ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Математика и механика № 56

УДК 517.956 MSC 35M10, 35M12
DOI 10.17223/19988621/56/2

И.Т. Тожибоев

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В СПЕЦИАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Сформулированы краевые задачи для уравнения смешанного типа со спектральным параметром в области, состоящей из двух секторов круга и двух характеристических треугольников, доказана однозначная разрешимость поставленных задач. Объектом исследования являются краевые задачи для дифференциальных уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Цель работы – постановка и исследование краевых задач для дифференциальных уравнений смешанного типа со спектральным параметром в специальных областях. Использованы методы теории дифференциальных уравнений с частными производными и теории сингулярных интегральных уравнений, методы интегралов энергии и принцип экстремума, а также метод разделения переменных и теория бесселевых функций. Сформулированы краевые задачи для уравнения смешанного типа со спектральным параметром в области, состоящей из двух секторов круга и двух характеристических треугольников, а также доказана однозначная разрешимость поставленных задач.

Ключевые слова: *уравнения смешанного типа*, *спектральный параметр*, *краевая задача*, *единственность решения*, *существование решения*, *интегральное уравнение.*

Со второй половины семидесятых годов прошлого века начато изучение краевых задач для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Первые фундаментальные результаты в этом направлении получены в работе Т.Ш. Кальменова [1], где доказано существование хотя бы одного положительного собственного значения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе, в работе Е.И.Моисеева [2], в которой указаны секторы, где нет собственного значения задачи Трикоми для ряда уравнений смешанного типа, и в работе С.М. Пономарева [3], где найдены собственные значения и собственные функции задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе со спектральным параметром в одной специальной области. Впоследствии по этой тематике появились многочисленные работы, среди которых следует отметить [4–17, 25, 26] и т.д. До настоящего времени научные исследования по этой тематике развивались в двух направлениях. Первое из них – это доказательство теорем единственности решения краевых задач для уравнений смешанного типа со спектральным параметром, т.е. определение множества тех значений спектрального параметра, при которых справедлива теорема единственности, а второе – нахождение собственных значений и собственных функций краевых задач для уравнений смешанного типа и исследование на полноту системы найденных собственных функций.

Методология

В этой статье для конечной односвязной области $\Delta=\Omega\cap(x-y>0)$, где области Ω плоскости xOy, ограниченной при $y\geq 0$, $x\geq 0$ и $x\leq 0$, $y\leq 0$ дугами σ_1 и σ_2 окружности $x^2+y^2=1$, с концами в точках $A_1(0,1)$, $B_1(1,0)$ и $B_2(-1,0)$, $A_2(0,-1)$ и отрезками $\overline{OA_1}$ и $\overline{OB_2}$ прямых $x=0$ и $y=0$ соответственно, а при $x\geq 0$, $y\leq 0$ отрезком $\overline{B_1A_2}$ прямой $x-y=1$, поставлены краевые задачи для уравнения

$$\operatorname{sign} y\, u_{xx}+\operatorname{sign} x\, u_{yy}-\mu^2\operatorname{sign}(x+y)u=0 \tag{1}$$

и изучена однозначная разрешимость поставленных задач. При этом используются следующие обозначения: $\Delta^+=\Delta\cap(x+y>0)$, $\Omega_2^+=\Delta^+\cap(y<0)$, $\Omega_3^+=\Delta^+\cap(y>0)$; $\Delta^-=\Delta\cap(x+y<0)$, $\Omega_2^-=\Delta^-\cap(x>0)$, $\Omega_3^-=\Delta^-\cap(x<0)$; $\sigma_3=\sigma_1\cap(x-y>0)$, $\sigma_4=\sigma_2\cap(x-y>0)$; OA_3 (OA_4), OB_1, OA_2, OD – отрезки прямых $x-y=0$, $y=0$, $x=0$, $x+y=0$ соответственно, где $O(0,0)$, $D(1/2,-1/2)$, $A_3\left(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}\right)$, $A_4\left(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}\right)$.

В области Δ рассмотрим уравнение (1), причем предположим, что $\mu=\mu_1$ в областях $\Omega_3^{\pm}$ и $\mu=\mu_2$ в областях $\Omega_2^{\pm}$, где $\mu_1,\mu_2\in R$ – заданные числа.

Задача *L*. Найти в области Δ решение

$$u(x,y)\in C(\overline{\Delta})\cap C^1\left((\Delta\cup OA_3\cup OA_4)\setminus OD\right)\cap C^2\left(\Delta\setminus(OB_1\cup OA_2\cup OD)\right)$$

уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,y)=\varphi_3(x,y),\qquad (x,y)\in\sigma_3; \tag{2}$$

$$u(x,y)=\varphi_4(x,y),\qquad (x,y)\in\sigma_4; \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}u(x,y)=\psi_3(x),\qquad (x,y)\in OA_3; \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}u(x,y)=\psi_4(x),\qquad (x,y)\in OA_4; \tag{5}$$

$$u(0,-y)+u\left(y/\sqrt{2},y/\sqrt{2}\right)=f_1(y),\quad 0\leq y\leq 1, \tag{6}$$

