ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Управление, вычислительная техника и информатика № 45

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519
DOI: 10.17223/19988605/45/1

В.В. Домбровский, Т.Ю. Пашинская

УПРАВЛЕНИЕ С ПРОГНОЗИРОВАНИЕМ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ГИБРИДНЫМИ СИСТЕМАМИ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ

В работе рассматривается задача синтеза оптимальных стратегий управления с прогнозирующей моделью для класса распределенных гибридных систем с мультипликативными шумами, состоящих из подсистем, с учетом ограничений на управляющие переменные. Параметры каждой из подсистем изменяются в соответствии с эволюцией марковских цепей, состояния которых взаимосвязаны между собой.
Ключевые слова: управление с прогнозирующей моделью; распределенные гибридные системы; векторная односвязная цепь Маркова; мультипликативные шумы; ограничения.

Современные системы управления, как правило, представляют собой сложные иерархические системы, состоящие из взаимодействующих подсистем неоднородной непрерывно-дискретной природы. В частности, инвестиционный портфель представляет собой сложную стохастическую нестационарную динамическую систему и может содержать рисковые финансовые активы разных классов, динамика доходностей которых меняется скачкообразно в соответствии с эволюцией состояний взаимосвязанных марковских цепей, характеризующих, например, состояние различных секторов экономики или различных финансовых рынков [1]. Такие системы относятся к классу распределенных гибридных систем [2, 3].

Гибридные системы с марковскими скачкообразными параметрами нашли широкое признание и применение в практике управления многими реальными процессами [2, 4]. Эффективным подходом к управлению гибридными системами в присутствии ограничений является метод управления с прогнозирующей моделью [3]. В работах [5–9] рассматриваются задачи управления с прогнозированием для гибридных систем, параметры которых изменяются в соответствии с эволюцией одномерной марковской цепи, с учетом ограничений на управления. В работе [10] предложен метод синтеза стратегий управления с прогнозированием для взаимосвязанных гибридных систем с марковскими скачками при условии, что от состояния марковской цепи зависит только матрица управления каждой из подсистем.

В настоящей работе рассматриваются распределенные гибридные системы с мультипликативными шумами. Параметры каждой из подсистем изменяются в соответствии с эволюцией марковских цепей, состояния которых взаимосвязаны между собой. Получены уравнения синтеза оптимальных стратегий управления с прогнозирующей моделью с учетом явных ограничений на управляющие переменные.

1. Постановка задачи

Пусть система состоит из совокупности подсистем, состояния которых описываются уравнениями

$$x^{(q)}(k+1)=A^{(q)}[\alpha^{(q)}(k+1),k+1]x^{(q)}(k)+B_0^{(q)}[\alpha^{(q)}(k+1),k+1]u^{(q)}(k)+ \\ +\sum_{j=1}^{n}B_j^{(q)}[\alpha^{(q)}(k+1),k+1]w_j^{(q)}(k+1)u^{(q)}(k),\ \ q=1,2,...s, \qquad (1)$$

где $x^{(q)}(k)$ – $n_x^{(q)}$-мерный вектор состояния q-й подсистемой, $u^{(q)}(k)$ – $n_u^{(q)}$-мерный вектор управления q-й подсистемой; $A^{(q)}[\alpha^{(q)}(k),k]$, $B_j^{(q)}[\alpha^{(q)}(k),k]$, $j = 0, \ldots, n$ – матрицы соответствующих размерностей; $w_j^{(q)}(k)$ – последовательность белых шумов с нулевым средним и единичной дисперсией; $\alpha^{(q)}(k)$ – скалярная однородная цепь Маркова с конечным множеством состояний $\{1,2,\ldots,\nu_q\}$; $\alpha^{(q)}(k)$ и $w_j^{(q)}(k)$ независимы. Таким образом, каждая из подсистем может находиться в ν_q состояниях, определяемых скалярным случайным процессом с дискретным множеством значений (состояний).

Между подсистемами существует взаимосвязь: состояние цепи $\alpha^{(q)}(k)$ q-й подсистемы ($q = 1, 2, \ldots, s$) в k-й момент времени зависит от состояний цепей $\alpha^{(r)}(k–1)$ ($r = 1, 2, \ldots, s$) в момент времени $k–1$. Таким образом, динамика системы в целом зависит от дискретного векторного случайного процесса $\alpha(k) = [\alpha^{(1)}(k), \alpha^{(2)}(k), \ldots, \alpha^{(s)}(k)]^{\mathrm{T}}$ с конечным множеством состояний $\{q, j_q\}$ ($q = 1, 2, \ldots, s$; $j_q =1, 2, \ldots, \nu_q$) и дискретным временем. Случайный процесс $\alpha(k)$ представляет собой векторную односвязную цепь Маркова.

Для векторной цепи вероятности перехода за один шаг определяются в виде:

$$P_{i_1,\ldots,i_s;\,j_1,\ldots,j_s} = P\left\{\alpha_1(k+1)=\alpha_{1j_1},\ldots,\alpha_s(k+1)=\alpha_{sj_s} \,/\, \alpha_1(k)=\alpha_{1i_1},\ldots,\alpha_s(k)=\alpha_{si_s}\right\},\ \sum_{j_1,\ldots,j_s} P_{i_1,\ldots,i_s;\,j_1,\ldots,j_s}=1$$

с начальным распределением

$$p_{j_1,\ldots,j_s} = P\left\{\alpha_1(0)=j_1,\ldots,\alpha_s(0)=j_s\right\}, (j_1=\overline{1,\nu_1};\ldots;j_s=\overline{1,\nu_s}),\ \sum_{j_1,\ldots,j_s} p_{j_1,\ldots,j_s}=1.$$

Предполагается, что состояние векторной марковской цепи в момент времени k доступно наблюдению.

