

УДК 514.8, 62.342

Н.Р. Щербаков, Н.В. Захаркин

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ДЕТАЛИ ПЕРЕДАТОЧНОГО МЕХАНИЗМА КАК ОГИБАЮЩЕЙ

Рассматривается математическая модель гипоидного передаточного механизма на основе эксцентриково-циклоидального зацепления. Получены уравнения движения поверхности входной детали, порождающего семейство поверхностей, для которого удаётся найти точное уравнение огибающей – поверхности выходной детали. Доказано, что такой способ получения уравнения поверхности выходной детали применим для любой поверхности входной детали при условии, что семейство этих поверхностей имеет гладкость C^2 .

Ключевые слова: гипоидная передача, эксцентриково-циклоидальное зацепление, огибающая семейства поверхностей.

В современном машиностроении определяющую роль играют передаточные механизмы, преобразующие вращение ведущего вала во вращательное движение другого вала с изменением угловых скоростей и крутящих моментов. В 2007 г. томскими конструкторами был разработан и запатентован новый вид зацепления в передаточных механизмах – «эксцентриково-циклоидальное (ЭЦ) зацепление» [1–2], которое обладает повышенными силовыми характеристиками и позволяет получать высокие передаточные отношения в одной ступени. В отличие от классического эвольвентного зацепления, в котором профили зубьев изготавливаются на основе эвольвенты окружности, в ЭЦ-зацеплении профили колес – циклоидальная кривая и эксцентрически повёрнутая окружность. На основе ЭЦ-зацепления сконструировано большое количество редукторов с различными типами передач, изготовлены опытные образцы, прошедшие испытания в России и Германии (<http://www.ec-gearing.ru/>).

Боковые поверхности зубьев, участвующих в зацеплении, должны при передаче движения находиться в непрерывном взаимном касании, т.е., с позиций дифференциальной геометрии, поверхность зуба одного колеса является огибающей семейства поверхностей зубьев другого колеса; это семейство образовано движением детали при работе механизма. Таким образом, возможность построения математической модели формы зуба как огибающей зависит от того, удастся ли разрешить уравнение, возникающее при записи необходимого условия существования огибающей [3] относительно одного из параметров. Это уравнение для достаточно сложных форм боковых поверхностей зубьев имеет весьма громоздкий вид и, на первый взгляд, допускает разрешение только численными методами. Следует заметить, что геометрия ЭЦ-зацепления в большинстве случаев (для параллельных и пересекающихся осей вращения валов) позволяет получать уравнения поверхностей зубьев, не прибегая к теории огибающих. Но при моделировании гипоидной передачи (оси валов скрещиваются под прямым углом) такое решение задачи найти не удалось, зато оказалось, что можно аналитически разрешить уравнение, вытекающее из условия огибания, и найти точное уравнение боковой поверхности зуба выходной детали.

На рис. 1 изображен внешний вид гипоидной передачи с коническими зубчатыми колесами.

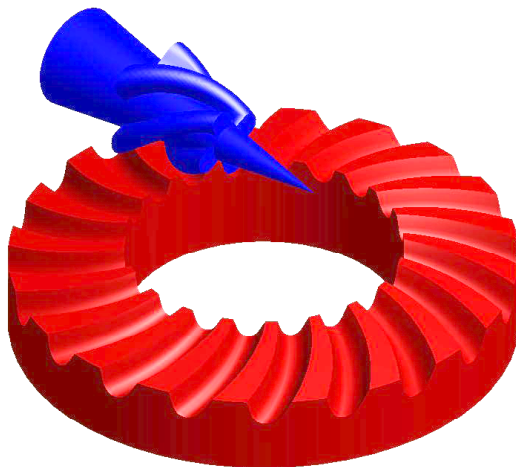


Рис. 1. Детали конической гипоидной передачи: шестерня (4 зуба) и колесо (20 зубьев)

Поверхность зуба шестерни получается следующим образом. Дана сфера радиуса R и круговой конус с вершиной в центре этой сферы, пересекающий её по окружности радиуса ε . Поверхность зуба образована окружностями, лежащими на концентрических сферах уменьшающихся радиусов, с центрами на конической винтовой линии, причем по мере приближения к центру сферы уменьшаются и радиусы окружностей. Наибольшая образующая окружность зуба лежит на сфере радиуса R и имеет радиус ρ . Эту окружность можно задать в виде вектор-функции

$$okr(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} \sqrt{R^2 - \rho^2} + \varepsilon \rho \sin \alpha}{R} \\ \rho \cos \alpha \\ \frac{-\varepsilon \sqrt{R^2 - \rho^2} + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2} \rho \sin \alpha}{R} \end{pmatrix}.$$

