

УДК 532.5.013

А.Н. Ищенко, В.В. Буркин, И.М. Васенин, А.А. Шахтин

О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ В КАВИТАЦИОННОМ ПУЗЫРЕ ПРИ ВХОДЕ В ВОДУ ЧЕРЕЗ ПРЕГРАДУ

Представлены математическая модель и пример решения задачи о потере устойчивости стержня, движущегося в жидкости в режиме кавитации. Задача исследовалась на основе подхода, предложенного впервые Эйлером при рассмотрении устойчивости нагруженного стержня.

Ключевые слова: кавитация, упругий стержень, устойчивость.

При движении в жидкости удлиненного затупленного осесимметричного тела с большой скоростью вокруг тела образуется кавитационный пузырь [1]. Поэтому, фактически, вся сила сопротивления жидкости оказывается приложенной к поверхности затупления. Величину силы сопротивления можно вычислить по экспериментальной формуле [1]

$$F = 0,82S_M(1 + \sigma)\frac{\delta V^2}{2}, \tag{1}$$

где S_M – площадь затупления Миделя; δ – плотность жидкости; V – скорость стержня; $\sigma = \frac{2(P_\infty - P_0)}{\delta V^2}$ – число кавитации; P_∞ – давление на бесконечности; P_0 – давление в каверне.

Из-за силы сопротивления движение тела замедляется с ускорением:

$$a = -\frac{F}{m}, \tag{2}$$

где m – масса тела.

Если замедление всех частей тела происходит с одним и тем же ускорением a , то в произвольном сечении тела с координатой x возникает продольная сила F_x , обеспечивающая замедление части стержня, находящейся правее указанной координаты (рис. 1).

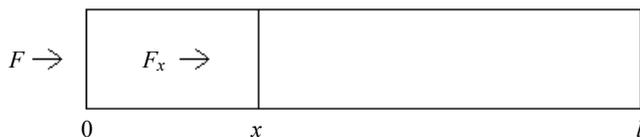


Рис. 1.

По закону Ньютона

$$F_x = -am_x,$$

где m_x – масса тела, находящегося правее координаты x . Эта сила аналогична силам гравитации, действующим на тело, опертое на твердую поверхность.

Задача о потере устойчивости осесимметричного стержня в поле сил тяжести рассмотрена в [2] на основе подхода, предложенном впервые Эйлером.

При её решении рассматривается стационарное уравнение слабого изгиба стержня в отсутствии изгибающих сил

$$E \frac{d^2}{dx^2} I \frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(F_x \frac{dY}{dx} \right), \quad (3)$$

в котором $I = \frac{\pi R^4(x)}{4}$ – момент инерции стержня в сечении x ; $R(x)$ – радиус стержня переменного сечения; E – модуль упругости; F_x – введенная выше сила напряжения, действующая в сечении x ; $Y(x)$ – малое отклонение стержня от положения равновесия.

В [2] уравнение (3) решалось с условием закрепления опертого конца ($Y = 0, Y' = 0$). На свободном конце предполагалось отсутствие моментов и срезающих сил, которые приводят к равенствам $Y'' = 0, Y''' = 0$.

При отсутствии поперечных внешних изгибающих усилий решение уравнения (3) с названными граничными условиями всегда имеет тривиальное решение $Y(x) = 0$, соответствующее стержню, остающемуся прямолинейным под воздействием продольной силы. Это решение является устойчивым до тех пор, пока сжимающая сила F меньше некоторого критического значения $F_{кр}$. При достижении величины усилия $F = F_{кр}$ решение задачи (3) становится не единственным.

На практике такая неединственность приводит к потере устойчивости.

В данном разделе методом Эйлера исследуется задача об устойчивости стержня при его входе в воду с большой скоростью через тонкую преграду. Эта задача является актуальной для изучения высокоскоростного движения тел в воде. При входе в воду метаемых тел с большой скоростью исследователи наблюдали деформацию их головной части [3] (рис. 2). Деформация может стать ограничением для высокоскоростного подводного метания и её причины заслуживают отдельного изучения.