где $\varphi_j(x,y)$, $\psi_j(x)$, $f_1(y)$ – заданные функции, причем

$$\varphi_3(x,y)=[y(x-y)]^{\alpha}\varphi_3^0(x,y),\ \ \varphi_4(x,y)=[x(y-x)]^{\alpha}\varphi_4^0(x,y),\ \ \varphi_0^j(x,y)\in C\left(\overline{\sigma}_j\right),\ \ \alpha>1;$$

$$\psi_3(x),\psi_4(-x)\in C(0,1/\sqrt{2}]\cap C^{(1,\varepsilon)}(0,1/\sqrt{2})\cap L(0,1/\sqrt{2});$$

$$f_1(y)\in C[0,1]\cap C^1(0,1]\cap C^{(2,\varepsilon)}(0,1),\ \ f_1'(y)\in L(0,1),\ \ 0<\varepsilon\leq 1,\ \ f_1(1)=0;$$

n – внутренняя нормаль к OA_j, $j=\overline{3,4}$.

Так как условие (6) связывает значения искомого решения в граничных и внутренних точках области Δ, то задача L является задачей, предложенной в [18].

При исследовании задачи L используются следующие вспомогательные задачи, которые также представляют самостоятельный интерес.

Задача *N*. Найти функцию

$$u(x,y)\in C(\overline{\Delta}^{+})\cap C^{1}\left(\Delta^{+}\cup OA_{3}\right)\cap C^{2}\left(\Delta^{+}\setminus OB_{1}\right),$$

удовлетворяющую в области $\Delta^{+}\setminus OB_{1}$ уравнению (1) и условиям

$$u(x,y)=\tilde{\varphi}(x,y),\qquad (x,y)\in\overline{\sigma}_{3}; \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}u(x,y)=\tilde{\psi}(x),\qquad (x,y)\in OA_{3}; \tag{8}$$

$$u(x,y)=0,\quad (x,y)\in\overline{OD}, \tag{9}$$

где $\tilde{\varphi}(x,y),\ \tilde{\psi}(x)$ – заданные функции, причем

$$\tilde{\varphi}(x,y)=\left[y\left(x-y\right)\right]^{\alpha}\tilde{\varphi}^{0}(x,y),\ \alpha>1,\ \tilde{\varphi}^{0}(x,y)\in C\left(\overline{\sigma}_{3}\right); \tag{10}$$

$$\tilde{\psi}(x)\in C(0,1/\sqrt{2}]\cap C^{(1,\varepsilon)}(0,1/\sqrt{2})\cap L(0,1/\sqrt{2}),\quad 0<\varepsilon\le 1. \tag{11}$$

Задача *M*. Найти в области $\overline{\Omega}_{3}^{\pm}$ решение

$$u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_{3}^{+})\cap C^{1}\left(\Omega_{3}^{+}\cup OA_{3}\right)\cap C^{2}\left(\Omega_{3}^{+}\right)$$

уравнения (1), удовлетворяющее условиям (7), (8) и

$$u(x,0)+u\left(x/\sqrt{2},x/\sqrt{2}\right)=\tilde{\gamma}(x),\quad (x,0)\in\overline{OB}_{1}, \tag{12}$$

где $\tilde{\varphi}(x,y),\ \tilde{\psi}(x),\ \tilde{\gamma}(x)$ – заданные функции, обладающие свойствами (10), (11), и $\tilde{\gamma}(x)\in C[0,1]\cap C^{1}(0,1]\cap C^{(2,\varepsilon)}(0,1),\quad \tilde{\gamma}'\in L(0,1)$.

Так как в условии (12) участвуют значения искомой функции в точках отрезков OA_3 и OB_1, то задача M является нелокальной краевой задачей [19].

В этом параграфе докажем однозначную разрешимость задач L, N и M, причем сначала изучим задачу M, затем – задачу N, а в последнем – задачу L.

Результаты и исследования

Исследование задачи *M*

Сначала докажем единственность решения задачи.

Теорема 1. Задача M не может иметь более одного решения.

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ – решение однородной задачи M. Предположим, что $u(x,y)\not\equiv const$ в $\overline{\Omega}_{3}^{+}$. Тогда на основании принципа экстремума для эллиптических уравнений [20] и $u|_{\overline{\sigma}_{3}}=0$ положительный максимум и отрицательный минимум функции $u(x,y)$ не достигаются в $\Omega_{3}^{+}\cup\overline{\sigma}_{3}$. Так как $(\partial u/\partial n)|_{OA_{3}}=0$, то в силу принципа Заремба – Жиро [20] они не достигаются и на отрезке OA_3. Если учесть это и при условии, что $u(x,0)=-u(x/\sqrt{2},x/\sqrt{2})$,

$0 \le x \le 1$, то эти значения не достигаются и на $OB_1 \cup \{O\}$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что $u(x,y) \equiv const$ в $\bar{\Omega}_3^+$. Так как $u(x,y)|_{\bar{\sigma}_3} = 0$, то $u(x,y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_3^+$. Отсюда следует, что задача M не может иметь более одного решения. Теорема 1 доказана.

