ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2013 Математика и механика № 1(21)

МАТЕМАТИКА

УДК 514.654.7

З.П. Бадяева, М.С. Бухтяк

ПОЛУИНВАРИАНТНЫЕ ПОЛИНОМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА МНОГООБРАЗИИ ЛУЧЕЙ ПРОСТРАНСТВА A_3

Найдены минимальные оснащения, позволяющие задавать на многообразии лучей трехмерного аффинного пространства относительно инвариантные квадратичные формы с постоянными коэффициентами. Доказано, что таких оснащений имеется два и каждое из них порождает свою структуру в касательном расслоении указанного многообразия. Доказано, что в любом из этих случаем относительно инвариантная квадратичная дифференциальная форма на линейчатом пространстве пропорциональна той, что задает полуриманову метрику на многообразии приложенных векторов. Найдены группы стационарности найденных оснащений, и для этих групп указаны одномерные подгруппы. Данная работа имеет очевидную связь с работами [4–6] второго автора.

Ключевые слова: *инвариантная квадратичная форма, подвижной репер, многообразие лучей.*

1. Оператор, подобный ковариантному дифференциалу

Деривационные формулы подвижного репера $\{\boldsymbol{M}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ трехмерного аффинного пространства A_3 имеют вид

$$\begin{matrix} d\boldsymbol{M} = \omega^i \boldsymbol{e}_i, \\ d\boldsymbol{e}_i = \omega_i^j \boldsymbol{e}_j, \end{matrix} \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где формы Пфаффа [1] ω^i, ω_j^i подчинены уравнениям структуры аффинного пространства

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Рассмотрим многообразие всех прямых в пространстве A_3. Будем считать, что на каждой прямой задана ориентация таким образом, что полученное 4-мерное дифференцируемое многообразие лучей есть гладкое многообразие. Это многообразие обозначим L. Текущий элемент многообразия – луч l. Локальные координаты луча l – как точки многообразия – пусть обозначаются t^i $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Помещаем вершину подвижного репера на текущий луч l, а вектор $\boldsymbol{e}_3$ репера пусть сонаправлен с текущим лучом. Тогда пфаффовы формы $\omega^1, \omega^2, \omega_3^1, \omega_3^2$ являются линейными комбинациями величин dt^i и не содержат дифференциалов параметров, ответственных за изменение репера при фиксированном луче. Такие формы называются главными [1]. Эти формы $\omega^1, \omega^2, \omega_3^1, \omega_3^2$ (базовые формы) управляют смещением луча, и

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega_3^1 \wedge \omega_3^2 \neq 0 .$$

Хорошо известна роль квадратичной дифференциальной формы $2\left(\omega^1\omega_3^2 - \omega^2\omega_3^1\right) = 2\left(d\boldsymbol{M}, d\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3\right)$ в геометрии линейчатого пространства (в частности, обращение её в нуль для луча регулюса делает этот луч торсовым). Поставим следующий вопрос: насколько особое положение занимает эта квадратичная форма среди тех однородных квадратичных многочленов от базовых форм линейчатого пространства, и обладающих свойством относительной инвариантности по отношению к некоторым преобразованиям, на наш взгляд естественным.

Обозначая, как в [1],

$$\omega^i \Big|_{dt^k = 0} = \pi^i, \quad \omega_i^j \Big|_{dt^k = 0} = \pi_i^j, \quad i, j = 1,2,3;\ k = 1,2,3,4,$$

заключаем, что

$$\pi^1 = \pi^2 = \pi_3^1 = \pi_3^2 = 0 . \tag{1}$$

Данные соотношения сужают полную аффинную группу, действующую в касательном пространстве многообразия L, до некоторой подгруппы. Оставшиеся формы

$$\pi_1^1, \pi_1^2, \pi_2^1, \pi_2^2, \pi_2^3, \pi_1^3, \pi_3^3, \pi^3 \tag{2}$$

управляют смещением репера при фиксированном луче.

