ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2013 Математика и механика № 1(21)

УДК 539.114

А.К. Томилин, Е.В. Прокопенко

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО СТЕРЖНЯ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В работе приведена краткая история вопроса о проблеме электромагнитного взаимодействия проводников с током. Показано, что электромагнитная сила, в общем случае имеет две составляющие: поперечную и продольную. Поставлена и решена задача о колебаниях упругого электропроводного стержня с учетом продольной составляющей магнитной силы.

Ключевые слова: *электромагнитное взаимодействие*, *вихревое магнитное поле*, *потенциальное магнитное поле*, *продольная магнитная сила*, *продольные колебания*, *упругий электропроводный стержень.*

Современная электродинамика оперирует силами Ампера и Лоренца, которые направлены ортогонально току. Эти силы имеют вихревой характер, поскольку возникают за счет взаимодействия магнитных полей. В теории Максвелла магнитное поле считается сугубо вихревым. Потенциальная компонента магнитного поля исключается при помощи калибровок Кулона и Лоренца. Такой подход игнорирует потенциальную составляющую электромагнитной силы, направленную вдоль тока.

Если обратиться к «Электродинамике» А.М. Ампера [1], то можно найти описание двух экспериментов, в которых проявляется сила, направленная вдоль тока. Современная интерпретация этих экспериментов содержится в монографии [2]. К сожалению, в современных учебниках физики нет ссылок на эти исторические эксперименты. Обычно ограничиваются описанием опытов Ампера с параллельными токами. Причина заключается в том, что при рассмотрении электромагнитного взаимодействия двух непараллельно расположенных проводников с током обнаруживается нарушение третьего закона Ньютона. Эта проблема известна давно. Попытки ее решения в рамках существующих теоретических представлений предприняты в известных учебниках [3 – 5], но их нельзя считать исчерпывающими. Обычно отмечают [3], что постоянные токи по необходимости являются замкнутыми и «нарушение третьей аксиомы Ньютона связано лишь с представлением сил взаимодействия токов как сил попарного взаимодействия их элементов». Действительно, при описании взаимодействия двух замкнутых контуров с токами проблем не возникает. Однако такой подход не исключает возможность рассмотрения отдельного замкнутого контура с током в качестве электромеханической системы. В стационарном случае, когда отсутствует излучение, контур с током можно рассматривать как замкнутую электромеханическую систему. При этом полная энергия (механическая плюс электромагнитная) системы, состоящей из проводников, по которым течет постоянный ток, остается неизменной. Понятно, что в такой изолированной системе для внутренних сил третий закон Ньютона обязательно должен выполняться при попарном взаимодействии любых двух элементов, входящих в ее состав. На этом основании вполне закономерно рассматривать силы взаимодействия между двумя элементами, входящими в состав одного электрического контура.

Ампер стремился учесть две компоненты магнитной силы: ортогональную току, текущему в проводнике, и действующую по току или против него. В качестве закона электромагнитного взаимодействия Ампер предложил формулу (закон Ампера) [1 – 3]:

$$d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0 \mu J_1 J_2}{4\pi} \left\{ \frac{3}{r_{21}^5} (d\vec{s}_1 \cdot \vec{r}_{21})(d\vec{s}_2 \cdot \vec{r}_{21}) - \frac{2}{r_{21}^3} (d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2) \right\} \vec{r}_{21} \,. \qquad (1)$$

Из (1) следует, что при взаимодействии двух участков тока $d\vec{s}_1$ и $d\vec{s}_2$, расположенных на одной прямой, возникает сила, действующая на один из проводников в направлении тока, на другой – против тока (рис. 1). Этот результат подтвердил один из упомянутых выше экспериментов Ампера [1, 2].

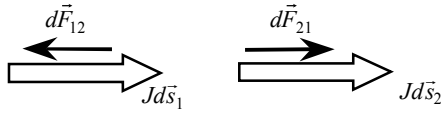

Рис. 1. Взаимодействие участков токов, расположенных на одной прямой

Однако закон (1) имеет недостатки. В частности, из него следует, что элементарные участки тока $d\vec{s}_1$ и $d\vec{s}_2$, расположенные взаимно ортогонально, вообще не должны взаимодействовать между собой, что противоречит другому эксперименту Ампера (весы Ампера) [1,2]. Исходя из третьего закона Ньютона, в этом случае должно быть две силы: одна из них $d\vec{F}_{12}$ ортогональна току, а другая $d\vec{F}_{21}$ направлена по току (рис.2).