Переходим к доказательству существования решения задачи M.

При этом нам понадобится решение задачи $\tilde{N}$ для уравнения (1) в области Ω_3 об определении решения

$$u(x,y) \in C(\bar{\Omega}_3^+) \cap C^1\left(\Omega_3^+ \cup OB_1 \cup OA_3\right) \cap C^2\left(\Omega_3^+\right)$$

уравнения (1), удовлетворяющего краевым условиям (7), (8) и $u_y(x,0) = \nu(x)$, $0 < x < 1$.

Применяя метод отражения [21, 24], нетрудно убедиться, что функция Грина в этой задачи имеет вид

$$G(\xi,\eta;x,y) = \frac{1}{2\pi}\left\{\ln\left|\frac{(1-\zeta_1^2 z^2)(1-\zeta_1^2\bar{z}^2)}{(\zeta_1^2 - z^2)(\zeta_1^2 - \bar{z}^2)}\right| + \ln\left|\frac{(1-\zeta_2^2 z^2)(1-\zeta_2^2\bar{z}^2)}{(\zeta_2^2 - z^2)(\zeta_2^2 - \bar{z}^2)}\right|\right\},$$

где $\zeta_1 = \xi + i\eta$, $\zeta_2 = \eta + i\xi$, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

Используя метод функций Грина, нетрудно убедиться, что решение задачи $\tilde{N}$ определяется формулой

$$u(x,y) = u_0(x,y) + \iint\limits_{\Omega_3^+} u_0(\xi,\eta) R(\xi,\eta;x,y)\,d\xi d\eta, \qquad (x,y) \in \bar{\Omega}_3^+, \tag{13}$$

где
$$u_0(x,y) = \int\limits_{\bar{\sigma}_3} \tilde{\varphi}(\xi,\eta)\frac{\partial G(\xi,\eta;x,y)}{\partial n_\zeta}ds -$$
$$-\int_0^1 \nu(\xi) G(\xi,0;x,y)\,d\xi - \int_0^{1/\sqrt{2}} \tilde{\psi}(\xi) G(\xi,\xi;x,y)\,d\xi\,; \tag{14}$$

$\tilde{R}(\xi,\eta;x,y)$ – резольвента ядра $(-\mu_1^2)\tilde{G}(\xi,\eta;x,y)$; n – внутренняя нормаль к σ_3, а s – длина дуги, отсчитываемая от точки B_1.

Пусть теперь $u(x,y)$ – решение задачи M. Введем обозначения $u_y(x,0) = \nu(x)$, $0 < x < 1$, и предположим, что $\nu(x) \in C^{(1,\varepsilon)}(0,1) \cap L(0,1)$, $0 < \varepsilon \le 1$. Тогда функция $u(x,y)$ в области Ω_3^+ как решение задачи $\tilde{N}$ для уравнения (1) с краевым условиями (7), (8) и $u_y(x,0) = \nu(x)$, $0 < x < 1$, представима в виде (13).

Подставляя функцию (13) в условие (12), получим

$$\int_0^1 \nu(t)\left[\tilde{G}(t,0;x,0) + \tilde{G}\left(t,0;\frac{x}{\sqrt{2}},\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + K_1(x,t)\right]dt = F_1(x), \quad 0 < x < 1, \tag{15}$$

где
$$K_1(x,t) = \iint\limits_{\Omega_3^+} \tilde{G}(t,0;\xi,\eta)\left[\tilde{R}(\xi,\eta;x,0) + \tilde{R}\left(\xi,\eta;\frac{x}{\sqrt{2}},\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]d\xi d\eta,$$

$$F_1(x) = -\tilde{\gamma}(x) - \int_0^{1/\sqrt{2}} \tilde{\psi}(t)\left[\tilde{G}(t,t;x,0) + \tilde{G}\left(t,t;\frac{x}{\sqrt{2}},\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]dt -$$

$$-\int_0^{1/\sqrt{2}} \tilde{\psi}(t)\left[\iint_{\Omega_3^+} \tilde{G}(t,t;\xi,\eta)\left[\tilde{R}(\xi,\eta;x,0) + \tilde{R}\left(\xi,\eta;\frac{x}{\sqrt{2}},\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]d\xi d\eta\right]dt +$$

$$+\int_{\bar{\sigma}_3} \tilde{\varphi}(\xi,\eta)\left\{\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\left[\tilde{G}(\xi,\eta;x,0) + \tilde{G}\left(\xi,\eta;\frac{x}{\sqrt{2}},\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] +\right.$$

$$\left.+\iint_{\Omega_3^+} \frac{\partial \tilde{\tilde{G}}(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial n_\zeta}\left[\tilde{R}(\xi_1,\eta_1;x,0) + \tilde{R}\left(\xi_1,\eta_1;\frac{x}{\sqrt{2}},\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]d\xi_1 d\eta_1\right\}ds. \tag{16}$$

Следовательно, задача M в смысле разрешимости эквивалентна уравнению (15) относительно $\nu(x)$. Если, пользуясь свойствами заданных функций, однозначно найдём функцию $\nu(x)$ из уравнения (15), то решение задачи M определяется формулой (13). Поэтому теперь займемся решением уравнения (15). С этой целью, дифференцируя равенство (15) по x и проведя рассуждения, аналогичные при получении равенств