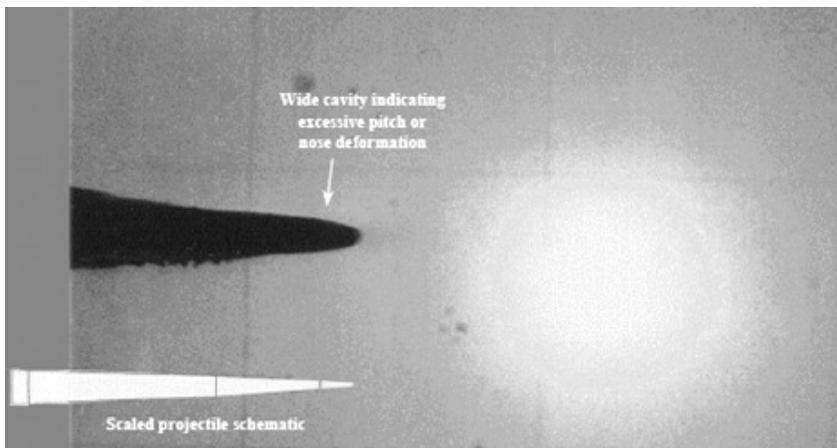


Рис. 2

На первом этапе задача решалась для цилиндрического стержня в постановке, показанной на рис. 3.

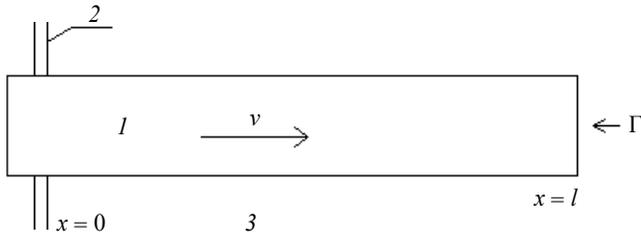


Рис. 3

В момент рассмотрения стержень 1 проникает через преграду 2 в водную среду 3 . Задний конец стержня находится в отверстии преграды, которая препятствует его перемещению в направлении, перпендикулярном вектору скорости \vec{V} : $Y'_{x=0} = 0$. Кроме того, предположим, что стержень при малых отклонениях его формы может свободно поворачиваться в отверстии как на шарнире. Данное предположение позволяет поставить еще одно граничное условие $Y''_{x=0} = 0$ (см. [2]). На свободном конце стержня в отсутствие моментов и срезающих сил примем, что $Y''_{x=l} = 0$, $Y'''_{x=l} = 0$.

Для цилиндрического стержня уравнение (3) принимает вид

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} + \frac{\rho a \pi R_0^2}{EI} \frac{d}{dx} (l-x) \frac{dY}{dx} = 0, \quad (4)$$

где ρ – плотность вещества.

Оно имеет интеграл

$$\frac{d^3 Y}{dx^3} + \frac{\rho Q \pi R_0^2}{EI} \frac{d}{dx} (l-x) \frac{dY}{dx} = C.$$

Полагая $x = l$, с учетом условия $Y'''_{x=l} = 0$ находим, что $C = 0$. Введем новую независимую переменную $\bar{x} = \frac{x}{l}$, новую функцию $u = \frac{dY}{dx}$ и обозначим

$\frac{\rho a \pi R_0^2}{EI} = Q$. Для функции u получим

$$\frac{d^2 u}{d\bar{x}^2} + Q(1-\bar{x})u = 0. \quad (5)$$

Общее решение (5) имеет вид [4]

$$u = \zeta^{\frac{1}{3}} \left[\alpha J_{\frac{1}{3}}(\zeta) + \beta J_{\frac{1}{3}}(\zeta) \right],$$

где $\zeta = \frac{2}{3} [Q(1-\bar{x})^3]^{\frac{1}{2}}$; $J_{\frac{1}{3}}(\zeta), J_{\frac{1}{3}}(\zeta)$ – функции Бесселя.

Граничные условия $Y''_{x=l} = 0, Y'''_{x=l} = 0$ для функции $u(\zeta)$ переходят в условия $\frac{du}{d\bar{x}}\Big|_{\bar{x}=0} = u'_\zeta \zeta^{\frac{1}{3}} = 0$ при $\zeta_0 = \frac{2}{3}\sqrt{Q}$ и $\frac{du}{d\bar{x}}\Big|_{\bar{x}=1} = u'_\zeta \zeta^{\frac{1}{3}} = 0$ при $\zeta = 0$. Условие $Y'''_{x=l} = u''_{\bar{x}=1} = 0$ для функции u выполняется автоматически в силу (5). При $\zeta \rightarrow 0$ $u'_\zeta \zeta^{\frac{1}{3}} = \beta \frac{2}{3} 2^{-\frac{1}{3}} \Gamma(1 + \frac{1}{3})$. Поэтому, для того чтобы удовлетворить граничному условию в

