Графом состояний отображения $A_f : \Omega_n \to \Omega_n$ называется ориентированный граф, в котором Ω_n — множество вершин, а дуги соединяют слова α и β, если $\beta = A_f(\alpha)$.

Данная работа посвящена описанию свойств графа состояний отображения A_f, а именно описанию истоков, неподвижных точек и циклических состояний, нахождению длин максимальных цепочек.

Пусть f — булева функция от k переменных. Построим ориентированный граф P_f, вершинами которого являются все возможные слова длины k, а рёбра соединяют слова $x_1 \ldots x_k$ и $x_2 \ldots x_k b$, если $f(x_1, \ldots, x_k) = b$. Следующая теорема содержит способ нахождения всех неподвижных точек графов состояния отображения A_f для произвольной булевой функции от k переменных.

Теорема 1. Пусть f — булева функция от k переменных и n кратно l. Граф P_f содержит простой цикл $\langle v_1, \ldots, v_l \rangle$, где $v_i = x_i \ldots x_{k+i-1}$ для $i \in \{1, \ldots, l\}$, тогда и только тогда, когда $(x_1 \ldots x_l)^{n/l}$ является неподвижной точкой графа состояний отображения A_f.

В следующей теореме описаны все истоки графа состояний отображения.

Теорема 2. Пусть f — булева функция от k переменных и существует единственный набор значений переменных v, такой, что $f(v) = 1$. Тогда циклическое слово α длины n является истоком графа состояний отображения A_f тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет одному из условий:

1) α содержит подслово $10^{s-1}1$, где $1 \leqslant s \leqslant k-1$ и $s \neq s'$;
2) α содержит подслово $10^{k-1}1$, где $k = ts'$ и $t \geqslant 2$.

Здесь s' — минимальный период слова v.

Получено описание всех циклов и длин максимальных цепочек для графа состояний отображения A_f, где f — булева функция от трёх переменных, удовлетворяющая условию предыдущей теоремы. Если $f(0,0,0) \neq 1$, то циклы этого графа представляют циклический сдвиг на 1, 2 или 3 позиции состояния, избегающего определённые слова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Евдокимов А. А., Лиховидова Е. О.* Дискретная модель генной сети циркулянтного типа с пороговыми функциями // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2008. № 2(3). С. 18–21.

УДК 519.17

К ВОПРОСУ О ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ РЁБЕР МИНИМАЛЬНЫХ ВЕРШИННЫХ РАСШИРЕНИЙ ЦВЕТНЫХ ЦИКЛОВ

П. П. Бондаренко

Приводится верхняя оценка количества дополнительных рёбер в минимальных вершинных 1-расширениях циклов с вершинами двух типов, а также общий вид одного из расширений.

Ключевые слова: *граф, цикл, минимальное расширение, отказоустойчивость.*

Будем рассматривать неориентированные графы с вершинами двух типов или цветов. Для исследования отказоустойчивости дискретных систем J. P. Hayes [1] предложил графовую модель и рассмотрел отказоустойчивые реализации некоторых классов графов. Основные понятия используются в соответствии с работой [2].

Определение 1. Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k-расширением n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$ с вершинами p типов*, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является вершинным k-расширением графа G, то есть граф G вложим в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k вершин;

2) граф G^* содержит $n + k \cdot p$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k \cdot p$;

3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Рассмотрим цепь P_n с $n+2$ вершинами двух типов: двумя вершинами первого типа степени 1 и n вершинами второго типа. Найдём минимальный по количеству рёбер граф P_n^*, состоящий из $n+3$ вершин (две вершины первого типа, а остальные — второго), такой, что при удалении любой вершины второго типа существует путь между вершинами первого типа, проходящий по n вершинам второго типа.

Лемма 1. Минимальное количество дополнительных рёбер в P_n^* равно $\lfloor n/2 \rfloor + 3$. Если вершины цепи P_n пронумерованы от 0 до $n+1$, добавленная вершина в цепи P_n^* имеет номер $n+2$, то для получения P_n^* к P_n нужно добавить следующие рёбра:

а) n — нечётное, $n > 1$:
$\{0,2\}; \{n+2, n-2\}; \{n+2, n\}; \{n+2, n+1\}; \{k, k+3\}, 1 \leqslant k \leqslant n-4$;

б) n — чётное, $n > 2$:
$\{0,2\}; \{n+2, n-3\}; \{n+2, n-1\}; \{n+2, n\}; \{n+2, n+1\}; \{k, k+3\}, 1 \leqslant k \leqslant n-5$;

в) $n = 1$: $\{n+2, 0\}, \{n+2, 2\}$;

г) $n = 2$: $\{n+2, 0\}, \{n+2, 1\}, \{n+2, 2\}, \{n+2, 3\}$.