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 \nu_1(t)\ln(1-t^4x^4)dt = -4x^3\int_0^1 \frac{t^4\,\nu_1(t)}{1-t^4x^4}dt$$

и

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 \nu_1(t)\ln(t^4-x^4)dt = -4x^3\int_0^1 \frac{\nu_1(t)}{t^4-x^4}dt\,,$$

имеем

$$\frac{8x^7}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t^8-x^8} - \frac{t^8}{1-t^8x^8}\right)\nu(t)dt + \int_0^1 \nu(t)\frac{\partial}{\partial x}K_1(x,t)dt = F_1'(x), \quad 0<x<1.$$

Пользуясь условиями (10), (11), условием на $\tilde{\gamma}(x)$ и равенством (16), как и в [10], можно показать, что $F_1(x) \in C[0,1] \cap C^1(0,1] \cap C^{(2,\varepsilon)}(0,1)$, $F_1'(x) \in L(0,1)$.

Выполняя замену $\theta = 2x^8/(1+x^{16})$, $\upsilon = 2t^8/(1+t^{16})$ и введя обозначения $\rho(\theta) = x^{-7}(1+t^{16})\nu(x)$, получим сингулярное интегральное уравнение типа Коши первого рода нормального типа

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\rho(\upsilon)}{\upsilon-\theta}d\upsilon = N_1(\theta), \qquad 0<\theta<1, \tag{17}$$

где $N_1(\theta) = x^{-7}(1+x^{16})\left[F_1'(x) - \int_0^1 \nu(t)\frac{\partial}{\partial x}K_1(x,t)dt\right]$.

Из постановки задачи и введенных обозначений следует, что решение уравнения (17) надо искать в классе функций $\rho(\theta) \in C^{(1,\varepsilon)}(0,1)$, ограниченных при $\theta \to 1$ и неограниченных при $\theta \to 0$. Индекс уравнения (17) в этом классе равен нулю.

Учитывая это и свойства функции $N_1(\theta)$, однозначно находим решение уравнения (17) в виде [22]

$$\rho(\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_0^1 \left[\frac{(1-\theta)\upsilon}{\theta(1-\upsilon)}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{N_1(\upsilon)}{\upsilon-\theta} d\upsilon. \tag{18}$$

Переходя в правой части равенства (17) к переменным θ, υ и функции $\rho(\theta)$ и подставляя полученное выражение $N_1(\theta)$ в правую часть (18), получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно $\rho(\theta)$, эквивалентное задаче M (в смысле разрешимости). Однозначная и безусловная разрешимость полученного интегрального уравнения, в силу эквивалентности, следует из единственности решения задачи M.

Исследование задачи N

Пусть $u(x,y)$ – решение задачи N. Причем обозначения и предположения $u(x,0)=\tau(x)$, $0 \le x \le 1$, $u_y(x,0)=\nu(x)$, $0 < x < 1$, $\tau(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, $\nu(x) \in C^1(0,1) \cap L(0,1)$. Тогда функция $u(x,y)$ как решение задачи Коши для уравнения (1) в области Ω_2^+ представима в виде [10]

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left[\tau(x+y)+\tau(x-y)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} \nu(t) J_0\left[\mu\sqrt{(x-t)^2-y^2}\right] dt +$$

$$+\frac{1}{4}\mu^2 y \int_{x-y}^{x+y} \tau(t)\, \bar{J}_1\left[\mu\sqrt{(x-t)^2-y^2}\right] dt, \ (x,y) \in \Omega_1. \tag{19}$$

Удовлетворив функцию (19) условию (9), находим функциональное соотношение

$$\tau(x) = \int_0^x \nu(t) J_0[\mu(x-t)]dt, \quad 0 \le x \le 1, \tag{20}$$

между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на OB_1, получаемое из того условия, что решение задачи N должно удовлетворит условию (9). Поэтому справедливо и неравенство

$$\int_0^1 \tau(x)\nu(x)dx \ge 0. \tag{21}$$

Теорема 2. Задача N не может иметь более одного решения.

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ – решение однородной задачи N. Умножая обе части уравнения (1) на функцию $u(x,y)$ и интегрируя полученное тождество по области Ω_3^+, а затем применяя формулу Грина и учитывая, что $u|_{\bar{\sigma}_3} \equiv 0$, $(\partial/\partial n)u(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in OA_3$, получим равенство

$$\iint_{\Omega_3^+}\left[(u_x)^2+(u_y)^2+\mu^2u^2\right]dxdy + \int_0^1 \tau(x)\nu(x)dx = 0.$$

Если учесть (21), то из последнего равенства следует, что $u(x,y)\equiv const$ в Ω_3^+. Так как $u(x,y)\in C(\bar\Omega_3^+)$ и $u|_{\bar\sigma_3}=0$, то $u(x,y)\equiv 0$ в $\bar\Omega_3^+$. Отсюда следует, что $u(x,0)=0$, $0\le x\le 1$, $u_y(x,0)=0$, $0<x<1$. Поэтому, согласно формуле (19), $u(x,y)\equiv 0$ в $\bar\Omega_2^+$. Следовательно, $u(x,y)\equiv 0$, $(x,y)\in\bar\Delta^+$. Теорема 2 доказана.

