

УДК 512.623.5

Г.Г. Пестов, Е.А. Фомина

**КОНСТРУКЦИЯ СЕМЕЙСТВА БЕСКОНЕЧНО УЗКИХ ПОЛЕЙ**

В статье изложена новая конструкция семейства бесконечно узких полей.

**Ключевые слова:** базис трансцендентности, двумерное упорядочивание, верхний конус, бесконечно узкое поле.

Исследования по теории линейно упорядоченных полей начались с пионерских работ Артина и Шрайера [1]. Бесконечно узкие поля относятся к тому классу полей, которые одновременно допускают и линейное, и двумерное упорядочивание. В работе [5] показано, что поле  $\mathbf{Q}(\pi)$  можно снабдить двумерным порядком, при котором оно является бесконечно узким полем. В настоящей статье описан новый способ построения семейств бесконечно узких полей. Эти семейства существенно шире семейств, описанных в [6].

**1. Основная конструкция**

Пусть  $P_0$  – линейно упорядоченное поле. Обозначим через  $\tilde{P}_0$  топологическое замыкание поля  $P_0$ . В топологическом замыкании линейно упорядоченного поля нет собственных фундаментальных сечений [4]. Как известно, линейный порядок с поля  $P_0$  единственным образом продолжается на поле  $\tilde{P}_0$  [4]. Пусть  $B$  есть базис трансцендентности [2] поля  $\tilde{P}_0$  над полем  $P_0$ , т.е. максимальная алгебраически независимая система элементов  $\tilde{P}_0$  над  $P_0$ . Поле  $K = P_0(B)$  как подполе  $\tilde{P}_0$  линейно упорядочено.

Зададим произвольное отображение  $d: B \rightarrow K$ . Таким образом, для каждого  $x \in B$  задано значение  $dx \in K$ . Далее, каждому  $x \in K$  сопоставим значение  $dx \in K$  следующим образом. Если  $x \in K$ , то  $x = f(a_1, \dots, a_n)$ . Убедимся, что представление  $x = f(a_1, \dots, a_n)$  единственно. В самом деле, пусть ещё  $x = g(b_1, \dots, b_m)$ , где  $b_1, \dots, b_m \in B$  и  $f \neq g$ . Тогда

$$f(a_1, \dots, a_n) = g(b_1, \dots, b_m).$$

Значит,

$$f(a_1, \dots, a_n) - g(b_1, \dots, b_m) = 0.$$

Следовательно, элементы

$$(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \text{ из } B$$

связаны нетривиальным алгебраическим соотношением, что противоречит определению базиса трансцендентности. Итак, доказано, что представление  $x = g(b_1, \dots, b_m)$  единственно.

Теперь полагаем

$$dx = df(a_1, \dots, a_n),$$

где

$$df(a_1, \dots, a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} da_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} da_n.$$

Поскольку представление  $x = g(b_1, \dots, b_m)$  единственно, то  $dx$  для каждого  $x$  также определено единственным образом. Заметим, что ранее [6] авторы в конструкции верхнего конуса бесконечно узкого поля полагали всюду  $dx_i = 1$ . Таким образом, описываемая здесь конструкция является существенным обобщением конструкции из [6].

## 2. Двумерный порядок в поле $K$

Зададим двумерный порядок в поле  $K$ . Известно, что двумерный порядок однозначно задаётся верхним конусом  $K^u$  [3]. Построим верхний конус следующим образом. Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  пробегает поле  $P_0(x_1, \dots, x_n)$ ; кортеж  $(a_1, \dots, a_n)$  пробегает множество кортежей элементов из  $B$ . Имеет место следующая

**Теорема.** Множество

$$K^u = \{f(a_1, \dots, a_n) \mid f(x_1, \dots, x_n) \in P_0(x_1, \dots, x_n), df(a_1, \dots, a_n) \geq 0\}$$

есть верхний конус некоторого двумерного порядка в поле  $K$ , при котором  $K$  является бесконечно узким полем.