точке $\zeta = 0$, нужно положить $\beta = 0$. Следовательно, функция $u(\zeta)$ имеет вид

$$u(\zeta) = \alpha \zeta^{\frac{1}{3}} J_{\frac{1}{3}}(\zeta).$$

Подставляя сюда разложение $J_{\frac{1}{3}}(\zeta)$ в ряд по ζ , найдем

$$u(\zeta) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{\frac{1}{3}}}{k! \Gamma(k+1 - \frac{1}{3})} \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2k}.$$

Вычисляя производную $u'(\zeta)$ и подставляя ее в граничное условие при $\bar{x} = 1$, получим равенство для нахождения величины ζ_0 :

$$u'(\zeta_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{\frac{1}{3}}}{(k-1)! \Gamma(k+1 - \frac{1}{3})} \left(\frac{\zeta_0}{2}\right)^{2k-1} = 0. \quad (6)$$

Ряд, стоящий в левой части (6), очень быстро сходится. При его вычислении на ПК было найдено

$$\zeta_0 = 3,3806.$$

Выражая величину Q через ζ_0 и подставляя в Q значение ускорения a из формул (1) и (2), найдем критическую величину скорости $V_{кр}$, при которой можно ожидать потерю устойчивости стержня:

$$V_{кр} = \sqrt{\frac{9}{8} \zeta_0} \sqrt{\frac{E}{C_R \delta}} \frac{R}{l}. \quad (7)$$

В качестве примера рассчитаем критическую скорость медного стержня радиуса $R = 1,7$ мм и длиной 55 мм в воде. Полагая $C_R = 0,83$, $\rho = 1000$ кг/м³, $E = 0,9 \cdot 10^{11}$ Па, найдем $V_{кр} = 1119$ м/с.

Рассмотрим далее при тех же граничных условиях устойчивость стержня, имеющего форму усеченного конуса высоты l с радиусами оснований R_0 и r_0 . Для такого конуса момент инерции

$$I = \frac{\pi}{4} R_0^4 \left[1 - \left(1 - \frac{r_0}{R_0} \right) (1 - \bar{x}) \right]^4,$$

а сила

$$F_x = \frac{\pi R_0^2 l^3 \rho}{E} \left[(1 - \bar{x}) - \left(1 - \frac{r_0}{R_0} \right) (1 - \bar{x})^2 + \left(1 - \frac{r_0}{R_0} \right)^2 \frac{(1 - \bar{x})^3}{3} \right]. \quad (8)$$

Для таких функций искать аналитическое точное решение уравнения (3) весьма затруднительно. Поэтому, авторами для нахождения критических параметров в случае усеченного конуса применялся приближенный метод Бубнова – Галеркина. С целью обоснования применимости метода Бубнова – Галеркина к решению поставленной задачи первоначально он был опробован на решении задачи для цилиндрического стержня, решение которой приведено выше.

В качестве линейно-независимых базовых функций были выбраны функции $u_k(\bar{x}) = \cos k\pi(1 - \bar{x})$, автоматически удовлетворяющие граничным условиям $u'(0) = 0$, $u'(1) = 0$. Приближенное решение задачи для уравнения $L[u] = 0$, где $L[u] = u'' + Q(1 - \bar{x})u$, разыскивалось в виде отрезка ряда Фурье

$$u = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \pi(1 - \bar{x}) + a_2 \cos 2\pi(1 - \bar{x}).$$

После подстановки этого отрезка в (5) для нахождения коэффициентов a_i использовалась система функционалов

$$\int_0^1 L \left[\sum_{i=0}^2 a_i u_i \right] u_k d\bar{x} = 0, \quad k = 0, 1, 2. \quad (9)$$

После вычисления интегралов (9) и приведения подобных была получена система однородных линейных уравнений

$$a_0 + \frac{8}{\pi^2} a_1 = 0,$$

$$\frac{10}{9} \frac{Q}{\pi^2} a_1 + \left(\frac{Q}{4} - 2\pi^2 \right) a_2 = 0,$$

$$\left[\left(\frac{1}{4} - \frac{8}{\pi^4} \right) Q - \frac{\pi^2}{2} \right] a_1 + \frac{10}{9} \frac{Q}{\pi^2} a_2 = 0.$$

Из условия разрешимости этой системы для значения $Q_{кр}$ получилось квадратное уравнение:

$$\left(\frac{1}{16} - \frac{262}{81} \frac{1}{\pi^4} \right) Q_{кр}^2 - \left(\frac{5}{8} \pi^2 - \frac{16}{\pi^2} \right) Q_{кр} + \pi^4 = 0.$$

Был взят его меньший корень $Q_{кр} = 25,664$. Так как $\zeta_0 = \frac{2}{3} \sqrt{Q_{кр}}$, то получим $\zeta_0 = 3,3801$. Это число только в пятом знаке отличается от ранее найденного точного значения $\zeta_0 = 3,3806$.

