \dots \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} B/B[p^n] &\cong (\langle b_{n+1} \rangle / \langle pb_{n+1} \rangle) \oplus (\langle b_{n+2} \rangle / \langle p^2 b_{n+2} \rangle) \oplus \dots \oplus \\ &\quad \oplus (\langle b_{n+k} \rangle / \langle p^k b_{n+k} \rangle) \oplus (\langle b_{n+k+1} \rangle / \langle p^{k+1} b_{n+k+1} \rangle) \oplus \dots = \\ &= \mathbb{Z}(p) \oplus \mathbb{Z}(p^2) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}(p^k) \oplus \mathbb{Z}(p^{k+1}) \oplus \dots \cong B. \end{aligned}$$

Таким образом, группа $(B + A[p^n])/A[p^n]$ изоморфна группе B , поэтому она представляет собой прямую сумму циклических p -групп.

б) непосредственно вытекает из леммы 3.7.

с) Имеем

$$\begin{aligned} & (A/A[p^n]) / ((B + A[p^n])/A[p^n]) \cong \\ & \cong A / (B + A[p^n]) \cong (A/B) / ((B + A[p^n])/B). \end{aligned}$$

Так как B есть p -базисная подгруппа группы A , то факторгруппа A/B p -делима. Известно, что каждый эпиморфный образ p -делимой группы является p -делимой группой [11, §20]. Следовательно, каждая факторгруппа p -делимой группы p -делима. Получается, что группа $(A/B) / ((B + A[p^n])/B)$, а значит, и группа $(A/A[p^n]) / ((B + A[p^n])/A[p^n])$ p -делима.

Итак, группа $(B + A[p^n])/A[p^n]$ может служить p -базисной подгруппой для группы $A/A[p^n]$. Выше, при проверке выполнения требования а), был установлен изоморфизм $(B + A[p^n])/A[p^n] \cong B$. Так как p -адические алгебраически компактные группы с изоморфными базисными подмодулями изоморфны [11, §40], то $A/A[p^n] \cong A$. Это доказывает, что группа A нехопфова.

Как уже было сказано, можно строить и другие примеры нехопфовых алгебраически компактных групп. Разнообразие таких примеров объясняется, в частности, особенностями строения базисных подгрупп p -адических алгебраически компактных групп (именно, базисная подгруппа p -адической алгебраически компактной группы есть прямая сумма циклических p -адических модулей) и тем, что базисные подгруппы p -адических алгебраически компактных групп могут допускать большое количество различных эпиморфизмов на себя.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nielsen J.* Om Regning med ikke kommutative Faktorer og dens Anvendelse i Gruppeteorien // *Mathematisk Tidsskrift B*, 77–94, 1921.
2. *Hopf H.* Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten // *J. Reine und Angew. Math.* 163, 71–88. II.2, 1930.
3. *Hopf H.* Beiträge zur Theorie der Flächenabbildungen // *J. Reine und Angew. Math.* 165, 225–226. II.2, 1931.
4. *Кайгородов Е.В.* Хопфовы абелевы группы // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2012. № 2 (18). С. 5–12.
5. *Fuchs L., Rangaswamy K. V.* On generalized regular rings // *Math. Z.*, 107 (1968). P. 71–81.
6. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы: в 2 т. – М.: Мир, 1977. – Т. 2. – 417 с.
7. *Glaz S., Wickless W.* Regular and principal projective endomorphism rings of mixed abelian groups // *Commun. Algebra.* 1994. V. 22. No. 4. P. 1161–1176.
8. *Vinsonhaler C., Wickless W. J.* Realizations of finite dimensional algebras over the rationales // *Rocky Mountain J. Math.* 1994. V. 24. No. 4. P. 1553–1565.
9. *Albrecht U. F., Goeters H. P., Wickless W.* The flat dimension of mixed abelian groups as E-modules // *Rocky Mountain J. Math.* 1995. V. 25. No. 2. P. 569–590.
10. *Крылов П. А., Пахомова Е. Г., Подберезина Е. И.* Об одном классе смешанных абелевых групп // *Вестник Томского государственного университета.* 2001. № 269. С. 46–50.
11. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы: в 2 т. – М.: Мир, 1974. – Т. 1. – 335 с.
12. *Kaplansky I.* Infinite abelian groups. Univ. of Michigan Press, Ann. Arbor: Michigan, 1954.
13. *Крылов П.А., Туганбаев А.А.* Модули над областями дискретного нормирования. М.: Факториал Пресс, 2007. 384 с. (Advanced Studies in Mathematics and Mechanics; Вып. 3).
14. *Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2006. 512 с.

Статья поступила 05.03.2013 г.

Kaigorodov E. V. ON TWO CLASSES OF HOPFIAN ABELIAN GROUPS. This paper is concerned with hopficity of SP-groups and algebraically compact Abelian groups. Hopficity of SP-groups is reduced to hopficity of their primary components. A full description of Hopfian algebraically compact Abelian groups is presented. An example of a non-Hopfian algebraically compact Abelian group is given.

Keywords: Abelian group, Hopfian group, mixed group, SP-group, algebraically compact group.

KAYGORODOV Evgeniy Vladimirovich (Tomsk State University)

E-mail: gazetaintegral@gmail.com