

УДК 517.977

Р.А.Теймуров

О ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПОДВИЖНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ДЛЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В работе исследуется задача оптимального управления процессами, описываемыми совокупностью уравнений параболического типа и обыкновенным дифференциальным уравнением, с управлениями подвижных источников. Для рассмотренной ниже задачи оптимального управления доказана теорема существования и единственности решения, получены необходимые условия оптимальности в виде точечного и интегрального принципов максимума, найдены достаточные условия дифференцируемости по Фреше критерия качества и получено выражение для его градиента.

Ключевые слова: *подвижные источники, редуцированная задача, необходимые условия оптимальности, принцип максимума, интегральное тождество.*

Несмотря на прикладную важность задач с управлениями подвижных источников, они в настоящее время наиболее мало изучены [1, 5]. Для некоторых классов линейных и нелинейных краевых задач, в которых участвуют импульсные функции, исследованы вопросы существования и единственности обобщенного решения. В частности в [5] эти вопросы исследованы при условии, что управление возможно только интенсивностью неподвижных источников.

В указанных практических примерах нельзя ограничиться только рассмотрением систем с распределенными параметрами. Приходится учитывать вспомогательные элементы, без которых невозможно управлять процессом. Эти элементы обычно имеют сосредоточенные параметры. Поведение таких систем описывается совокупностью дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных при начальных и граничных условиях. В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления подвижными источниками, заданная параболическим уравнением и обыкновенным дифференциальным уравнением при начальных и граничных условиях. Для этой задачи будет доказана теорема существования и единственности решения, затем получены необходимые условия оптимальности в виде точечного и интегрального принципов максимума.

1. Постановка задачи

Пусть $l > 0$, $T > 0$ – заданные числа, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, $\Omega_t = (0, l) \times (0, t)$, $\Omega = \Omega_T$. В дальнейшем понадобятся функциональные пространства $W_2^{1,0}(\Omega_T)$, $W_2^{1,1}(\Omega_T)$, $V_2(\Omega_T)$, $V_2^{1,0}(\Omega_T)$, $H_1(0, T)$, которые введены, например, в [4].

Пусть состояние управляемого процесса описывается функциями $u(x, t)$ и $s(t)$. Будем предполагать, что внутри области Ω_T функция $u(x, t)$ удовлетворяет следующему параболическому уравнению:

$$u_t = a^2 u_{xx} + \sum_{k=1}^n p_k(t) \delta(x - s_k(t)), \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq l; \quad (2)$$

$$u_x|_{x=0} = 0, u_x|_{x=l} = 0, 0 < t \leq T, \quad (3)$$

где $a > 0$ – заданное число, $\varphi(x) \in L_2(0, l)$ – заданная функция; $\delta(\cdot)$ – функция Дирака; $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)) \in L_2^n(0, T)$ – управляющая функция.

Также будем предполагать, что функции $s_k(t) \in H_1(0, T), k = \overline{1, n}$ являются решением следующей задачи Коши:

$$\dot{s}_k(t) = f_k(s_k(t), \vartheta(t), t), 0 < t \leq T, s_k(0) = s_{k0}, k = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где $s_{k0} \in \mathbb{R}^n$; $\vartheta = \vartheta(t) = (\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \dots, \vartheta_r(t)) \in L_2^r(0, T)$ – управляющая функция; функция $f(s, \vartheta, t) = (f_1(s, \vartheta, t), f_2(s, \vartheta, t), \dots, f_n(s, \vartheta, t))$ является непрерывной и имеет непрерывные ограниченные производные по s и ϑ при $(s, \vartheta, t) \in E^n \times E^r \times [0, T] : |f_s(s, \vartheta, t)| \leq M_\vartheta, |f_s(s, \vartheta, t)| \leq M_s, M_\vartheta > 0, M_s > 0$.

Пару функций $\bar{\vartheta} = (p(t), \vartheta(t))$ будем называть управлением. Для краткости обозначим $H = L_2^n(0, T) \times L_2^r(0, T)$ – гильбертово пространство пар $\bar{\vartheta} = (p(t), \vartheta(t))$ со скалярным произведением

$$(\bar{\vartheta}^1, \bar{\vartheta}^2)_H = \int_0^T [p^1(t)p^2(t) + \vartheta^1(t)\vartheta^2(t)] dt$$

и нормой
$$\|\bar{\vartheta}\|_H = \sqrt{(\bar{\vartheta}, \bar{\vartheta})_H} = \sqrt{(\|p\|_{L_2}^2 + \|\vartheta\|_{L_2}^2)}.$$