На управляющие воздействия каждой из подсистем накладываются ограничения:

$$u_{\min}^{(q)}(k) \le S^{(q)}(k)u^{(q)}(k) \le u_{\max}^{(q)}(k), q=\overline{1,s}, \tag{2}$$

где $S^{(q)}(k)$ – матрицы соответствующих размерностей.

Необходимо определить закон управления системой, состоящей из подсистем вида (1), при ограничениях (2) из условия минимума критерия со скользящим горизонтом управления

$$\begin{aligned} J(k+m/k) = M\{\sum_{q=1}^{s}\sum_{i=1}^{m}(x^{(q)}(k+i))^{\mathrm{T}} R_1^{(q)}(k+i)x^{(q)}(k+i) - R_2^{(q)}(k+i)x^{(q)}(k+i) + \\ +(u^{(q)}(k+i-1/k))^{\mathrm{T}} R^{(q)}(k+i-1)u^{(q)}(k+i-1/k) \big/ x^{(q)}(k),\alpha(k)\big\}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $u^{(q)}(k+l/k)$, $l=\overline{0,m-1}$ – последовательность прогнозирующих управлений q-й подсистемой, $u^{(q)}(k)=u^{(q)}(k/k)$, $M\{a/b\}$ – оператор условного математического ожидания, $R_1^{(q)}(k+i) \ge 0$, $R_2^{(q)}(k+i) \ge 0$, $R^{(q)}(k+i) > 0$ – весовые матрицы соответствующих размерностей, m – горизонт прогноза, k – текущий момент времени.

2. Синтез стратегий управления с прогнозированием

Стратегии управления с прогнозированием определяются по следующему правилу. На каждом шаге k минимизируем функционал (3) по последовательности прогнозирующих управлений $u^{(q)}(k/k), \ldots, u^{(q)}(k + m – 1/k)$, $q = 1, 2, ..., s$, зависящих от состояния подсистемы в момент времени k, при ограничениях (2). В качестве управления в момент времени k берем $u^{(q)}(k) = u^{(q)}(k/k)$. Тем самым получаем управление q-й подсистемой $u^{(q)}(k)$ как функцию состояний $x^{(q)}(k)$ и $\alpha(k)$, т.е. управление с обратной связью. Чтобы получить управление $u^{(q)}(k + 1)$ на следующем шаге, процедура повторяется для следующего момента $k + 1$ и т.д.

Если цепи Маркова $\alpha^{(q)}(k)$ ($q = 1, \ldots, s$) независимы между собой (состояния подсистем не зависят от состояний других подсистем), т.е. представляют собой однородные скалярные цепи Маркова, то каждая из них допускает следующее представление в пространстве состояний [11]:

$$\theta^{(q)}(k+1) = P^{(q)}\theta^{(q)}(k) + \upsilon^{(q)}(k+1), \tag{4}$$

где $\theta^{(q)}(k) = [\delta(\alpha^{(q)}(k),1),\ \ldots,\ \delta(\alpha^{(q)}(k),\nu_q)]^{\mathrm{T}}$, $\delta(\alpha^{(q)}(k),j)$ – функция Кронекера ($j = 1, \ldots \nu_q$); $P^{(q)}$ – матрица переходных вероятностей для q-й цепи; $\upsilon^{(q)}(k)$ – мартингал разность.

Обобщим соотношение (4) для скалярных цепей на случай векторных однородных цепей Маркова.

Введем мультииндексы $i = (i_1, i_2, \ldots, i_s)$, $j = (j_1, j_2, \ldots, j_s)$. Тогда матрицу вероятностей перехода за один шаг векторной цепи Маркова можно представить в виде $P = (P_{ij})$, где

$$P_{ij} = P_{i_1,\ldots,i_s;\,j_1,\ldots,j_s};\,(i_1 = \overline{1,\nu_1};\ldots;i_s = \overline{1,\nu_s};\, j_1 = \overline{1,\nu_1};\ldots;\, j_s = \overline{1,\nu_s}).$$

Матрица P обладает свойством:

$$\sum_j P_{ij} = 1, \forall i.$$

Введем вектор $\theta(k) = [\delta(\alpha(k),1),\ \ldots,\ \delta(\alpha(k),\nu)]^{\mathrm{T}}$, $\nu = \nu_1 \times \nu_2 \times \ldots \times \nu_s$. Значение вектора $\theta(k)$ соответствует комбинации состояний одномерных цепей Маркова.

