ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2013 Математика и механика № 1(21)

УДК 534.014

И.П. Попов

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩИЕ ТОЛЬКО ИЗ ИНЕРТНЫХ ИЛИ ТОЛЬКО УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ, И ВОЗНИКНОВЕНИЕ В НИХ СВОБОДНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Рассматриваются механические колебательные системы, состоящие только из инертных (*mm*-, *mmm*-, m^n-системы) или только упругих элементов (*kk*-, *kkk*-, k^n-системы). Показана возможность возникновения в них свободных гармонических колебаний. В *mm*-, *mmm*-, m^n-системах происходит взаимный обмен кинетической энергией между инертными элементами, в *kk*-, *kkk*-, k^n-системах – взаимный обмен потенциальной энергией между упругими элементами.

Ключевые слова: *колебательные*, *инертные*, *упругие*, *гармонические*, *частота.*

Свободные гармонические колебания основаны на обмене энергией между элементами колебательной системы.

В механическом линейном гармоническом осцилляторе происходит обмен энергией между разнородными элементами – грузом массой m (инертным элементом) и пружиной с коэффициентом упругости k (упругим элементом). При этом кинетическая энергия груза преобразуется в потенциальную энергию пружины и наоборот.

Существуют электромеханические колебательные системы [1], в которых свободные гармонические колебания осуществляются за счет взаимного преобразования потенциальной энергии пружины в энергию электрического поля конденсатора или кинетической энергии груза в энергию магнитного поля катушки индуктивности.

Таким образом, свободные гармонические колебания сопровождаются самыми разнообразными вариантами преобразования энергии. В этой связи представляет интерес возможность возникновения свободных гармонических колебаний, осуществляемых за счет преобразования кинетической энергии в кинетическую или потенциальной энергии в потенциальную. Реализующие такие колебания системы должны состоять либо только из инертных (*mm*-, *mmm*-, m^n-системы), либо только из упругих элементов (*kk*-, *kkk*-, k^n-системы). Механизм обмена энергией между однородными элементами в таких системах позволит, в частности, расширить возможности нейтрализации реакции этих элементов на внешние периодические воздействия.

Как таковая теория колебаний была в основном разработана в 30-х годах 20-го века [2]. Современные источники в части свободных гармонических колебаний преимущественно сохраняют преемственность [3, 4]. В указанных и подобных им источниках колебательные системы с однородными элементами не рассматриваются. В последнее время появляются работы в направлении темы настоящего исследования [5], которое является их развитием.

Синтез *mm*-системы

Синтез системы осуществляется на основе двух исходных условий.

Первое исходное условие. Система содержит два инертных элемента – два груза массой m каждый. Элементы совершают гармонические колебания

$$x_1 = A\sin(\zeta + \zeta_1), \quad x_2 = A\sin(\zeta + \zeta_2),$$

где x_1, x_2 – текущие координаты грузов, A – амплитуда колебаний, ζ – фаза, ζ_1, ζ_2 – начальные фазы.

Второе исходное условие. Энергия системы при колебаниях не меняется

$$W_1 + W_2 = \text{const}.$$

Одновременный учет обоих исходных условий дает представление о характере связи между инертными элементами. Действительно,

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 = \text{const},$$

$$\cos^2(\zeta + \zeta_1) + \cos^2(\zeta + \zeta_2) = \text{const}_2.$$

Последнее справедливо при условиях

$$\zeta_1 - \zeta_2 = \pm\pi/2.$$

Полученное соотношение позволяет определить связующее звено между инертными элементами. Таким звеном является устройство, изображенное на рис. 1.