**Доказательство.** Убедимся, что  $K^u$  есть верхний конус 2-порядка в поле  $K$ .

Проверим выполнение условий (a) – (d) критерия верхнего конуса [3]:

(a)  $K^u + K^u = K^u$ ;

(b)  $K^u \cup -K^u = K$ ;

(c)  $(K^u \setminus \{0\})^{-1} = -K^u \setminus \{0\}$ ;

(d) если  $x, z \in K^u, y \in K^u$ ;  $zy^{-1}, yx^{-1} \in K^u$ , то  $zx^{-1} \in K^u$ .

(a) Убедимся, что множество  $K^u$  замкнуто относительно сложения.

Пусть  $f(a_1, \dots, a_n), g(a_1, \dots, a_n) \in K^u$ . Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} da_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} da_n \geq 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial g}{\partial x_1} da_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n} da_n \geq 0,$$

где  $f(a_1, \dots, a_n), g(a_1, \dots, a_n) \in K$ .

Но тогда имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} da_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} da_n + \frac{\partial g}{\partial x_1} da_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n} da_n \geq 0$$

или

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_1} da_1 + \dots + \frac{\partial(f+g)}{\partial x_n} da_n \geq 0$$

Значит,  $(f+g) \in K^u$ .

(b) Условие:  $K^u \cup (-K^u) = K$  выполнено.

Действительно, пусть  $f(a_1, \dots, a_n) \in K$ . Возможны два случая.

Либо

$$df(a_1, \dots, a_n) \geq 0,$$

и тогда

$$f(a_1, \dots, a_n) \in K^u.$$

Либо

$$df(a_1, \dots, a_n) \leq 0,$$

и тогда

$$f(a_1, \dots, a_n) \in -K^u.$$

Доказательство пунктов (c) и (d) формально аналогично доказательству, приведённому в [6].

Таким образом, в поле  $K = P_0(B)$  эффективно задан нетривиальный двумерный порядок.

Покажем, что  $K$  – бесконечно узкое поле [5].

Пусть  $x = f(a_1, \dots, a_n) \in K^u$ . Так как  $x \in K^u$ , то, по определению верхнего конуса  $K^u$ , имеем  $dx > 0$ . Докажем, что

$$\forall n \forall r \in K_0 (r < x \Rightarrow (x - r)^n \in K^u).$$

Заметим, что для того чтобы элемент  $(x - r)^n$  принадлежал открытому верхнему конусу, необходимо и достаточно, чтобы

$$d((x - r)^n) > 0.$$

Пусть  $r \in K_0$ ,  $x \in K$ , и  $r < x$ . Так как  $(x - r) > 0$ , то  $(x - r)^{n-1} > 0$  в силу того, что  $K = P_0(B)$  является линейно упорядоченным полем. Имеем

$$\forall n \in \mathbb{N} d((x - r)^n) = n(x - r)^{n-1} dx > 0.$$

Значит,  $(x - r)^n \in K^u$ , следовательно,  $x = f(a_1, \dots, a_n)$  – бесконечно близкий к базе  $K$  элемент, и поле  $K$  является бесконечно узким.

Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Artin E. Algebraische Konstruktion Reeller Körper / E. Artin, O. Schreier // Abh. Math. Sem. Hamb. Univ. 5. 1925. S. 85–99.
2. Бурбаки Н. Алгебра. Многочлены и поля. М.: Наука, 1965. 300 с.
3. Пестов Г.Г. Двумерно упорядоченные поля. Томск: Томский госуниверситет, 2003. 127 с.
4. Пестов Г.Г. К теории сечений в упорядоченных полях // Сиб. матем. ж. 2001. Т. 42. № 6. С. 1350–1360.
5. Пестов Г.Г. Конструкция бесконечно узкого двумерно упорядоченного поля / Г.Г. Пестов, Е.А. Фомина // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2007. № 1. С. 50–53.
6. Фомина Е.А. Об одном классе двумерно упорядоченных полей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2008. №3(4). С. 32–34.

Статья поступила 22.11.2012 г.

*Pestov G.G., Fomina E.A.* A CONSTRUCTION OF A FAMILY OF INFINITELY NARROW FIELDS. A new construction of a family of infinitely narrow fields is presented.

Keywords: transcendence basis, 2-ordering, upper cone, infinitely narrow field.

*PESTOV German Gavrilovich* (Tomsk State University)

E-mail: gpestov@mail.ru

*FOMINA Elena Anatolyevna* (Tomsk State Pedagogic University)

E-mail: ef254@mail.ru