Тогда для многомерной цепи можно записать представление в пространстве состояний, аналогичное (4):

$$\theta(k+1) = P\theta(k) + \upsilon(k+1). \qquad (5)$$

С учетом (5) уравнения для подсистем (1) можно представить в следующем виде:

$$x^{(q)}(k+1) = A^{(q)}[\theta^{(q)}(k+1),k+1]x^{(q)}(k) + B_0^{(q)}[\theta^{(q)}(k+1),k+1]u^{(q)}(k) +$$
$$+\sum_{j=1}^{n} B_j^{(q)}[\theta^{(q)}(k+1),k+1]w_j^{(q)}(k+1)u^{(q)}(k),\ \ q = \overline{1,s}, \qquad (6)$$

где

$$A^{(q)}[\theta(k),k] = \sum_{i=1}^{\nu}\theta_i(k)A^{(i)(q)}(k),$$
$$B_j^{(q)}[\theta(k),k] = \sum_{i=1}^{\nu}\theta_i(k)B_j^{(i)(q)}(k),\ \ j = \overline{0,n}, \qquad (7)$$

здесь $\theta_i(k)$ ($i = 1, 2, \ldots, \nu$) – компоненты вектора $\theta(k)$; $\{A^{(i)(q)}\}$, $\{B_j^{(i)(q)}\}$ ($i = 1, \ldots, \nu$) – множества значений матриц $A^{(q)}[\alpha(k),k]$ и $B_j^{(q)}[\alpha(k),k]$.

Критерий (3) примет вид:

$$J(k+m/k) = M\{\sum_{q=1}^{s}\sum_{i=1}^{m}(x^{(q)}(k+i))^{\mathrm{T}}R_1^{(q)}(k+i)x^{(q)}(k+i) - R_2^{(q)}(k+i)x^{(q)}(k+i) +$$
$$+(u^{(q)}(k+i-1/k))^{\mathrm{T}}R^{(q)}(k+i-1)u^{(q)}(k+i-1/k)\big/x^{(q)}(k),\theta(k)\big\}. \qquad (8)$$

Теорема. Векторы прогнозирующих управлений

$$U^{(q)}(k) = \left[\left(u^{(q)}(k/k)\right)^{\mathrm{T}},\left(u^{(q)}(k+1/k)\right)^{\mathrm{T}},\ldots,\left(u^{(q)}(k+m-1/k)\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}, q = \overline{1,s},$$

минимизирующие критерий (3) при ограничениях вида (2), на каждом шаге k определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием вида

$$Y(k+m/k) = \left[2x^{\mathrm{T}}(k)G(k) - F(k)\right]U(k) + U^{\mathrm{T}}(k)H(k)U(k) \qquad (9)$$

при ограничениях

$$U_{\min}^{(q)}(k) \le \overline{S}^{(q)}(k)U^{(q)}(k) \le U_{\max}^{(q)}(k). \qquad (10)$$

Оптимальное управление для q-й подсистемы равно

$$u^{(q)}(k) = \begin{bmatrix} I_{n_{u^{(q)}}} & 0_{n_{u^{(q)}}} & \cdots & 0_{n_{u^{(q)}}} \end{bmatrix} U^{(q)}(k),$$

где $I_{n_{u^{(q)}}}$ – единичная матрица размерности $n_{u^{(q)}}$, $0_{n_{u^{(q)}}}$ – квадратная нулевая матрица размерности $n_{u^{(q)}}$,

$$U(k) = \left[\left(U^{(1)}(k)\right)^{\mathrm{T}},\left(U^{(2)}(k)\right)^{\mathrm{T}},\ldots,\left(U^{(s)}(k)\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\overline{S}^{(q)}(k)=\mathrm{diag}(S^{(q)}(k),\ldots,S^{(q)}(k+m-1)),$$

$$U_{\min}^{(q)}(k)=[(u_{\min}^{(q)}(k))^{\mathrm{T}},\ldots,(u_{\min}^{(q)}(k+m-1))^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\ U_{\max}^{(q)}(k)=[(u_{\max}^{(q)}(k))^{\mathrm{T}},\ldots,(u_{\max}^{(q)}(k+m-1))^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

$H(k)$, $G(k)$, $F(k)$ – блочные матрицы вида

$$H(k)=\mathrm{diag}\left(H^{(1)}(k),H^{(2)}(k),\ldots,H^{(s)}(k)\right), \tag{11}$$

$$G(k)=\begin{bmatrix}G^{(1)}(k) & G^{(2)}(k) & \cdots & G^{(s)}(k)\end{bmatrix}, F(k)=\begin{bmatrix}F^{(1)}(k) & F^{(2)}(k) & \cdots & F^{(s)}(k)\end{bmatrix}, \tag{12}$$

$$H^{(q)}(k)=\begin{bmatrix}H_{11}^{(q)}(k) & H_{12}^{(q)}(k) & \cdots & H_{1m}^{(q)}(k)\\ H_{21}^{(q)}(k) & H_{22}^{(q)}(k) & \cdots & H_{2m}^{(q)}(k)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ H_{m1}^{(q)}(k) & H_{m2}^{(q)}(k) & \cdots & H_{mm}^{(q)}(k)\end{bmatrix},\ q=\overline{1,s}, \tag{13}$$

$$G^{(q)}(k)=\begin{bmatrix}G_1^{(q)}(k) & G_2^{(q)}(k) & \cdots & G_m^{(q)}(k)\end{bmatrix}, F^{(q)}(k)=\begin{bmatrix}F_1^{(q)}(k) & F_2^{(q)}(k) & \cdots & F_m^{(q)}(k)\end{bmatrix}, \tag{14}$$

