ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2013 Управление, вычислительная техника и информатика № 2(23)

УДК 519.872

А.Н. Моисеев, А.А. Назаров

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ HIGI|GI|∞[1]

В работе представлено исследование системы массового обслуживания с высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком, неограниченным числом обслуживающих приборов и произвольным временем обслуживания. Показано, что в условии неограниченного роста интенсивности входящего потока стационарное распределение числа занятых приборов можно аппроксимировать нормальным распределением. Получены характеристики этого распределения.

Ключевые слова: *система массового обслуживания, высокоинтенсивный рекуррентный поток, метод асимптотического анализа.*

Модели теории массового обслуживания возникли [1] как адекватное математическое описание телекоммуникационных процессов и в настоящее время используются для описания и анализа процессов, возникающих в различных областях деятельности человека. Одной из важнейших областей применения моделей массового обслуживания являются компьютерные сети [2]. В связи с бурным ростом телекоммуникационных технологий объемы данных, передаваемых по сетям связи, очень велики и зачастую намного превышают возможности систем их обработки. В силу этого, нам представляется актуальным введение понятия «высокоинтенсивный поток» [3] и использование его для представления входящего потока требований в системе обработки информации, модель которой представлена в виде системы массового обслуживания.

1. Постановка задачи. Метод просеянного потока

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов [4], на вход которой поступает высокоинтенсивный рекуррентный (HIGI) поток заявок [3]. Длины τ интервалов между последовательным поступлением заявок из этого потока независимы и одинаково распределены. Функция распределения значений τ описывается следующим образом. Представим τ в виде $\tau = \xi / N$, где ξ – некоторая неотрицательная случайная величина с функцией распределения $A(z)$, а параметр $N > 0$ имеет смысл большой величины (в теоретических исследованиях предполагается, что $N \to \infty$). Тогда $\mathrm{P}\{\tau < x\} = A(Nx)$.

Пусть $\eta = \mathrm{M}\{\tau\}$ – средняя длина интервала между моментами поступления заявок в систему, тогда интенсивность наступления событий во входящем потоке равна $1 / \eta = N\lambda$, где

$$\lambda = \frac{1}{\mathrm{M}\{\xi\}} = \left[\int_0^\infty \left(1 - A(z)\right) dz \right]^{-1}.$$

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ на проведение научных исследований в Томском государственном университете на 2012–2014 годы, задание 8.4055.2011.

Длительности интервалов обслуживания независимы, одинаково распределены и имеют функцию распределения $B(x)$.

В данной работе воспользуемся методом просеянного потока [5]. Вкратце изложим его суть. Зафиксируем некоторый момент времени T. Будем считать, что заявка, поступившая в систему в момент времени $t < T$, с вероятностью $S(t) = 1 - B(T-t)$ формирует событие просеянного потока, а с вероятностью $1 - S(t)$ не рассматривается. Введем следующие обозначения:

$i(t)$ – число приборов, занятых в системе в момент времени t;

$n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших к моменту времени t.

Основная идея метода просеянного потока заключается в следующем. Полагаем, что в начальный момент времени t_0 система свободна (этого можно достичь, взяв, например, в качестве начала отсчета момент времени $t_0 = -\infty$). Получаем [5], что для момента времени T имеет место равенство

$$i(T) = n(T), \tag{1}$$

то есть число приборов, занятых в системе в момент времени T, равно числу событий просеянного потока, наступивших до момента T. Таким образом, найдя характеристики случайного процесса $n(t)$ и полагая $t = T$, в силу (1) получим соответствующие характеристики сечения исследуемого процесса $i(t)$ в момент времени T.

Для системы, функционирующей в стационарном режиме, полагая $t_0 = -\infty$, в силу произвольности выбора момента T, в качестве результата получаем стационарное распределение для процесса $i(t)$.