Введём матричнозначную форму [2]

$$\left(\frac{\theta}{\Omega}\right) = \left\| \begin{array}{cccc} \omega^1 & \omega^2 & \omega_3^1 & \omega_3^1 \\ \hline \omega_1^1 & \omega_1^2 & 0 & 0 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1^1 & \omega_1^2 \\ 0 & 0 & \omega_2^1 & \omega_2^2 \end{array} \right\| .$$

Тогда справедливы соотношения

$$d\theta - \theta \wedge \Omega = \left(\omega^3 \wedge \omega_3^1 \quad \omega^3 \wedge \omega_3^2 \quad \omega_3^3 \wedge \omega_3^1 \quad \omega_3^3 \wedge \omega_3^2 \right),$$

$$d\Omega - \Omega \wedge \Omega = \left\| \begin{array}{cccc} \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 & \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{\mathbf{0}}} \\ \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 & \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 & & \\ \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{\mathbf{0}}} & \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 & \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 \\ & & \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 & \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 \end{array} \right\| .$$

Ясно, что последние соотношения являются структурными уравнениями линейной связности в том и только в том случае, когда внешние квадратичные формы

$$\omega^3 \wedge \omega_3^\alpha, \ \omega_i^3 \wedge \omega_3^\alpha, \ i = 1,2,3;\ \alpha = 1,2 ,$$

разложимы по внешним квадратичным формам

$$\omega^\alpha \wedge \omega^\beta, \ \omega^\alpha \wedge \omega_3^\beta, \ \omega_3^\alpha \wedge \omega_3^\beta, \ \alpha, \beta = 1,2 .$$

Мы не предполагаем данное условие выполненным. Определим, однако, оператор Ψ, указав его действие на матрицу $H = \left(h_{ij}\right)$ следующим образом:

$$\Psi(H) = dH - \Omega H - (\Omega H)^T .$$

Если матричнозначная форма Ω определяет аффинную связность, то оператор Ψ есть оператор ковариантного дифференцирования. Обозначим

$$\Pi = \begin{Vmatrix} \pi_1^1 & \pi_1^2 & 0 & 0 \\ \pi_2^1 & \pi_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_1^1 & \pi_1^2 \\ 0 & 0 & \pi_2^1 & \pi_2^2 \end{Vmatrix} . \tag{3}$$

Оператор $$\Psi_\delta(H) = \delta H - \Pi H - (\Pi H)^T$$

имеет очевидный смысл (δ – символ дифференцирования по вторичным параметрам).

Пусть на многообразии L задан однородный многочлен второй степени Φ от дифференциалов базовых форм

$$\begin{gathered} \Phi = a_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta + 2b_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega_3^\beta + c_{\alpha\beta}\omega_3^\alpha\omega_3^\beta \\ a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, \quad c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}, \quad \alpha,\beta = 1,2. \end{gathered} \tag{4}$$

Матрица полинома $$L = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{21} & c_{11} & c_{12} \\ b_{12} & b_{22} & c_{21} & c_{22} \end{Vmatrix} . \tag{5}$$

Требование полуинвариантности полинома (4) относительно оператора Ψ при фиксированных базовых параметрах приводит к уравнению

$$\Psi_\delta(L) \equiv \delta L - \Pi L - (\Pi L)^T = \Xi L , \tag{6}$$

где Ξ – пфаффова 1-форма. Поставим следующую задачу. Отыскать условия на ненулевой полином (4) с постоянными коэффициентами и на пфаффову форму Ξ, чтобы при отсутствии связей на формы (2) выполнялось требование (6). Пфаффову форму Ξ будем искать в виде

$$\Xi = x_1\pi_1^1 + x_2\pi_1^2 + x_3\pi_2^1 + x_4\pi_2^2 + x_5\pi_2^3 + x_6\pi_1^3 + x_7\pi_3^3 + x_8\pi^3 . \tag{7}$$