Положим

$$V = \{(p, \vartheta) \in H : 0 \leq p_i \leq A_i, 0 \leq \vartheta_j \leq B_j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, r}\}, \quad (5)$$

где $A_i > 0, i = \overline{1, n}, B_j > 0, j = \overline{1, r}$ – заданные числа и

$$J(\bar{\vartheta}) = \int_0^l [u(x, T) - y(x)]^2 dx + \alpha_1 \sum_{k=1}^n \int_0^T [p_k(t) - \tilde{p}_k(t)]^2 dt + \alpha_2 \sum_{m=1}^r \int_0^T [\vartheta_m(t) - \tilde{\vartheta}_m(t)]^2 dt, \quad (6)$$

где $\bar{\vartheta} = (p(t), \vartheta(t)) \in H$; $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 > 0$ – заданные параметры;

$$y(x) \in L_2(0, l), \omega = (\tilde{p}(t), \tilde{\vartheta}(t)) \in H, \tilde{p}(t) = (\tilde{p}_1(t), \tilde{p}_2(t), \dots, \tilde{p}_n(t)) \in L_2^n(0, T),$$

$$\tilde{\vartheta}(t) = (\tilde{\vartheta}_1(t), \tilde{\vartheta}_2(t), \dots, \tilde{\vartheta}_r(t)) \in L_2^r(0, T))$$

– заданные функции.

Требуется найти такое управление $\bar{\vartheta} = (p(t), \vartheta(t))$ из множества V и функции $u(x, t)$ и $s(t)$, чтобы функционал (6) принимал наименьшее возможное значение при ограничениях (1) – (4).

2. Существование и единственность решения

Определение. Задачу о нахождении функции $(u(x, t), s(t)) = (u(x, t; \bar{\vartheta}), s(t; \bar{\vartheta}))$ из условий (1) – (4) при заданном управлении $\bar{\vartheta} \in V$ назовем редуцированной задачей. Под решением редуцированной задачи (1) – (4), соответствующей управле-

нию $\bar{\vartheta} = (p(t), \vartheta(t)) \in V$, понимается функция $(u(x, t), s(t))$ из $(V_2^{1,0}(\Omega), H_1^n(0, T))$, где функция $u = u(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^l \int_0^T [-u \eta_t + a^2 u_x \eta_x] dx dt = \int_0^l \varphi(x) \eta(x, 0) dx + \sum_{k=1}^n \int_0^T p_k(t) \eta(s_k(t), t) dt, \quad (7)$$

для $\forall \eta = \eta(x, t) \in W_2^{1,1}(\Omega)$ и $\eta(x, T) = 0$, а функция $s_k(t) = s_k(t; \vartheta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$s_k(t) = \int_0^t f_k(s_k(\tau), \vartheta(\tau), \tau) d\tau + s_{k0}, \quad 0 \leq t \leq T, k = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Из результатов работ [2, 4] следует, что при каждом фиксированном $\bar{\vartheta} \in V$ рассуждаемая задача (1) – (4) имеет единственное решение из $(V_2^{1,0}(\Omega), H_1^n(0, T))$. Пусть выполнены условия, принятые при постановке задачи (1) – (6). Тогда задача (1) – (6) имеет хотя бы одно решение. Следует отметить, что задача (1) – (6) при $\alpha_j = 0, j = \overline{1, 2}$, некорректна в классическом смысле [8]. Однако имеет место

Теорема 1. Существует плотное подмножество K пространства H , такое, что для любого $\omega \in K$ при $\alpha_i > 0, i = \overline{1, 2}$, задача (1) – (6) имеет единственное решение.

Доказательство. Докажем непрерывность функционала

$$J_0(\bar{\vartheta}) = \|u(x, T) - y(x)\|_{L_2[0, l]}^2.$$

Пусть $\Delta \bar{\vartheta} = (\Delta p, \Delta \vartheta) \in V$ – приращение управления на элементе $\bar{\vartheta} = (p, \vartheta) \in V$, такое, что $\bar{\vartheta} + \Delta \bar{\vartheta} \in V$. Обозначим

$$\Delta u \equiv \Delta u(x, t) = u(x, t; \bar{\vartheta} + \Delta \bar{\vartheta}) - u(x, t; \bar{\vartheta}),$$

$$\Delta s_k \equiv \Delta s_k(t) = s_k(t; \bar{\vartheta} + \Delta \bar{\vartheta}) - s_k(t; \bar{\vartheta}).$$

