УДК 517.928

Д.А. Турсунов

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ТОЧКАМИ ПОВОРОТА[1]

Обобщенным методом погранфункций строится равномерное асимптотическое разложение решения краевой задачи для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя точками поворота.

Ключевые слова: *асимптотическое разложение, точка поворота, сингулярное возмущение, дифференциальное уравнение второго порядка, бисингулярное уравнение Эйри.*

При исследовании процессов, происходящих в гидродинамике, в теории колебаний, в квантовой механике, при изучении явлений дифракции получаются математические модели, которые описываются дифференциальными уравнениями второго порядка с точками поворота.

Задачи с двумя точками поворота представляют интерес по двум причинам. Одна из них – это связь с уравнением Вебера, решениями которого являются так называемые функции параболического цилиндра. Асимптотическое поведение функций параболического цилиндра представляет интерес во многих физических задачах. Вторая причина, по которой уравнение (1) заслуживает внимания, состоит в том, что это простейшее уравнение, имеющее две точки поворота. Следовательно, если бы асимптотические свойства (1) были основательно изучены, можно было бы свести асимптотическое исследование других уравнений с двумя точками поворота к этому уравнению [3].

Дифференциальные уравнения с точками поворота изучались различными методами. Метод ВБК (Вентцеля – Бриллюэна – Крамера) изучения асимптотического поведения решений задач с точками поворота состоит в том, что производится замена уравнения в окрестности точки поворота уравнением, решение которого находится с помощью специальных функций. Затем это решение «склеивается» с решением в остальной части промежутка. Асимптотические методы являются мощным средством исследования краевых задач для дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Особенно важным этот подход становится при изучении задач сингулярной теории возмущений. В данной статье мы используем обобщенный метод погранфункций [1, 2].

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\varepsilon y''(x) - x(1-x)q(x)y(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$y(0) = \alpha, y(1) = \beta, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon << 1$ – малый параметр, α, β – const, $q(x) > 0, x \in [0,1]$.

[1] Работа выполнена при подержке РФФИ (проект №12-07-90910 мол_снг_нр).

В работах [4, 5] методом согласования рассмотрена задача

$$\varepsilon y''(x) - xq(x)y(x) = f(x),$$

$$y(0) = 0, \;\; y(1) = 0,$$

где $q(x) > 0, x \in [0,1]$, т.е. с одной точкой поворота. Решения состоит из четырех функций т.е.

$$y = V^{\text{внеш}} + L^{\text{внут}} - \left(V^{\text{внеш}}\right)^{\text{внут}} + \Pi,$$

где $V^{\text{внеш}}$ – внешнее решение [4,5], т.е. регулярная часть решения (1), $L^{\text{внут}}$ – внутреннее решение около точки $x = 0$, Π – обыкновенная погранфункция около точки $x = 1$.

Если асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) построить методом согласования [4, 5], то разложение решения состоит из пяти функций:

$$y = V^{\text{внеш}} + R^{\text{внут}} + L^{\text{внут}} - \left(R^{\text{внут}}\right)^{\text{внеш}} - \left(L^{\text{внут}}\right)^{\text{внеш}},$$

где $V^{\text{внеш}}$ – внешнее решение, т.е. регулярная часть решения (1), $R^{\text{внут}}$ – внутреннее решение около точки x=1 (правый конец отрезка), $L^{\text{внут}}$ – внутреннее решение около точки x=0 (левый конец отрезка).

Для оптимальности мы используем обобщенный метод погранфункций [1, 2], в итоге мы получим разложение решения, состоящее из трех функций.

Условие U_1: $q(x)$, $f(x) \in C^{(\infty)}[0,1]$. Для простоты предположим $q(x)\equiv 1$.

Если внешнее разложение решения задачи (1), (2) искать в виде

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x), \quad \varepsilon \to 0, \tag{3}$$

где U – это пока формальный ряд, то получим рекуррентную систему уравнений:

$$-x(1-x)\, u_0(x)=f(x), \;\; x(1-x)u_k(x) = u''_{k-1}(x), \quad k \ge 1.$$

Отсюда однозначно определяются все $u_k(x)$:

$$u_0(x) = -\frac{f(x)}{x(1-x)}, \quad u_k(x) = \frac{u''_{k-1}(x)}{x(1-x)}, \quad k \ge 1.$$

Однако на обоих концах рассматриваемого отрезка т.е. при x=0, x=1 все эти функции, вообще говоря, имеют особенности:

$$u_k(x) = x^{-3k-1}(1-x)^{-3k-1} C_k(x), \;\; C_k(x) \in C^{\infty}_{[0,1]}. \tag{4}$$

Таким образом, задача (1), (2) является бисингулярной – коэффициенты ее внешнего разложения имеют нарастающие особенности при $x = 0$, $x = 1$, иногда эти точки называют **точками поворота** [5]. В окрестности этих точек ряд (3) не только не приближает решение $y(x,\varepsilon)$, но даже теряет асимптотический характер.