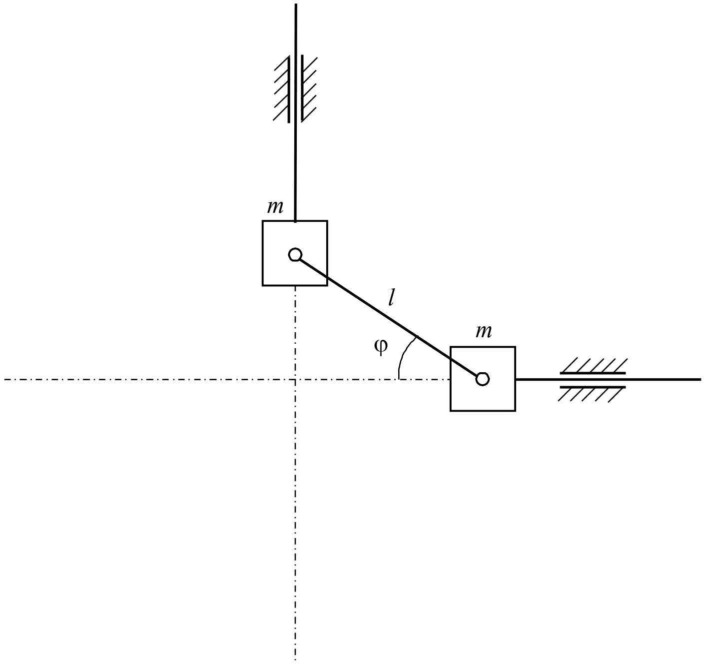

Рис. 1. *mm*-система

Анализ *mm*-системы

Внешние усилия к грузам не приложены. Масса промежуточного стержня и трение не учитываются. Координаты грузов соответственно

$$x_1 = l\cos\varphi,\quad x_2 = l\cos(\pi/2 - \varphi). \tag{1}$$

В качестве обобщенной координаты удобно использовать φ. Система имеет одну степень свободы и уравнение Лагранжа второго рода для нее записывается в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q\,.$$

Обобщенная сила $Q = 0$, поскольку активные силы отсутствуют. Кинетическая энергия

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 = \frac{ml^2}{2}\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2 + \frac{ml^2}{2}\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2 = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2\,.$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0\,,\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}\,,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2\ddot{\varphi} = 0\,.$$

Решение последнего уравнения

$$d\varphi/dt = C_1,\quad \varphi = C_1 t + C_2. \tag{2}$$

Пусть начальные условия

$$\varphi(0) = \varphi_0,\quad \frac{d\varphi}{dt}(0) = \omega_0\,. \tag{3}$$

Тогда
$$C_2 = \varphi_0,\quad C_1 = \omega_0. \tag{4}$$

При этом (1) принимает вид

$$x_1 = l\cos(\omega_0 t + \varphi_0),\quad x_2 = l\cos(\pi/2 - \omega_0 t - \varphi_0). \tag{5}$$

Пусть

1) $x_1(0) = x_{10}$, $\cos\varphi_0 = x_{10}/l$, $\varphi_0 = \arccos(x_{10}/l) = \arcsin(x_{20}/l)$;

2) $\dfrac{dx_2}{dt}(0) = v_{20}$, $l\omega_0\cos(\omega_0 0 + \varphi_0) = v_{20}$, $\omega_0 = v_{20}/x_{10} = -v_{10}/x_{20}$,

$$\begin{gathered} x_1 = l\cos[(v_{20}/x_{10})t + \arccos(x_{10}/l)],\\ x_2 = l\cos[\pi/2 - (-v_{10}/x_{20})t - \arcsin(x_{20}/l)],\\ v_1 = l(v_{10}/x_{20})\sin[(-v_{10}/x_{20})t + \arcsin(x_{10}/l)],\\ v_2 = l(v_{20}/x_{10})\cos[(v_{20}/x_{10})t + \arccos(x_{20}/l)]. \end{gathered} \tag{6}$$

Таким образом, грузы массой m совершают свободные гармонические колебания (внешние усилия к грузам не приложены).