Полученный результат послужит основанием для применения метода Бубнова-Галеркина к решению уравнения (3) с коэффициентами (8) для конического стержня. В результате однократного интегрирования и замены $\frac{dY}{dx} = u$ уравнение (3) было приведено к виду

$$\frac{d}{dx} \left[1 - \left(1 - \frac{r_0}{R_0}\right)(1 - \bar{x}) \right]^4 \frac{du}{dx} + Q \left[(1 - \bar{x}) - \left(1 - \frac{r_0}{R_0}\right)(1 - \bar{x})^2 + \left(1 - \frac{r_0}{R_0}\right)^2 \frac{(1 - \bar{x})^3}{3} \right] u = 0, \quad (10)$$

$$\text{где } Q = \frac{\rho \pi R_0^2 l^3}{E \left(\frac{\pi R_0^4}{4} \right)}.$$

Задача для уравнения (10) с граничными условиями $u'(0) = 0$, $u'(1) = 0$ решалась методом Бубнова – Галеркина с теми же базисными функциями, которые применялись при решении задачи для цилиндрического стержня. При этом интегралы, входящие в систему (9), вычислялись численно. Критическая величина $Q_{\text{кр}}$, как и в первом случае цилиндрического стержня, находилась из условия разрешимости линейных уравнений для коэффициентов a_i . Для случая $\frac{r_0}{R_0} = 0,3$ была найдена величина $Q_{\text{кр}} = 2,760$.

Ускорение a находилось из (2) для силы F из (1) и массы усеченного конуса

$$m = \rho \pi R_0^2 l \left[1 - \left(1 - \frac{r_0}{R_0}\right) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{r_0}{R_0}\right)^2 \right].$$

После подстановки a в выражение для Q было получено

$$Q_{\text{кр}} = \frac{2C_R \delta u_{\text{кр}}^2 l^2 \left(\frac{r_0}{R_0} \right)^2}{ER_0^2 \left[1 - \left(1 - \frac{r_0}{R_0}\right) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{r_0}{R_0}\right)^2 \right]}.$$

Из этого соотношения находилась критическая скорость

$$u_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{Q_{\text{кр}}}{2}} \sqrt{\frac{E \left[1 - \left(1 - \frac{r_0}{R_0}\right) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{r_0}{R_0}\right)^2 \right]}{C_R \delta}} \frac{R_0^2}{r_0 l}. \quad (11)$$

Для медного стержня с $r_0 = 0,00075$ м, $R_0 = 0,0026$ м, $E = 9 \cdot 10^{11}$ Па, $\delta = 1000$ кг/м³, $C_R = 0,83$ по формуле (11) получим $u_{\text{кр}} = 1290$ м/с.

Проведенное исследование объясняет экспериментальные результаты по деформации стержней при их входе в воду через преграду со скоростями, превышающими 1000 м/с.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Савченко Ю.Н.* Моделирование суперкавитационных процессов. // Прикладна гідромеханіка. 2000. № 2(74). С. 75–86.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
3. *Kirschner Ivan.* Results of selected experiments involving supercavitating flows // High Speed Body Motion in Water. RTO EN, Belgium, 2001. P. 15-1 – 15-14.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 1961. 703 с.

Статья поступила 26.10.2012 г.

Ishchenko A. N., Burkin V. V., Vasenin I. M., Shakhtin A. A. ON THE LOSS OF STABILITY OF A ROD IN A CAVITATION BUBBLE WHEN ENTERING INTO WATER THROUGH A BARRIER. A mathematical model and an example of a solution for the problem about the loss of stability of a rod moving in a liquid in the cavitation mode are presented. The problem was considered based on the approach proposed for the first time by Euler when considering the stability of a loaded rod.

Keywords: Cavitation, elastic rod, stability

ISHCHENKO Alexander Nikolaevich (Tomsk State University)

E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

BURKIN Victor Vladimirovich (Tomsk State University)

E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

VASENIN Igor' Mihailovich (Tomsk State University).

E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

SHAKHTIN Andrey Anatolyevich (Tomsk State University).

E-mail: shahtin@sibmail.com