Таким образом, внешнее решение задачи (1), (2) представляется в виде

$$U = \frac{1}{x(1-x)}\left(C_0(x) + \frac{\varepsilon}{\left(x(1-x)\right)^3} C_1(x) + \ldots + \frac{\varepsilon^n}{\left(x(1-x)\right)^{3n}} C_n(x) + \ldots\right), \tag{5}$$

где $C_k(x) \in C^{\infty}_{[0,1]}$.

Из (5) вытекает, что оно является асимптотическим на отрезке

$$J(\varepsilon)=\left[\varepsilon^{\gamma},1-\varepsilon^{\gamma}\right],\ \ 0<\gamma<1/3 .$$

Равномерно пригодное решение задачи (1), (2) на всем отрезке, включая границы, строим методом [1, 2].

Решение ищем в виде

$$y(x,\varepsilon)=V_n(x,\varepsilon)+P(\tau,\mu)+Q(\xi,\mu)+R_{n+1}(x,\varepsilon), \tag{6}$$

где $\quad V_n(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(x),\ P(\tau,\mu)=\sum_{k=-1}^{3n+1}\mu^k P_k(\tau),\ Q(\xi,\mu)=\sum_{k=-1}^{3n+1}\mu^k Q_k(\xi),$

$\tau=x/\mu,\ \xi=(1-x)/\mu$, $\varepsilon=\mu^3$, $R_{n+1}(x,\varepsilon)$ – остаточный член.

Здесь пограничные функции строятся в виде обобщенных асимптотических рядов в смысле Эрдейи.

Подставляя (6) в (1) получим

$$\begin{gathered}\varepsilon\left(V_{\mathrm{n}}''(x,\varepsilon)+\frac{1}{\mu^2}P''(\tau,\mu)+\frac{1}{\mu^2}Q''(\xi,\mu)+R_{n+1}''(x,\varepsilon)\right)-\\-x(1-x)\left(V_n(x,\varepsilon)+P(\tau,\mu)+Q(\xi,\mu)+R_{n+1}(x,\varepsilon)\right)=f(x)-H(x,\varepsilon)+H(x,\varepsilon),\end{gathered}\tag{7}$$

или

$$\begin{gathered}\varepsilon\left(\sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n}}\varepsilon^k v_k''(x)+\frac{1}{\mu^2}\sum_{k=-1}^{3n+1}\mu^k P_k''(\tau)+\frac{1}{\mu^2}\sum_{k=-1}^{3n+1}\mu^k Q_k''(\xi)+R_{n+1}''(x,\varepsilon)\right)-\\-x(1-x)\sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n}}\varepsilon^k v_k''(x)-\mu\tau(1-\mu\tau)\sum_{k=-1}^{3n+1}\mu^k P_k(\tau)-\mu\xi(1-\mu\xi)\sum_{k=-1}^{3n+1}\mu^k Q_k(\xi)-x(1-x)R_{n+1}(x,\varepsilon)=\\=f(x)-H(x,\varepsilon)+H_0(x,\varepsilon)+H_1(x,\varepsilon),\,H(x,\varepsilon)=H_0(x,\varepsilon)+H_1(x,\varepsilon),\end{gathered}$$

где $H(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k h_k(x)$ – пока неизвестная функция.

Отсюда

$$\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^{k+1}\left(v_k''(x)-x(1-x)v_{k+1}(x)+h_{k+1}(x)\right)-x(1-x)v_0=f(x)-h_0(x)\,; \tag{7.1}$$

$$\sum_{k=-1}^{3n+1}\mu^{k+1}\left(P_k''(\tau)-\tau(1-\mu\tau)P_k(\tau)\right)=H_0(\tau,\mu)\,; \tag{7.2}$$

$$\sum_{k=-1}^{3n+1}\mu^{k+1}\left(Q_k''(\xi)-\xi(1-\mu\xi)Q_k(\xi)\right)=H_1(\xi,\mu)\,; \tag{7.3}$$

$$\varepsilon^{n+1}v_n''+\varepsilon R_{n+1}''(x,\varepsilon)-x(1-x)R(x,\varepsilon)=0\,. \tag{7.4}$$