Из (1) – (4) следует, что функция Δu является обобщенным решением краевой задачи:

$$\Delta u_t = a^2 \Delta u_{xx} + \sum_{k=1}^n [(p_k + \Delta p_k) \delta(x - (s_k + \Delta s_k)) - p_k \delta(x - s_k)], \quad (x, t) \in \Omega_T; \quad (9)$$

$$\Delta u_x|_{x=0} = \Delta u_x|_{x=l} = 0, \quad t \in [0, T]; \quad (10)$$

$$\Delta u|_{t=0} = 0, \quad x \in [0, l], \quad (11)$$

а функции $\Delta s_k, k = \overline{1, n}$, являются решением задачи Коши:

$$\Delta \dot{s}_k(t) = \Delta f_k(s_k(t), \vartheta(t), t), \quad \Delta s_k(0) = 0, k = \overline{1, n}, \quad (12)$$

где $\Delta f_k(s_k(t), \vartheta(t), t) = f_k(s_k + \Delta s, \vartheta + \Delta \vartheta, t) - f_k(s_k, \vartheta, t)$.

Докажем, что для функции $\Delta u(x, t)$ имеет место оценка

$$\|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)} \leq c_1 \|\Delta \bar{\vartheta}\|_{L_2(0, T)}, \quad (13)$$

где $c_1 > 0$ – некоторая постоянная.

Умножая обе части уравнения (9) на $\eta = \eta(x, t)$ и интегрируя по частям полученное равенство, имеем соотношение

$$\int_0^l \int_0^T [\Delta u_t \eta + a^2 \Delta u_x \eta_x] dx dt = \sum_{k=1}^n \int_0^T [p_k + \Delta p_k] \eta(s_k + \Delta s_k, t) - p_k \eta(s_k, t) dt. \quad (14)$$

Пусть $t_1, t_2 \in [0, T]$ такие, что $t_1 \leq t_2$. В тождестве (14) положим

$$\eta(x, t) = \begin{cases} \Delta u(x, t), & t \in (t_1, t_2], \\ 0, & t \in [0, t_1] \cup (t_2, T], \end{cases}$$

и применяя формулы конечных приращений для функции $\Delta u(s_k(t) + \Delta s_k, t)$ в виде

$$\Delta u(s_k + \Delta s_k, t) = \Delta u(s_k, t) + \Delta u_x(\bar{s}_k, t) \cdot \Delta s_k, \quad \bar{s}_k = s_k + \theta \Delta s_k, \quad \theta \in [0, 1],$$

получим уравнение энергетического баланса для задачи (9) – (12):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\Delta u(x, t)\|_{L_2(0, l)}^2 \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + a^2 \|\Delta u_x(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} = \\ & = \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} [(p_k + \Delta p_k) \Delta s_k \Delta u_x(\bar{s}_k, t) + \Delta p_k \Delta u(s_k, t)] dt, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\bar{s}_k = s_k + \theta \Delta s_k$, $\theta \in [0, 1]$.

Применяя неравенство Коши – Буняковского к правой части уравнения (15), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\Delta u(x, t)\|_{L_2(0, l)}^2 \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + a^2 \|\Delta u_x(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^n \left[\left(\|p_k\|_{L_2(t_1, t_2)} + \|\Delta p_k\|_{L_2(t_1, t_2)} \right) \max_{t_1 \leq t \leq t_2} |\Delta s_k(t)| \|\Delta u_x(\bar{s}_k, t)\|_{L_2(t_1, t_2)} + \right. \\ & \quad \left. + \|\Delta p_k\|_{L_2(t_1, t_2)} \|\Delta u(s_k, t)\|_{L_2(t_1, t_2)} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку $\Delta s(t)$ является решением задачи Коши (12), то из свойств функции $f(s, \vartheta, t)$ при достаточно малом $\varepsilon = t_2 - t_1$ имеем

$$\max_{t_1 \leq t \leq t_2} |\Delta s_k(t)| = O\left(\|\Delta \vartheta\|_{L_2(t_1, t_2)}\right), \quad \forall k, 1 \leq k \leq n.$$

Кроме того, несложно показать, что верны неравенства:

$$\|\Delta u(s_k, t)\|_{L_2(t_1, t_2)} \leq c_2 \|\Delta u\|_{l_2^{1,0}(\Omega)},$$

$$\|\Delta u_x(\bar{s}_k, t)\|_{L_2(t_1, t_2)} \leq c_3 \|\Delta u\|_{l_2^{1,0}(\Omega)},$$

где $c_2 > 0, c_3 > 0$ – некоторые постоянные.