На рис. 1 приведены иллюстрирующие лемму примеры.

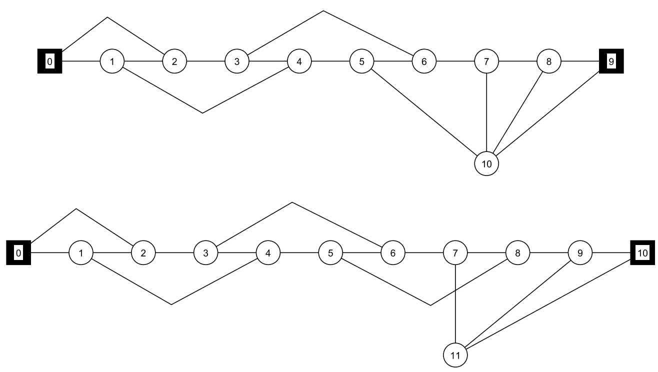

Рис. 1. Примеры P_n^* для $n = 9$ и 10

Будем рассматривать циклы C_n с вершинами двух типов. Поставим каждому циклу в соответствие последовательность чисел $e_0, e_1, \ldots, e_{k-1}$, такую, что

1) k — количество рёбер в цикле C_n, соединяющих две вершины разного типа, т. е. количество групп последовательных вершин одного типа, причём вершины, соседние с крайними из каждой группы, имеют другой тип;

2) i-я группа содержит e_i последовательно соединённых вершин одного типа. Пусть тип вершин в i-й группе отличается от типа вершин в $(i-1)$-й группе для любого $i > 0$. Типы вершин в нулевой и $(k-1)$-й группе тоже не совпадают;

3) $e_0 + e_1 + \cdots + e_{k-1} = n$.

Такой цикл будем обозначать $C_n(e_0, e_1, \ldots, e_{k-1})$.

Пусть C_n^* — минимальное вершинное 1-расширение цикла $C_n(e_0, e_1, \ldots, e_{k-1})$. Тогда минимальное количество рёбер, которые нужно добавить к C_n, чтобы получить C_n^*, можно оценить следующим образом.

Теорема 1. Количество дополнительных рёбер m в минимальном вершинном 1-расширении цикла $C_n(e_0, e_1, \ldots, e_{k-1})$ C_n^* удовлетворяет условию

$$m < \sum_{i=0}^{k-1} \lfloor e_i/2 \rfloor + 3 \leqslant \lfloor n/2 \rfloor + 3k.$$

Одно из вершинных 1-расширений строится по лемме 1 последовательным рассмотрением всех групп e_i.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C-25. No. 9. P. 875–884.
2. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012.

УДК 519.7

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ НЕКОТОРЫХ ДИСКРЕТНО-АВТОМАТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, ЗАДАННЫХ СЛУЧАЙНЫМИ ГРАФАМИ[1]

А. А. Евдокимов, С. Е. Кочемазов, И. В. Отпущенников, А. А. Семенов

Приведены результаты вычислительного анализа задач поиска неподвижных точек и циклических режимов (циклов) для ряда дискретных отображений, используемых при моделировании поведения систем со множеством взаимодействующих агентов. Рассматривались отображения, задаваемые случайными графами, сгенерированными в соответствии с известными моделями (G_{np}-графы, модель Уоттса — Строгатца).

Ключевые слова: *случайные графы, генные сети, дискретно-автоматные отображения, SAT.*

В последние несколько лет набирают популярность задачи исследования различных свойств мультиагентных систем, взаимодействие компонентов которых определяется сетями [1,2]. Такие системы используются в биоинформатике [3], в исследовании информационных и социальных сетей [2], а также в экономическом моделировании [4]. Авторами в течение ряда лет рассматривались задачи исследования динамических свойств дискретных отображений, естественным образом связанных с сетями. Так, в [5] введены и исследованы дискретные модели, описывающие процессы в генных сетях, получены теоретические результаты (в форме теорем), дающие условия возникновения неподвижных точек и циклов для отображений, заданных сетью регулярной структуры (использовались циркулянтные графы). В работе [6] весовые функции из [5] использовались в сетях случайной структуры. Рассматривались задачи поиска неподвижных

[1]Работа выполнена при поддержке Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 80 «Дифференциально-разностные и интегродифференциальные уравнения. Приложения к задачам естествознания»; гранта Президента РФ СП-3667.2013.5; грантов РФФИ № 11-07-00377а, 11-01-00997.