Предъявленное нами требование (с учётом (3), (5) – (7)) приводит к системе уравнений, матричная запись которой имеет вид

$$A \times \begin{pmatrix} \pi_1^1 \\ \pi_1^2 \\ \pi_2^1 \\ \pi_2^2 \\ \pi_2^3 \\ \pi_1^3 \\ \pi_3^3 \\ \pi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; A = \begin{Vmatrix} a_{11}(2+x_1) & 2a_{12}+x_2a_{11} & x_3a_{11} & x_4a_{11} & x_5a_{11} & x_6a_{11} & x_7a_{11} & x_8a_{11} \\ a_{12}(1+x_1) & a_{22}+x_2a_{12} & a_{11}+x_3a_{12} & a_{12}(1+x_4) & x_5a_{12} & x_6a_{12} & x_7a_{12} & x_8a_{12} \\ x_1a_{22} & x_2a_{22} & 2a_{12}+x_3a_{22} & 2a_{22}+x_4a_{22} & x_5a_{22} & x_6a_{22} & x_7a_{22} & x_8a_{22} \\ b_{11}(2+x_1) & b_{21}+b_{12}+x_2b_{11} & x_3b_{11} & x_4b_{11} & x_5b_{11} & x_6b_{11} & x_7b_{11} & x_8b_{11} \\ b_{12}(1+x_1) & b_{22}+x_2b_{12} & b_{11}+x_3b_{12} & b_{12}(1+x_4) & x_5b_{12} & x_6b_{12} & x_7b_{12} & x_8b_{12} \\ b_{21}(1+x_1) & b_{22}+x_2b_{21} & b_{11}+x_3b_{21} & b_{21}(1+x_4) & x_5b_{21} & x_6b_{21} & x_7b_{21} & x_8b_{21} \\ x_1b_{22} & x_2b_{22} & b_{21}+b_{12}+x_3b_{22} & b_{22}(2+x_4) & x_5b_{22} & x_6b_{22} & x_7b_{22} & x_8b_{22} \\ c_{11}(2+x_1) & 2c_{12}+x_2c_{11} & x_3c_{11} & x_4c_{11} & x_5c_{11} & x_6c_{11} & x_7c_{11} & x_8c_{11} \\ c_{12}(1+x_1) & c_{22}+x_2c_{12} & c_{11}+x_3c_{12} & c_{12}(1+x_4) & x_5c_{12} & x_6c_{12} & x_7c_{12} & x_8c_{12} \\ x_1a_{22} & x_2a_{22} & 2c_{12}+x_3c_{22} & 2c_{22}+x_4c_{22} & x_5c_{22} & x_6c_{22} & x_7c_{22} & x_8c_{22} \end{Vmatrix} . \tag{8}$$

Поскольку данное уравнение не должно налагать ограничений на пфаффовы формы (2), то матрица A – нулевая. В то же время матрица L (см. (5)) отлична от нулевой. Указанная совокупность условий выполнена, если и только если

$$x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0,\ \ x_1 = -1,\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = 0,\ \ x_4 = -1,$$
$$a_{11} = a_{12} = a_{22} = b_{11} = b_{12} + b_{21} = b_{22} = c_{11} = c_{22} = 0.$$

Таким образом, с точностью до числового множителя,

$$L = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\Phi = 2\left(\omega^1\omega_3^2 - \omega^2\omega_3^1\right) = 2\left(d\boldsymbol{M}, d\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3\right).$$

Соответственно $$\Xi = -\pi_1^1 - \pi_2^2 .$$

Отметим, что полином Φ инвариантен, если и только если

$$\pi_1^1 + \pi_2^2 = 0 . \qquad (9)$$

Вследствие (1) внешнее дифференцирование последнего уравнения приводит к тождеству. При выполнении (9) получаем подгруппу преобразований репера, определяемую деривационными формулами