Но тогда правую часть неравенства (16) можно ограничить сверху следующим образом:

$$\frac{1}{2} \|\Delta u(x, t)\|_{L_2(0, l)}^2 \Big|_{t_1}^{t_2} + a^2 \|\Delta u_x(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \Big|_{t_1}^{t_2} \leq c_4 \|\Delta \bar{\vartheta}\|_{L_2(t_1, t_2)} \|\Delta u\|_{l_2^{1,0}(\Omega)}, \quad (17)$$

при $\|\Delta \bar{\vartheta}\|_{L_2(t_1, t_2)} \rightarrow 0$, где $c_4 > 0$ – некоторая константа. Как и в работе [2, с. 166–168], для произвольного $t \in [0, T]$ разобьем отрезок $[0, t]$ на конечное чис-

ло подотрезков, на каждом из которых выполняется неравенство (17). Затем, сложив полученные неравенства для каждого подотрезка, получим

$$\frac{1}{2} \|\Delta u(x, t)\|_{L_2(0, l)}^2 + a^2 \|\Delta u_x(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \leq C_4 \|\Delta \bar{g}\|_{L_2(0, T)} \|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)},$$

откуда вытекает неравенство (13). Тогда $\|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)} \rightarrow 0$ при $\|\Delta \bar{g}\|_{L_2(0, T)} \rightarrow 0$. Отсюда и из теоремы о следах [8] получим, что $\|\Delta u(x, T)\|_{L_2(0, l)} \rightarrow 0$ при $\|\Delta \bar{g}\|_{L_2(0, T)} \rightarrow 0$.

Приращение функционала $I(\bar{g})$ представимо в виде

$$J_0(\bar{g} + \Delta \bar{g}) - J_0(\bar{g}) = 2 \int_0^T [u(x, T) - y(x)] \Delta u(x, T) dx + \|\Delta u(x, T)\|_{L_2(0, l)}^2.$$

Отсюда и из того, что $\|\Delta u(x, T)\|_{L_2(0, l)} \rightarrow 0$ при $\|\Delta \bar{g}\|_{L_2(0, T)} \rightarrow 0$, следует непрерывность функционала $J_0(\bar{g})$.

Функционал $J_0(\bar{g})$ снизу ограничен и в силу доказанного является непрерывным в V . Кроме того, H – равномерно выпуклое и рефлексивно банахово пространство [7]. Тогда из теоремы Бидо, приведенной в работе [9], следует существование плотного подмножества K пространства H , такого, что для любого $\omega = (\tilde{p}(t), \tilde{g}(t)) \in H$ при $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$, задача (1) – (6) имеет единственное решение. Теорема доказана.

3. Необходимое условие оптимальности

Пусть $\psi = \psi(x, t)$ – решение из $V_2^{1,0}(\Omega)$ сопряженной задачи

$$\psi_t + a^2 \psi_{xx} = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T; \quad (18)$$

$$\psi_x|_{x=0} = \psi_x|_{x=l} = 0, \quad 0 \leq t < T; \quad (19)$$

$$\psi(x, T) = 2[u(x, T) - y(x)], \quad 0 \leq x \leq l, \quad (20)$$

где $u(x, T)$ – значение при $t = T$ решения редуцированной задачи (1) – (6), и пусть $q_k(t)$ – решение из $H_1(0, T)$ сопряженной задачи

$$\dot{q}_k(t) = -\frac{\partial f_k}{\partial s_k} q_k(t) + p_k(t) \psi_x(s_k(t), t), \quad 0 \leq t < T, \quad q_k(T) = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (21)$$

Интегрируя по частям тождество

$$\int_{\Omega_T} (\psi_t + a^2 \psi_{xx}) \eta_1(x, t) d\Omega_T = 0,$$

получим, что функция $\psi = \psi(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^l \int_0^T [\psi \eta_{1t} + a^2 \psi_x \eta_{1x}] dx dt = 2 \int_0^l [u(x, T) - y(x)] \eta_1(x, T) dx \quad (22)$$

для $\forall \eta_1 = \eta_1(x, t) \in W_2^{1,1}(\Omega)$ и $\eta_1(x, 0) = 0$, а функция $q_k(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$q_k(t) = \int_t^T \left[\frac{\partial f_k}{\partial s_k} q_k(\tau) - p_k(\tau) \psi_x(s_k(\tau), \tau) \right] d\tau, \quad 0 \leq t \leq T, k = \overline{1, n}. \quad (23)$$

Сопряженная задача (9) – (12) является смешанной задачей для линейного параболического уравнения. Если в соотношениях (9) – (12) вместо переменной t взять новую независимую переменную $\tau = T - t$, то получим краевую задачу того же типа, что и (1) – (4). Поэтому из фактов, установленных для задачи (1) – (4), следует, что для каждого заданного $\bar{\mathfrak{g}} = (p(t), \mathfrak{g}(t)) \in V$ задача (9) – (12) имеет единственное решение из $(V_2^{1,0}(\Omega), H_1^n(0, T))$.