Переходим к доказательство существование решения задачи N.

В обозначениях и предположениях (13) решение задачи N в области Ω_3^+, как решение задачи $\tilde N$ для уравнения (1) с краевыми условиями (7), (8) и $u_y(x,0)=\nu(x)$, $0<x<1$, представимо в виде (13).

Полагая $y=0$ в (13), находим соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на OB_1, получаемое из того условия, что решение задачи N должно удовлетворять условиям (7) и (8):

$$\tau(x)=u_0(x,0)+\iint\limits_{\Omega_3^+}u_0(\xi,\eta)\tilde R(\xi,\eta;x,0)d\xi d\eta,\ 0\le x\le 1. \tag{22}$$

Подставляя функции $\tau(x)$ и $u_0(x,0)$ соответственно из (20) и (14) в равенство (22), а затем дифференцируя по x, как и в задаче M, имеем

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{x^3(1-t^8)\nu(t)}{(t^4-x^4)(1-t^4x^4)}dt+\int_0^1K_2(x,t)\nu(t)dt=F_2(x),\quad 0<x<1,$$

где
$$K_2(x,t)=\begin{cases}\iint\limits_{\Omega_3^+}\tilde G(t,0;\xi,\eta)\dfrac{\partial}{\partial x}\tilde R(\xi,\eta;x,0)d\xi d\eta+\mu_2J_1[\mu_2(x-t)],\ t\le x;\\ \iint\limits_{\Omega_3^+}\tilde G(t,0;\xi,\eta)\dfrac{\partial}{\partial x}\tilde R(\xi,\eta;x,0)d\xi d\eta,\quad t\ge x,\end{cases}$$

$$F_2(x)=\int\limits_{\bar\sigma_3}\tilde\varphi(\xi,\eta)\frac{\partial^2}{\partial x\partial n_\zeta}\left[\tilde G(\xi,\eta;x,0)+\iint\limits_{\Omega_3^+}\tilde R(\xi_1,\eta_1;x,0)\tilde G(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)d\xi_1d\eta_1\right]ds-$$
$$-\int_0^{1/\sqrt2}\tilde\psi(t)\frac{\partial}{\partial x}\left[\tilde G(0,t;x,0)+\iint\limits_{\Omega_3^+}\tilde R(\xi,\eta;x,0)\tilde G(0,t;\xi,\eta)d\xi d\eta\right]dt.$$

Выполним замену $\theta=2x^4/(1+x^8)$, $\vartheta=2t^4/(1+t^8)$, отсюда получим сингулярное интегральное уравнение второго рода нормального типа

$$\rho(\theta)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\rho(\vartheta)}{\vartheta-\theta}d\vartheta=N_2(\theta),\qquad 0<x<1, \tag{23}$$

где
$$\rho(\theta)=x^{-3}(1+x^8)\nu(x),\ \ N_2(\theta)=x^{-3}(1+x^8)\left[F_2(x)-\int_0^1\nu(t)K_2(x,t)dt\right], \tag{24}$$

$$N_2(\theta)\in C(0,1]\cap C^{(1,\varepsilon)}(0,1)\cap L(0,1).$$

На основании постановки задачи N и свойства функции $N_2(\theta)$ решение уравнения (23) надо искать в классе функций $\rho(\theta) \in C^{(1,\varepsilon)}(0,1)$, ограниченных при $\theta \to 1$ и неограниченных при $\theta \to 0$. Индекс уравнения (23) в этом классе равен нулю. Поэтому решение уравнения (23) в этом классе существует, единственно и дается формулой

$$\rho(\theta) = \frac{1}{2} N_2(\theta) - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left[\frac{(1-\theta)\vartheta}{\theta(1-\vartheta)} \right]^{\frac{3}{4}} \frac{N_2(\vartheta)}{\vartheta - \theta} d\vartheta. \tag{25}$$

Переходя в правой части выражения $N_2(\theta)$ к переменным θ, ϑ и функции $\rho(\theta)$, а затем подставляя полученное выражения $N_2(\theta)$ в правой части равенства (25), относительно $\rho(\theta)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода, эквивалентное задаче N (в смысле разрешимости). Разрешимость полученного интегрального уравнения, в силу эквивалентности, следует из единственности решения задачи N. После того как найдена функция $\rho(\theta)$, решения задачи N в областях Ω_3^+ и Ω_2^+ определяется формулами (13) и (19) соответственно, где $\nu(x) = x^3(1+x^8)^{-1}\rho(\theta), \quad \theta = 2x^4/(1+x^8)$.

