ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Управление, вычислительная техника и информатика № 45

УДК 519.217.2+004.742.2
DOI: 10.17223/19988605/45/5

Г.Ш. Цициашвили, М.А. Осипова, К.Е. Самуйлов, Ю.В. Гайдамака

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ В МНОГОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С БЛОКИРОВКОЙ НА ОСНОВЕ СИНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ

Строится оценка скорости сходимости к нулю вероятности отказа в многоканальной системе обслуживания, моделирующей телекоммуникационную сеть, при стремлении к бесконечности количества серверов и нагрузки. С ее помощью решается задача разделения ресурсов между различными пользователями телекоммуникационной сети.

Ключевые слова: многоканальная система массового обслуживания с отказами; телекоммуникационная сеть; модели телетрафика.

Теория массового обслуживания как современная область прикладной теории вероятностей разработана в рамках исследования операций и стала одним из главных инструментов для анализа систем радиосвязи. В настоящее время теория очередей играет важную роль в анализе эффективности будущих поколений телекоммуникационных сетей. Например, в пятом поколении сети, несмотря на ее высокую пропускную способность, до 10 Гбит/с, возникает необходимость совместного использования ограниченного количества ресурсов между различными приложениями и пользователями. Это приводит к формулированию и решению проблем распределения ресурсов с учетом ненадежной среды.

В настоящее время теория массового обслуживания развивается именно в этом направлении, имея в качестве своей основы работы таких специалистов, как А. Боровков, Б. Гнеденко, Л. Афанасьева, Е. Булинская, В. Королев, Е. Яровая [1–6]. При этом важную роль играют результаты, полученные в работах по математической теории телетрафика Ф. Келли, К. Росса, Г. Башарина, В. Вишневского [7–10].

В работе рассматривается n-канальная система массового обслуживания с отказами в предположении, что интенсивность входного потока пропорциональна n. Исследуется сходимость вероятности блокировки в этой системе к нулю при $n \to \infty$. Решается задача о построении совокупности многоканальных систем с отказами и одинаковой (или близкой) асимптотикой сходимости к нулю вероятности отказа. Подобная задача возникает при конструировании современных систем передачи данных [9. Гл. 2]. Особенностью асимптотических результатов является их приближенный характер, позволяющий получить достаточно удобные формулы для постановки и решения задач оптимизации систем передачи данных.

1. Асимптотические соотношения

Рассмотрим систему обслуживания $A_n = M\,|\,M\,|\,n\,|\,0$ с интенсивностью входного пуассоновского потока $n\lambda$ и интенсивностями обслуживания μ на всех n приборах, $\rho = \lambda / \mu$. Система A_n может рассматриваться как объединение n систем вида $A_1 = M\,|\,M\,|1|\,0$ с пуассоновскими входными потоками интенсивности λ. Количество заявок в системе A_n описывается процессом гибели и рождения $x_n(t)$ с интенсивностями рождения и гибели $\lambda_n(k) = n\lambda,\ 0 \le k < n,\ \mu_n(k) = k\mu,\ 0 < k \le n.$

Обозначим $P_n(\rho)$ стационарную вероятность отказа в системе A_n при заданном ρ. Пусть $a_n, b_n, n \geq 1,$ – две вещественные последовательности. При $n \to \infty$ полагаем, что $a_n \preceq b_n$, если $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq 1,$ и что $a_n \sim b_n$, если $b_n \preceq a_n \preceq b_n$.

Теорема 1. Справедливо следующее предельное соотношение: $P_n(1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}}, n \to \infty.$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0,$ рассмотрим функцию $f(x) = 1 - x - \exp(-(1+\varepsilon)x).$ Функция $f(x)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$f(0) = 0,\ f'(x) > 0, 0 < x < \frac{\ln(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon},\ f'(x) < 0, \frac{\ln(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon} < x \leq 1,\ f(1) < 0.$$

Поэтому на отрезке $[0,1]$ существует единственное $x(\varepsilon)$, удовлетворяющее равенству $f(x(\varepsilon)) = 0$, и значит неравенствам $1 - x \geq \exp(-(1+\varepsilon)x), 0 \leq x \leq x(\varepsilon) < 1.$ Пусть $p_n(k) = \lim_{t\to\infty} P(x_n(t) = k), 0 \leq k \leq n,$ тогда в силу [11. Гл. 2, § 1]

$$p_n(n-1) = p_n(n)\frac{\mu}{\lambda}\frac{n}{n},\ p_n(n-2) = p_n(n)\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{n(n-1)}{n^2}, \dots$$