Функцию

$$H(t, s, \psi, q, \bar{\mathfrak{g}}) = - \left\{ \sum_{k=1}^n [-f_k(s_k(t), \mathfrak{g}(t), t) q_k(t) + \psi(s_k(t), t) p_k(t) + \right. \\ \left. + \alpha_1 (p_k(t) - \tilde{p}_k(t))^2] + \alpha_2 \sum_{m=1}^r (\mathfrak{g}_m(t) - \tilde{\mathfrak{g}}_m(t))^2 \right\} \quad (24)$$

назовем функцией Гамильтона – Понтрягина задачи (1) – (6).

Теорема 2. Пусть функции $f_k(s_k, \mathfrak{g}, t)$, $k = \overline{1, n}$, непрерывны по совокупности своих аргументов и имеют непрерывные ограниченные частные производные по переменным $s, \mathfrak{g}$ при $(s, \mathfrak{g}, t) \in R^n \times R^r \times [0, T]$ и, кроме того, выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} |f_k(s_k + \Delta s, \mathfrak{g} + \Delta \mathfrak{g}, t) - f_k(s_k, \mathfrak{g}, t)| &\leq L(|\Delta s| + |\Delta \mathfrak{g}|), \\ |f_{ks}(s_k + \Delta s, \mathfrak{g} + \Delta \mathfrak{g}, t) - f_{ks}(s_k, \mathfrak{g}, t)| &\leq L(|\Delta s| + |\Delta \mathfrak{g}|), \\ |f_{k\mathfrak{g}}(s_k + \Delta s, \mathfrak{g} + \Delta \mathfrak{g}, t) - f_{k\mathfrak{g}}(s_k, \mathfrak{g}, t)| &\leq L(|\Delta s| + |\Delta \mathfrak{g}|), \end{aligned}$$

при всех $(s + \Delta s, \mathfrak{g} + \Delta \mathfrak{g}, t)$, $(s, \mathfrak{g}, t) \in E^n \times E^r \times [0, T]$, где $L = \text{const} \geq 0$.

Тогда, если $(\psi(x, t), q(t))$ – решение сопряженной задачи (9) – (12), то функционал (6) дифференцируем по Фреше на множестве V и для его градиента справедливо соотношение

$$J'(\bar{\mathfrak{g}}) = \left(\frac{\partial J(\bar{\mathfrak{g}})}{\partial p}, \frac{\partial J(\bar{\mathfrak{g}})}{\partial \mathfrak{g}} \right) = \left(-\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{g}} \right), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n} \right), \quad \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{g}} = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{g}_1}, \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{g}_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{g}_r} \right), \\ \frac{\partial H}{\partial p_k} &= -\psi(s_k(t), t) - 2\alpha_1 (p_k(t) - \tilde{p}_k(t)), k = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{g}_m} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k(s_k(t), \mathfrak{g}(t), t)}{\partial \mathfrak{g}_m} q_k(t) - 2\alpha_2 (\mathfrak{g}_m(t) - \tilde{\mathfrak{g}}_m(t)), m = \overline{1, r}. \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим приращение функционала

$$\Delta J \equiv J(\bar{\mathfrak{g}} + \Delta \bar{\mathfrak{g}}) - J(\bar{\mathfrak{g}}) = 2 \int_0^T [u(x, T) - y(x)] \Delta u(x, T) dx + \int_0^T |\Delta u(x, T)|^2 dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^n \left\{ 2\alpha_1 \int_0^T [p_k(t) - \tilde{p}_k(t)] \Delta p_k(t) dt + \alpha_1 \int_0^T |\Delta p_k(t)|^2 dt \right\} + \\
& + \sum_{m=1}^r \left\{ 2\alpha_2 \int_0^T [\vartheta_m(t) - \tilde{\vartheta}_m(t)] \cdot \Delta \vartheta_m(t) dt + \alpha_2 \int_0^T |\Delta \vartheta_m(t)|^2 dt \right\}, \quad (26)
\end{aligned}$$

где $\bar{\vartheta} = (p, \vartheta) \in V$, $\bar{\vartheta} + \Delta \bar{\vartheta} \in V$, $\Delta u(x, T) \equiv u(x, T; \bar{\vartheta} + \Delta \bar{\vartheta}) - u(x, T; \bar{\vartheta})$, $u \equiv u(x, T; \bar{\vartheta})$.