блоки которых равны

$$H_{tt}^{(q)}(k)=\sum_{i_t=1}^{\nu}\sum_{j=0}^{n}\left(B_j^{(i_t)(q)}(k+t)\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_t)(q)}(k)B_j^{(i_t)(q)}(k+t)+R^{(q)}(k+t-1), \tag{15}$$

$$\begin{gathered}H_{tf}^{(q)}(k)=\sum_{i_t=1}^{\nu}\sum_{i_{t+1}=1}^{\nu}\ldots\sum_{i_f=1}^{\nu}\left(B_0^{(i_t)(q)}(k+t)\right)^{\mathrm{T}}\left(A^{(i_{t+1})(q)}(k+t+1)\right)^{\mathrm{T}}\ldots\left(A^{(i_f)(q)}(k+f)\right)^{\mathrm{T}}\times\\ \times Q^{(i_t,\ldots,i_f)(q)}(k)B_0^{(i_f)(q)}(k+f),\ f>t,\end{gathered} \tag{16}$$

$$H_{tf}^{(q)}(k)=(H_{ft}^{(q)}(k))^{\mathrm{T}},\ f<t, \tag{17}$$

$$G_t^{(q)}(k)=\sum_{i_1=1}^{\nu}\ldots\sum_{i_t=1}^{\nu}\left(A^{(i_1)(q)}(k+1)\right)^{\mathrm{T}}\ldots\left(A^{(i_t)(q)}(k+t)\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_1,i_2,\ldots,i_t)(q)}(k)B_0^{(i_t)(q)}(k+t), \tag{18}$$

$$F_t^{(q)}(k)=\sum_{i_t=1}^{\nu}Q_2^{(i_t)(q)}(k)B_0^{(i_t)(q)}(k+t). \tag{19}$$

Матрицы $Q^{(i_t,\ldots,i_f)(q)}(k), Q_2^{(i_t,\ldots,i_f)(q)}(k),\ (t,\ f=\overline{1,m})$ определяются уравнениями:

$$\begin{gathered}Q^{(i_t,\ldots,i_f)(q)}(k)=\Theta^{(i_t,\ldots,i_f)}(k)R_1^{(q)}(k+f)+\\ +\sum_{i_{f+1}=1}^{\nu}\left(A^{(i_{f+1})(q)}(k+f+1)\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_t,\ldots,i_{f+1})(q)}(k)A^{(i_{f+1})(q)}(k+f+1),\ t=\overline{1,m-2}, t<f<m,\end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}Q^{(i_t)(q)}(k)=E_{i_t}P^t\theta(k)R_1^{(q)}(k+t)+\\ +\sum_{i_{t+1}=1}^{\nu}\left(A^{(i_{t+1})(q)}(k+t+1)\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_t,i_{t+1})(q)}(k)A^{(i_{t+1})(q)}(k+t+1),\ t=\overline{1,m-1},\end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered}Q_2^{(i_t,\ldots,i_f)(q)}(k)=R_2^{(q)}(k+f)\Theta^{(i_t,\ldots,i_f)}(k)+\sum_{i_{s+1}=1}^{\nu}Q_2^{(i_t,\ldots,i_{f+1})(q)}(k)A^{(i_{f+1})(q)}(k+f+1),\\ t=\overline{1,m-2}, t<f<m,\end{gathered} \tag{22}$$

$$Q_2^{(i_t)(q)}(k)=R_2^{(q)}(k+t)E_{i_t}P^t\theta(k)+\sum_{i_{t+1}=1}^{\nu}Q_2^{(i_t,i_{t+1})(q)}(k)A^{(i_{t+1})(q)}(k+t+1),\ t=\overline{1,m-1}, \tag{23}$$

с начальными условиями

$$Q^{(i_m)(q)}(k)=E_{i_m}P^m\theta(k)R_1^{(q)}(k+m),$$

$$Q^{(i_t,\ldots,i_m)(q)}(k)=\Theta^{(i_t,\ldots,i_m)}(k)R_1^{(q)}(k+m),\ t=\overline{1,m-1},$$

$$Q_2^{(i_m)(q)}(k) = R_2^{(q)}(k+m)E_{i_m}P^m\theta(k),$$

$$Q_2^{(i_t,\dots,i_m)(q)}(k) = R_2^{(q)}(k+m)\Theta^{(i_1,\dots,i_m)}(k),\ t=\overline{1,m-1},$$

где

$$\Theta^{(i_t,\dots,i_f)}(k) = P_{i_f,i_{f-1}}P_{i_{f-1},i_{f+1}}\dots P_{i_{t+1},i_t}\theta_{i_t}(k+t\,|\,k),\ t=\overline{1,m-1},\ f>t,$$

$\theta_{i_t}(k+t\,|\,k)$ – компонента вектора

$$\theta(k+t\,|\,k) = E\left\{\theta(k+t)\,|\,\theta(k)\right\} = P^t\theta(k),$$

$$E_{i_t} = [0,\dots,0,1,0,\dots,0]_{1\times\nu},\ i_t=\overline{1,\nu},\ t=\overline{1,m}.$$

Доказательство. Критерий (8) и уравнение (6) можно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered} J(k+m/k) = \sum_{q=1}^{s} M\left\{(X^{(q)}(k+1))^{\mathrm{T}}\Delta_1^{(q)}(k+1)X^{(q)}(k+1) - \right. \\ \left. -\Delta_2^{(q)}(k+1)X^{(q)}(k+1) + (U^{(q)}(k))^{\mathrm{T}}\Delta^{(q)}(k)U^{(q)}(k)/x^{(q)}(k),\theta(k)\right\}, \end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered} X^{(q)}(k+1) = \Psi^{(q)}[\Xi(k+1),k+1]x^{(q)}(k) + \Phi^{(q)}[\Xi(k+1),k+1]U^{(q)}(k) + \\ +\Lambda^{(q)}[\Xi(k+1),W^{(q)}(k+1),k+1]U^{(q)}(k), \end{gathered} \tag{25}$$