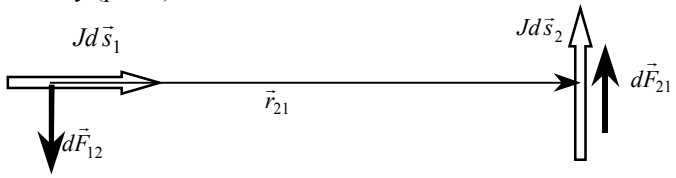

Рис. 2. Взаимодействие участков токов, расположенных ортогонально

Максвелл [6] был приверженцем закона Ампера (1), признавая его в качестве основного. К сожалению, ему не удалось устранить недостатки этого закона, сохранив суть: наличие поперечной и продольной компонент магнитной силы. Во второй половине XIX века возобладал подход, исключающий продольное электромагнитное взаимодействие. При этом отказались и от возможности рассматривать взаимодействие элементов тока, стали принимать во внимание только взаимодействие замкнутых контуров или бесконечных токов. Вопреки исторической правде поперечную магнитную силу стали называть в честь Ампера.

В конце XX столетия Николаев Г.В. [7] предложил вернуться к идее Ампера о продольной электромагнитной силе. Он предложил несколько десятков экспериментов, подтверждающих проявление этой силы. Путем ее введения решается парадокс взаимодействия непараллельных токов (рис. 2). Эта идея получила теоретическое и экспериментальное развитие в работах [2, 8–10].

Для описания механизма возникновения продольной электромагнитной силы требуется использовать дополнительную компоненту магнитного поля, которая обычно исключается в результате применения калибровок Кулона и Лоренца [6]. Николаев Г.В. предложил ввести в рассмотрение так называемое «скалярное магнитное поле» (СМП). Это означает, что дополнительная компонента магнитного поля описывается скалярной функцией H^* (или B^*). Тогда в совокупности с вектором напряженности $\vec{H}$ (или вектором индукции $\vec{B}$) она образует четырехмерный вектор $\left(\vec{H}, H^*\right)$ или $\left(\vec{B}, B^*\right)$.

Одно из дифференциальных уравнений обобщенной теории для квазистационарного случая записывается в виде

$$\operatorname{rot}\vec{H} + \operatorname{grad} H^* = \vec{j}\ . \tag{2}$$

То есть в общем случае поле токов создает как вихревое (векторное), так и скалярное (потенциальное) магнитное поле.

Условия физического возникновения и свойства СМП подробно описаны в публикациях [2, 7 – 10]. Показано, что поперечная магнитная сила возникает при взаимодействии двух объектов, создающих вихревые (векторные) магнитные поля, а продольная магнитная сила действует на объекты, создающие скалярные (потенциальные) магнитные поля. При рассмотрении электромагнитного взаимодействия для каждого объекта следует различать собственные и внешние поля. В монографии Томилина А.К. [2] обобщенный закон электромагнитного взаимодействия записан в дифференциальной форме:

$$\vec{f} = \operatorname{rot}\vec{H}_c \times \vec{B} + B^* \operatorname{grad} H_c^*\ , \tag{3}$$

где $\vec{f}$ – объемная плотность магнитной силы, $\vec{H}_c$ – напряженность собственного векторного магнитного поля; $\vec{B}$ – индукция внешнего векторного магнитного поля, H_c^* – напряженность собственного СМП, B^* – индукция внешнего СМП.

На основании (2) и (3) можно сказать, что внешнее векторное магнитное поле воздействует на ту часть тока, которая создает собственное вихревое магнитное поле, а внешнее СМП образует продольную силу при взаимодействии с той частью тока, которая участвует в создании собственного СМП. Заметим, что бесконечно длинный проводник не создает СМП, поэтому при рассмотрении взаимодействия двух длинных параллельных проводников нужен только первый член правой части (3).

Поскольку помимо поперечной силы Ампера обнаружена и продольная электромагнитная сила, возникает возможность управления продольными колебаниями упругих систем. Рассмотрим упругий электропроводный стержень, находящийся полностью во внешнем неоднородном СМП $B^*(z)$ (рис. 3). Пусть продольные колебания в нем могут совершаться вдоль оси *z*. Рассмотрим случай, когда концы стержня неподвижны, следовательно, длина стержня не изменяется, то есть *L=const*.