Далее координаты вектор-функций будем обозначать следующим образом:

$$okr(\alpha) = \begin{pmatrix} okr(\alpha)_0 \\ okr(\alpha)_1 \\ okr(\alpha)_2 \end{pmatrix}.$$

Радиусы сфер и окружностей уменьшаются пропорционально расстоянию до центра сфер с помощью множителя $(1 - \nu C)$, где $\nu = 0, \dots, \frac{2\pi}{z}$ – параметр семейства окружностей, образующих зуб, $C = \frac{lr}{2\pi R}$, lr – длина отрезка на оси конуса, равная ширине шестерни, z – количество зубьев шестерни. Помещая начало системы координат в центр сферы и направляя ось OZ по оси вращения колеса, а ось OX параллельно оси вращения шестерни, поверхность зуба шестерни можно за-

дать в виде вектор-функции двух аргументов:

$$\mathbf{Sv}(v, \alpha) = (1 - vC)Qx(v)\mathbf{okr}(\alpha), \quad (1)$$

где через $Qx(v)$ обозначена матрица поворота вокруг оси OX :

$$Qx(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix}.$$

Заметим, что если оси вращения деталей пересекаются, то профиль колеса можно построить исходя из основной идеи ЭЦ-зацепления – как циклоидальную кривую на сфере, а поверхность колеса – как семейство таких кривых на концентрических сферах. В случае гипойдной передачи (оси скрещиваются) боковую поверхность зуба колеса будем искать как огибающую семейства поверхностей зуба шестерни. Пусть оси вращения валов скрещиваются под прямым углом и смещены на величину h . Нужно для решения задачи семейство поверхностей образовано вращением поверхности (1) вокруг своей оси с одновременным поворотом вокруг оси колеса, причем, если первый поворот происходит на угол τ , то второй – на угол $\frac{\tau}{n}$, где n – отношение числа зубьев колеса к числу зубьев шестерни. Исходя из этого, искомое уравнение семейства поверхностей запишется в виде

$$\mathbf{Sem}(v, \alpha, \tau) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\tau}{n} & -\sin \frac{\tau}{n} & 0 \\ \sin \frac{\tau}{n} & \cos \frac{\tau}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[Qx(\tau)\mathbf{Sv}(v, \alpha) - \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (2)$$

Необходимым условием существования огибающей является [3] обращение в нуль смешанного произведения трех векторов – производных вектор-функции (2) по параметрам v, α, τ :

$$\frac{\partial \mathbf{Sem}(v, \alpha, \tau)}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{Sem}(v, \alpha, \tau)}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{Sem}(v, \alpha, \tau)}{\partial \tau} = 0. \quad (3)$$

При переходе к координатам левая часть уравнения (3) принимает очень громоздкий вид, но после упрощений (разумеется, не вручную, а с помощью символьного процессора математического пакета) исчезают слагаемые, содержащие функции от аргумента $\frac{\tau}{n}$, и уравнение (3) приводится к виду

$$F(v, \alpha) \cos \tau + G(v, \alpha) \sin \tau + H(v, \alpha) = 0, \quad (4)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} F(v, \alpha) &= -(N(v, \alpha) \times Sv(v, \alpha))_2, \\ G(v, \alpha) &= (N(v, \alpha) \times Sv(v, \alpha))_1, \\ H(v, \alpha) &= (N(v, \alpha) \times Sv(v, \alpha))_0 n + N(v, \alpha)_0 h, \\ N(v, \alpha) &= \frac{\partial \mathbf{Sv}(v, \alpha)}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{Sv}(v, \alpha)}{\partial v}. \end{aligned}$$

Поскольку координаты вектор-функции, задающей боковую поверхность $\mathbf{Sv}(v, \alpha)$ зуба шестерни, входят только в коэффициенты уравнения (4), рассматриваемого как уравнение на τ , то это уравнение разрешимо относительно параметра τ независимо от того, какова боковая поверхность зуба шестерни. Таким образом, доказана

Теорема. Пусть семейство поверхностей зуба входной детали, получающееся при работе гипоидной передачи удовлетворяет условиям теоремы о достаточном признаке существования огибающей [3, с. 30]. Тогда поверхность выходной детали может быть построена как огибающая семейства поверхностей зуба входной детали.