В рассмотренной колебательной системе происходит взаимный обмен кинетической энергией между инертными элементами. При $\varphi = 0$ кинетическая энергия первого груза равна нулю, а второго – максимальна. После этого первый груз начинает ускоряться за счет энергии второго груза, который приобретает отрицательное ускорение.

Синтез *mmm*-системы

Пусть три координатные оси Ox_1, Ox_2, Ox_3 лежат в одной плоскости Z, последовательно повернуты относительно друг друга на $\pi/3$ и пересекаются в одной точке. Точка пересечения O является началом произвольно направленного вектора $\boldsymbol{R}$, принадлежащего Z.

Теорема 1. Координаты x_1, x_2, x_3 проекций конца вектора $\boldsymbol{R}$ на оси Ox_1, Ox_2, Ox_3 являются вершинами равностороннего треугольника, размер которого не зависит от направления $\boldsymbol{R}$.

Доказательство. Координаты проекций

$$x_1 = R\cos\varphi,\quad x_2 = R\cos(\pi/3 - \varphi),\quad x_3 = R\cos(2\pi/3 - \varphi). \tag{7}$$

Здесь φ – угол между $\boldsymbol{R}$ и Ox_1. По теореме косинусов

$$(x_1x_2)^2 = R^2[\cos^2\varphi + \cos^2(\pi/3 - \varphi) - 2\cos\varphi\cos(\pi/3 - \varphi)\cos(\pi/3)] =$$

$$R^2\left[\cos^2\varphi + \left(\frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right)^2 - 2\cos\varphi\left(\frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right)\frac{1}{2}\right] =$$

$$= R^2\left[\cos^2\varphi + \frac{1}{4}\cos^2\varphi + \frac{3}{4}\sin^2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\sin\varphi - \frac{1}{2}\cos^2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\sin\varphi\right] = \frac{3}{4}R^2,$$

$$(x_1x_3)^2 = R^2[\cos^2\varphi + \cos^2(2\pi/3 - \varphi) - 2\cos\varphi\cos(2\pi/3 - \varphi)\cos(2\pi/3)] =$$

$$= R^2\left[\cos^2\varphi + \left(-\frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right)^2 - 2\cos\varphi\left(-\frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= R^2\left[\cos^2\varphi + \frac{1}{4}\cos^2\varphi + \frac{3}{4}\sin^2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\sin\varphi - \frac{1}{2}\cos^2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\sin\varphi\right] = \frac{3}{4}R^2,$$

$$(x_2x_3)^2 = R^2[\cos^2(\pi/3 - \varphi) + \cos^2(2\pi/3 - \varphi) - 2\cos(\pi/3 - \varphi)\cos(2\pi/3 - \varphi)\cos(\pi/3)] =$$

$$= R^2\left[\left(\frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right)\left(-\frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right)\frac{1}{2}\right] =$$

$$= R^2\left[\frac{1}{4}\cos^2\varphi + \frac{3}{4}\sin^2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{4}\cos^2\varphi + \frac{3}{4}\sin^2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{4}\cos^2\varphi - \frac{3}{4}\sin^2\varphi\right] = \frac{3}{4}R^2$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Центр треугольника $x_1x_2x_3$ совпадает с серединой вектора $\boldsymbol{R}$.

Доказательство. Пусть r – середина вектора $\boldsymbol{R}$. По теореме косинусов

$$(x_1r)^2 = R^2[\cos^2\varphi + 1/4 - 2\cos\varphi(1/2)\cos\varphi] = R^2/4,$$

$$(x_2r)^2 = R^2[\cos^2(\pi/3 - \varphi) + 1/4 - 2\cos(\pi/3 - \varphi)(1/2)\cos(\pi/3 - \varphi)] = R^2/4,$$

$$(x_3r)^2 = R^2[\cos^2(2\pi/3 - \varphi) + 1/4 - 2\cos(2\pi/3 - \varphi)(1/2)\cos(2\pi/3 - \varphi)] = R^2/4.$$

Точка r равноотстоит от точек x_1 и x_2, следовательно, она расположена на прямой, перпендикулярной отрезку x_1x_2 и проходящей через его середину. Это же справедливо в отношении отрезка x_1x_3. Таким образом, точка r принадлежит двум высотам треугольника $x_1x_2x_3$, следовательно, она лежит на их пересечении, которое для равностороннего треугольника является центром. Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 позволяют определить конфигурацию *mmm*-системы, упрощённая схема которой показана на рис. 2.