Если в (22) положим $\eta_1 = \Delta u(x, t)$, в (14) положим $\eta = \psi(x, t)$ и вычтем полученные соотношения, то имеем

$$\int_0^{\ell} 2[u(x, T) - y(x)] \Delta u(x, T) dx = \sum_{k=1}^n \int_0^T [(p_k + \Delta p_k) \psi(s_k + \Delta s_k, t) - p_k \psi(s_k, t)] dt. \quad (27)$$

Из (12) следует, что функция $\Delta s_k(t)$ удовлетворяет интегральному тождеству:

$$\int_0^T [\Delta s_k(t) \dot{\theta}_k(t) + \Delta f_k(s_k(t), \vartheta(t), t) \theta_k(t)] dt = 0, \quad (28)$$

для $\forall \theta_k(t) \in L_2(0, T)$, $\theta_k(T) = 0$, $k = \overline{1, n}$.

Из (21) следует, что функция $q_k(t)$ удовлетворяет интегральному тождеству:

$$\int_0^T \left[q_k(t) \dot{\theta}_{1k}(t) - \left(\frac{\partial f_k}{\partial s_k} q_k(t) - p_k(t) \psi_x(s_k(t), t) \right) \theta_{1k}(t) \right] dt = 0, \quad (29)$$

для $\forall \theta_{1k}(t) \in L_2(0, T)$, $\theta_{1k}(0) = 0$, $k = \overline{1, n}$.

Если в (29) положим $\theta_{1k}(t) = \Delta s_k(t)$, в (28) $\theta_k(t) = q_k(t)$ и сложим полученные соотношения, то получим

$$[\Delta s_k(t) q_k(t)]_0^T = \int_0^T \left[\left(\frac{\partial f_k}{\partial s_k} q_k(t) - p_k(t) \psi_x(s_k(t), t) \right) \Delta s_k(t) - \Delta f_k q_k(t) \right] dt.$$

По условию теоремы функцию $\Delta f_k = \Delta f_k(s_k(t), \vartheta(t), t)$ можно представить в виде

$$\Delta f_k = \frac{\partial f_k}{\partial s_k} \Delta s_k + \sum_{m=1}^r \frac{\partial f_k}{\partial \vartheta_m} \Delta \vartheta_m + R_1,$$

где $R_1 = o\left(\sqrt{\|\Delta s\|_{L_2(0, T)}^2 + \|\Delta \vartheta\|_{L_2(0, T)}^2}\right)$. Тогда из последнего равенства имеем

$$\begin{aligned}
[\Delta s_k(t) q_k(t)]_0^T &= \int_0^T \left[\left(\frac{\partial f_k}{\partial s_k} q_k(t) - p_k(t) \psi_x(s_k(t), t) \right) \Delta s_k(t) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{m=1}^r \frac{\partial f_k}{\partial \vartheta_m} \Delta \vartheta_m(t) q_k(t) - \frac{\partial f_k}{\partial s_k} \Delta s_k(t) q_k(t) \right] dt + R_1,
\end{aligned}$$

что с учетом (12) и (21) равносильно

$$\int_0^T p_k(t) \psi_x(s_k(t), t) \Delta s_k(t) dt = - \sum_{m=1}^r \int_0^T \frac{\partial f_k}{\partial \vartheta_m} \Delta \vartheta_m(t) q_k(t) dt + R_1. \quad (30)$$

Ясно, что при сделанных выше предположениях по формуле Тейлора справедливо разложение

$$\psi(s_k + \Delta s_k, t) = \psi(s_k, t) + \psi_x(s_k, t) \Delta s_k + o(\|\Delta s_k\|).$$

Учитывая это, из (27) получим

$$\int_0^\ell 2[u(x, T) - y(x)] \Delta u(x, T) dx = \sum_{k=1}^n \int_0^T [(p_k(t) \psi_x(s_k(t), t) \Delta s_k(t) + \psi(s_k(t), t) \Delta p_k(t) + \psi_x(s_k(t), t) \Delta p_k(t) \Delta s_k(t) + o(\|\Delta s_k\|))] dt.$$

