

Знаки « $\pm$ » считаются согласованными, т. е. одинаковыми в обоих случаях.

Утверждение 2. Пусть G — сильно регулярный граф на 2^n вершинах, $n \geq 2$, такой, что $\lambda = \mu > 0$. Тогда он имеет параметры из утверждения 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Токарева Н. Н. Нелинейные булевы функции: бент-функции и их обобщения. Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2011.
2. Bernasconi A. and Codenotti B. Spectral analysis of Boolean functions as a graph eigenvalue problem // IEEE Trans. Computers. 1999. V. 48. No. 3. P. 345–351.
3. Bernasconi A., Codenotti B., and VanderKam J. M. A characterization of bent functions in terms of strongly regular graphs // IEEE Trans. Computers. 2001. V. 50. No. 9. P. 984–985.

УДК 519.248, 519.176

АСИМПТОТИКИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СВЯЗНОСТИ ПАР ВЕРШИН ГРАФА¹

Г. Ш. Цициашвили, М. А. Осипова, А. С. Лосев

Для графов с низконадёжными ребрами построена асимптотика вероятности связности любой пары его вершин. Параметрами полученного соотношения являются характеристики кратчайших путей графа, для вычисления которых разработаны модификации классических алгоритмов. Проведенный вычислительный эксперимент продемонстрировал преимущества предложенных алгоритмов.

Ключевые слова: кратчайший путь, вероятность связности, вычислительная сложность.

Для случайных графов с низконадёжными рёбрами построен удобный в реализации алгоритм вычисления вероятности связности любой пары его вершин на основе доказанного асимптотического соотношения. Для параметров полученного соотношения (характеристик кратчайших путей) разработаны модификации классических алгоритмов. Особенностью предлагаемых алгоритмов является тот факт, что в них не требуется перечислять кратчайшие пути между узлами, нужно лишь определить их количество. Ещё одним существенным фактором упрощения вычислений является рассмотрение графов с ограниченным диаметром, которые в последние годы вызывают большой теоретический и практический интерес. Проведенный вычислительный эксперимент подтвердил быстроедействие построенной процедуры определения вероятности связности по сравнению с методом Монте-Карло.

Рассмотрим неориентированный связный простой граф G с множеством узлов U и множеством рёбер V . Предположим, что каждое ребро v графа G с вероятностью $p(v)$ работоспособно, причём все рёбра функционируют независимо. Обозначим $D(i, j)$ минимальное число ребер в путях, соединяющих узлы i, j графа G , $C(i, j)$ — число путей с $D(i, j)$ рёбрами. Для вероятности связности $P_{ij}(G)$ узлов i, j графа G доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Если $p(v) = h$, $v \in V$, то

$$P_{ij}(G) \sim C(i, j)h^{D(i, j)}, \quad h \rightarrow 0. \quad (1)$$

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 12-01-00114-а.

Следствие 1. Если $p(v) = h$, $v \in V$, то

$$\min_{1 \leq i, j \leq n} P_{ij}(G) \sim Ch^D, \quad h \rightarrow 0,$$

$$D = \max_{1 \leq i, j \leq n} D(i, j), \quad C = \min_{(i, j): D(i, j) = D} C(i, j).$$

Для нахождения всех элементов матриц $\|D(i, j)\|_{i, j=1}^n$, $\|C(i, j)\|_{i, j=1}^n$ асимптотической формулы (1) построены модификации известных в теории графов алгоритмов (в том числе Флойда — Стейнберга). Такая процедура является более экономичной, чем последовательное определение элементов этих матриц, имеет вычислительную сложность $O(n^3 \ln n)$ для матрицы $\|D(i, j)\|_{i, j=1}^n$ и $O(n^4)$ для матрицы $\|C(i, j)\|_{i, j=1}^n$. Зная матрицу $\|D(i, j)\|_{i, j=1}^n$, можно вычислить диаметр D графа G . Для сетей с ограниченным диаметром D сложность вычисления матриц $\|D(i, j)\|_{i, j=1}^n$, $\|C(i, j)\|_{i, j=1}^n$ составляет $O(n^3)$ арифметических операций.

На основе построенного алгоритма для вероятности связности любой пары вершин графа был проведён вычислительный эксперимент. Зададим граф G матрицей смежности

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагаем, что работоспособность его рёбер равна $p(v) = h = 0,01$. Используя модифицированные алгоритмы, вычислим

$$\|D(i, j)\|_{i, j=1}^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \|C(i, j)\|_{i, j=1}^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Результаты вычислений вероятностей связности пар вершин $P_{ij}(G)$, $1 \leq i, j \leq 6$, по формуле (1) и методом Монте-Карло (обозначим их $P_{ij}^*(G)$) при 10^6 итераций представлены ниже:

$$\|P_{ij}(G)\|_{i, j=1}^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0,01 & 0,0002 & 0,01 & 0,0002 & 0,01 \\ 0,01 & 1 & 0,01 & 0,0002 & 0,0001 & 0,01 \\ 0,0002 & 0,01 & 1 & 0,01 & 0,0001 & 0,0001 \\ 0,01 & 0,0002 & 0,01 & 1 & 0,01 & 0,0002 \\ 0,0002 & 0,0001 & 0,0001 & 0,01 & 1 & 0,01 \\ 0,01 & 0,01 & 0,0001 & 0,0002 & 0,01 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\|P_{ij}^*(G)\|_{i, j=1}^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0,01035 & 0,000203 & 0,010027 & 0,000192 & 0,010205 \\ 0,01035 & 1 & 0,010001 & 0,000198 & 0,000095 & 0,009764 \\ 0,000203 & 0,010001 & 1 & 0,010083 & 0,000094 & 0,000103 \\ 0,010027 & 0,000198 & 0,010083 & 1 & 0,010051 & 0,000208 \\ 0,000192 & 0,000095 & 0,000094 & 0,010051 & 1 & 0,009973 \\ 0,010205 & 0,009764 & 0,000103 & 0,000208 & 0,009973 & 1 \end{pmatrix}.$$

Время счета по формуле (1) составило 10 с, методом Монте-Карло — 6 ч.

Более подробное изложение представленных результатов можно найти в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Цициашвили Г. Ш., Осипова М. А., Лосев А. С. Асимптотика вероятности связности графа с низконадёжными рёбрами // Прикладная дискретная математика. 2013. № 1(19). С. 93–98.