2. Вывод уравнения Колмогорова

Обозначим через $z(t)$ длину интервала времени от момента t до момента поступления новой заявки входящего потока. Покажем, что двумерный случайный процесс $\{n(t), z(t)\}$ является марковским, так как для него выполняется основное марковское свойство [6]: при фиксированном «настоящем» «будущее» и «прошлое» независимы.

Зафиксируем «настоящее», то есть положим $n(t) = n, z(t) = z$. В силу построения в течение интервала времени $[t, t + z)$ значение компоненты $n(t)$ этого процесса не меняется, а значение компоненты $z(t)$ линейно убывает от величины z в момент времени t до нуля в момент времени $t + z$. В этот момент времени поступает новая заявка входящего потока, которая с вероятностью $1 - S(t + z)$ не рассматривается, и в этом случае значение компоненты $n(t)$ не меняется: $n(t + z) = n$. С вероятностью же $S(t + z)$ данная заявка формирует событие просеянного потока и компонента $n(t)$ увеличивается на 1: $n(t + z) = n + 1$. Таким образом, значение компоненты $n(t)$ в любой момент времени $t_1 > t$ не зависит от значений $n(t_1)$ и $z(t_1)$ для моментов $t_1 < t$. Компонента $z(t)$ в момент времени $t + z$ принимает случайное значение, равное длине интервала до момента наступления следующего события во входящем потоке. Так как интервалы между наступлениями событий во входящем рекуррентном потоке являются независимыми случайными величинами, то значения компоненты $z(t)$ в моменты времени $t_1 > t$ также не зависят от значений $n(t_1)$ и $z(t_1)$ для моментов $t_1 < t$.

Таким образом, указанное выше основное марковское свойство для рассматриваемого двумерного процесса $\{n(t), z(t)\}$ полностью выполняется, т.е. указанный процесс является марковским.

Обозначим распределение вероятностей значений этого процесса через

$$P(n,z,t) = P\{n(t) = n, z(t) < z / N\}.$$

Применяя формулу полной вероятности, для этого распределения можно записать равенство

$$P(n,z,t+\Delta t)=P(n,z+N\Delta t,\ t)-P(n,\ N\Delta t,\ t)+P(n-1,N\Delta t,t)A(z)S(t)+$$
$$+P(n,\ N\Delta t,\ t)A(z)-P(n,N\Delta t,t)A(z)S(t)+o(\Delta t).$$

Отсюда получаем уравнение Колмогорова

$$\frac{1}{N}\frac{\partial P(n,z,t)}{\partial t}=\frac{\partial P(n,z,t)}{\partial z}+\frac{\partial P(n,0,t)}{\partial z}\left[A(z)-1-A(z)S(t)\right]+$$
$$+\frac{\partial P(n-1,0,t)}{\partial z}A(z)S(t) \qquad (2)$$

(здесь и далее используется обозначение $\dfrac{\partial P(n,0,t)}{\partial z}=\left.\dfrac{\partial P(n,z,t)}{\partial z}\right|_{z=0}$).

Просуммируем уравнение (2) по $n=\overline{0,\infty}$, получим

$$\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty}P(n,z,t)=\frac{\partial}{\partial z}\sum_{n=0}^{\infty}P(n,z,t)+\left[A(z)-1-A(z)S(t)\right]\frac{\partial}{\partial z}\sum_{n=0}^{\infty}P(n,0,t)+$$
$$+A(z)S(t)\frac{\partial}{\partial z}\sum_{n=1}^{\infty}P(n-1,0,t). \qquad (3)$$

Здесь $\sum\limits_{n=0}^{\infty}P(n,z,t)=P\left\{z(t)<\dfrac{z}{N}\right\}$ – распределение вероятностей значений случайного процесса $z(t)$, которое в стационарном режиме обозначим через $R(z)$. В результате в (3) получаем

$$0=\frac{dR(z)}{dz}+\frac{dR(0)}{dz}\left[A(z)-1-A(z)S(t)\right]+\frac{dR(0)}{dz}A(z)S(t)$$