Тогда из последнего равенства и из соотношения (30) имеем

$$\int_0^\ell 2[u(x, T) - y(x)] \Delta u(x, T) dx = \sum_{k=1}^n \int_0^T \left[- \sum_{m=1}^r \frac{\partial f_k}{\partial \vartheta_m} q_k(t) \Delta \vartheta_m(t) + \psi(s_k, t) \Delta p_k \right] dt + R_2, \quad (31)$$

где $R_2 = \sum_{k=1}^n \int_0^T [\psi_x(s_k(t), t) \Delta p_k(t) \Delta s_k(t) + o(\|\Delta s_k\|)] dt + R_1.$

По обычной схеме (см., например, [2]) можно доказать справедливость оценки

$$\|\Delta s\|_{L_2(0, T)} \leq c_5 \|\Delta \vartheta\|_{L_2(0, T)}, \quad (32)$$

где $c_5 > 0$ – некоторая постоянная.

Отсюда имеем $R_2 = o(\|\Delta \vartheta\|_{L_2(0, T)})$. С другой стороны, из оценки (13) следует, что

$$\|\Delta u(x, T)\|_{L_2(0, I)} = O(\|\Delta \vartheta\|_{L_2(0, T)}).$$

Подставляя полученные соотношения в (26) имеем

$$\Delta J = \sum_{k=1}^n \left(J_1(k) + \sum_{m=1}^r J_2(k, m) \right) + o(\|\Delta \vartheta\|_{L_2(0, T)}),$$

где $J_1(k) = \int_0^T [\psi(s_k(t), t) + 2\alpha_1(p_k(t) - \tilde{p}_k(t))] \Delta p_k(t) dt,$

$$J_2(k, m) = \int_0^T \left[- \frac{\partial f_k(s_k(t), \vartheta(t), t)}{\partial \vartheta_m} q_k(t) + 2\alpha_2(\vartheta_m(t) - \tilde{\vartheta}_m(t)) \right] \Delta q_m(t) dt.$$

Отсюда с учетом выражения для функции Гамильтона – Понтрягина получим

$$\Delta J = \int_0^T \left(- \frac{\partial H}{\partial \vartheta}, \Delta \vartheta \right)_H dt + o(\|\Delta \vartheta\|_{L_2(0, T)}),$$

что показывает дифференцируемость по Фреше функционала (1) и справедливость формулы (25). Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть выполнены все условия теоремы 2 и $(u^*(x, t), s^*(t)), (\psi^*(x, t), q^*(t))$ – соответственно решения задачи (1) – (4) и (9) – (12) при $\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}^* \in V$.

Тогда для оптимальности управления $\bar{\vartheta}^*$ необходимо выполнение условия

$$H(t, s^*(t), \psi^*(x, t), q^*(t), \bar{\vartheta}^*(t)) = \max_{\vartheta \in V} H(t, s^*(t), \psi^*(x, t), q^*(t), \bar{\vartheta}), \forall (x, t) \in \Omega. \quad (33)$$

Доказательство. Предположим, что $\bar{\mathfrak{G}}^* = (p^*, \mathfrak{G}^*)$ – оптимальное управление.

Допустим противное, то есть найдется такое управление $\tilde{\mathfrak{G}} = \bar{\mathfrak{G}}^* + h\Delta\bar{\mathfrak{G}} \in V$ и число $\beta > 0$, для которых

$$H(t, s^*(t), \psi^*(x, t), q^*(t), \tilde{\mathfrak{G}}) - H(t, s^*(t), \psi^*(x, t), q^*(t), \bar{\mathfrak{G}}^*) \geq \beta > 0, \quad (34)$$

где $h > 0$ – некоторое число, $\tilde{\mathfrak{G}} \equiv (p^* + h\Delta p, \mathfrak{G}^* + h\Delta\mathfrak{G}), \Delta\bar{\mathfrak{G}} = (\Delta p, \Delta\mathfrak{G})$.