Следовательно, стационарная вероятность отказа в силу интегральной теоремы восстановления и закона больших чисел для процесса восстановления [12. Гл. 9, § 4, 5] удовлетворяет равенству $P_n(\rho) = p_n(n) = \left(\sum_{k=0}^{n} \rho^{-k} \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right)\right)^{-1}$, и значит

$$P_n(1) = \left(\sum_{k=0}^{n}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right)\right)^{-1}, \tag{1}$$

где $\prod_{j=0}^{-1}$ полагается равным 1. Из формулы (1) следует неравенство

$$P_n^{-1}(1) \geq \sum_{0\leq k\leq nx(\varepsilon)} \prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right) \geq \sum_{0\leq k\leq nx(\varepsilon)} \prod_{j=0}^{k-1} \exp(-(1+\varepsilon)j/n) \geq \sum_{1\leq k\leq nx(\varepsilon)} \exp(-(1+\varepsilon)k^2/2n).$$

Отсюда получаем, что

$$P_n^{-1}(1) \geq \int_1^{nx(\varepsilon)} \exp(-(1+\varepsilon)x^2/2n)dx = \sqrt{\frac{n}{1+\varepsilon}} \int_{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{n}}}^{x(\varepsilon)\sqrt{n(1+\varepsilon)}} \exp(-y^2/2)dy,$$

следовательно,

$$P_n(1)\sqrt{n} \leq (1+\varepsilon)\left(\int_{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{n}}}^{x(\varepsilon)\sqrt{n(1+\varepsilon)}} \exp(-y^2/2)dy\right)^{-1} \to (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{2}{\pi}}, n \to \infty,$$

и значит $\limsup_{n\to\infty} P_n(1)\sqrt{\frac{\pi n}{2}} \leq 1 + \varepsilon.$

Используя формулу (1) и неравенство $1 - x \leq \exp(-x), 0 \leq x \leq 1,$ получаем

$$P_n^{-1}(1) \leq \sum_{1\leq k\leq n} \exp(-k(k-1)/2n) \leq \sum_{1\leq k\leq n} \exp(-(k-1)^2/2n) \leq \int_0^{\infty} \exp(-x^2/2n)dx,$$

откуда следует, что $1 \leq \liminf_{n\to\infty} P_n(1)\sqrt{\frac{\pi n}{2}}$. Полученные выше неравенства для верхнего и нижнего пределов приводят к утверждению теоремы 1.

Теорема 2 При $\rho < 1$ справедливы соотношения

$$\exp\left(-\frac{n\ln^2\rho}{2}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sqrt{\frac{\rho}{8}} \preceq P_n(\rho) \preceq \exp\left(-\frac{n\ln^2\rho}{2}\cdot\frac{\rho-1}{\ln\rho}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sqrt{\frac{\ln\rho}{\rho-1}}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть величина ε удовлетворяет равенству $x(\varepsilon)=1-\rho>0$, значит $\varepsilon=-\ln(1-x(\varepsilon))/x(\varepsilon)-1=-\ln\rho/(1-\rho)-1>0.$ Из формулы (1) следует неравенство $P_n^{-1}(\rho)\geq\psi_n(\rho),$ где

$$\psi_n(\rho)=\sum_{1\leq k\leq nx(\varepsilon)}\rho^{-k}\exp(-(1+\varepsilon)k^2/2n)=\sum_{1\leq k\leq nx(\varepsilon)}\exp\left(-\frac{(1+\varepsilon)k^2+2kn\ln\rho}{2n}\right)\geq$$

$$\geq\exp\left(\frac{n\ln^2\rho}{2(1+\varepsilon)}\right)\sum_{1\leq k\leq nx(\varepsilon)-1}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{n}}k+\sqrt{\frac{n}{1+\varepsilon}}\ln\rho\right)^2\right)\geq$$

$$\geq\exp\left(\frac{n\ln^2\rho}{2(1+\varepsilon)}\right)\int_1^{nx(\varepsilon)-1}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{n}}x+\sqrt{\frac{n}{1+\varepsilon}}\ln\rho\right)^2\right)dx=\sqrt{\frac{n}{1+\varepsilon}}\theta_n(\rho),$$

$$\theta_n(\rho)=\int_{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{n}}+\sqrt{\frac{n}{1+\varepsilon}}\ln\rho}^{(nx(\varepsilon)-1)\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{n}}+\sqrt{\frac{n}{1+\varepsilon}}\ln\rho}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy\to\int_{-\infty}^{0}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ n\to\infty.$$