или

$$\frac{dR(z)}{dz}=\frac{dR(0)}{dz}\left[1-A(z)\right]. \qquad (4)$$

Отсюда

$$R(z)=\frac{dR(0)}{dz}\int_0^z\left(1-A(x)\right)dx\,.$$

причем $R(\infty)=1$, а $\int\limits_0^{\infty}\left(1-A(x)\right)dx=\dfrac{1}{\lambda}$. В результате $\dfrac{dR(0)}{dz}=\lambda$ и решение уравнения (4) имеет вид

$$R(z)=\lambda\int_0^z\left(1-A(x)\right)dx\,.$$

3. Асимптотический анализ

Умножим левую и правую части уравнения (2) на величину e^{jun}, где $j=\sqrt{-1}$, а u – некоторая переменная, и просуммируем по $n=\overline{0,\infty}$. Тогда, введя обозначение

$$H(u,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{jun}P(n,z,t)\,,$$

для этой функции получим

$$\frac{1}{N}\frac{\partial H(u,z,t)}{\partial t}=\frac{\partial H(u,z,t)}{\partial z}+\frac{\partial H(u,0,t)}{\partial z}\left[A(z)-A(z)S(t)-1\right]+e^{ju}\frac{\partial H(u,0,t)}{\partial z}A(z)S(t)=$$

$$=\frac{\partial H(u,z,t)}{\partial z}+\frac{\partial H(u,0,t)}{\partial z}\left[A(z)-1+A(z)S(t)\left(e^{ju}-1\right)\right].$$

В этом уравнении выполним замену

$$H(u,z,t)=H_2(u,z,t)\exp\left\{juN\lambda\int_{t_0}^{t}S(x)dx\right\},$$

получим уравнение относительно функции $H_2(u, z, t)$:

$$\frac{1}{N}\frac{\partial H_2(u,z,t)}{\partial t}+ju\lambda S(t)H_2(u,z,t)=$$

$$=\frac{\partial H_2(u,z,t)}{\partial z}+\frac{\partial H_2(u,0,t)}{\partial z}\left[A(z)-1+A(z)S(t)\left(e^{ju}-1\right)\right]. \qquad (5)$$

Уравнение (5) будем решать методом асимптотического анализа [5]. Введем обозначение $\varepsilon^2=\frac{1}{N}$ и выполним замены $u=\varepsilon w$ и $H_2(u, z, t) = F(w, z, t, \varepsilon)$. Тогда уравнение (5) перепишется в виде

$$\varepsilon^2\frac{\partial F(w,z,t,\varepsilon)}{\partial t}+j\varepsilon w\lambda S(t)F(w,z,t,\varepsilon)=$$

$$=\frac{\partial F(w,z,t,\varepsilon)}{\partial z}+\frac{\partial F(w,0,t,\varepsilon)}{\partial z}\left[A(z)-1+A(z)S(t)\left(e^{j\varepsilon w}-1\right)\right]. \qquad (6)$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема. Предельное при $\varepsilon \to 0$ значение $F(w, z, t)$ решения $F(w, z, t, \varepsilon)$ уравнения (6) имеет вид

$$F(w,z,t)=R(z)\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\left[\lambda\int_{t_0}^{t}S(x)dx+\kappa\int_{t_0}^{t}S^2(x)dx)\right]\right\},$$

где $$\kappa=\lambda^3(\sigma^2-a^2), \qquad (7)$$

a и σ^2 – математическое ожидание и дисперсия случайной величины с функцией распределения $A(x)$.

Доказательство выполним в три этапа.

Этап 1. Положим в (6) $\varepsilon \to 0$, получим

$$\frac{\partial F(w,z,t)}{\partial z}+\frac{\partial F(w,0,t)}{\partial z}\left[A(z)-1\right]=0.$$

Это уравнение имеет такой же вид, как и (4), поэтому очевидно, что функция $F(w, z, t)$ может быть представлена как

$$F(w,z,t)=R(z)\Phi(w,t), \qquad (8)$$

где $\Phi(w, t)$ – некоторая функция, не зависящая от z.

