Следствие 1. Любая ориентация цепи с числом вершин $n > 4$, отличная от гамильтоновой цепи, имеет минимальное вершинное 1-расширение с не менее чем четырьмя дополнительными дугами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C-25. No. 9. P. 875–884.
2. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.
3. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. Т. 88. Вып. 5. С. 643–650.
4. *Абросимов М. Б.* Минимальные вершинные расширения направленных звезд // Дискретная математика. 2011. № 23:2. С. 93–102.

УДК 519.172.3, 519.68

СВОЙСТВА ГЕННЫХ СЕТЕЙ ЦИРКУЛЯНТНОГО ТИПА С ПОРОГОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Ц. Ч.-Д. Батуева

Описан алгоритм нахождения всех неподвижных точек графа состояний генной сети циркулянтного типа с произвольной булевой функцией. Описаны все истоки графа состояний генной сети с пороговой функцией от k переменных, такой, что существует единственный набор v, для которого $f(v) = 1$. Для таких функций от трёх переменных описаны все циклы графа состояний и вычислены длины максимальных цепочек до цикла.

Ключевые слова: *генная сеть, ориентированный граф, пороговая функция, граф состояний отображения, цикл, неподвижная точка, исток графа состояний.*

Пусть $n \geqslant k$ — натуральные числа. *Циклическим словом* называется периодическое бесконечное в две стороны слово с периодом n; обозначается $a_1a_2\ldots a_n$. Множество всех циклических слов длины n будем обозначать через Ω_n.

Рассмотрим ориентированный граф $G_{n,k+1} = \langle V, E\rangle$, где множество вершин V равно $\{v_1,\ldots,v_n\}$ (последовательность вершин соответствует циклическому слову), а множество рёбер E такое, что каждая вершина v_i имеет входящие рёбра из k предыдущих вершин и выходящие в k следующих вершин.

Пороговой функцией называется булева функция, которая представима в виде $f(x_1,\ldots,x_k) = \left[\sum\limits_{i=1}^{k} a_ix_i > T\right]$, где a_i — вес аргумента x_i, а T — порог функции f; $a_i, T \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим пороговую функцию f, зависящую от k переменных. Построим отображение $A_f : \Omega_n \to \Omega_n$, которое каждому слову $a_1a_2\ldots a_n$ ставит в соответствие слово $b_1b_2\ldots b_n$, если

$$b_i = f(a_{i-k}, a_{i-k+1}, \ldots, a_{i-1})$$

для всех $i \in \{1,\ldots,n\}$. *Неподвижной точкой* отображения A_f называется слово α, такое, что $\alpha = A_f(\alpha)$.

Циклическое слово α называется *истоком* для отображения $A_f : \Omega_n \to \Omega_n$, если не существует слова β, такого, что $A_f(\beta) = \alpha$.

Графом состояний отображения $A_f : \Omega_n \to \Omega_n$ называется ориентированный граф, в котором Ω_n — множество вершин, а дуги соединяют слова α и β, если $\beta = A_f(\alpha)$.

Данная работа посвящена описанию свойств графа состояний отображения A_f, а именно описанию истоков, неподвижных точек и циклических состояний, нахождению длин максимальных цепочек.

Пусть f — булева функция от k переменных. Построим ориентированный граф P_f, вершинами которого являются все возможные слова длины k, а рёбра соединяют слова $x_1 \ldots x_k$ и $x_2 \ldots x_k b$, если $f(x_1, \ldots, x_k) = b$. Следующая теорема содержит способ нахождения всех неподвижных точек графов состояния отображения A_f для произвольной булевой функции от k переменных.

Теорема 1. Пусть f — булева функция от k переменных и n кратно l. Граф P_f содержит простой цикл $\langle v_1, \ldots, v_l \rangle$, где $v_i = x_i \ldots x_{k+i-1}$ для $i \in \{1, \ldots, l\}$, тогда и только тогда, когда $(x_1 \ldots x_l)^{n/l}$ является неподвижной точкой графа состояний отображения A_f.

В следующей теореме описаны все истоки графа состояний отображения.

Теорема 2. Пусть f — булева функция от k переменных и существует единственный набор значений переменных v, такой, что $f(v) = 1$. Тогда циклическое слово α длины n является истоком графа состояний отображения A_f тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет одному из условий:

1) α содержит подслово $10^{s-1}1$, где $1 \leqslant s \leqslant k-1$ и $s \neq s'$;
2) α содержит подслово $10^{k-1}1$, где $k = ts'$ и $t \geqslant 2$.

Здесь s' — минимальный период слова v.

Получено описание всех циклов и длин максимальных цепочек для графа состояний отображения A_f, где f — булева функция от трёх переменных, удовлетворяющая условию предыдущей теоремы. Если $f(0,0,0) \neq 1$, то циклы этого графа представляют циклический сдвиг на 1, 2 или 3 позиции состояния, избегающего определённые слова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Евдокимов А. А., Лиховидова Е. О.* Дискретная модель генной сети циркулянтного типа с пороговыми функциями // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2008. № 2(3). С. 18–21.

УДК 519.17

К ВОПРОСУ О ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ РЁБЕР МИНИМАЛЬНЫХ ВЕРШИННЫХ РАСШИРЕНИЙ ЦВЕТНЫХ ЦИКЛОВ

П. П. Бондаренко

Приводится верхняя оценка количества дополнительных рёбер в минимальных вершинных 1-расширениях циклов с вершинами двух типов, а также общий вид одного из расширений.

Ключевые слова: *граф, цикл, минимальное расширение, отказоустойчивость.*

Будем рассматривать неориентированные графы с вершинами двух типов или цветов. Для исследования отказоустойчивости дискретных систем J. P. Hayes [1] предло-