

Секция 3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ
БЕЗОПАСНОСТИ И НАДЁЖНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ
И УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

УДК 519.718

ОБ ОЦЕНКАХ НЕНАДЁЖНОСТИ СХЕМ
ПРИ ИНВЕРСНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ
И ОТКАЗАХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ¹

М. А. Алехина, О. Ю. Барсукова

Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадёжных функциональных элементов в произвольном полном базисе B . Предполагается, что все элементы схемы независимо друг от друга переходят в неисправные состояния двух типов (инверсные неисправности и отказ элементов). Получены верхние и нижние асимптотические оценки ненадёжности схем.

Ключевые слова: булевы функции, функциональный элемент, схема, ненадёжность схемы, инверсные неисправности на выходах элементов, отказ элемента.

Рассмотрим реализацию булевых функций неприводимыми [1] схемами из ненадёжных функциональных элементов в произвольном полном конечном базисе B . Будем считать, что неприводимая схема из ненадёжных элементов реализует функцию $f(x)$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$), если при поступлении на входы схемы набора a при отсутствии неисправностей в схеме на её выходе появляется значение $f(a)$. Предполагается, что каждый элемент схемы независимо от других элементов переходит в неисправное состояние первого или второго типа. Неисправность первого типа (отказ элемента) появляется на любом входном наборе элемента с вероятностью $\delta \in (0, 1/2)$ и характеризуется тем, что элемент не работает. Считаем, что в этом случае вся схема не работает и значение на её выходе не определено. Неисправность второго типа характеризуется тем, что в исправном состоянии базисный элемент реализует приписанную ему функцию φ , а в неисправном состоянии — функцию $\bar{\varphi}$, т.е. неисправности второго типа — инверсные неисправности на выходах элементов. Эти неисправности также статистически независимы, появляются независимо друг от друга с вероятностью $\varepsilon \in (0, 1/2)$.

Таким образом, если E_φ — базисный элемент с функцией $\varphi(x_1, \dots, x_m)$, подверженный рассматриваемым неисправностям, то на любом входном наборе $(a_1, \dots, a_m)$ вероятность отказа элемента равна δ ; вероятность появления значения $\bar{\varphi}(a_1, \dots, a_m)$ (ошибки) на выходе элемента равна $\varepsilon(1 - \delta)$; вероятность появления правильного значения $\varphi(a_1, \dots, a_m)$ равна $(1 - \varepsilon)(1 - \delta)$.

Пусть $f(x)$ — произвольная булева функция, а S — любая схема, реализующая $f(x)$. Пусть a — произвольный входной набор схемы S , $b = f(a)$ ($b \in \{0, 1\}$). Обозначим через $P_{\text{отк}}(S, a)$ и $P_{\bar{b}}(S, a)$ соответственно вероятности отказа схемы S и появления $\bar{b}$ (ошибки) на выходе схемы S при входном наборе a . Очевидно, что вероятность $P_{\text{отк}}(S, a)$ не

¹Исследование поддержано грантами РФФИ, проекты № 11-01-00212, 12-01-31340.

зависит ни от входного набора a , ни от структуры схемы S , а зависит только от числа $|S|$ элементов в схеме S : $P_{\text{отк}}(S, a) = 1 - (1 - \delta)^{|S|}$. Поэтому далее вместо $P_{\text{отк}}(S, a)$ будем писать $P_{\text{отк}}(S)$, называя вероятность $P_{\text{отк}}(S)$ *вероятностью отказа схемы S* . *Ненадёжностью схемы S* будем называть число $P_{\varepsilon, \delta}(S) = \max_a \{P_{\varepsilon}(S, a)\}$, где максимум берётся по всем входным наборам a схемы S .

Цель работы — получить верхние и нижние асимптотические оценки ненадёжности. Чтобы сформулировать полученные результаты (теорема 1), введём необходимые и ранее известные определения для случая $\delta = 0$.

Пусть $P_{\varepsilon, 0}(f) = \inf P_{\varepsilon, 0}(S)$, где инфимум берётся по всем схемам S из ненадёжных элементов, реализующим булеву функцию f . Схема A из ненадёжных элементов, реализующая функцию f , называется *асимптотически оптимальной по надёжности*, если $P(A) \sim P_{\varepsilon, 0}(f)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P_{\varepsilon, 0}(f)}{P(A)} = 1$.

Пусть f — произвольная булева функция. Число $k_B(f)$ будем называть *коэффициентом ненадёжности функции f* , если выполняются два условия одновременно: 1) функцию f в базисе B можно реализовать схемой с ненадёжностью, асимптотически не больше $\varepsilon k_B(f)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и 2) ненадёжность любой схемы, реализующей f в базисе B , асимптотически не меньше чем $\varepsilon k_B(f)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Например, $k_B(x_i) = 0$, ($i \in \{1, \dots, n\}$); $k_B(\varphi) = 1$, если φ — одна из функций базиса B . Очевидно, что коэффициент ненадёжности функции зависит только от базиса и самой функции. Известно [2], что в любом полном конечном базисе B для любой функции f число $k_B(f) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Коэффициентом ненадёжности базиса B будем называть число $k_B = \max k_B(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f .

Очевидно, что при инверсных неисправностях на выходах элементов в любом базисе B любая схема, содержащая хотя бы один элемент, имеет ненадёжность не меньше ε , т. е. $k_B \geq 1$. Поэтому $k_B \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Например, известно, что если полный базис B содержит функцию голосования, то $k_B = 1$. Кроме того [2], если 1) $B = \{xy, x \oplus y, 1\}$, то $k_B = 2$; 2) $B = \{\bar{x}y, \bar{x} \vee y\}$, то $k_B = 3$; 3) $B = \{\bar{x}y, \bar{x}\}$, то $k_B = 4$; 4) $B = \{xy, \bar{x}\}$, то $k_B = 5$.

Пусть B — произвольный полный конечный базис, а K — множество функций f , для которых $k_B(f) = k_B$. Справедлива

Теорема 1. В базисе B любую функцию f можно реализовать такой неприводимой схемой S , что $P_{\varepsilon, \delta}(S) \lesssim \varepsilon k_B(1 - \delta)^{|S|}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$; и для любой функции $h \in K$ и любой схемы A , реализующей h , верно неравенство $P_{\varepsilon, \delta}(A) \gtrsim \varepsilon k_B(1 - \delta)^{|A|}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
2. Васин А. В. Асимптотически оптимальные по надёжности схемы в полных базисах из трехходовых элементов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Пенза, 2010.