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{M} &= \pi^3\boldsymbol{e}_3, \\ \delta\boldsymbol{e}_1 &= \pi_1^1\boldsymbol{e}_1 + \pi_1^2\boldsymbol{e}_2 + \pi_1^3\boldsymbol{e}_3, \\ \delta\boldsymbol{e}_2 &= \pi_2^1\boldsymbol{e}_1 + \pi_2^2\boldsymbol{e}_2 + \pi_2^3\boldsymbol{e}_3, \\ \delta\boldsymbol{e}_3 &= \pi_3^3\boldsymbol{e}_3, \\ &\pi_1^1 + \pi_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Геометрический смысл условия (9), дополненного (1), таков:

$$\delta\left(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\right)\boldsymbol{e}_3 = \left(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\right)\delta\boldsymbol{e}_3 ,$$

где символ $(\boldsymbol{abc})$ обозначает косое произведение векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

2. Вариация однородного полинома от базовых форм

Для дальнейшего нам потребуются связи на вторичные параметры. Действуя как в [3], получаем в обозначениях [1,3] вариации главных форм в виде

$$\begin{aligned} \delta\omega^\alpha &= -\omega^\beta\pi_\beta^\alpha + \pi^3\omega_3^\alpha, \\ \delta\omega_3^\alpha &= -\omega_3^\beta\pi_\beta^\alpha + \pi_3^3\omega_3^\alpha, \\ &\alpha, \beta = 1, 2. \end{aligned} \qquad (10)$$

Применив (10) к (4), получаем, что

$$\begin{aligned} \delta\Phi = {} & (\delta a_{\alpha\beta} - a_{\gamma\beta}\pi_\alpha^\gamma - a_{\alpha\gamma}\pi_\beta^\gamma)\omega^\alpha\omega^\beta + \\ & +2(\delta b_{\alpha\beta} - b_{\gamma\beta}\pi_\alpha^\gamma - b_{\alpha\gamma}\pi_\beta^\gamma + a_{\alpha\beta}\pi^3 + b_{\alpha\beta}\pi_3^3)\omega^\alpha\omega_3^\beta + \\ & +(\delta c_{\alpha\beta} - c_{\gamma\beta}\pi_\alpha^\gamma - c_{\alpha\gamma}\pi_\beta^\gamma + 2b_{\alpha\beta}\pi^3 + 2c_{\alpha\beta}\pi_3^3)\omega_3^\alpha\omega_3^\beta. \end{aligned} \qquad (11)$$

В этих формулах δ – символ дифференцирования по вторичным (слоевым) параметрам.

Квадратичный полином Φ окажется относительно инвариантным, если

$$\delta\Phi = \Theta\Phi,$$

где Θ – некоторая пфаффова форма. Итак, условие относительной инвариантности имеет, с учетом (11), вид

$$\begin{aligned}
&\delta a_{\alpha\beta} = a_{\gamma\beta}\pi_\alpha^\gamma + a_{\alpha\gamma}\pi_\beta^\gamma + \Theta a_{\alpha\beta},\\
&\delta b_{\alpha\beta} = b_{\gamma\beta}\pi_\alpha^\gamma + b_{\alpha\gamma}\pi_\beta^\gamma - a_{\alpha\beta}\pi^3 - b_{\alpha\beta}\pi_3^3 + \Theta b_{\alpha\beta},\\
&\delta c_{\alpha\beta} = c_{\gamma\beta}\pi_\alpha^\gamma + c_{\alpha\gamma}\pi_\beta^\gamma - 2b_{\alpha\beta}\pi^3 - 2c_{\alpha\beta}\pi_3^3 + \Theta c_{\alpha\beta},\\
&\quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2.
\end{aligned}$$

Приведем подробную запись последних соотношений для полинома с постоянными коэффициентами. Именно,