Неизвестную функцию $H(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k h_k(x)$ определим так, чтобы $v_k(x)\in C_{[0,1]}^{\infty}$, $k=\overline{0,n}$. Из (7.1) имеем

$$v_0(x)=-\frac{f(x)-h_0(x)}{x(1-x)},\ \ v_k(x)=\frac{v_{k-1}''(x)+h_k(x)}{x(1-x)}.$$

Следовательно, условие $v_k(x)\in C^{\infty}_{[0,1]}$, $k=\overline{0,n}$, выполняется при $h_0(x)=f(0)(1-x)+f(1)x,\ h_k(x)=-v''_{k-1}(0)(1-x)-v''_{k-1}(1)x,\ k=\overline{1,n}$.

Значит,

$$H_0(x,\varepsilon)=f(0)(1-x)-(1-x)\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^k v''_{k-1}(0),$$

$$H_1(x,\varepsilon)=f(1)x-x\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^k v''_{k-1}(1)$$

или
$$H_0(\tau,\mu)=f(0)-\mu\tau f(0)-\sum_{k=1}^{n}\mu^{3k}v''_{k-1}(0)+\tau\sum_{k=1}^{n}\mu^{3k+1}v''_{k-1}(0),$$

$$H_1(\xi,\mu)=f(1)-\mu\xi f(1)-\sum_{k=1}^{n}\mu^{3k}v''_{k-1}(1)+\xi\sum_{k=1}^{n}\mu^{3k+1}v''_{k-1}(1).$$

Регулярная часть асимптотики решения уже построена:

$$V_n(x,\varepsilon)=v_0(x)+\varepsilon v_1(x)+\varepsilon^2 v_2(x)+\ldots+\varepsilon^n v_n(x),\ v_k(x)\in C^{\infty}_{[0,1]}, k=\overline{0,n}.$$

Теперь приступим к построению пограничных функций $P(\tau,\mu)$ и $Q(\xi,\mu)$.

Из (7.2) для $P_k(\tau)$ получим

$$P''_{-1}-\tau P_{-1}=h_{00},\ P_{-1}(0)=\mu(\alpha-v_0(0)); \tag{8.1}$$

$$P''_0-\tau P_0=-\tau P''_{-1},\ P_0(0)=0; \tag{8.2}$$

$$P''_{3k-1}-\tau P_{3k-1}=h_{0k},\ P_{3k-1}(0)=0,\ k=\overline{1,n}; \tag{8.3}$$

$$P''_{3k}-\tau P_{3k}=-\tau P''_{3k-1},\ P_{3k}(0)=-v_k(0),\ k=\overline{1,n}; \tag{8.4}$$

$$P''_{3k+1}-\tau P_{3k+1}=-\tau^2 P_{3k},\ P_{3k+1}(0)=0,\ k=\overline{0,n}; \tag{8.5}$$

$$P_m(\tau)\to 0, \tau\to+\infty,\ m=\overline{-1,3n+1}, \tag{8.6}$$

где $h_{00}=f(0),\ h_{0k}=v''_{k-1}(0),\ k=\overline{1,n}$.

Как нам известно, уравнение Эйри $z''-\tau z=0$ имеет два независимых решений $Ai(\tau)$ и $Bi(\tau)$, которые называются функциями Эйри:

$$Ai(x)=\frac{v(x)}{\sqrt{\pi}},\ Bi(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(w_1(x)+w_2(x)\right),$$

где $v(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\left(xt+t^3/3\right)}dt,\ \ w_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{\infty e^{-2\pi i/3}}^{0}+\int_{0}^{\infty}\right)e^{xt-t^3/3}dt,\ w_1(x)=\overline{w_2(x)}.$

$Ai(\tau)$ – экспоненциально быстро стремится к нулю при $\tau\to+\infty$, и с его помощью можно удовлетворить краевым условиям (8.6), $Bi(\tau)$ –экспоненциально растет при $\tau\to+\infty$.