Таким образом, доказано неравенство

$$\limsup_{n\to\infty}P_n(\rho)\exp\left(\frac{n\ln^2\rho}{2(1+\varepsilon)}\right)\sqrt{\frac{\pi n}{2(1+\varepsilon)}}\leq 1. \tag{3}$$

Перейдем теперь к построению нижней оценки для $P_n(\rho).$ Используя формулу (1) и неравенство $1-x\leq\exp(-x), 0\leq x\leq 1,$ получаем

$$P_n^{-1}(\rho)\leq\sum_{k=0}^{n}\exp\left(-\frac{k^2-k+2nk\ln\rho}{2n}\right)=\exp\left(\frac{1}{2n}\left(n\ln\rho-\frac{1}{2}\right)^2\right)\chi_n(\rho),$$

$$\chi_n(\rho)=\sum_{k=0}^{n}\exp\left(-\frac{(k+n\ln\rho-1/2)^2}{2n}\right)\leq\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{\sqrt{n}}+\sqrt{n}\ln\rho-\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^2\right)\leq$$

$$\leq 2+\sqrt{n}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-y^2/2)dy=2+\sqrt{2\pi n}.$$

Таким образом, доказано неравенство

$$1\leq\liminf_{n\to\infty}P_n(\rho)\exp\left(\frac{1}{2n}\left(n\ln\rho-\frac{1}{2}\right)^2\right)(2+\sqrt{2\pi n})=\liminf_{n\to\infty}P_n(\rho)\exp\left(\frac{n\ln^2\rho}{2}\right)\sqrt{\frac{\pi n}{2}}\sqrt{\frac{8}{\rho}}. \tag{4}$$

Из соотношений (3), (4) следует утверждение теоремы 2.

Замечание. При $\rho=1-\gamma, \gamma\to 0,$ верхняя и нижняя оценки для вероятности отказа $P_n(\rho)$ сближаются, поскольку множитель $\dfrac{\rho-1}{\ln\rho}\to 1.$ Причем множитель $n\ln^2\rho$ наиболее сильно влияет на вероятность отказа $P_n(\rho).$

Следствие. Пусть $\rho=1-n^{-\gamma}, \gamma>0,$ тогда соотношения (2) перепишутся в виде:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi n}}\preceq P_n(\rho)\preceq\sqrt{\frac{2}{\pi n}},\ \gamma\geq\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi n}}\preceq P_n(\rho)\exp\left(\frac{n^{1-2\gamma}}{2}\right)\preceq\sqrt{\frac{2}{\pi n}},\quad \gamma<\frac{1}{2}. \tag{5}$$

Доказательство следствия 1 основано на неравенствах (3), (4), справедливых при $\rho=1-n^{-\gamma}$. Такая зависимость коэффициента загрузки $\rho=\lambda/\mu$ от числа каналов n позволяет выявить изменение вероятности отказа $P_n(\rho)$ при больших n от параметра $\gamma,$ который определяет скорость сходимости коэффициента загрузки к единице.

Теорема 3. При $\rho>1$ справедливо предельное соотношение $P_n(\rho)\to 1-\mu/\lambda, n\to\infty.$

Доказательство. Из формулы (1) следует, что

$$P_{(n)}(\rho)\geq\left(\sum_{k=0}^{n}\rho^{-k}\right)^{-1}=\frac{1-\rho^{-1}}{1-\rho^{-(n+1)}}\to 1-\frac{\mu}{\lambda},\ n\to\infty. \tag{6}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0, 0 < \gamma < 1/2$ и определим $n(\varepsilon)$ такое, чтобы при $n > n(\varepsilon)$ выполнялось неравенство $n^{1/2-\gamma} < nx(\varepsilon)$, тогда

$$P_{(n)}(\rho) \le \left(\sum_{0 \le k \le n^{1/2-\gamma}} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k \exp\left(-\frac{(1+\varepsilon)k^2}{2n}\right)\right)^{-1} \le$$

$$\le \frac{\exp((1+\varepsilon)n^{-\gamma}/2)(1-\mu/\lambda)}{1-(\mu/\lambda)^{n^{1/2-\gamma}}} \to 1 - \frac{\mu}{\lambda}, n \to \infty. \quad (7)$$

Формулы (6), (7) приводят к утверждению теоремы 3.

2. Объединение многоканальных систем с блокировкой

Предположим, что у нас имеется m независимых пуассоновских потоков заявок с интенсивностями $\lambda = \lambda_1 = \ldots = \lambda_m$ и параллельно работающими приборами с интенсивностью обслуживания на каждом из них, равной μ. Полагаем, что заявка k-го потока одновременно обслуживается c_k приборами, $1 \le k \le m$. Такие системы естественным образом возникают, если по каналу связи передаются сообщения различного типа, например текст, устная речь и т.д. Требуется так распределить приборы между потоками различных сообщений, чтобы вероятности отказа $P_n^{(k)}(1)$ для каждого из потоков $k = 1, \ldots, m$ были приблизительно одинаковыми. Подобная задача возникает при конструировании современных систем связи.