Этап 2. Решение уравнения (6) будем искать в виде разложения

$$F(w,z,t,\varepsilon)=\Phi(w,t)\left[R(z)+j\varepsilon wS(t)f(z)\right]+O(\varepsilon^2), \qquad (9)$$

где $f(z)$ – некоторая функция, $O(\varepsilon^2)$ – бесконечно малая величина порядка ε^2. Подставим это выражение в (6), получим

$$j\varepsilon w\lambda S(t)\Phi(w,t)R(z)=\Phi(w,t)\left\{\frac{dR(z)}{dz}+j\varepsilon w\frac{df(z)}{dz}S(t)+\frac{dR(0)}{dz}\left[A(z)-1\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{dR(0)}{dz}j\varepsilon wA(z)S(t)+j\varepsilon w\frac{df(0)}{dz}S(t)\left[A(z)-1\right]\right\}+O(\varepsilon^2)$$

(здесь было использовано разложение $e^{j\varepsilon w}=1+j\varepsilon w+O(\varepsilon^2)$). Учитывая (4), приведя подобные и сократив обе части на $j\varepsilon w$, запишем

$$\lambda R(z)=\frac{df(z)}{dz}+\frac{df(0)}{dz}\left[A(z)-1\right]+\lambda A(z)+O(\varepsilon).$$

Отсюда при $\varepsilon\to 0$ получаем дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $f(z)$

$$\frac{df(z)}{dz}=\frac{df(0)}{dz}\left[1-A(z)\right]-\lambda\left[A(z)-R(z)\right],$$

решение которого дает следующий результат [3]:

$$\frac{df(0)}{dz}-\lambda f(\infty)=\frac{\lambda^3}{2}\int_0^\infty z^2dA(z)-\lambda=\frac{\kappa}{2},\tag{10}$$

где величина κ определяется по формуле (7).

Этап 3. В (6) сделаем предельный переход при $z\to\infty$. В силу способа построения функции $F(w, z, t, \varepsilon)$ она является монотонно возрастающей и ограниченной сверху функцией по z. Следовательно,

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\partial F(w,z,t,\varepsilon)}{dz}=0.$$

Учитывая это и применяя разложение $e^{j\varepsilon w}=1+j\varepsilon w+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}+O(\varepsilon^3)$, получаем:

$$\varepsilon^2\frac{\partial F(w,\infty,t,\varepsilon)}{\partial t}+j\varepsilon w\lambda S(t)F(w,\infty,t,\varepsilon)=\frac{\partial F(w,0,t,\varepsilon)}{\partial z}S(t)\left(j\varepsilon w+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}+O(\varepsilon^3)\right).$$

Подставим сюда разложение (9) функции $F(w, z, t, \varepsilon)$ при $z = \infty$, имеем

$$\varepsilon^2\frac{\partial\Phi(w,t)}{\partial t}+j\varepsilon w\lambda S(t)\Phi(w,t)+(j\varepsilon w)^2\lambda S(t)f(\infty)\Phi(w,t)=$$
$$=\Phi(w,t)S(t)\left(j\varepsilon w\lambda+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\lambda+(j\varepsilon w)^2S(t)\frac{df(0)}{dz}\right)+O(\varepsilon^3).$$

Приводя подобные и сокращая на ε^2, получаем

$$\frac{\partial\Phi(w,t)}{\partial t}=\frac{(jw)^2}{2}\Phi(w,t)\left[\lambda S(t)+2S^2(t)\left(\frac{df(0)}{dz}-\lambda f(\infty)\right)\right]+O(\varepsilon).$$