Из (4) находим два варианта выражения параметра семейства τ через параметры поверхности v, α :

$$\tau_1(v, \alpha) = \arctg \frac{-F(v, \alpha) \left[F(v, \alpha)^2 + G(v, \alpha)^2 - H(v, \alpha)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - G(v, \alpha) H(v, \alpha)}{-F(v, \alpha) H(v, \alpha) + \left[G(v, \alpha)^2 (F(v, \alpha)^2 + G(v, \alpha)^2 - H(v, \alpha)^2) \right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\tau_2(v, \alpha) = \arctg \frac{F(v, \alpha) \left[F(v, \alpha)^2 + G(v, \alpha)^2 - H(v, \alpha)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - G(v, \alpha) H(v, \alpha)}{-F(v, \alpha) H(v, \alpha) - \left[G(v, \alpha)^2 (F(v, \alpha)^2 + G(v, \alpha)^2 - H(v, \alpha)^2) \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Подставляя в уравнение семейства (2) $\tau_1(v, \alpha)$, если $G(v, \alpha) \geq 0$ и $\tau_2(v, \alpha)$ – в противном случае, получаем уравнение части огибающей, которая моделирует боковую поверхность зуба колеса (на рис. 2 она изображена точками).

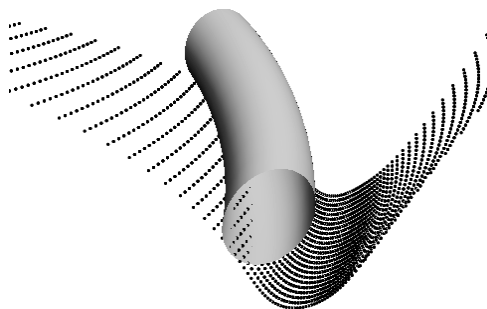


Рис. 2. Компьютерная иллюстрация математической модели поверхностей деталей гипоидной передачи в зацеплении

Еще один пример моделирования поверхности детали как огибающей получен для реечного передаточного механизма. Такой механизм на основе ЭЦ-зацепления рассмотрен в [4]. Если ось вращения входной детали (червячного элемента) расположена перпендикулярно направлению поступательного движения рейки (рис. 3), поверхность рейки легко получается как семейство циклоидальных кривых, обкатываемых окружностями сечений червяка.

В варианте механизма, когда ось червяка параллельна направлению поступательного движения рейки (ось OY), уравнение поверхности червяка приходится получать как огибающую семейства поверхностей, получающегося при движении рейки. Итак, уравнение профиля рейки – эквидистанты трохоиды [5] – запишем в виде

$$E(\alpha) = \begin{pmatrix} -\varepsilon \cos \alpha \\ -\varepsilon \sin \alpha + (\rho + \varepsilon) \alpha \end{pmatrix} + \rho \frac{N(\alpha)}{|N(\alpha)|}, \quad (5)$$

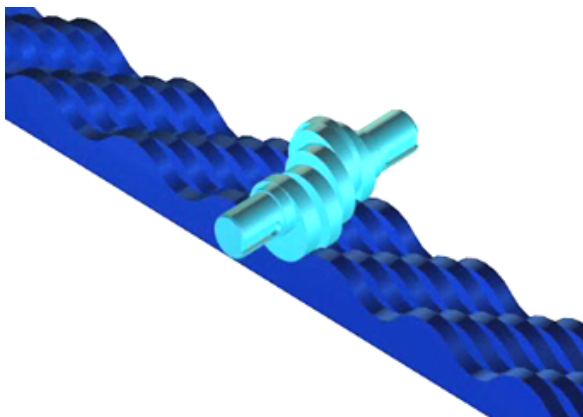


Рис.3. Внешний вид реечного передаточного механизма

где ρ – радиус окружности сечения червяка, ε – эксцентриситет (смещение центра этой окружности относительно оси), $N(\alpha)$ – вектор нормали трохоиды. Поверхность рейки образована смещениями этой кривой по осям OY и OZ :

$$Es(v, \alpha) = \begin{pmatrix} E(\alpha)_0 \\ E(\alpha)_1 - (\rho + \varepsilon)v \\ \frac{lr v}{2\pi} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Здесь lr – ширина рейки. Нужно для решения задачи семейство поверхностей образовано вращением поверхности (6) вокруг оси OY с одновременным смещением вдоль этой оси. Исходя из этого, искомое уравнение семейства поверхностей запишется в виде

$$Sem(v, \alpha, \tau) = \begin{pmatrix} \cos \tau & 0 & -\sin \tau \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \tau & 0 & \cos \tau \end{pmatrix} \left[Es(v, \alpha) + \begin{pmatrix} 0 \\ (\rho + \varepsilon)\tau \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (7)$$