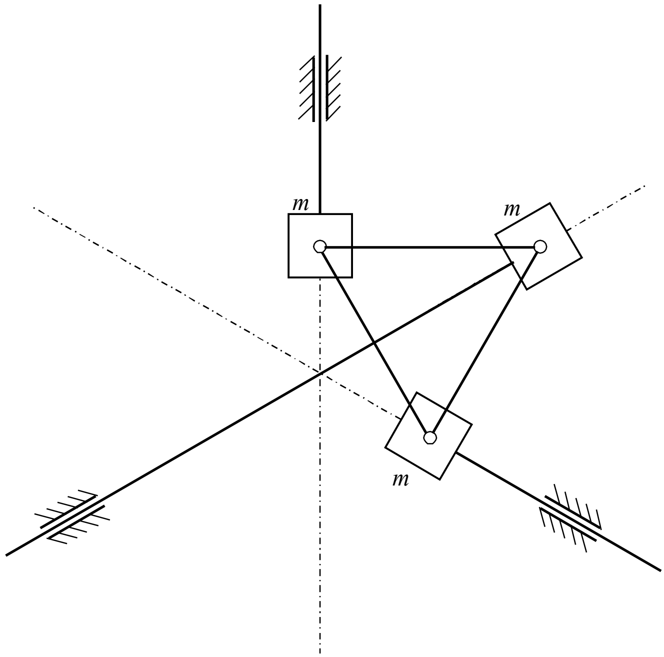

Рис. 2. *mmm*-система

Анализ *mmm*-системы

Внешние усилия к грузам не приложены. Скорости грузов с учетом (7)

$$dx_1/dt = -R\sin\varphi d\varphi/dt,\quad dx_2/dt = R\sin(\pi/3 - \varphi)d\varphi/dt,$$

$$dx_3/dt = R\sin(2\pi/3 - \varphi)d\varphi/dt.$$

Условием возникновения свободных гармонических колебаний является постоянство полной, в рассматриваемом случае кинетической энергии системы

$$T = 0{,}5mR^2[\sin^2\varphi + \sin^2(\pi/3 - \varphi) + \sin^2(2\pi/3 - \varphi)](d\varphi/dt)^2 = 0{,}75mR^2(d\varphi/dt)^2 = \text{const},$$

$$d\varphi/dt = \text{const}.$$

С учетом (2)–(4) (7) принимает вид

$$x_1 = R\cos(\omega_0 t + \varphi_0),\quad x_2 = R\cos(\pi/3 - \omega_0 t - \varphi_0),\quad x_3 = R\cos(2\pi/3 - \omega_0 t - \varphi_0). \tag{8}$$

Пусть $x_1(0) = x_{10}$, $(dx_1/dt)(0) = v_{10}$. Тогда

$$\cos\varphi_0 = x_{10}/R,\quad \varphi_0 = \arccos\frac{x_{10}}{R} = \arcsin\sqrt{1 - \frac{x_{10}^2}{R^2}}\,; \tag{9}$$

$$-R\omega_0\sin(\omega_0 0 + \varphi_0) = v_{10},\quad \omega_0 = -\frac{v_{10}}{\sqrt{R^2 - x_{10}^2}}. \tag{10}$$

Таким образом, все три груза совершают свободные гармонические колебания, обмениваясь между собою кинетической энергией.