где

$$X^{(q)}(k+1) = \begin{bmatrix} x^{(q)}(k+1) \\ x^{(q)}(k+2) \\ \dots \\ x^{(q)}(k+m) \end{bmatrix}, U^{(q)}(k) = \begin{bmatrix} u^{(q)}(k/k) \\ u^{(q)}(k+1/k) \\ \dots \\ u^{(q)}(k+m-1/k) \end{bmatrix}, \Xi(k+1) = \begin{bmatrix} \theta(k+1) \\ \theta(k+2) \\ \dots \\ \theta(k+m) \end{bmatrix}, W^{(q)}(k+1) = \begin{bmatrix} w^{(q)}(k+1) \\ w^{(q)}(k+2) \\ \dots \\ w^{(q)}(k+m) \end{bmatrix},$$

$$\Psi^{(q)}[\Xi(k+1),k+1] = \begin{bmatrix} A^{(q)}[\theta(k+1),k+1] \\ A^{(q)}[\theta(k+2),k+2]A^{(q)}[\theta(k+1),k+1] \\ \dots \\ A^{(q)}[\theta(k+m),k+m]\dots A^{(q)}[\theta(k+2),k+2]A^{(q)}[\theta(k+1),k+1] \end{bmatrix},$$

$$\Phi^{(q)}[\Xi(k+1),k+1] = \left[\begin{matrix} B_0^{(q)}[\theta(k+1),k+1] \\ A^{(q)}[\theta(k+2),k+2]B_0^{(q)}[\theta(k+1),k+1] \\ \dots \\ A^{(q)}[\theta(k+m),k+m]\dots A^{(q)}[\theta(k+2),k+2]B_0^{(q)}[\theta(k+1),k+1] \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} 0_{n_x^{(q)}\times n_u^{(q)}} & \dots & 0_{n_x^{(q)}\times n_u^{(q)}} \\ B_0^{(q)}[\theta(k+2),k+2] & \dots & 0_{n_x^{(q)}\times n_u^{(q)}} \\ \dots & \dots & \dots \\ A^{(q)}[\theta(k+m),k+m]\dots A^{(q)}[\theta(k+3),k+3]B^{(q)}[\theta(k+2),k+2] & \dots & B_0^{(q)}[\theta(k+m),k+m] \end{matrix}\right],$$

$$\Lambda^{(q)}[\Xi(k+1),W^{(q)}(k+1),k+1] = \left[\begin{matrix} \sum_{j=1}^{n} B_j^{(q)}[\theta^{(q)}(k+1),k+1]w_j^{(q)}(k+1) \\ A^{(q)}[\theta(k+2),k+2]\sum_{j=1}^{n} B_j^{(q)}[\theta^{(q)}(k+1),k+1]w_j^{(q)}(k+1) \\ \dots \\ A^{(q)}[\theta(k+m),k+m]\dots A^{(q)}[\theta(k+2),k+2]\sum_{j=1}^{n} B_j^{(q)}[\theta^{(q)}(k+1),k+1]w_j^{(q)}(k+1) \end{matrix}\right.$$

$$\begin{array}{cc}
0_{n_x^{(q)}\times n_u^{(q)}} & \ldots \\
\sum_{j=1}^{n} B_j^{(q)}[\theta^{(q)}(k+2),k+2]w_j^{(q)}(k+2) & \ldots \\
\ldots & \ldots \\
A^{(q)}[\theta(k+m),k+m]\ldots A^{(q)}[\theta(k+3),k+3]\sum_{j=1}^{n} B_j^{(q)}[\theta^{(q)}(k+2),k+2]w_j^{(q)}(k+2) & \ldots
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{cc}
\ldots & 0_{n_x^{(q)}\times n_u^{(q)}} \\
\ldots & 0_{n_x^{(q)}\times n_u^{(q)}} \\
\ldots & \ldots \\
\ldots & \sum_{j=1}^{n} B_j^{(q)}[\theta^{(q)}(k+m),k+m]w_j^{(q)}(k+m)
\end{array}\right],$$

$$\Delta^{(q)}(k)=\mathrm{diag}\left(R^{(q)}(k+0),R^{(q)}(k+1),\ldots,R^{(q)}(k+m-1)\right),$$

$$\Delta_1^{(q)}(k+1)=\mathrm{diag}\left(R_1^{(q)}(k+1),R_1^{(q)}(k+2),\ldots,R_1^{(q)}(k+m)\right),$$

$$\Delta_2^{(q)}(k+1)=\left[R_2^{(q)}(k+1)\quad R_2^{(q)}(k+2)\quad \ldots\quad R_2^{(q)}(k+m)\right].$$

Приведем (24)–(25) к виду:

$$J(k+m/k)=M\left\{X^{\mathrm{T}}(k+1)\Delta_1(k+1)X(k+1)-\Delta_2(k+1)X(k+1)+U^{\mathrm{T}}(k)\Delta(k)U(k)/x(k),\theta(k)\right\}, \quad (26)$$

$$X(k+1)=\Psi[\Xi(k+1),k+1]x(k)+\Phi[\Xi(k+1),k+1]U(k)+\Lambda[\Xi(k+1),W(k+1),k+1]U(k), \quad (27)$$