$$\begin{aligned}
&a_{11}\left(\Theta + 2\pi_1^1\right) + 2a_{12}\pi_1^2 =\\
&a_{12}\left(\Theta + \pi_1^1 + \pi_2^2\right) + a_{11}\pi_2^1 + a_{22}\pi_1^2 = 0,\\
&a_{22}\left(\Theta + 2\pi_2^2\right) + 2a_{12}\pi_2^1 = 0,\\
&b_{11}\left(\Theta + 2\pi_1^1 - \pi_3^3\right) + (b_{12} + b_{21})\pi_1^2 - a_{11}\pi^3 = 0,\\
&b_{12}\left(\Theta + \pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3\right) + b_{11}\pi_2^1 + b_{22}\pi_1^2 - a_{12}\pi^3 = 0,\\
&b_{21}\left(\Theta + \pi_1^1 + \pi_2^2 - \pi_3^3\right) + b_{11}\pi_2^1 + b_{22}\pi_1^2 - a_{12}\pi^3 = 0,\\
&b_{22}\left(\Theta + 2\pi_2^2 - \pi_3^3\right) + (b_{12} + b_{21})\pi_2^1 - a_{22}\pi^3 = 0,\\
&c_{11}\left(\Theta + 2\pi_1^1 - 2\pi_3^3\right) + 2c_{12}\pi_1^2 - 2b_{11}\pi^3 = 0,\\
&c_{12}\left(\Theta + \pi_1^1 + \pi_2^2 - 2\pi_3^3\right) + c_{11}\pi_2^1 + c_{22}\pi_1^2 - (b_{12} + b_{21})\pi^3 = 0,\\
&c_{22}\left(\Theta + 2\pi_2^2 - 2\pi_3^3\right) + 2c_{12}\pi_2^1 - 2b_{22}\pi^3 = 0.
\end{aligned}$$

Полагаем

$$\Theta = x_1\pi_1^1 + x_2\pi_1^2 + x_3\pi_2^1 + x_4\pi_2^2 + x_5\pi_2^3 + x_6\pi_1^3 + x_7\pi_3^3 + x_8\pi^3.$$

Аналогично (8) получаем матричное уравнение

$$B \times \begin{pmatrix} \pi_1^1 \\ \pi_1^2 \\ \pi_2^1 \\ \pi_2^2 \\ \pi_2^3 \\ \pi_1^3 \\ \pi_3^3 \\ \pi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{Vmatrix}
a_{11}(2+x_1) & 2a_{12}+x_2a_{11} & x_3a_{11} & x_4a_{11} & x_5a_{11} & x_6a_{11} & x_7a_{11} & x_8a_{11} \\
a_{12}(1+x_1) & a_{22}+x_2a_{12} & a_{11}+x_3a_{12} & a_{12}(1+x_4) & x_5a_{12} & x_6a_{12} & x_7a_{12} & x_8a_{12} \\
x_1a_{22} & x_2a_{22} & 2a_{12}+x_3a_{22} & 2a_{22}+x_4a_{22} & x_5a_{22} & x_6a_{22} & x_7a_{22} & x_8a_{22} \\
b_{11}(2+x_1) & b_{21}+b_{12}+x_2b_{11} & x_3b_{11} & x_4b_{11} & x_5b_{11} & x_6b_{11} & b_{11}(x_7-1) & x_8b_{11}-a_{11} \\
b_{12}(1+x_1) & b_{22}+x_2b_{12} & b_{11}+x_3b_{12} & b_{12}(1+x_4) & x_5b_{12} & x_6b_{12} & x_7b_{12} & x_8b_{12} \\
b_{21}(1+x_1) & b_{22}+x_2b_{21} & b_{11}+x_3b_{21} & b_{21}(1+x_4) & x_5b_{21} & x_6b_{21} & x_7b_{21} & x_8b_{21} \\
x_1b_{22} & x_2b_{22} & b_{21}+b_{12}+x_3b_{22} & b_{22}(2+x_4) & x_5b_{22} & x_6b_{22} & x_7b_{22} & x_8b_{22} \\
c_{11}(2+x_1) & 2c_{12}+x_2c_{11} & x_3c_{11} & x_4c_{11} & x_5c_{11} & x_6c_{11} & x_7c_{11} & x_8c_{11} \\
c_{12}(1+x_1) & c_{22}+x_2c_{12} & c_{11}+x_3c_{12} & c_{12}(1+x_4) & x_5c_{12} & x_6c_{12} & x_7c_{12} & x_8c_{12} \\
x_1a_{22} & x_2a_{22} & 2c_{12}+x_3c_{22} & 2c_{22}+x_4c_{22} & x_5c_{22} & x_6c_{22} & x_7c_{22} & x_8c_{22}
\end{Vmatrix}.$$