На каждый элемент *dz* стержня действует продольная магнитная сила

$$dF^* = f^* S \cdot dz\ , \tag{4}$$

где $f^* = B^* \cdot \operatorname{grad} H_c^*$ – объемная плотность продольной магнитной силы.

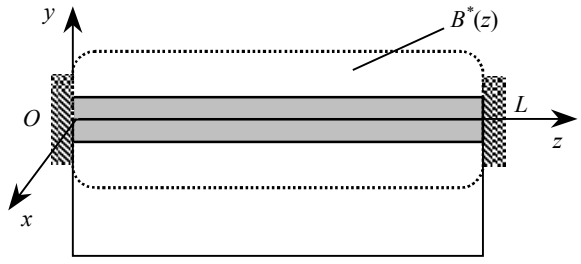

Рис. 3. Стержень с закрепленными концами в СМП

Если стержень является тонким, то модуль продольной силы можно записать в виде

$$dF^* = B^* \cdot S \cdot \frac{dH_c^*}{dz} \cdot dz = B^* \cdot S \cdot dH_c^* . \tag{5}$$

Собственное СМП H_c^* [8] линейного стержня можно рассчитать при помощи формулы

$$dH_c^* = \frac{j}{4\pi}\left[\frac{1}{(L-z)^2} - \frac{1}{z^2}\right]dz .$$

Следовательно, приближенное выражение для продольной магнитной силы, действующей на стержень, запишется в виде

$$dF^* = B^* S \frac{j}{4\pi}\left[\frac{1}{(L-z)^2} - \frac{1}{z^2}\right]dz . \tag{6}$$

С учетом того, что в цепи индуцируется ток плотности

$$j = \frac{\sigma}{L}\int_0^L B^*(z)\frac{\partial U(z,t)}{\partial z}dz , \tag{7}$$

следовательно, имеем

$$dF^* = S^2 \frac{\sigma B^*(z)}{4\pi L}\left[\frac{1}{(L-z)^2} - \frac{1}{z^2}\right]\left(\int_0^L B^*(z)\cdot\frac{\partial U(z,t)}{\partial t}dz\right)dz . \tag{8}$$

Кроме того, учтем диссипативные процессы. Примем силу механического сопротивления пропорциональной первой степени скорости

$$dF_c = \beta\rho S\frac{\partial U}{\partial t}dz , \tag{9}$$

где β – диссипативный коэффициент; ρ – плотность материала стержня; S – площадь сечения стержня.

Составим интегро-дифференциальное уравнение собственных продольных колебаний стержня в неоднородном СМП с учетом этих сил [13]:

$$\rho S\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}dz - ES\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}dz + \beta\rho S\frac{\partial U}{\partial t}dz - \\ -\frac{S^2\sigma B^*(z)}{4\pi L}\left(\left[\frac{1}{(L-z)^2} - \frac{1}{z^2}\right]\int_0^L B^*(z)\frac{\partial U}{\partial t}dz\right)dz = 0, \tag{10}$$

где E – модуль упругости.

После преобразования (10) получим уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\beta\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{S\sigma B^*(z)}{4\pi\rho L}\left[\frac{1}{(L-z)^2}-\frac{1}{z^2}\right]\int_0^L B^*(z)\frac{\partial U}{\partial t}dz=0. \qquad (11)$$

Для исследования данного уравнения применим метод Фурье. Представим функцию смещений в виде ряда Фурье по собственным амплитудным функциям:

$$U(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n(t)Z_n(z),$$

где $q_n(t)$ – обобщенные координаты, имеющие размерность длины; $Z_n(z)$ – безразмерная величина.

Тогда имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[Z_n\ddot{q}_n+\beta Z_n\dot{q}_n-\frac{E}{\rho}q_n\frac{d^2Z_n}{dz^2}-\dot{q}_n\frac{S\sigma B^*(z)}{4\pi\rho L}\left[\frac{1}{(L-z)^2}-\frac{1}{z^2}\right]\int_0^L B^*(z)Z_n dz\right]=0. \qquad (12)$$