Упругая *kk*-система

Система отличается от *mm*-системы тем, что вместо массивных грузов к вертикальному и горизонтальному стержням прикреплены пружины с коэффициентом упругости k, а середина промежуточного стержня связана с началом координат посредством кривошипа. При $\varphi = 0$ первая пружина максимально сжата, вторая – не деформирована. При $\varphi = \pi/2$ первая пружина не деформирована, вторая – максимально сжата. При $\varphi = \pi$ первая пружина максимально растянута, вторая – не деформирована. Поскольку все действующие на систему силы потенциальные, то уравнение Лагранжа второго рода может быть записано в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0\,, \quad L = T - \Pi.$$

Потенциальная энергия

$$\Pi = 0,5kx_1^2 + 0,5kx_2^2 = 0,5kl^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 0,5kl^2\,.$$

Таким образом, уравнение Лагранжа для системы является тождеством. Суммарный момент $M = d\Pi/d\varphi = 0$ при любой скорости вращения кривошипа. При начальных условиях (3) и в соответствии с аналогом первого закона Ньютона для вращательного движения

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0\,, \quad \varphi = \int \omega_0 dt = \omega_0 t + C = \omega_0 t + \varphi_0\,. \tag{11}$$

При этом (1) приводится к (5) и (6).

Таким образом, пружины с коэффициентом упругости k совершают свободные гармонические колебания.

В рассмотренной колебательной системе происходит взаимный обмен потенциальной энергией между упругими элементами. При $\varphi = 0$ потенциальная энергия первой пружины максимальна, а второй – равна нулю. После этого вторая пружина начинает сжиматься за счет энергии первой пружины, которая начинает разжиматься.

Упругая *kkk*-система

Система отличается от *mmm*-системы тем, что грузы заменены пружинами с коэффициентом упругости k. Кроме того, она оснащена кривошипом, связывающим точку пересечения координатных осей с центром треугольника $x_1x_2x_3$. При этом центр треугольника жестко связан с его сторонами. С учетом (7) потенциальная (она же полная) энергия системы

$$\Pi = 0{,}5kR^2[\cos^2\varphi + \cos^2(\pi/3 - \varphi) + \cos^2(2\pi/3 - \varphi)] = 0{,}75kR^2 = \text{const}.$$

Суммарный момент $M = d\Pi/d\varphi = 0$ при любой скорости вращения кривошипа. При начальных условиях (3) и в соответствии с аналогом первого закона Ньютона для вращательного движения выполняется (11). При этом (7) приводится к (8)–(10).

Таким образом, все три пружины совершают свободные гармонические колебания, обмениваясь между собою потенциальной энергией.

Обобщение на *n*-мерный случай

Пусть n координатных осей Ox_1, Ox_2, … Ox_n, лежат в одной плоскости Z и пересекаются в одной точке. Соседние оси ориентированы под углами π/n относительно друг друга. Точка пересечения O является началом произвольно направленного вектора **R**, принадлежащего Z.

Теорема 3. Координаты $x_1, x_2, \ldots x_n$ проекций конца вектора **R** на оси Ox_1, Ox_2, …, Ox_n являются вершинами правильного n-угольника, размер которого не зависит от направления **R**, а центр совпадает с серединой **R**.

Доказательство. Координаты проекций

$$x_1 = R\cos\varphi,\quad x_2 = R\cos(\pi/n - \varphi),\quad x_3 = R\cos(2\pi/n - \varphi),$$

$$x_i = R\cos[(i-1)\pi/n - \varphi],\quad x_n = R\cos[(n-1)\pi/n - \varphi]. \tag{12}$$