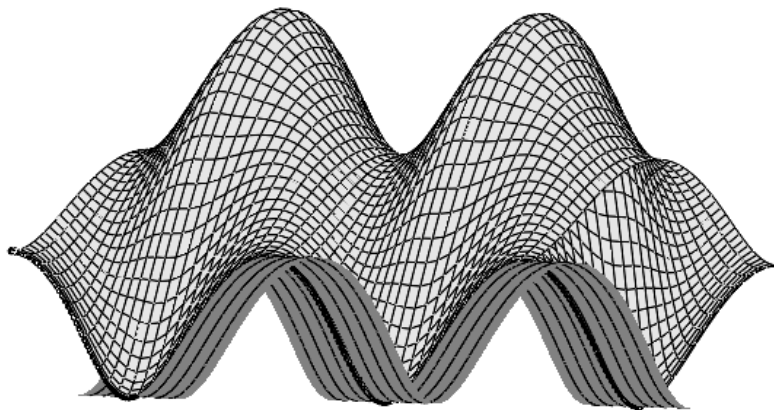


Рис.4. Поверхность входной детали механизма, найденной как огибающая, в контакте с поверхностью рейки

Необходимое условие вида (3) существования огибающей этого семейства оказывается легко разрешимо относительно параметра v :

$$v = \frac{2\pi\epsilon \sin\alpha (\rho + \epsilon) \left[-2\pi\rho^2 + 2\pi\epsilon\rho(\cos\alpha - 1) + (\lg - 2\pi\epsilon \cos(\alpha)N(\alpha)) \right]}{(\epsilon \cos(\alpha) - \rho - \epsilon) \lg^2 N(\alpha)}, \quad (8)$$

причем в это выражение не входит параметр t . Это означает, что при подстановке (8) в (7) мы получаем уравнение огибающей поверхности (червячного элемента), а при подстановке (8) в (6) – линию на поверхности рейки, по которой она касается огибающей, т.е. – характеристику. На рис. 4 изображена компьютерная иллюстрация огибающей (червячного элемента), касающейся поверхности рейки по характеристике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Патент РФ 2439401. Эксцентриково-циклоидальное зацепление зубчатых профилей (варианты) / В.В. Становской, С.М. Казакевичюс, Т.А. Ремнева, В.М. Кузнецов, А.В. Становской. Заявлено 29.01.2010; опубл. 10.01.2012, Бюлл. № 1.
2. Kazakyavichyus S.M., Stanovskoy V.V., Shcherbakov N.R., et al. Performance of eccentric-cycloid engagement with change in the interaxial distance: modification of tooth configuration // Rus. Engineering Research. 2011. V. 31. No. 3. P.197–199.
3. Залгаллер В.А. Теория огибающих. М.: Наука, 1975. 104 с.
4. Бубенчиков А.М., Щербаков Н.Р., Становской В.В. и др. Математическое моделирование работы зубчатой реечной передачи с эксцентриково-циклоидальным зацеплением // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15. № 1. С. 53–59.
5. Савелов А.А. Плоские кривые. М.: ГИФМЛ, 1960. С. 245.

Статья поступила 25.10.2012 г.

Shcherbakov N.R., Zakharkin N.V. GEOMETRICAL SIMULATION OF THE DRIVING GEAR DETAIL SURFACE AS AN ENVELOPE. The mathematical model of the hypoid driving gear on the basis of ec-gearing is under consideration. Equations are obtained for the in-coming detail surface motion that generates a family of surfaces for which one can find an exact equation of the envelope, i.e., of the out-coming detail surface. It is proved that this way of obtaining an exact equation of the out-coming detail surface can be applied for any in-coming detail surface under the condition that the family belongs to the C^2 class.

Keywords: hypoid gearing, ec-gearing, envelope of surfaces.

SHCHERBAKOV Nikolay Romanovich (Tomsk State University)

E-mail: nrs@math.tsu.ru

ZAKHARKIN Nikolay Vladimirovich (CJSC «Technology Market». Tomsk)

E-mail: znv@vtomske.ru