ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2013 Математика и механика № 2(22)

УДК 512.572

С.М. Рацеев, О.И. Череватенко

О НЕКОТОРЫХ МНОГООБРАЗИЯХ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА – ПУАССОНА С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

В работе приводятся некоторые многообразия алгебр Лейбница – Пуассона с экстремальными свойствами. Также приводится наименьшее многообразие алгебр Лейбница – Пуассона, в котором не выполнено ни одно лейбницево стандартное тождество.

Ключевые слова: *алгебра Пуассона, алгебра Лейбница – Пуассона, многообразие алгебр, рост многообразия.*

Определим алгебру Лейбница – Пуассона следующим образом. Алгебру $A = A(+, \cdot, \{,\}, K)$ над полем K назовем алгеброй Лейбница – Пуассона, если $A(+, \cdot, K)$ – ассоциативная коммутативная алгебра с единицей, $A(+,\{,\}, K)$ – алгебра Лейбница с операцией умножения $\{,\}$ и для любых a, b, $c \in A$ выполняются правила:

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b,$$

$$\{c, a \cdot b\} = a \cdot \{c, b\} + \{c, a\} \cdot b.$$

При этом алгебра Лейбница $A(+,\{,\}, K)$ над полем K определяется тождеством

$$\{\{x, y\}, z\} = \{\{x, z\}, y\} + \{x, \{y, z\}\}.$$

Договоримся опускать скобки $\{,\}$ при их левонормированной расстановке, т.е. $\{\{x_1, x_2\}, x_3\} = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Пусть $L(X)$ – свободная алгебра Лейбница, где $X = \{x_1, x_2,...\}$ – счетное множество свободных образующих. Пусть также $F(X)$ – свободная алгебра Лейбница – Пуассона. Обозначим через P_n пространство в $F(X)$, состоящее из полилинейных элементов степени n от переменных $x_1,..., x_n$, а через P_n^L пространство полилинейных элементов степени n в свободной алгебре Лейбница $L(X)$.

Обозначим через $L_{\geq 2}(X)$ подалгебру в свободной алгебре Лейбница $L(X)$, каждый элемент которой является линейной комбинацией мономов степени ≥ 2. Пусть V – некоторое многообразие алгебр Лейбница – Пуассона, $Id(V)$ – идеал тождеств многообразия V. Обозначим

$$P_n(V) = P_n/(P_n \cap Id(V)), \ \ c_n(V) = dim\ P_n(V).$$

Соответственно, если V_L – некоторое многообразие алгебр Лейбница, то

$$P^L{}_n(V) = P^L{}_n/(P^L{}_n \cap Id(V_L)), \quad c^L{}_n(V) = dim\ P^L{}_n(V_L).$$

Предложение ([1]). Пусть A_L – некоторая ненулевая алгебра Лейбница с умножением [,] над бесконечным полем K. Рассмотрим векторное пространство $A = A_L \oplus K$, в котором определим операции $\cdot$ и $\{,\}$ следующим образом:

$$(a + \alpha) \cdot (b + \beta) = (\beta a + \alpha b) + \alpha\beta,$$

$$\{a + \alpha, b + \beta\} = [a, b], \quad a, b \in A_L, \ \alpha, \beta \in K. \tag{1}$$

Тогда полученная алгебра $A(+,\cdot,\{,\},K)$ будет являться алгеброй Лейбница – Пуассона.

Если многообразие V имеет экспоненциальный рост, то введем в рассмотрение нижнюю и верхнюю экспоненты:

$$\underline{EXP}(V) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(V)}, \quad \overline{EXP}(V) = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(V)}.$$

Если имеет место равенство $\underline{EXP}(V) = \overline{EXP}(V)$, то будем обозначать $EXP(V)$.

На сегодняшний день известны всего четыре многообразия алгебр Лейбница почти полиномиального роста. Для однородности записи обозначим их через $\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2, \widetilde{V}_3, \widetilde{V}_4$.

Многообразие $\widetilde{V}_1$ определяется тождеством $[x_1,[x_2,x_3],[x_4,x_5]]=0$ (см. [2]).

Пусть G – бесконечномерная алгебра Грассмана с умножением $\wedge$ над произвольным полем K. На векторном пространстве $\widetilde{G} = G\times G$ определим операцию умножения [,]:

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], x_2\wedge y_1),$$

где $[x_1, y_1] = x_1\wedge y_1 - y_1\wedge x_1$, $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in G$. Полученная алгебра $\widetilde{G}$ является алгеброй Лейбница, которая порождает многообразие $\widetilde{V}_2$. В работе [3] показано, что многообразие $\widetilde{V}_2$ порождается тождествами

$$[x_1, [x_2, [x_3, x_4]]] = 0, \quad [z, [x, y], [x, y]] = 0$$

и является наименьшим многообразием алгебр Лейбница, в котором не выполняется ни одно лейбницево стандартное тождество, то есть тождества вида

$$\sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\sigma} \left[x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}\right] = 0.$$