где

$$X(k)=[(X^{(1)}(k))^{\mathrm{T}},(X^{(2)}(k))^{\mathrm{T}},\ldots,(X^{(s)}(k))^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\ x(k)=[(x^{(1)}(k))^{\mathrm{T}},(x^{(2)}(k))^{\mathrm{T}},\ldots,(x^{(s)}(k))^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

$$\Delta(k+1)=\mathrm{diag}(\Delta^{(1)}(k+1),\Delta^{(2)}(k+1),\ldots,\Delta^{(s)}(k+1)),$$

$$\Delta_1(k+1)=\mathrm{diag}(\Delta_1^{(1)}(k+1),\Delta_1^{(2)}(k+1),\ldots,\Delta_1^{(s)}(k+1)),\Delta_2(k+1)=\left[\Delta_2^{(1)}(k+1),\Delta_2^{(2)}(k+1),\ldots,\Delta_2^{(s)}(k+1)\right],$$

$$U(k)=[(U^{(1)}(k))^{\mathrm{T}},(U^{(2)}(k))^{\mathrm{T}},\ldots,(U^{(s)}(k))^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

$$\Psi[\Xi(k),k]=\left[\left(\Psi^{(1)}[\Xi(k),k]\right)^{\mathrm{T}},\ldots,\left(\Psi^{(s)}[\Xi(k),k]\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\Phi[\Xi(k),k]=\mathrm{diag}\left(\Phi^{(1)}[\Xi(k),k],\ldots,\Phi^{(s)}[\Xi(k),k]\right),$$

$$\Lambda[\Xi(k),W(k),k]=\mathrm{diag}\left(\Lambda^{(1)}[\Xi(k),W^{(1)}(k),k],\ldots,\Lambda^{(s)}[\Xi(k),W^{(s)}(k),k]\right).$$

С учетом (27) представим (26) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
J(k+m/k)=M\{&U^{\mathrm{T}}(k)\Delta(k)U(k)+x^{\mathrm{T}}(k)\Psi^{T}[\Xi(k+1),k+1]\Delta_1(k+1)\Psi[\Xi(k+1),k+1]x(k)+\\
&+[2x^{\mathrm{T}}(k)\Psi^{\mathrm{T}}[\Xi(k+1),k+1]\Delta_1(k+1)-\Delta_2(k+1)]\Phi[\Xi(k+1),k+1]U(k)-\Delta_2(k+1)\Psi[\Xi(k+1),k+1]x(k)+\\
&+U^{\mathrm{T}}(k)\Phi^{\mathrm{T}}[\Xi(k+1),k+1]\Delta_1(k+1)\Phi[\Xi(k+1),k+1]U(k)+\\
&+U^{\mathrm{T}}(k)\Lambda^{\mathrm{T}}[\Xi(k+1),W(k+1),k+1]\Delta_1(k+1)\Lambda[\Xi(k+1),W(k+1),k+1]U(k)/x(k),\theta(k)\}.
\end{aligned} \quad (28)$$

Определим матрицы

$$\begin{aligned}
H(k)=M\Big\{&\Phi^{\mathrm{T}}\left[\Xi(k+1),k+1\right]\Delta_1(k+1)\Phi\left[\Xi(k+1),k+1\right]+\\
&+\Lambda^{\mathrm{T}}[\Xi(k+1),W(k+1),k+1]\Delta_1(k+1)\Lambda[\Xi(k+1),W(k+1),k+1]/\theta(k)\Big\}+\Delta(k),
\end{aligned}$$

$$G(k)=M\left\{\Psi^{\mathrm{T}}[\Xi(k+1),k+1]\Delta_1(k+1)\Phi\left[\Xi(k+1),k+1\right]/\theta(k)\right\},$$

$$F(k)=\Delta_2(k+1)M\left\{\Phi\left[\Xi(k+1),k+1\right]/\theta(k)\right\}.$$

Матрицы $H(k)$, $G(k)$, $F(k)$ можно представить в блочном виде (11)–(14):

$$H(k) = \mathrm{diag}\left(H^{(1)}(k), H^{(2)}(k), ..., H^{(s)}(k)\right),$$

$$G(k) = \left[G^{(1)}(k) \quad G^{(2)}(k) \quad \cdots \quad G^{(s)}(k)\right], F(k) = \left[F^{(1)}(k) \quad F^{(2)}(k) \quad \cdots \quad F^{(s)}(k)\right],$$

где

$$H^{(q)}(k) = \left[H_{ij}^{(q)}\right], i, j = \overline{1, m},$$

$$G^{(q)}(k) = \left[G_1^{(q)}(k) \quad G_2^{(q)}(k) \quad \cdots \quad G_m^{(q)}(k)\right], F^{(q)}(k) = \left[F_1^{(q)}(k) \quad F_2^{(q)}(k) \quad \cdots \quad F_m^{(q)}(k)\right], q = \overline{1, s}.$$

Используя представление матриц $A^{(q)}[\theta(k),k]$, $B_j^{(q)}[\theta(k),k]$ в виде (7) и уравнение (5), получим, что блоки матриц $H^{(q)}(k)$, $G^{(q)}(k)$, $F^{(q)}(k)$ удовлетворяют уравнениям (15)–(23).