Учитывая (10) и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, имеем дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\Phi(w,t)$:

$$\frac{\partial\Phi(w,t)}{\partial t}=\frac{(jw)^2}{2}\Phi(w,t)\left[\lambda S(t)+\kappa S^2(t)\right].$$

Решение этого уравнения с учетом начального условия $\Phi(w, t_0) = 1$, которое получается из условия

$$P(n,z,t_0) = \begin{cases} R(z) & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n > 0, \end{cases}$$

имеет вид

$$\Phi(w,t) = \exp\left\{ \frac{(jw)^2}{2} \left[\lambda \int_{t_0}^{t} S(x)dx + \kappa \int_{t_0}^{t} S^2(x)dx \right] \right\},$$

где величина κ определяется формулой (7). Отсюда в силу (8)

$$F(w,z,t) = R(z) \exp\left\{ \frac{(jw)^2}{2} \left[\lambda \int_{t_0}^{t} S(x)dx + \kappa \int_{t_0}^{t} S^2(x)dx \right] \right\},$$

что и требовалось доказать.

4. Стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов

Возвращаясь к функции $H(u, z, t)$, получаем, что при достаточно больших значениях N

$$H(u,z,t) \approx R(z) \exp\left\{ juN\lambda \int_{t_0}^{t} S(x)dx + \frac{(ju)^2}{2} N \left[\lambda \int_{t_0}^{t} S(x)dx + \kappa \int_{t_0}^{t} S^2(x)dx \right] \right\}.$$

Функция $h(u,t) = \lim\limits_{z \to \infty} H(u,z,t)$ есть характеристическая функция для процесса $n(t)$ – числа событий, наступивших в просеянном потоке к моменту времени t. При достаточно больших значениях N она имеет вид характеристической функции гауссовского распределения:

$$h(u,t) \approx \exp\left\{ juN\lambda \int_{t_0}^{t} S(x)dx + \frac{(ju)^2}{2} N \left[\lambda \int_{t_0}^{t} S(x)dx + \kappa \int_{t_0}^{t} S^2(x)dx \right] \right\},$$

то есть распределение для $n(t)$ в момент времени t аппроксимируется нормальным распределением с математическим ожиданием

$$N\lambda \int_{t_0}^{t} S(x)dx$$

и дисперсией

$$N\lambda \int_{t_0}^{t} S(x)dx + N\kappa \int_{t_0}^{t} S^2(x)dx .$$

Полагая $t = T$, $t_0 = -\infty$, используя (1) и произвольность выбора момента T, получаем, что распределение вероятностей числа занятых приборов в рассматриваемой системе в стационарном режиме аппроксимируется нормальным распределением с математическим ожиданием $N\lambda b$ и дисперсией $(N\lambda b + N\kappa\beta)$, где

$$b = \int_{-\infty}^{T} S(x)dx = \int_{0}^{\infty} \left(1 - B(\tau)\right) d\tau$$

есть среднее время обслуживания, а

$$\beta = \int_{-\infty}^{T} S^2(x)dx = \int_{0}^{\infty} \left(1 - B(\tau)\right)^2 d\tau .$$

5. Численные результаты

Наиболее интересным является вопрос применимости полученной гауссовской аппроксимации на практике. Очевидно, что точность данной аппроксимации определяется величиной параметра N и улучшается по мере его увеличения. Поскольку получение аналитических формул, явно выражающих или оценивающих точность данного приближения, затруднено, будем производить сравнение асимптотических результатов с результатами имитационного моделирования. В качестве величины для оценки точности аппроксимации распределения выберем расстояние Колмогорова [7]

$$D_q = \sup_x \left| F_q(x) - F(x) \right| .$$

Здесь q – объем выборки, полученной по результатам имитационного моделирования, $F_q(x)$ – эмпирическая функция распределения для данной выборки, $F(x)$ – функция распределения для нормальной случайной величины с найденными выше характеристиками.