Если в (34) учесть формулу (24), то получим

$$h(J'(\tilde{\mathfrak{G}}), \Delta\bar{\mathfrak{G}})_H \leq -\beta < 0,$$

где $\tilde{\mathfrak{G}} = h\theta_1\Delta\bar{\mathfrak{G}} \equiv h\theta_1(\Delta p, \Delta\mathfrak{G}) \in V$, $\theta_1 \in (0, 1)$, – некоторое число. Отсюда и из формулы конечного приращения имеем

$$\begin{aligned} J(\tilde{\mathfrak{G}}) - J(\bar{\mathfrak{G}}^*) &= h(J'(\tilde{\mathfrak{G}}), \Delta\bar{\mathfrak{G}})_H = \\ &= h(J'(\tilde{\mathfrak{G}}), \Delta\bar{\mathfrak{G}})_H + h(J'(\tilde{\mathfrak{G}}) - J'(\bar{\mathfrak{G}}), \Delta\bar{\mathfrak{G}})_H \leq -\beta + h \cdot 0(\|\Delta\bar{\mathfrak{G}}\|_H), \end{aligned} \quad (35)$$

где $\tilde{\mathfrak{G}} = h\theta_2\Delta\bar{\mathfrak{G}} \equiv h\theta_2(\Delta p, \Delta\mathfrak{G}) \in V$, $\theta_2 \in (0, 1)$, – некоторое число.

Пусть $0 < h_1 < h$ такое число, что $-\beta + h_1 \cdot 0(\|\Delta\bar{\mathfrak{G}}\|_H) < 0$. Положим $\tilde{\mathfrak{G}} = \bar{\mathfrak{G}}^* + h_1\Delta\bar{\mathfrak{G}}$.

Рассуждая аналогично доказательству неравенства (35), получим

$$J(\tilde{\mathfrak{G}}) - J(\bar{\mathfrak{G}}^*) \leq -\beta + h_1 \cdot 0(\|\Delta\bar{\mathfrak{G}}\|_H) < 0$$

Это противоречит оптимальности управления $\bar{\mathfrak{G}}^*$. Отсюда получим справедливость соотношения (33). Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда для оптимальности управления $\bar{\mathfrak{G}}^* = (p^*(t), \mathfrak{G}^*(t))$ необходимо выполнение условия

$$\begin{aligned} &\int_0^T \sum_{k=1}^n \left[\left(\psi^*(s_k^*(t), t) + 2\alpha_1(p_k^*(t) - \tilde{p}_k(t)), p_k(t) - p_k^*(t) \right) + \right. \\ &\left. + \sum_{m=1}^r \left(-\frac{\partial f_k(s^*(t), \mathfrak{G}^*(t), t)}{\partial \mathfrak{G}_m} q_k^*(t) + 2\alpha_2(\mathfrak{G}_m^*(t) - \tilde{\mathfrak{G}}_m(t)), \mathfrak{G}_m(t) - \mathfrak{G}_m^*(t) \right) \right] dt \geq 0, \end{aligned} \quad (36)$$

для $\forall \bar{\mathfrak{G}} = (p(t), \mathfrak{G}(t)) \in V$. Здесь $\psi^*(s_k^*(t), t), q_k^*(t)$ – соответственно решения задач (18) – (20) и (21) при $\bar{\mathfrak{G}} = \bar{\mathfrak{G}}^*(p^*(t), \mathfrak{G}^*(t))$.

Доказательство. В силу известной теоремы [2, с. 28] для оптимальности управления $\bar{\mathfrak{G}}^* = (p^*, \mathfrak{G}^*) \in V$ необходимо выполнение неравенства

$$(J'(\bar{\mathfrak{G}}^*), \bar{\mathfrak{G}} - \bar{\mathfrak{G}}^*)_{L_2(0, T)} \geq 0, \forall \bar{\mathfrak{G}} \in V. \quad (37)$$

Используя формулу (25) и учитывая выражения функции Гамильтона – Пон-трягина, вычислим градиент функционала (6) и, подставив его в (37), получим справедливость неравенства (36). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1980. 384 с.
2. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
3. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1976. 736 с.
4. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
5. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 416 с.
6. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983. 392 с.
7. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 406 с.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 286 с.
9. Goebel M. On existence of optimal control // Math. Nachr. 1979. V. 93. P. 67–93.

Статья поступила 12.04.2012 г.

Teimurov R.A. THE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL FOR MOVING SOURCES FOR SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS. A problem on optimal control of processes described by a set of equations of the parabolic type and an ordinary differential equation, with moving sources is investigated in the paper. For the considered problem of optimum control, the theorem of existence and uniqueness of the solution is proved, necessary conditions of optimality in the form of pointwise and integrated maximum principles are obtained, and sufficient conditions of Frechet differentiability of the criterion of quality are found and an expression for its gradient is obtained.

Keywords: moving sources, reduced problem, necessary conditions of optimality, maximum principle, integral identity.

TEYMUROV Rafiq Agacan (Institute of Mathematics and Mechanics of National Academy of Sciences of Azerbaijan)

E-mail: rafiq@mail.ru