Таким образом, имеем задачу минимизации критерия (28) при ограничениях (2), которая эквивалентна задаче квадратичного программирования с критерием

$$Y(k+m/k) = \left[2x^{\mathrm{T}}(k)G(k) - F(k)\right]U(k) + U^{\mathrm{T}}(k)H(k)U(k)$$

при ограничениях (10).

Заключение

Предложен метод синтеза стратегий прогнозирующего управления для гибридных взаимосвязанных систем с марковскими скачками и мультипликативными шумами. Данный подход позволяет в явном виде учесть ограничения на управления. Алгоритм синтеза прогнозирующей стратегии включает решение последовательности задач квадратичного программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Billio M., Pelizzon L. Value-at-Risk: a multivariate switching regime approach // Journal of Empirical Finance. 2000. No. 7. P. 531–554.
2. Teel A.R., Subbaram A., Sferlazza A. Stability analysis for stochastic hybrid systems: a survey// Automatica. 2014. V. 50, No. 10. P. 2435–2456.
3. Mayne D.Q. Model predictive control: Recent developments and future promise // Automatica. 2014. V. 50, No. 12. P. 2967–2986.
4. Costa O.L.V., Fragoso M.D., Marques R.P. Discrete-time Markov jump linear systems. New York : Springer, 2005. 286 p.
5. Tonne J., Jilg M., Stursberg O. Constrained Model Predictive Control of High Dimensional Jump Markov Linear Systems // Proc. American Control Conference. Palmer House Hilton. July 1–3, Chicago, IL, USA, 2015. P. 2993–2998.
6. Dombrovskii V.V., Obyedko, T.Yu. Predictive control of systems with Markovian jumps under constraints and its application to the investment portfolio optimization // Automation and remote control. 2011. V. 72, No. 5. P. 989–1003.
7. Dombrovskii V.V., Obyedko T.Yu., Samorodova M. Model predictive control of constrained Markovian jump nonlinear stochastic systems and portfolio optimization under market frictions // Automatica. 2018. V. 87, No. 1. P. 61–68.
8. Patrinos P., Soparasakis P., Sarimveis H., Bemporad A. Stochastic model predictive control for constrained discrete-time Markovian switching systems // Automatica. 2014. V. 50, No. 10. P. 2504–2514.
9. Blackmore L., Bektassov A, Ono M., Williams B.C. Robust optimal predictive control of jump Markov linear systems using particles // Hybrid systems: Comput. and Control / A. Bemporad, A. Bicchi, G. Buttazzo, eds. New York : Springer Verlag, 2007. V. 4416: Lecture Notes in Computer Science. P. 104–117.
10. Домбровский В.В., Объедко Т.Ю. Управление с прогнозированием взаимосвязанными гибридными системами с марковскими скачками при ограничениях // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 3 (20). С. 5–12.
11. Elliott R.J., Aggoun L., Moore J.B. Hidden Markov models: Estimation and control. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1995. 382 p.

Поступила в редакцию 5 апреля 2018 г.

Dombrovskii V.V., Pashinskaya T.Yu. (2018) MODEL PREDICTIVE CONTROL OF DISTRIBUTED STOCHASTIC HYBRID SYSTEMS WITH MULTIPLICATIVE NOISES UNDER CONSTRAINTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 45. pp. 4–12

DOI: 10.17223/19988605/45/1

We consider the following complex Markov jump linear system composed of interconnected subsystems

$$x^{(q)}(k+1)=A^{(q)}[\alpha^{(q)}(k+1),k+1]x^{(q)}(k)+B_0^{(q)}[\alpha^{(q)}(k+1),k+1]u^{(q)}(k)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}B_j^{(q)}[\alpha^{(q)}(k+1),k+1]w_j^{(q)}(k+1)u^{(q)}(k),q=\overline{1,s}, \qquad (1)$$

where $x^{(q)}(k)$ is the $n_x^{(q)}$ – dimensional subsystem state vector, $u^{(q)}(k)$ is the $n_u^{(q)}$ – dimensional subsystem control vector; $A^{(q)}[\alpha^{(q)}(k),k]$, $B_j^{(q)}[\alpha^{(q)}(k),k]$, $j=0, \ldots, n$ are matrices of appropriate dimensions; $w_j^{(q)}(k)$ is a sequence of white noises; $\alpha^{(q)}(k)$ denotes a time-invariant Markov chain taking values in a finite set of states $\{1, 2, \ldots, \nu_q\}$.