Указанное моделирование и расчеты были выполнены для различных примеров. Приведем здесь результаты для одного из них. Рассматривается система массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает высокоинтенсивный рекуррентный поток. Длины интервалов между поступлением заявок в этом потоке равны (см. п.1) $\tau = \xi / N$, где ξ – случайная величина, имеющая гамма-распределение с математическим ожиданием равным 1 и дисперсией равной 3. Время обслуживания заявки в системе является случайной величиной, имеющей гамма-распределение с математическим ожиданием 1 и дисперсией 2.

В таблице приведено сравнение результатов аналитических расчетов и имитационного моделирования для различных значений параметра N:

N	Аналитический расчет		Имитационное моделирование		Расстояние Колмогорова
	среднее	ср.кв. отклонение	среднее	ср.кв. отклонение	
1	1	1,442	0,9887	1,330	0,3604
10	10	4,559	9,908	4,392	0,0892
30	30	7,896	30,15	7,824	0,0399
100	100	14,42	100,3	14,55	0,0227
1000	1000	45,59	1001	45,21	0,0119
10000	10000	144,2	9986	143,1	0,0094

На графиках (рис. 1) представлено сравнение полигона относительных частот, построенного по результатам имитационного моделирования, и ряда распределения, полученного на основе гауссовской аппроксимации, для значений $N = 1$, 10, 30, 100.

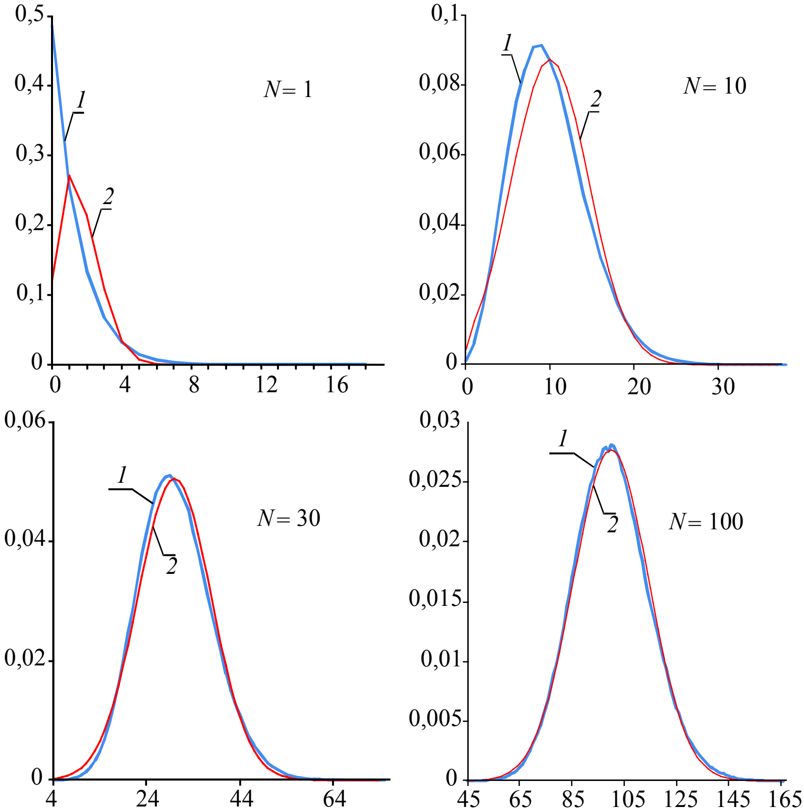

Рис. 1. Сравнение полигона относительных частот (*1*)
и аппроксимирующего ряда распределения (*2*)

График на рис. 2 демонстрирует убывание расстояния D_q в зависимости от параметра N.