Условия, налагаемые на матрицу B, – те же, что и что и для матрицы A. В данном случае они приводят к единственному (с точностью до ненулевого числового множителя) решению

$$a_{11} = a_{12} = a_{22} = b_{11} = b_{12} - 1 = b_{21} + 1 = b_{22} = c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0,$$
$$x_1 + 1 = x_2 = x_3 = x_4 + 1 = x_5 = x_6 = x_7 - 1 = 0.$$

Таким образом, с точностью до ненулевого числового множителя, как и раньше, имеем

$$\Phi = 2\left(\omega^1\omega_3^2 - \omega^2\omega_3^1\right) = 2\left(d\boldsymbol{M}, d\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3\right).$$

Однако форма Θ отличается от формы Ξ. Именно,

$$\Theta = \pi_3^3 - \pi_1^1 - \pi_2^2. \tag{12}$$

Согласно приведенным выше результатам, запишем вариацию найденной квадратичной формы

$$\delta\Phi = (\pi_3^3 - \pi_1^1 - \pi_2^2)\Phi.$$

Таким образом, форма φ лишь относительно инвариантна на линейчатом пространстве, а инвариантной она окажется при выполнении следующего набора условий:

$$\pi^1 = \pi^2 = \pi_3^1 = \pi_2^2 = 0, \ \pi_1^1 + \pi_2^2 + \pi_3^3 = 2\pi_3^3. \tag{13}$$

Последнему равенству в системе (13) можно придать более геометрическую форму, а именно:

$$\delta\left(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\right)\boldsymbol{e}_3 = 2\left(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\right)\delta\boldsymbol{e}_3.$$

Очевидно, что уравнения (13) выполнены для многообразия скользящих векторов в эквиаффинном пространстве A_3', и подавно – для многообразия приложенных векторов в A_3'.

3. Одномерные подгруппы

Для базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ имеем деривационные формулы

$$\delta\boldsymbol{e}_1 = \pi_1^1\boldsymbol{e}_1 + \pi_1^2\boldsymbol{e}_2 + \pi_1^3\boldsymbol{e}_3,$$
$$\delta\boldsymbol{e}_2 = \pi_2^1\boldsymbol{e}_1 + \pi_2^2\boldsymbol{e}_2 + \pi_2^3\boldsymbol{e}_3,$$
$$\delta\boldsymbol{e}_3 = \pi_3^1\boldsymbol{e}_1 + \pi_2^2\boldsymbol{e}_2 + \pi_3^3\boldsymbol{e}_3,$$

причем формы Пфаффа π_i^j связаны в случае (9) соотношениями

$$\pi_3^1 = \pi_3^2 = \pi_1^1 + \pi_1^1 = 0,$$

а в случае (12) – соотношениями

$$\pi_3^1 = \pi_3^2 = \pi_1^1 + \pi_1^1 - \pi_3^3 = 0.$$

Каждая из двух последних систем уравнений вполне интегрируема и определяет (каждая свою) подгруппу полной линейной группы Обозначим их G_1 и G_2. Найдём одномерные подгруппы групп G_1 и G_2.

Пусть $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3\}$ – неподвижный базис, причем вектор $\boldsymbol{p}_3$ параллелен неподвижному направлению вектора $\boldsymbol{e}_3$. Пусть каждый вектор базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ зависит от одного параметра t. Тогда связь двух базисов можно выразить уравнениями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= x_1(t)\boldsymbol{p}_1 + x_2(t)\boldsymbol{p}_2 + x_3(t)\boldsymbol{p}_3, \\ \boldsymbol{e}_2 &= y_1(t)\boldsymbol{p}_1 + y_2(t)\boldsymbol{p}_2 + y_3(t)\boldsymbol{p}_3, \\ \boldsymbol{e}_3 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad z(t)\boldsymbol{p}_3. \end{aligned} \tag{14}$$