Исследование задачи L

Пусть $u(x,y)$ – решение задачи L. Введем обозначения $\xi = \xi(x,y) = -y$, $\eta = \eta(x,y) = -x$ и

$$u(x,y) = \begin{cases} u^+(x,y), & (x,y) \in \Delta^+; \\ u^-(x,y), & (x,y) \in \Delta^-. \end{cases}$$

Очевидно, что если $(x,y) \in \overline{\Delta}^+$, то $(\xi,\eta) \in \overline{\Delta}^-$. Учитывая это, в области Ω^+ введем в рассмотрение функцию

$$\upsilon(x,y) = u^+(x,y) - u^-(\xi,\eta), \ (x,y) \in \Delta^+. \tag{26}$$

Пользуясь свойствами функций $u^+(x,y)$ и $u^-(\xi,\eta)$, краевых условий (2) – (5) и $u^+(x,-x) = u^-(x,-x)$, $0 \le x \le 1/2$, нетрудно убедиться в том, что функция $\upsilon(x,y)$ удовлетворяет условиям

$$\left.\begin{array}{c} \upsilon(x,y) \in C(\overline{\Delta}^+) \cap C^1(\Delta^+ \cup OA_3) \cap C^2(\Delta^+ \setminus OB_1); \\ sign\, y\, \upsilon_{xx} + \upsilon_{yy} - \mu^2 \upsilon = 0, \quad (x,y) \in \Delta^+ \setminus OB_1; \\ \upsilon(x,y) = \varphi_3(x,y) - \varphi_4(-y,-x), \ (x,y) \in \overline{\sigma}_3; \\ \upsilon_x(0,y) = \psi_3(y) - \psi_4(-y), \ (0,y) \in OA_3; \\ \upsilon(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \overline{OD}. \end{array}\right\} \tag{27}$$

На основании исследования задачи M заключаем, что функция $\upsilon(x,y)$ является единственным решением задачи M при $\tilde{\varphi}(x,y) = \varphi_3(x,y) - \varphi_4(-y,-x)$, $\tilde{\psi}(y) = \psi_3(y) - \psi_4(-y)$. После того как найдена функция $\upsilon(x,y)$ с помощью условий (27), подставляя её в (26), имеем

$$u^{+}(x,y)-u^{-}(-y,-x)=\upsilon(x,y),\ (x,y)\in\Delta^{+}, \tag{28}$$

откуда при $y=0$ следует, что $u^{+}(x,0)-u^{-}(0,-x)=\upsilon(x,0),\ \ 0\le x\le 1.$

Принимая во внимание условие (6), получим

$$u^{+}(x,0)+u^{+}(0,x)=\upsilon(x,0)+f_1(x),\ 0\le x\le 1. \tag{29}$$

Следовательно, функция $u^{+}(x,y)$ в области Ω_3^{+} удовлетворяет уравнению (1), а на её границе – условиям (2), (4) и (29). На основании исследования задачи N заключаем, что функция $u^{+}(x,y)$ однозначно находится как решение задачи N при $\tilde{\varphi}(x,y)=\varphi_3(x,y),\ \tilde{\psi}(y)=\psi_3(y),\ \tilde{\gamma}(x)=\upsilon(x,0)+f_1(x)$.

После того как найдена функция $u^{+}(x,y)$ в области Ω_3^{+}, функция $u^{-}(x,y)$ в области Ω_3^{-} находится из равенства (28). Решение задачи L в областях в Ω_2^{+} и Ω_2^{-} определяется как решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными $u^{+}(x,0),\ u_y^{+}(x,0),\ 0<x<1$ и $u^{-}(0,y),\ u_x^{-}(0,y),\ -1<y<0$, соответственно. Этим завершено доказательство однозначной разрешимости задачи L.

Выводы

Рассматриваются краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром в смешанных областях, состоящих из двух секторов круга и двух характеристических треугольников. Существование и единственность исследуемых краевых задач доказаны с использованием методов интегральных уравнений, принципа экстремума и интегралов энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кальменов Т.Ш.* О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 8. С. 1718–1725.
2. *Моисеев Е.И.* Некоторые теоремы единственности для уравнения Лаврентьева – Бицадзе // Доклады АН СССР. 1978. Т. 238. № 3. С. 531–533.
3. *Пономарев С.М.* Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева – Бицадзе: дис. … докт. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1981. 139 с.
4. *Алимов Ш.А.* Об одной спектральной задаче типа задачи Бицадзе – Самарского // Доклады АН СССР. 1986. Т. 287. № 6. С. 1289–1290.
5. *Бердышев А.С.* О существовании собственных значений одной краевой задачи для параболо-гиперболического уравнения третьего порядка // Узбекский математический журнал. 1998. № 2. С. 19–25.
6. *Джураев Т.Д.* О спектральных задачах для уравнений третьего порядка составного типа // Доклады АН РУз. 2006. № 2. С. 5–8.
7. *Кальменов Т.Ш.* О спектре задачи Трикоми для одного уравнения смешанного типа четвёртого порядка // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 2. С. 354–356.
8. *Моисеев Е.И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: МГУ, 1988. 150 с.
9. *Моисеев Е.И.*, *Аббаси Н.* О полноте собственных функций задачи Франкля с условием нечетности // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 3. С. 390–393.
10. *Салахитдинов М.С.*, *Уринов А.К.* Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: Фан, 1997. 166 с.