По теореме косинусов

$$\begin{aligned}
(x_i x_{i+1})^2 &= R^2\{\cos^2[(i-1)\pi/n-\varphi] + \cos^2(i\pi/n-\varphi) - 2\cos[(i-1)\pi/n-\varphi]\cos(i\pi/n-\varphi)\cos(\pi/n)\} = \\
&= R^2\{\cos^2(i\pi/n - \varphi - \pi/n) + (\cos(i\pi/n)\cos\varphi + \sin(i\pi/n)\sin\varphi)^2 - \\
&- 2[\cos(\pi/n)(\cos(i\pi/n)\cos\varphi + \sin(i\pi/n)\sin\varphi) + \sin(\pi/n)(\sin(i\pi/n)\cos\varphi - \\
&- \cos(i\pi/n)\sin\varphi)]\times(\cos(i\pi/n)\cos\varphi + \sin(i\pi/n)\sin\varphi)\cos(\pi/n)\} = \\
&= R^2\{\cos^2(\pi/n)\cos^2(i\pi/n)\cos^2\varphi + \cos^2(\pi/n)\sin^2(i\pi/\mathrm{n})\sin^2\varphi + \sin^2(\pi/n)\sin2(i\pi/n)\cos^2\varphi + \\
&+ \sin^2(\pi/n)\cos^2(i\pi/n)\sin^2\varphi + 2\cos^2(\pi/n)\cos(i\pi/n)\cos\varphi\sin(i\pi/n)\sin\varphi + \\
&+ 2\cos(\pi/n)\cos(i\pi/n)\cos^2\varphi\sin(\pi/n)\sin(i\pi/n) - 2\cos(\pi/n)\cos^2(i\pi/n)\cos\varphi\sin(\pi/n)\sin\varphi + \\
&+ 2\cos(\pi/n)\sin^2(i\pi/n)\sin\varphi\sin(\pi/n)\cos\varphi - 2\cos(\pi/n)\sin(i\pi/n)\sin^2\varphi\sin(\pi/n)\cos(i\pi/n) - \\
&- 2\sin^2(\pi/n)\sin(i\pi/n)\cos\varphi\cos(i\pi/n)\sin\varphi + \cos^2(i\pi/n)\cos^2\varphi + \sin^2(i\pi/n)\sin^2\varphi + \\
&+ 2\cos(i\pi/n)\cos\varphi\sin(i\pi/n)\sin\varphi - 2\cos^2(\pi/n)\cos^2(i\pi/n)\cos^2\varphi - \\
&- 2\cos^2(\pi/n)\sin(i\pi/n)\sin\varphi\cos(i\pi/n)\cos\varphi - 2\sin(\pi/n)\sin(i\pi/n)\cos^2\varphi\cos(i\pi/n)\cos(\pi/n) + \\
&+ 2\sin(\pi/n)\cos^2(i\pi/n)\sin\varphi\cos\varphi\cos(\pi/n) - 2\cos^2(\pi/n)\cos(i\pi/n)\cos\varphi\sin(i\pi/n)\sin\varphi - \\
&- 2\cos^2(\pi/n)\sin^2(i\pi/n)\sin^2\varphi - 2\sin(\pi/n)\sin^2(i\pi/n)\cos\varphi\sin\varphi\cos(\pi/n) + \\
&+ 2\sin(\pi/n)\cos(i\pi/n)\sin^2\varphi\sin(i\pi/n)\cos(\pi/n)\} = R^2\{\cos^2\varphi(\sin^2(\pi/n)\sin^2(i\pi/n) - \\
&- \cos^2(\pi/n)\cos^2(i\pi/n) + \cos^2(i\pi/n)) + \sin^2\varphi(\sin^2(\pi/n)\cos^2(i\pi/n) - \cos^2(\pi/n)\sin^2(i\pi/n) + \\
&+ \sin^2(i\pi/n))\} = R^2\{\cos^2\varphi(\sin^2(\pi/n)\sin^2(i\pi/n) + \cos^2(i\pi/n)\sin^2(\pi/n)) + \\
&+ \sin^2\varphi(\sin^2(\pi/n)\cos^2(i\pi/n) + \sin^2(i\pi/n)\sin^2(\pi/n))\} = \\
&= R^2\{\cos^2\varphi\sin^2(\pi/n) + \sin^2\varphi\sin^2(\pi/n)\} = R^2\sin^2(\pi/n).
\end{aligned}$$