Для $P_k(\tau)$ получим

$$P_{-1}(\tau)=-\pi h_{00}\left[Ai(\tau)\int_0^{\tau}Bi(s)\,ds+Bi(\tau)\int_{\tau}^{\infty}Ai(s)\,ds\right]+c_1 Ai(\tau),\ c_1=\frac{\mu(\alpha-v(0))}{Ai(0)},$$

$$P_0(\tau)=\pi\left[Ai(\tau)\int_0^\tau sP''_{-1}(s)Bi(s)ds+Bi(\tau)\int_\tau^\infty sP''_{-1}(s)Ai(s)ds\right],$$

$$P_{3k-1}(\tau)=-\pi h_{0k}\left[Ai(\tau)\int_0^\tau Bi(s)ds+Bi(\tau)\int_\tau^\infty Ai(s)ds\right],\ k=\overline{1,n},$$

$$P_{3k}(\tau)=\pi\left[Ai(\tau)\int_0^\tau sP''_{3k-1}(s)Bi(s)ds+Bi(\tau)\int_\tau^\infty sP''_{3k-1}(s)Ai(s)ds\right]+c_{3k}Ai(\tau),$$

$$c_{3k}=\frac{-v_k(0)}{Ai(0)},\ k=\overline{1,n},$$

$$P_{3k+1}(\tau)=\pi\left[Ai(\tau)\int_0^\tau s^2P_{3k}(s)Bi(s)ds+Bi(\tau)\int_\tau^\infty s^2P_{3k}(s)Ai(s)ds\right],\ k=\overline{0,n}.$$

При $\tau\to+\infty$ имеем

$$P_{-1}(\tau)=-\frac{h_{00}}{\tau}\left(1+\frac{2}{\tau^3}+\frac{2\cdot4\cdot5}{\tau^6}+\ldots+\frac{1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot(3k-2)(3k-1)}{\tau^{3k}}+\ldots\right)=O\left(\frac{1}{\tau}\right),$$

$$P_0(\tau)=-\frac{h_{00}}{\tau^3}\left(2+\frac{48}{\tau^3}+\frac{3696}{\tau^6}+\ldots\right)=O\left(\frac{1}{\tau^3}\right),\ \mathrm{P}_1(\tau)=O\left(\frac{1}{\tau^2}\right).$$

$$P_{3k-1}(\tau)=-\frac{h_{0k}}{\tau}\left(1+\frac{2}{\tau^3}+\frac{2\cdot4\cdot5}{\tau^6}+\ldots+\frac{1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot(3k-2)(3k-1)}{\tau^{3k}}+\ldots\right)=O\left(\frac{1}{\tau}\right),$$

$$P_{3k}(\tau)=-\frac{h_{0k}}{\tau^3}\left(2+\frac{48}{\tau^3}+\frac{3696}{\tau^6}+\ldots\right)=O\left(\frac{1}{\tau^3}\right),\ P_{3k+1}(\tau)=O\left(\frac{1}{\tau^2}\right),\ k=\overline{1,n}.$$

То есть все $P_k(\tau)\to0$ при $\tau\to+\infty$, $k=\overline{-1,3n+1}$.

Аналогично из (7.3) для $Q(\xi)$ получим

$$Q''_{-1}-\xi Q_{-1}=h_{10},\ \mathrm{Q}_{-1}(0)=\mu(\beta-v_0(1));\tag{9.1}$$

$$Q''_0-\xi Q_0=-\xi Q''_{-1},\ Q_0(0)=0;\tag{9.2}$$

$$Q''_{3k-1}-\xi Q_{3k-1}=h_{1k},\ Q_{3k\text{-}1}(0)=0,\ k=\overline{1,n};\tag{9.3}$$

$$Q''_{3k}-\xi Q_{3k}=-\xi Q''_{3k-1},\ Q_{3k}(0)=-v_k(1),\ k=\overline{1,n};\tag{9.4}$$

$$Q''_{3k+1}-\xi Q_{3k+1}=-\xi^2Q_{3k},\ Q_{3k+1}(0)=0,\ k=\overline{0,n};\tag{9.5}$$

$$Q_m(\xi)\to0,\xi\to+\infty,\ m=\overline{-1,3n+1},\tag{9.6}$$

где $h_{10}=f(1)$, $h_{1k}=v''_{k-1}(1)$, $k=\overline{1,n}$.