11. *Салахитдинов М.С.*, *Уринов А.К.* Об одной задаче на собственные значения для уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами // Узбекский математический журнал. 2006. № 3. С.68–78.
12. *Салахитдинов М.С.*, *Уринов А.К.* Задачи на собственные значения для уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами // Сибирский математический журнал. 2007. С. 882–893.
13. *Сабитов К.Б.* О задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе со спектральным параметром // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22. № 11. С. 1977–1984.
14. *Сабитов К.Б.*, *Карамова А.А.* Спектральные свойства решений задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа и их применения // Известия АН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 4. С. 133–150.
15. *Ташмирзаев Ю.У.* О задаче на собственные значения для уравнений смешанного типа с негладкой линией вырождения // Известия АН Уз ССР. Сер. физ.-мат. наук. 1979. № 4. С. 17–24.
16. *Уринов А.К.* Краевые задачи для уравнений смешанного типа с негладкими линиями вырождения: дис. … канд. физ.-мат. наук. Ташкент: ИМ им. В.И.Романовского, 1983. 123 с.
17. *Уринов А.К.* Задачи на собственные значения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. Нальчик, 2005. Т. 7. № 2. С. 62–67.
18. *Бицадзе А.В.*, *Самарский А.А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
19. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
20. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
21. *Тихонов А.Н.*, *Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
22. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
23. *Уринов А.К.*, *Тожибоев И.Т.* О решении одной задачи для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом // Узбекский математический журнал. 2007. № 4.
24. *Тожибоев И.Т.* Об одной внутренне-краевой задаче для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с негладкой линией изменения типа // Доклады АМАН. Нальчик, 2008. Т. 10. № 1.
25. *Тожибоев И.Т.* Об одной спектральной задаче для уравнения смешанного типа // Научный вестник ФерГУ. 2011. № 2. С. 5–7.
26. *Салахитдинов М.С.*, *Уринов А.К.* К спектральной теории уравнений смешанного типа. Ташкент: Мумтоз суз, 2015. 356 с.

Статья поступила 11.06.2018 г.

Tojiboev I.T. BOUNDARY PROBLEMS IN A SPECIAL DOMAIN FOR AN EQUATION OF MIXED TYPE *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 56. pp. 17–28

DOI 10.17223/19988621/56/2

Keywords: equations of mixed type, spectral parameter, boundary problem, uniqueness of solution, existence of solution, integral equation.

Boundary value problems for a mixed type equation with a spectral parameter in a region consisting of two sectors of a circle and two characteristic triangles are formulated; the unique solvability of the problems posed is proved. The objects of study are boundary value problems for differential equations of mixed type with a spectral parameter. The purpose of the study is the formulation and study of boundary value problems for differential equations of mixed type with a spectral parameter in special domains. Methods of the theory of partial differential equations and the theory of singular integral equations, energy integrals, and the principle of extremum, as well as the method of separation of variables and the theory of Bessel functions, were used. The results include the formulation of boundary-value problems for a mixed type equation with the spectral parameter in a region consisting of two sectors of a circle and two characteristic triangles. It has been proved that the problems are uniquely solvable.

AMS Mathematical Subject Classification: 35M10, 35M12

TOJIBOEV Ibrokhimjon Tojalievich (Ferghana branch of Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Ferghana, Republic of Uzbekistan). E-mail: ibroxim@gmail.com