Многообразия $\widetilde{V}_3$ и $\widetilde{V}_4$ определяются следующим образом [4]. Рассмотрим кольцо многочленов R от переменной t как алгебру Лейбница с нулевым умножением. Алгебру R будем считать правым N_3-модулем алгебры Гейзенберга N_3 со следующим действием:

$$f(t)a = f'(t), \ f(t)b = tf(t), \ f(t)c = f(t).$$

Обозначим через $\widetilde{N}$ прямую сумму алгебр N_3 и R. Умножение в $\widetilde{N}$ задается так:

$$(x + f(t))(y + g(t)) = xy + f(t)y,$$

где $x, y \in N_3, f(t), g(t) \in R$. Алгебра Лейбница $\widetilde{N}$ порождает многообразие $\widetilde{V}_3$. Зададим действие элементов двумерной метабелевой алгебры Ли M_2 на элементы R:

$$f(t)e = tf'(t), \ f(t)h = tf(t).$$

Пусть $\widetilde{M}$ – прямая сумма алгебр N_3 и R с умножением

$$(m_1 + f(t))(m_2 + g(t)) = m_1m_2 + f(t)m_2,$$

где $m_1,m_2 \in M_2, f(t), g(t) \in R$. Алгебра Лейбница $\widetilde{M}$ порождает многообразие $\widetilde{V}_4$.

Обозначим через $\widetilde{G}\oplus K$, $\widetilde{N}\oplus K$ и $\widetilde{M}\oplus K$ алгебры Лейбница – Пуассона с операциями (1), а через $\widetilde{V}_2^P$, $\widetilde{V}_3^P$ и $\widetilde{V}_4^P$ – многообразия алгебр Лейбница – Пуассона, порожденные соответственно алгебрами $\widetilde{G}\oplus K$, $\widetilde{N}\oplus K$ и $\widetilde{M}\oplus K$. Также обозначим через $\widetilde{V}_1^P$ многообразие алгебр Лейбница – Пуассона, порожденное тождествами

$$\{x_1, \{x_2, x_3\}, \{x_4, x_5\}\} = 0, \quad \{x_1, x_2\}\cdot\{x_3, x_4\} = 0.$$

Теорема 1. $EXP(\widetilde{V}_1^P)=3$, $EXP(\widetilde{V}_2^P)=3$, $EXP(\widetilde{V}_3^P)=4$, $EXP(\widetilde{V}_4^P)=3$. Пусть V – некоторое собственное подмногообразие одного из многообразий $\widetilde{V}_i^P$ $i=1,\ldots,4$. Тогда рост многообразия V либо ограничен полиномом, либо найдется такое β, что для любого n будет выполнено неравенство

$$2^{n-1} \le c_n(V) \le n^{\beta} 2^n. \qquad (2)$$

Доказательство. Для экспонент рассмотренных выше многообразий алгебр Лейбница почти полиномиального роста выполнены следующие равенства: $EXP(\widetilde{V}_1)$=2 [2], $EXP(\widetilde{V}_2)$=2 [3], $EXP(\widetilde{V}_3)$=3 и $EXP(\widetilde{V}_4)$=2 [4]. Поэтому значения экспонент многообразий $\widetilde{V}_i^P$, i = 1,...,4, следуют из данных равенств и теоремы 2 работы [5].

Пусть V – некоторое собственное подмногообразие одного из многообразий $\widetilde{V}_i^P$, i=1,...,4. Тогда идеал тождеств $Id(V) \cap L_{\ge 2}(X)$ определяет некоторое собственное подмногообразие в $\widetilde{V}_i$, которое будет иметь рост не выше полиномиального. Поэтому, с учетом теоремы 2 работы [5] и теоремы 3 работы [1], либо рост многообразия V будет ограничен полиномом, либо для него будет выполнено двойное неравенство (2).

Теорема 2. Многообразие $\widetilde{V}_2^P$ порождается тождествами

$$\{x_1, \{x_2, \{x_3, x_4\}\}\} = 0, \quad \{z, \{x, y\}, \{x, y\}\} = 0, \quad \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$$

и является наименьшим многообразием алгебр Лейбница – Пуассона, в котором не выполнено ни одно лейбницево стандартное тождество.

Доказательство следует из работ [1, 3, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рацеев С.М.* Коммутативные алгебры Лейбница – Пуассона полиномиального роста // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2012. № 3/1 (94). С. 54–65.
2. *Mishchenko S.*, *Valenti A.* A Leibniz variety with almost polynomial growth // J. Pure Appl. Algebra. 2005. V. 202. No. 1–3. P. 82–101.
3. *Абанина Л.Е.*, *Рацеев С.М.* Многообразие алгебр Лейбница, связанное со стандартными тождествами // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2005. № 6. С. 36–50.
4. *Абанина Л.Е.*, *Мищенко С.П.* Некоторые многообразия алгебр Лейбница // Математические методы и приложения. Труды Десятых математических чтений МГСУ. М: Союз, 2002. С. 95–99.
5. *Ratseev S.M.* On varieties of Leibniz-Poisson algebras with the identity $\{x,y\} \cdot \{z,t\}$=0 // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2013. № 1 (6). С. 97–104.

Статья поступила 21.10.2012 г.

Ratseev S.M., *Cherevatenko O.I.* ON SOME VARIETIES OF LEIBNIZ–POISSON ALGEBRAS WITH EXTREME PROPERTIES. Some varieties of Leibniz – Poisson algebras with extreme properties are presented. We give the least variety of Leibniz – Poisson algebras in which no Leibniz standard identities are valid.

Keywords: Poisson algebra, Leibniz – Poisson algebra, variety of algebras, growth of a variety.

RATSEEV Sergey Mihailovich (Ulyanovsk State University).
E-mail: RatseevSM@mail.ru

CHEREVATENKO Olga Ivanovna (Ulyanovsk State I.N.Ulyanov Pedagogical University)
E-mail: chai@pisem.net