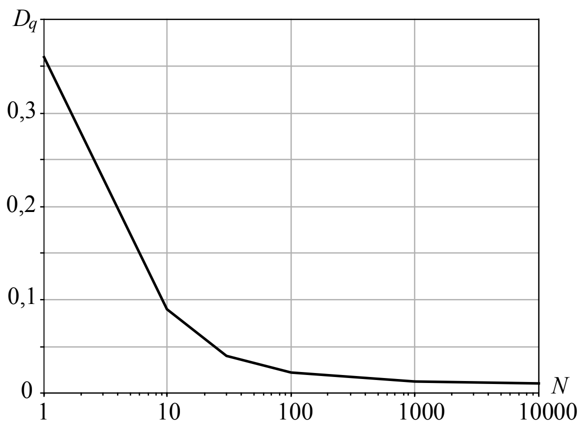

Рис. 2. Изменение расстояния Колмогорова D_q
в зависимости от параметра N (шкала по N – логарифмическая)

На основе сравнения полученных результатов можно сделать вывод, что полученные в работе асимптотические формулы дают достаточно хорошую ($D_q < 0{,}05$) аппроксимацию при значениях параметра N от 30 и выше.

Заключение

Итак, в работе проведено исследование системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов, произвольным временем обслуживания и высокоинтенсивным входящим рекуррентным потоком. Показано, что в условии неограниченно растущей интенсивности входящего потока стационарное распределение числа занятых приборов аппроксимируется нормальным распределением, получены характеристики этого распределения. Анализ результатов, полученных по асимптотическим формулам и на основе имитационного моделирования, свидетельствует о достаточно низкой погрешности представленной в работе гауссовской аппроксимации при значениях $N \geq 30$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jackson J.R.* Networks of waiting lines // Operations Research. 1957. No. 5. P. 518–521.
2. *Вишневский В.М.* Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М.: Техносфера, 2003. 512 с.
3. *Moiseev A.*, *Nazarov A.* Investigation of high intensive general flow // Proc. IV International Conference “Problems of Cybernetics and Informatics” (PCI’2012), September 12–14, 2012, Baku, Azerbaijan. Baku: ANAS, 2012. P. 161–163.
4. *Гнеденко Б.В.*, *Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. Изд. 4-е, испр. М.: Изд-во ЛКИ, 2007. 400 с.
5. *Назаров А.А.*, *Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
6. *Бочаров П.П.*, *Печинкин А.В.* Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995. 529 с.
7. *Рыков В.В.*, *Иткин В.Ю.* Математическая статистика и планирование эксперимента: уч. пособие. М.: МАКС Пресс, 2010. 308 с.

Моисеев Александр Николаевич
Назаров Анатолий Андреевич
Томский государственный университет
E-mail: alexander-moiseev@mail.ru; nazarov.tsu@gmail.com Поступила в редакцию 14 декабря 2012 г.

Moiseev Alexander N., *Nazarov Anatoly A.* (Tomsk State University). **Investigation of the queuing system HIGI|GI|∞.**

Keywords: queuing system, high intensive general independent flow, asymptotical analysis method.

Queuing system with high intensive recurrent input flow, infinite number of servers and arbitrary distributed service time is considered in the paper. Time periods τ between consecutive input arrivals are defined by distribution function $P\{\tau < x\} = A(Nx)$, where N is a great number ($N \to \infty$ in theory). Service time is a random variable with distribution function $B(x)$.

The system was investigated under condition of unbound growth ($N \to \infty$) of input rate by the using of the asymptotical analysis and the dynamical screening methods. It was shown that stationary distribution of busy servers in condition when N is great enough can be approximated by normal distribution with mean $N\lambda b$ and variance ($N\lambda b + N\kappa\beta$), where $b = \int_0^\infty (1 - B(\tau))\,d\tau$ is an average service time, $\beta = \int_0^\infty (1 - B(\tau))^2\,d\tau$, $\lambda = [\int_0^\infty (1 - A(z))dz]^{-1}$, $\kappa = \lambda^3(\sigma^2 - a^2)$, a is mean and σ^2 is variance of the random variable with distribution function $A(x)$.