Для стержня с закрепленными концами собственные амплитудные функции синусоидальны:

$$Z_n(z)=\sin\frac{n\pi z}{L},\qquad n=1,2,3.....\qquad (13)$$

Умножим уравнение (12) на Z_k, $k=1,2,3,\ldots$, и проинтегрируем по всей длине стержня. Применив условие ортогональности, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{q}_k+\beta\dot{q}_k+\frac{Ek^2\pi^2}{\rho L^2}q_k-$$

$$-\frac{S\sigma}{2\pi\rho L^2}\int_0^L Z_k B^*(z)\left(\frac{1}{(L-z)^2}-\frac{1}{z^2}\right)dz\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dot{q}_n\int_0^L B^*(z)Z_n dz\right)=0,\ \ k=1,2,3,.... \qquad (14)$$

Введем следующие обозначения:

$$\int_0^L Z_k B^*(z)\left(\frac{1}{(L-z)^2}-\frac{1}{z^2}\right)dz=\gamma_k,\qquad k=1,2,3,..., \qquad (15)$$

$$\int_0^L B^*(z)Z_n dz=\alpha_n,\qquad n=1,2,3,.... \qquad (16)$$

Уравнения (14), с учетом введенных обозначений (15), (16), запишем в следующем виде:

$$\ddot{q}_k+\beta\dot{q}_k+\frac{Ek^2\pi^2}{\rho L^2}q_k-\frac{S\sigma}{2\pi\rho L^2}\cdot\gamma_k\sum_{n=1}^{\infty}\dot{q}_n\cdot\alpha_n=0,\qquad k=1,2,3,.... \qquad (17)$$

Исследуем свойства интеграла (15). Чтобы избежать неопределенности с его вычислением, примем такое распределение внешнего СМП, при котором на концах стержня оно обращается в ноль. Пусть, например:

$$B^*(z)\left(\frac{1}{(L-z)^2}-\frac{1}{z^2}\right)=\text{const}. \qquad (18)$$

Построим график зависимости $B^*(z)$ в случае распределения СМП (18) (рис. 4).

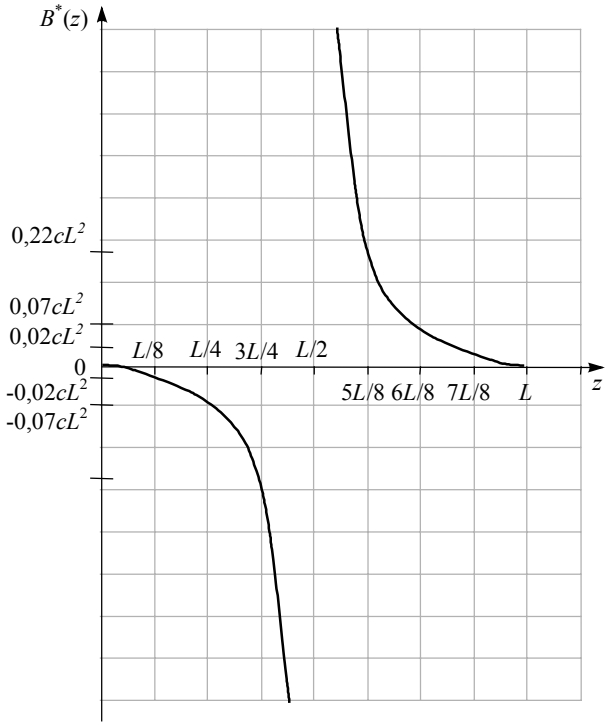

Рис. 4. График зависимости (18)

Из графика (рис. 4) видно, что в середине проводника имеется разрыв. Однако именно в этой точке функция

$$\left(\frac{1}{(L-z)^2}-\frac{1}{z^2}\right)_{z=\frac{L}{2}}=0$$

обращается в ноль. Таким образом, при вычислении (23) неопределенность не возникает.

Значения интеграла (15) γ_k определяются выражением $\int_0^L Z_k dz$. Для четных синусоидальных амплитудных функций ($k=2,4,6,\ldots$) этот интеграл равен нулю, поэтому при $k=2,4,6,\ldots$ и $\gamma_k=0$. Следовательно, в этом случае четные парциальные колебания электромагнитного воздействия не испытывают, их можно назвать изолированными.

Рассмотрим другой пример:

$$B^*(z)=\lambda(L-z)^2 z^2, \tag{19}$$

где λ – некоторая размерная константа.

Построим график зависимости $B^*(z)$ в этом случае (рис. 5).