These subsystems interact in the following way. The state of Markov chain $\alpha^{(q)}(k)$ of qth subsystem ($q = 1, 2, \ldots, s$) at the moment k depends on states of Markov chains $\alpha^{(r)}(k-1)$ ($r = 1, 2, \ldots, s$) at the moment $k-1$. Thus, the complex system dynamics depends on a discrete-time vector stochastic process $\alpha(k) = [\alpha^{(1)}(k), \alpha^{(2)}(k), \ldots, \alpha^{(s)}(k)]^{\mathrm{T}}$ taking values in a finite set of states $\{q, j_q\}(q = 1, 2, \ldots, s; j_q = 1, 2, \ldots, \nu_q)$. The process $\alpha(k)$ is a simple connected Markov chain with the transition probability matrix

$$P_{i_1,\ldots,i_s;j_1,\ldots,j_s}=P\{\alpha_1(k+1)=\alpha_{1j_1},\ldots,\alpha_s(k+1)=\alpha_{sj_s}/\alpha_1(k)=\alpha_{1i_1},\ldots,\alpha_s(k)=\alpha_{si_s}\},\ \sum_{j_1,\ldots,j_s}P_{i_1,\ldots,i_s;j_1,\ldots,j_s}=1,$$

and the initial distribution

$$p_{j_1,\ldots,j_s}=P\{\alpha_1(0)=j_1,\ldots,\alpha_s(0)=j_s\},(j_1=\overline{1,\nu_1};\ldots,j_s=\overline{1,\nu_s}),\ \sum_{j_1,\ldots,j_s}p_{j_1,\ldots,j_s}=1.$$

It is assumed that the Markov chain $\alpha(k)$ is observable at the moment k.

The following constraints are imposed on each subsystem control effects

$$u_{\min}^{(q)}(k)\le S^{(q)}(k)u^{(q)}(k)\le u_{\max}^{(q)}(k),q=\overline{1,s}, \qquad (2)$$

where $S^{(q)}(k)$ is the matrix of corresponding dimension.

For control of system (1) we synthesize the strategies with a predictive control model according to the following rule. At each step k we minimize the following quadratic objective with receding horizon

$$J(k+m/k)=M\{\sum_{q=1}^{s}\sum_{i=1}^{m}(x^{(q)}(k+i))^T R_1^{(q)}(k+i)x^{(q)}(k+i)-R_2^{(q)}(k+i)x^{(q)}(k+i)+$$
$$+(u^{(q)}(k+i-1/k))^T R^{(q)}(k+i-1)u^{(q)}(k+i-1/k)\big/x^{(q)}(k),\alpha(k)\big\},$$

on trajectories of system (1) over the sequence of predictive controls $u^{(q)}(k+l/k), l=\overline{0,m-1}$, depending on the subsystem state at the current time k under constraints (2); $R_1^{(q)}(k+i)\ \ge 0$, $R_2^{(q)}(k+i)\ \ge 0$, $R^{(q)}(k+i)\ >0$ are weigh matrices of appropriate dimensions; m is the prediction horizon; k is the current moment. The synthesis of predictive control strategies is reduced to the sequence of quadratic programming tasks.

Keywords: model predictive control; distributed hybrid systems; vector simple connected Markov chain; multiplicative noises; constraints.

PASHINSKAYA Tatiana Yurievna (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: tatyana.obedko@mail.ru

DOMBROVSKII Vladimir Valentinovich **(**Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Russian Federation).
E-mail: dombrovs@ef.tsu.ru

REFERENCES

1. Billio, M. & Pelizzon, L. (2000) Value-at-Risk: a multivariate switching regime approach. *Journal of Empirical Finance.* 7. pp. 531–554. DOI: 10.1016/S0927-5398(00)00022-0
2. Teel, A.R., Subbaram, A. & Sferlazza, A. (2014) Stability analysis for stochastic hybrid systems: A survey. *Automatica.* 50(10). pp. 2435–2456.
3. Mayne, D.Q. (2014) Model predictive control: Recent developments and future promise. *Automatica*. 50(12). pp. 2967–2986. DOI: 10.1016/j.automatica.2014.10.128
4. Costa, O.L.V., Fragoso, M.D. & Marques, R.P. (2005) *Discrete-time Markov jump linear systems.* Springer: New York.
5. Tonne, J., Jilg, M. & Stursberg, O. (2015) Constrained Model Predictive Control of High Dimensional Jump Markov Linear Systems. *Proc. American Control Conference*. Palmer House Hilton, July 1–3, 2015. Chicago, IL, USA. pp. 2993–2998. DOI: 10.1109/ACC.2015.7171190
6. Dombrovskii, V.V. & Obyedko, T.Yu. (2011) Predictive control of systems with Markovian jumps under constraints and its application to the investment portfolio optimization. *Automation and Remote Control*. 72(5). pp. 989–1003. DOI: 10.1134/S0005117911050079

7. Patrinos, P., Soparasakis, P., Sarimveis, H. & Bemporad, A. (2014) Stochastic model predictive control for constrained discrete-time Markovian switching systems. *Automatica.* 50(10). pp. 2504–2514. DOI: 10.1016/j.automatica.2014.08.031
8. Dombrovskii, V.V., Obyedko, T.Yu. & Samorodova, M. (2018) Model predictive control of constrained Markovian jump nonlinear stochastic systems and portfolio optimization under market frictions. *Automatica.* 87(1). pp. 61–68. DOI: 10.1016/j.automatica.2017.09.018
9. Blackmore, L., Bektassov, A., Ono, M. & Williams, B.C. (2007) Robust optimal predictive control of jump Markov linear systems using particles. In: Bemporad, A., Bicchi, A. & Buttazzo, G. (eds) *Hybrid Systems: Computation and Control.* . Vol. 4416. New York: Springer-Verlag. pp. 104–117.
10. Dombrovskii, V.V. & Obyedko, T.Yu. (2012) Model predictive control of interconnected hybrid systems with Markov jumps under constraints. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(20). pp. 5–12. (In Russian).
11. Elliott, R.J., Aggoun, L. & Moore, J.B. (1995) *Hidden Markov Models: Estimation and Control*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.