Для остаточной функций $R_{n+1}(\varepsilon,x)$ имеем следующую задачу:

$$\varepsilon R''_{n+1}(x,\varepsilon)-x(1-x)R_{n+1}(x,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{n+1}\right),\quad R_{n+1}(0,\varepsilon)=R_{n+1}(1,\varepsilon)=0.\tag{10}$$

Для решения задачи (10) справедлива оценка

$$\left|R_{n+1}(x,\varepsilon)\right|\le c\varepsilon^{n+1},\ x\in[0,1].$$

Теорема. Пусть $f(0) \neq 0, f(1) \neq 0$ и выполняется условие U_1. Тогда (6) является равномерно асимптотическим разложением функции $y(x,\varepsilon)$ – решение задачи (1), (2) на отрезке [0, 1] – и справедлива оценка:

$$\left|y(x,\varepsilon)-V_n(x,\varepsilon)-P(\tau,\mu)-Q(\xi,\mu)\right| \leq c\varepsilon^{n+1},\ c>0 - \text{const}.$$

Отметим, что для простоты рассмотрен случай $q(x) \equiv 1$, аналогично исследуется случай $q(x) > 0,\ x \in [0,1]$.

Пример. Пусть $f(x) = \cos(x)$, $\alpha = \beta = 0$. Тогда справедлива оценка

$$\left|y(x,\varepsilon)-v_0(x)-\frac{P_{-1}}{\mu}-P_0-\mu P_1-\frac{Q_{-1}}{\mu}-Q_0-\mu Q_1\right| \leq c\varepsilon,$$

где c – const, $v_0(x) = -\dfrac{\cos(x)-\cos(0)(1-x)-\cos(1)x}{x(1-x)}$,

$$P_{-1}(\tau) = -\pi\cos(0)\left[Ai(\tau)\int_0^\tau Bi(s)ds + Bi(\tau)\int_\tau^\infty Ai(s)ds\right] + c_1 Ai(\tau),$$

$$c_1 = \frac{\mu(\cos(1)-\cos(0))}{Ai(0)},$$

$$P_0(\tau) = \pi\left[Ai(\tau)\int_0^\tau sP''_{-1}(s)Bi(s)ds + Bi(\tau)\int_\tau^\infty sP''_{-1}(s)Ai(s)ds\right],$$

$$P_1(\tau) = \pi\left[Ai(\tau)\int_0^\tau s^2P_0(s)Bi(s)ds + Bi(\tau)\int_\tau^\infty s^2P_0(s)Ai(s)ds\right],$$

$$Q_{-1}(\xi) = -\pi\cos(1)\left[Ai(\xi)\int_0^\xi Bi(s)ds + Bi(\xi)\int_\xi^\infty Ai(s)ds\right] + cAi(\xi),$$

$$c = \frac{\mu(\cos(1)-\cos(0)+\sin(1))}{Ai(0)},$$

$$Q_0(\xi) = \pi\left[Ai(\xi)\int_0^\xi sQ''_{-1}(s)Bi(s)ds + Bi(\xi)\int_\xi^\infty sQ''_{-1}(s)Ai(s)ds\right],$$

$$Q_1(\xi) = \pi\left[Ai(\xi)\int_0^\xi s^2Q_0(s)Bi(s)ds + Bi(\xi)\int_\xi^\infty s^2Q_0(s)Ai(s)ds\right].$$

Заметим, что если асимптотическое разложение решения задачи

$$\varepsilon y''(x) - xq(x)y(x) = f(x),$$

$$y(0) = 0,\ y(1) = 0,$$

рассмотренное в работах [3, 4], построить обобщенным методом погранфункций, то разложение решения состоит из трех функций:

$$y = V^{\text{внеш}} + P + \Pi,$$

где P – обобщенная погранфункция, вблизи точки $x = 0$, Π – обыкновенная погранфункция вблизи точки $x = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алымкулов К.* Аналог метода погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла в случае, когда невозмущенное уравнение имеет полюс целого порядка в регулярной особой точке // Сб. тезисов конференции «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление», посвящ. 90-летию со дня рождения академика Е.Ф. Мищенко. М., 2012. С. 12–14.
2. *Alymkulov K.* Extension of boundary layer function method for singularly perturbed differential equation of Prandtle – Tichonov and Lighthill types // Reports of the third congress of the world mathematical society of Turkic countries, Almaty, June July, 2009. P. 256–259.
3. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
4. *Ильин А.М.*, *Данилин А.Р.* Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.
5. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений краевых задач. М.: Наука, 1989. 334 с.

Статья поступила 01.11.2012 г.

Tursunov D. A. ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBED ORDINARY SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH TWO TURNING POINTS. Using the generalized method of boundary functions, a uniform asymptotic expansion of the solution of the boundary value problem for singularly perturbed ordinary second order differential equations with two turning points is constructed.

Keywords: asymptotic expansion, turning point, singular perturbation, second order differential equation, bisingular, Airy equation.

TURSUNOV Dilmurat Abdilllajanovich (Osh State University)
E-mail: dosh2012@mail.ru