Пусть число приборов в k-й подсистеме равно nn_k, исходя из теоремы 1 следует потребовать, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{n_1}{c_1} = \ldots = \frac{n_m}{c_m}. \quad (8)$$

Перепишем эти равенства в виде:

$$n_2 = n_1 \frac{c_2}{c_1}, \ldots, n_m = n_1 \frac{c_m}{c_1}.$$

Предположим, что числа $\frac{c_2}{c_1}, \ldots, \frac{c_m}{c_1}$ являются рациональными и перепишем их в виде:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{c_m}{c_1} = \frac{p_m}{q_m},$$

где пары натуральных чисел $(p_2, q_2), \ldots, (p_m, q_m)$ состоят из взаимно простых чисел. Тогда для того, чтобы числа $n_2, \ldots, n_m$ были целыми, требуется, чтобы число n_1 было кратно числам $q_2, \ldots, q_m$. Следовательно, число n_1 должно делиться на наименьшее общее кратное L чисел $q_2, \ldots, q_m$. Таким образом, всевозможные значения чисел $n_1, \ldots, n_m$, удовлетворяющие равенствам (8), выглядят следующим образом: $n_1 = nL, n_2 = \frac{np_2L}{q_2}, \ldots, n_2 = \frac{np_mL}{q_m}, n = 1, 2, \ldots$

Рассмотрим теперь случай, когда интенсивности входных потоков $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ различаются, и обозначим $\rho_k = \frac{\lambda_k}{\mu}, k = 1, \ldots, m.$ В этом случае естественно заменить равенства (8) на равенства

$$n_1 \frac{\ln^2 \rho_1}{c_1} = \ldots = n_m \frac{\ln^2 \rho_m}{c_m}$$

и провести аналогичные рассмотрения.

Заключение

Полученные в настоящей работе результаты позволяют распределять ресурсы канала связи между различными типами сигналов так, чтобы вероятность потери передаваемых сигналов была достаточно малой. Решение этой задачи основано, с одной стороны, на синергетических эффектах в многоканальных системах массового обслуживания с отказами, а с другой стороны, на разложении натуральных чисел на простые множители и нахождении наименьшего общего кратного.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М. : Наука, 1972.
2. Боровков А.А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М. : Наука, 1980.
3. Gnedenko B.V., Korolev V.Yu. Random Summation: Limit Theorems and Applications. Boca Raton : CRC Press, 1996.
4. Afanasyeva L.G., Bulinskaya E.V. Certain Asymptotic Results for Random Walks in a Strip // Theory of Probability and its Applications. 1985. V. 29, is. 4. P. 677–693.
5. Afanasyeva L.G., Bashtova E.E., Bulinskaya E.V. Limit Theorems for Semi Markov Queues and Their Applications // Communications in Statistics. Part B: Simulation and Computation. 2012. V. 41, is. 6. P. 688–709.
6. Yarovaya E.B. Branching Random Walks with Several Sources // Mathematical Population Studies. 2012. V. 20. P. 14–26.
7. Kelly F. Blocking Probabilities in Large Circuit-Switched Networks // Advances in Applied Probability. 1986. V. 18. P. 473–505.
8. Ross K. Multiservice Loss Models for Broadband Telecommunication Networks. London : Springer, 1995.
9. Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. Математическая теория телетрафика и ее приложения к анализу мультисервисных сетей связи следующих поколений // Автоматика и вычислительная техника. 2013. № 2. С. 11–21.
10. Vishnevsky V.M., Semenova O.V. Polling Systems: Theory and Applications for Broadband Wireless Networks. London : Academic Publishing, 2012.
11. Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания. М. : Высшая школа, 1982.
12. Боровков А.А. Теория вероятностей. М. : Наука, 1986.

Поступила в редакцию 8 апреля 2018 г.

Tsitsiashvili G.Sh., Osipova M.A., Samouylov K.E., Gaidamaka Yu.V. (2018) THE ALLOCATION OF RESOURCES IN MULTI-CHANNEL LOSS QUEUING SYSTEM BASED ON SYNERGISTIC EFFECTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 45. pp. 42–47

DOI: 10.17223/19988605/45/5

In this paper, we consider n – server loss system under the assumption that the intensity of the input flow is proportional to n. We investigate the convergence of the blocking probability in this system to zero at $n \to \infty$. A similar problem arises in the design of modern data transmission systems. A specific of suggested asymptotic results is that we did not obtain accuracy formulas or solutions of optimization problems for the transmission systems.