Таким образом, все стороны многоугольника равны и не зависят от φ. Пусть r – середина вектора **R**. По теореме косинусов

$$(x_i r)^2 = R^2\{\cos^2[(i-1)\pi/n - \varphi] + 1/4 - 2\cos[(i-1)\pi/n - \varphi](1/2)\cos[(i-1)\pi/n - \varphi]\} = R^2/4.$$

Все лучи, соединяющие r с вершинами многоугольника, равны между собой. Таким образом, многоугольник правильный. Теорема доказана.

Для инертной системы скорости грузов с учетом (12)

$$dx_1/dt = -R\sin\varphi d\varphi/dt,\qquad dx_2/dt = R\sin(\pi/n - \varphi)d\varphi/dt,$$

$$dx_i/dt = R\sin[(i-1)\pi/n - \varphi]d\varphi/dt,\qquad dx_n/dt = R\sin[(n-1)\pi/n - \varphi]d\varphi/dt.$$

Условием возникновения свободных гармонических колебаний является постоянство полной, в рассматриваемом случае кинетической энергии системы

$$T = 0{,}5mR^2\{\sin^2\varphi + \sin^2(\pi/n - \varphi) + \ldots + \sin^2[(i-1)\pi/n - \varphi] + \ldots + \sin^2[(n-1)\pi/n - \varphi]\}(d\varphi/dt)^2 \tag{13}$$

Теорема 4. При $n \geq 2$ справедлива формула

$$\sum_{i=1}^{n} \sin^2\left[\frac{(i-1)\pi}{n} \pm \varphi\right] = \frac{n}{2}.$$

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^{n} \sin^2\left[\frac{(i-1)\pi}{n} \pm \varphi\right] = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left[\frac{(i-1)2\pi}{n} \pm 2\varphi\right]\right\} =$$

$$\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi \sum_{i=1}^{n} \cos\frac{(i-1)2\pi}{n} \mp \frac{1}{2}\sin 2\varphi \sum_{i=1}^{n} \sin\frac{(i-1)2\pi}{n}.$$

Пусть n единичных векторов образуют центрально симметричную звезду таким образом, чтобы один из векторов совпал с осью абсцисс. В силу симметрии сумма векторов равна нулю. Сумма проекций векторов на любую ось тоже равна нулю. Таким образом, две последние суммы равны нулю. Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 5. При $n \geq 2$ справедлива формула

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2\left[\frac{(i-1)\pi}{n} \pm \varphi\right] = \frac{n}{2}.$$

Кинетическая энергия инертной системы (13)

$$T = 0{,}25nmR^2(d\varphi/dt)^2 = \text{const},$$

$$d\varphi/dt = \text{const}$$

С учетом (2) – (4) (12) принимает вид

$$x_1 = R\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad x_2 = R\cos(\pi/n - \omega_0 t - \varphi_0), \quad x_3 = R\cos(2\pi/n - \omega_0 t - \varphi_0),$$

$$x_i = R\cos[(i-1)\pi/n - \omega_0 t - \varphi_0], \quad x_n = R\cos[(n-1)\pi/n - \omega_0 t - \varphi_0]. \tag{14}$$

При этом в соответствии с (9), (10)

$$\omega_0 = -\frac{v_{x10}}{\sqrt{R^2 - x_{10}^2}}, \quad \varphi_0 = \arccos\frac{x_{10}}{R}. \tag{15}$$

Таким образом, все n грузов совершают свободные гармонические колебания, обмениваясь между собою кинетической энергией.

Многоугольник $x_1x_2\ldots x_n$ совершает двойное вращение – вокруг своего центра и вокруг точки O.