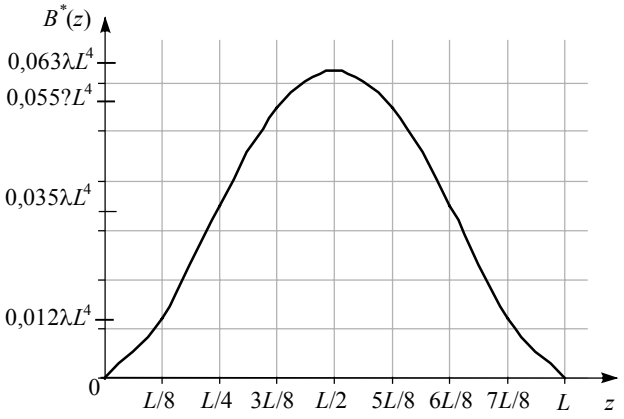

Рис. 5. График зависимости (19)

Из графика (рис. 5) видно, что на границах проводника внешнее СМП $B^*(z)$ равно нулю, а в центре имеет максимальное значение. Вычислим интеграл γ_r с учетом (19):

$$\gamma_k = \int_0^L Z_k B^*(z)\left(\frac{1}{(L-z)^2} - \frac{1}{z^2}\right)dz = \lambda\int_0^L \left(2zL - L^2\right)\sin\frac{k\pi z}{L}dz = -\frac{\lambda L^3}{k\pi}(\cos k\pi + 1). \quad (20)$$

Отсюда следует, что для всех нечетных колебаний интеграл $\gamma_k = 0$ (k=1,3,5,…), а при четных $k = 2, 4, 6,\ldots$

$$\gamma_k = -\frac{2\lambda L^3}{k\pi}, \qquad k = 2, 4, 6\ldots .$$

Это объясняется симметричным распределением внешнего СМП относительно середины стержня.

Таким образом, задавая закон распределения внешнего СМП $B^*(z)$, можно избирательно воздействовать на определенные парциальные колебания, оставляя другие парциальные колебания изолированными от электромагнитного воздействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ампер А.М.* Электродинамика. М.: АН СССР, 1954.
2. *Томилин А.К.* Обобщенная электродинамика. Усть-Каменогорск: ВКГТУ, 2009.
3. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1976.
4. *Матвеев А.Н.* Механика и теория относительности. М.: ВШ, 1976.
5. *Ландау Л.Д.*, *Лившиц Е.И.* Механика. Электродинамика. Краткий курс теоретической физики. Кн. 1. М.: Наука, 1969.
6. *Максвелл Дж.* Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. М.: ГИТТЛ, 1952.
7. *Николаев Г.В.* Непротиворечивая электродинамика. Теория, эксперименты, парадоксы. Томск, 1997.
8. *Томилин А.К.* Экспериментальное исследование продольного электромагнитного взаимодействия. http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/9087.html.
9. *Tomilin A.K.* The Fundamentals of Generalized Electrodynamics. Physics e-print, July 2008. http://arxiv.org/pdf/0807.2172

10. *Tomilin A.K.* The Potential-Vortex Theory of the Electromagnetic Field. Physics e-print, Aug. 2010. http://arxiv.org/pdf/1008.3994
11. *Koen J. van Vlaenderen*. A generalisation of classical electrodynamics for the prediction of scalar field effects. http://arxiv.org/abs/physics/0305098v1.
12. *Хворостенко Н.П.* Продольные электромагнитные волны // Изв. вузов. Физика. 1992. № 3. С. 24–29.
13. *Бабаков И.М*. Теория колебаний. М.: Наука, 1968.

Статья поступила 06.03.2012 г.

Tomilin A.K., *Prokopenko E.V.* LONGITUDINAL OSCILLATIONS OF A RESILIENT ELECTROCONDUCTIVE CORE IN AN INHOMOGENEOUS MAGNETIC FIELD. Brief history of the problem about conductors' magnetic interaction is given in this work. Generally, the magnetic field is shown to have two component—swirling and potential ones. The problem of longitudinal oscillations of a resilient electroconductive core in an inhomogeneous magnetic field is stated and solved.

Keywords: electromagnetic interaction, swirling magnetic field, potential magnetic field, longitudinal magnetic force, longitudinal oscillations, resilient electroconductive core.

TOMILIN Alexander Konstantinovich (D. Serikbaev East Kazakhstan State Technical University)
E-mail: aktomilin@gmail.com

PROKOPENKO Yelena Vasilyevna (D. Serikbaev East Kazakhstan State Technical University)
E-mail: aktomilin@gmail.com