REFERENCES

1. Kal'menov T.Sh. (1977) O spektre zadachi Trikomi dlya uravneniya Lavrent'eva – Bitsadze [The spectrum of the Tricomi problem for the Lavrent'ev – Bitsadze equation]. *Differ. Uravn.* 13(8). pp. 1718–1725.
2. Moiseev E.I. (1978) Nekotorye teoremy edinstvennosti dlya uravneniya Lavrent'eva – Bitsadze [On Uniqueness Theorems for Nonlocal Boundary Value Problems for the Lavrent'ev – Bitsadze Equation]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 238(3). pp. 531–533.
3. Ponomarev S.M. (1981) *Spektral'naya teoriya osnovnoi kraevoi zadachi dlya uravneniya smeshannogo tipa Lavrent'eva – Bitsadze:* [Spectral theory of the main boundary-value problem for the mixed Lavrent'ev–Bitsadze equation]. Doct. Sci. (Math.). Moscow State University.
4. Alimov Sh.A. (1986) Ob odnoy spektral'noy zadache tipa zadachi Bitsadze – Samarskogo [On a spectral problem of the Bitsadze–Samarskii type]. *Dokl. Acad. Nauk SSSR*. 287(6). pp. 1289–1290.
5. Berdyshev A.S. (1998) O sushchestvovanii sobstvennykh znachenii odnoy kraevoy zadachi dlya parabolo-giperbolicheskogo uravneniya tret'ego poryadka [On the existence of eigenvalues of a boundary-value problem for the parabolic-hyperbolic equation of the third order]. *Uzbekskii Matematicheskii Zhurnal*. 2. pp.19–25.
6. Dzhuraev T.D. (2006) O spektral'nykh zadachakh dlya uravnenii tret'ego poryadka sostavnogo tipa [On spectral problems for compound type equations of the third order]. *Dokl. Akad. Nauk Rep. Uzb.* 2. pp. 5–8.
7. Kal'menov T.Sh. (1979) O spektre zadachi Trikomi dlya odnogo uravneniya smeshannogo tipa chetvertogo poryadka [On the spectrum of the Tricomi problem for a mixed type equation of the fourth order]. *Differ. Uravn.* 15(2). pp. 354–356.
8. Moiseev E.I. (1988) *Uravneniya smeshannogo tipa so spektral'nym parametrom* [Equations of mixed type with the spectral parameter]. Moscow: Moscow University Publ.
9. Moiseev E.I., Abbasi N. (2008) O polnote sobstvennykh funktsii zadachi Franklya s usloviem nechetnosti [On completeness of eigenfunctions of the Frankl problem with the unevenness condition]. *Differ. Uravn.* 44(3). pp. 390–393.
10. Salakhitdinov M.S., Urinov A.K. (1997) *Kraevye zadachi dlya uravneniy smeshannogo tipa so spektral'nym parametrom* [Boundary-value problems for mixed type equations with the spectral parameter]. Tashkent: Fan. 166 p.
11. Salakhitdinov M.S., Urinov A.K. (2006) Ob odnoy zadache na sobstvennye znacheniya dlya uravneniya smeshannogo tipa s dvumya singulyarnymi koeffitsientami [On a problem for eigenvalues for a mixed type equation with two singular coefficients]. *Uzbek Math. J.* 3. pp. 68–78.
12. Salakhitdinov M.S., Urinov A.K. (2007) Eigenvalue problems for a mixed-type equation with two singular coefficients *Sib. Math. J.* 48. pp. 707. https://doi.org/10.1007/s11202-007-0072-7.
13. Sabitov K.B. (1986) O zadache Trikomi dlya uravneniya Lavrent'eva – Bitsadze so spektral'nym parametrom [On Tricomi's problem for the Lavrent'ev – Bitsadze equation with the spectral parameter]. *Differ. Uravn.* 22. 11. pp. 1977–1984.
14. Sabitov K.B., Karamova A.A. (2001) Spectral properties of solutions of the Tricomi problem for equations of mixed type with two lines of degeneracy, and their applications *Izvestiya: Mathematics*. 65(4). pp. 769–785.

15. Tashmirzaev Yu.U. (1979) O zadache na sobstvennye znacheniya dlya uravneniy smeshannogo tipa s negladkoy liniey vyrozhdeniya [On a problem for eigenvalues for mixed type equations with a nonsmooth degeneracy lines]. *Izv. Akad. Nauk Uzbek SSR*. 4. pp. 17–24.
16. Urinov A.K. (1983) *Kraevye zadachi dlya uravnenii smeshannogo tipa s negladkimi liniyami vyrozhdeniya* [Boundary-value problems for with nonsmooth degeneracy lines]. Cand. Sci. (Math.). Tashkent Institute of Mathematics.
17. Urinov A.K. (2005) Zadachi na sobstvennye znacheniya dlya uravneniya smeshannogo tipa s singulyarnym koeffitsientom [Problems for eigenvalues for a mixed type equation with a singular coefficient]. *Dokl. Adyg* (*Cherkes*) *Int. Akad. Nauk*. 7(2). pp. 62–67.
18. Bitsadze A.V., Samarskii A.A. (1969) O nekotorykh prosteishikh obobshcheniyakh lineinykh ellipticheskikh kraevykh zadach [On some simplest generalizations of linear elliptic boundary-value problems]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 185(4). pp. 739–740.
19. Nakhushev A.M. (1995) *Uravneniya matematicheskoy biologii* [Equations of mathematical biology]. Moscow: Vysshaya Shkola. 301 p.
20. Bitsadze A.V. (1981) *Nekotorye klassy uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [Some classes of partial differential equations]. Moscow: Nauka. 448 p.
21. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. (1966) *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka. 724 p.
22. Muskhelishvili N.I. (1968) *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow: Nauka. 512 p.
23. Urinov A.K., Tozhiboev I.T. (2007) O reshenii odnoy zadachi dlya uravneniya smeshannogo tipa s singulyarnym koeffitsientom [On solving a problem for a mixed type equation with a singular coefficient]. *Uzbek Math. J.* 4.
24. Tojiboev I.T. (2008) Ob odnoy vnutrenne-kraevoy zadache dlya uravneniya Lavrent'eva – Bitsadze s negladkoy liniey izmeneniya tipa [On an inner-boundary problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation with a nonsmooth type change line]. *Dokl. AMAN*. 10(1).
25. Tojiboev I.T. (2011) Ob odnoy spektral'noy zadache dlya uravneniya smeshannogo tipa [On a spectral problem for a mixed type equation]. *Vestnik FerGU*. 2. pp. 5–7.
26. Salakhitdinov M.S., Urinov A.K. (2015) *K spektral'noi teorii uravnenii smeshannogo tipa* [A contribution to the spectral theory of mixed type equations]. Tashkent: Mumtoz suz. 356 p.