Для случая $k = 2$ доказана

Теорема 2. Число висячих вершин функционального графа равно $2^{2n} - 3^n$.

Получены необходимые и достаточные условия принадлежности набора циклу длины не более двух.

Теорема 3 (необходимое условие). В графе функционирования для цикла длины не более двух вида $(\alpha, \beta) \to (\gamma, \delta) \to (\alpha, \beta)$ выполнены условия $\gamma = \bar{\beta}$, $\delta = \bar{\alpha}$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — наборы длины n.

Теорема 4 (достаточное условие). Если в наборе $\tilde{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots, y_{n-1})$ для всех $i = 0, \ldots, n-1$ выполняются условия

1) если $x_i = 0$, то $y_{(i-1) \bmod n} = y_{(i+1) \bmod n} = 0$;
2) если $y_i = 1$, то $x_{(i-1) \bmod n} = x_{(i+1) \bmod n} = 1$,

и при этом $x_j = y_j$ для некоторого j, то $\tilde{x}$ принадлежит циклу длины два.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григоренко Е. Д., Евдокимов А. А., Лихошвай В. А., Лобарева И. А.* Неподвижные точки и циклы автоматных отображений, моделирующих функционирование генных сетей // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2005. № 14. С. 206–212.
2. *Evdokimov A. A. and Kutumova E. O.* The discrete model of the gene networks regulatory loops with the threshold functions // Proc. 7th Int. Conf. on bioinformatics of genom regulation and structure. Novosibirsk, June 20–27, 2010. P. 155.
3. *Харари Ф.* Теория графов М.: Наука, 2003.

УДК 519.17

О Т-НЕПРИВОДИМЫХ РАСШИРЕНИЯХ СВЕРХСТРОЙНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Д. Ю. Осипов

Рассматривается один из способов построения оптимального расширения графа — Т-неприводимого расширения (ТНР). Приводится способ построения всех неизоморфных ТНР для подкласса сверхстройных деревьев — равнолучевых звезд.

Ключевые слова: *граф, Т-неприводимое расширение, сверхстройные деревья, равнолучевые звезды.*

Все понятия и определения взяты из работы [1].

Определение 1. Расширением n-вершинного графа G называется граф H с $(n+1)$ вершинами, такой, что граф G вкладывается в каждый максимальный подграф графа H.

Простейшим примером расширения графа является его тривиальное расширение — соединение с одноэлементным графом (т. е. к графу G добавляется новая вершина, которая соединяется ребром с каждой вершиной графа G).

Возникает вопрос о получении такого расширения графа G, которое не содержит «лишних» ребер. Один из способов — конструкция минимального расширения графа [2], другой — его Т-неприводимого расширения [3].

Определение 2. Минимальным расширением графа G называется его расширение с минимальным количеством ребер.

В общем случае при построении минимального расширения возникает необходимость добавлять ребра в исходный граф, т. е. менять всю систему, моделируемую графом. Но иногда технически важно найти решение следующей задачи: построить оптимальное расширение данного графа, сохраняя его первоначальную конструкцию (т. е. не меняя связей внутри него). Существует следующая процедура:

— построить тривиальное расширение исходного графа;
— удалять из полученного графа рёбра до тех пор, пока выполняется свойство расширения.

Полученные графы назовем Т-неприводимыми расширениями. Для произвольного графа количество неизоморфных ТНР неизвестно.

Покажем примеры ТНР для некоторых классов графов. Для n-вершинной цепи единственным ТНР является $(n+1)$-вершинный цикл. Для n-вершинного цикла единственным ТНР является тривиальное расширение исходного цикла.

На рис. 1 представлен граф, имеющий два неизоморфных ТНР.

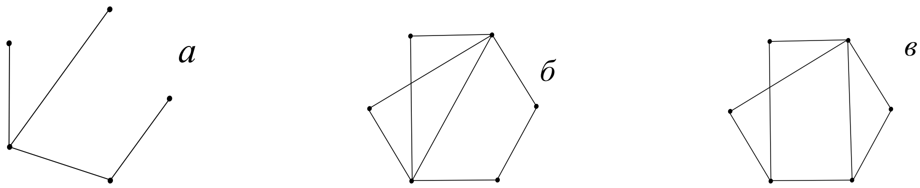

Рис. 1. Граф G (a) и два его неизоморфных ТНР (*б* и *в*)

Существует следующая нерешенная задача: для произвольного дерева построить все неизоморфные ТНР. Данная задача не решена и для произвольного сверхстройного дерева. Все неизоморфные ТНР для произвольной пальмы найдены в работе С. Г. Курносовой [4]. В настоящей работе найдены все неизоморфные ТНР для ещё одного подкласса сверхстройных деревьев — равнолучевых звезд.

Определение 3. Граф называется равнолучевой звездой с m лучами, каждый из которых состоит из n вершин, если $V = \{v_0, v_1^1, \ldots, v_n^1, \ldots, v_1^m, \ldots, v_n^m\}$, $\alpha = \{v_i^j v_{i+1}^j : i = 1, \ldots, n-1; j = 1, \ldots, m\} \cup \{v_0 v_1^j : j = 1, \ldots, m\}$, где v_0 — центр равнолучевой звезды.

Теорема 1. Пусть граф S_n^m — равнолучевая звезда с m лучами, каждый из которых состоит из n вершин ($n \geqslant 2$). Тогда единственным ТНР для S_n^m является граф, полученный из тривиального расширения графа S_n^m удалением ребер wv_{n-1}^j, $j = 1, \ldots, m$, где w — вершина, добавленная при построении тривиального расширения графа S_n^m.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 2009.
2. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения объединения некоторых графов // Теоретические проблемы информатики и её приложений. 2001. №4. С. 3–11.
3. *Салий В. Н.* Доказательства с нулевым разглашением в задачах о расширениях графов // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2003. №6. С. 63–65.
4. *Курносова С. Г.* Т-неприводимые расширения для некоторых классов графов // Теоретические проблемы информатики и её приложений. 2004. №6. С. 113–125.