В отличие от инертной для упругой системы условием возникновения свободных гармонических колебаний являются постоянство потенциальной (полной) энергии и наличие кривошипа, связывающего точку пересечения координатных осей с центром многоугольника $x_1x_2\ldots x_n$, который в свою очередь жестко связан с его сторонами.

$$\Pi = 0{,}5kR^2\{\cos^2\varphi + \cos^2(\pi/n - \varphi) + \ldots + \cos^2[(i-1)\pi/n - \varphi] + \ldots + \cos^2[(n-1)\pi/n - \varphi]\}.$$

В соответствии с теоремой 5

$$\Pi = 0{,}25nkR^2 = \text{const}.$$

Суммарный момент $M = d\Pi/d\varphi = 0$ при любой скорости вращения кривошипа. При начальных условиях (3), в соответствии с аналогом первого закона Ньютона для вращательного движения и (11), выполняются (14), (15).

Таким образом, все n пружин совершают свободные гармонические колебания, обмениваясь между собою потенциальной энергией.

Заключение

Установлена возможность возникновения свободных гармонических колебаний в системах, состоящих только из инертных (*mm*-, *mmm*-, m^n-системах) или только упругих элементов (*kk*-, *kkk*-, k^n-системах), которая реализуется при обеспечении сдвига по фазе между колебаниями элементов.

В отличие от традиционных [2–4] или смешанных [1] колебательных систем при энергообмене между однородными элементами представленных систем вид энергии не меняется. В *mm*-, *mmm*-, m^n-системах происходит взаимный обмен кинетической энергией между инертными элементами. В *kk*-, *kkk*-, k^n-системах – потенциальной энергией между упругими элементами. При этом суммарная энергия систем при колебаниях не изменяется.

Другим отличием является то, что частоты свободных колебаний систем с однородными элементами не зависят от параметров элементов и определяются исключительно начальными условиями. Иначе говоря, рассмотренные системы могут совершать свободные гармонические колебания с любой изначально заданной частотой.

Колебательные свойства *mm*-, *mmm*-, m^n-систем могут учитываться при проектировании двигателей внутреннего сгорания, поршневых пневмосистем и прочих преобразователей возвратно-поступательного движения во вращательное в плане взаимной компенсации реактивного характера масс движущихся частей – поршней, штоков и пр.

Принцип обмена энергией между элементами в *kk*-, *kkk*-, k^n-системах может использоваться для самонейтрализации квазиупругих воздействий в пневмосистемах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов И.П.* Реактивные элементы электрических цепей с «неэлектрическими» параметрами // Вестн. Самарского государственного технического университета. Технические науки. 2010. № 4(27). С. 166–173.
2. *Баркгаузен Г.* Введение в учение о колебаниях. М.: Госэнергоиздат, 1934. 116 с.
3. *Tongue B*. Principles of Vibration. Oxford University Press, 2001. 367 p.
4. *Thompson W.T.* Theory of Vibrations. Nelson Thornes Ltd., 1996. 295 p.
5. *Попов И.П.* Свободные гармонические колебания в системах с однородными элементами // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 546–549.

Статья поступила 20.03.2012 г.

Popov I.P. VIBRATION SYSTEMS CONSISTING ONLY OF INERT OR ONLY ELASTIC ELEMENTS AND THE APPEARANCE OF FREE HARMONIC VIBRATIONS IN THEM. We consider mechanical vibration systems consisting only of inert (*mm*-, *mmm*-, m^n-systems) or only elastic (*kk*-, *kkk*-, k^n-systems) components. The possibility of the of free harmonic vibrations appearance in such systems is shown. In the *mm*-, *mmm*-, m^n-systems, the mutual exchange of kinetic energy between the inert elements occurs; in *kk*-, *kkk*-, k^n-systems, the mutual exchange of the potential energy between elastic elements.

Keywords: vibration, inert, elastic, harmonic, frequency.

POPOV Igor Pavlovich (Kurgan State University)
E-mail: popov_ip@kurganobl.ru, ip.popow@yandex.ru