причём
$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} z(t) \neq 0 .$$

Заметим, что соотношения $\pi_3^1 = \pi_3^2 = 0$ нами уже учтены. Дифференцируем (14), а результат записываем, применяя выражение векторов неподвижного базиса через векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Тогда оказывается, что

$$\pi_1^1 = \frac{dx_{[1}y_{2]}}{x_{[1}y_{2]}}, \quad \pi_1^2 = -\frac{dx_{[1}x_{2]}}{x_{[1}y_{2]}}, \quad \pi_2^1 = \frac{dy_{[1}y_{2]}}{x_{[1}y_{2]}}, \quad \pi_2^2 = -\frac{dy_{[1}x_{2]}}{x_{[1}y_{2]}}, \quad \pi_3^3 = \frac{dz}{z}.$$

Теперь уравнение $\pi_1^1 + \pi_1^1 = 0$ принимает вид

$$dx_{[1}y_{2]} - dy_{[1}x_{2]} \equiv d\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

и его очевидное решение

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = const \neq 0, \tag{15}$$

а уравнение $\pi_1^1 + \pi_1^1 - \pi_3^3 = 0$ приводится к виду

$$\frac{d(x_{[1}y_{2]})}{x_{[1}y_{2]}} = \frac{dz}{z},$$

общее решение которого

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = Cz, \;\; C = const \neq 0 . \tag{16}$$

Надлежащим выбором базиса $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3\}$ приводим решение (15) к виду

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 1 .$$

Аналогичным действием приводим решение (16) к виду

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = z .$$

Группа G_1 изоморфна группе матриц

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ 0 & 0 & a_3^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = 1 ,$$

А группа G_2 соответственно изоморфна группе матриц

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ 0 & 0 & a_3^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_3^3 .$$

Полином, от которого требовали полуинвариантности по отношению к некоторой подгруппе группы (1), оказался вполне ожидаемым. Однако подгрупп стационарности оказалось две, поскольку полуинвариантность имелась в виду изначально в разных смыслах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. 432 с.
2. *Акивис М.А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин: Изд-во Калининского ун-та, 1977. – 83 с.
3. *Фиников С.П.* Теория конгруэнций. М.: ГИТТЛ, 1950. 528 с.
4. *Бухтяк М.С.* Об одном шестимерном пространстве // Геом. сб. Вып. 22. Томск: Изд-во ТГУ, 1982. С. 51–61.
5. *Бухтяк М.С.* Связность Вейля и связность Леви – Чивита на четырехпараметрическом векторном поле. Томск, 1986. 34 с. Деп. в ВИНИТИ. 29.09.1986 г. № 6857 – В86.
6. *Бухтяк М.С.* Замечательные связности на четырехпараметрическом векторном поле // Геом. сб. Вып. 29. Томск: Изд-во ТГУ, 1988. С. 84–90.

Статья поступила 23.11.2012 г.

Badyaeva Z.P., *Bukhtyak M.S.* SEMI-STABLE SECOND-ORDER POLYNOMIALS ON THE VARIFOLD OF RAYS OF THE A_3 SPACE. Minimal riggings making it possible to impose relatively semi-stable quadratic forms with constant coefficients on the varifold of trivariate affine ray space. It has been proved that there are two such riggings, and each of them generates its own structure in cotangent bundle of the specified varifold. It is proved that in any of these cases relative semi-stable quadratic differential form on the ruled space is proportional to the form that imposes a semi-Riemannian metric on the varifold of added vectors. Stationery state groups are identified for the discovered additional structures, and one-dimensional sub-groups are specified for these groups. This work is apparently related to the works [4, 5, 6] of the second author.

Keywords: semi-stable quadratic form, moving frame, varifold of rays.

BADYAEVA Zinaida Petrovna (Kuzbass State Technical University)
E-mail: leemouse@mail.ru

BUKHTYAK Mikhail Stepanovych (Tomsk State University)
E-mail: bukhtyakm@mail.ru