Consider queuing system $A_n = M\,|\,M\,|\,n\,|\,0$ with intensity of input flow $n\lambda$ and intensities of service at all n servers, $\rho = \lambda/\mu$. Denote $P_n(\rho)$ the stationary blocking probability in the system A_n at a given ρ. Let $a_n, b_n, n \ge 1$, be two real sequences. For $n \to \infty$. we assume that $a_n \preceq b_n$ if $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \le 1$. Let us say $a_n \sim b_n$, if $b_n \preceq a_n \preceq b_n$.

Теорема 1. The following limit ratio is true: $P_n(1) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi n}}, n \to \infty.$

Теорема 2. At $\rho < 1$ following relations are valid

$$\exp\left(-\frac{n\ln^2\rho}{2}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sqrt{\frac{\rho}{8}} \preceq P_n(\rho) \preceq \exp\left(-\frac{n\ln^2\rho}{2}\cdot\frac{\rho-1}{\ln\rho}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sqrt{\frac{\ln\rho}{\rho-1}}.$$

Suppose that we have m independent Poisson flows of customers with intensities $\lambda = \lambda_1 = \ldots = \lambda_m$ and parallel servers with the intensity of service at each of them equal to μ. We assume that the service of the k-th flow customer is realized on c_k servers, $1 \le k \le m.$ We shoud like to distribute the servers between the flows so that the blocking probabilities $P_n^{(k)}(1)$ for each of the flow $k = 1,\ldots,m$ are about the same.

Let the number of servers in the k-th subsystem be $n\,n_k$, from Theorem 1 we obtain that the basic equations

$$\frac{n_1}{c_1} = \ldots = \frac{n_m}{c_m} \tag{1}$$

are fulfilled. We rewrite these equations in the form $n_2 = n_1 \frac{c_2}{c_1}, \ldots, n_m = n_1 \frac{c_m}{c_1}$. Assume that the numbers $\frac{c_2}{c_1}, \ldots, \frac{c_m}{c_1}$ are rational and rewrite them as $\frac{c_2}{c_1} = \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{c_m}{c_1} = \frac{p_m}{q_m}$, where pairs of positive integers $(p_2, q_2), \ldots,$ (p_m, q_m) consist of mutually prime numbers. Then, for the numbers $n_2, \ldots, n_m$ to be integers, it requires that number n_1 is a multiple of $q_2, \ldots, q_m$. Therefore the number n_1 should be divided by the smallest common multiple L of the numbers $q_2, \ldots, q_m$. Thus, all possible values of the numbers $n_1, \ldots, n_m$, satisfying the basic equality (1), look like these

$$n_1 = nL,\ n_2 = \frac{np_2 L}{q_2}, \ldots, n_2 = \frac{np_m L}{q_m},\ n = 1, 2, \ldots \ .$$

Keywords: multiserver queuing system with blocking; telecommunication network; models of teletrack.

TSITSIASHVILI Gurami Shalvovich **(**Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Main Researcher of Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of Russian Academy Sciences, Vladivostok, Russian Federation).
E-mail: guram@iam.dvo.ru

OSIPOVA Marina Anatolievna **(**Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Researcher of Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of Russian Academy Sciences, Vladivostok, Russian Federation).
E-mail: mao1975@list.ru

SAMOUYLOV Konstantin Evgenievich **(**Doctor of Technical Sciences, Head of the Department of Applied Informatics and Probability Theory, Faculty of Physical and Mathematical Sciences of Russian Friendship University of Peoples (RUDN), Moscow, Russian Federation).
E-mail: samuylov_ke@rudn.university

GAYDAMAKA Yulia Vasilievna (Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Applied Informatics and Probability Theory, Faculty of Physical and Mathematical Sciences of Russian Friendship University of Peoples (RUDN), Moscow, Russian Federation).
E-mail: gaydamaka_yuv@rudn.university

REFERENCES

1. Borovkov, A.A. (1972) *Veroyatnostnye protsessy v teorii massovogo obsluzhivaniya* [Stochastic processes in queuing theory]. Moscow: Nauka.
2. Borovkov, A.A. (1980) *Asimptoticheskie metody v teorii massovogo obsluzhivaniya* [Asymptotic methods in queuing theory]. M.: Nauka.
3. Gnedenko, B.V. & Korolev, V.Yu. (1996) *Random Summation: Limit Theorems and Applications*. Boca Raton: CRC Press.
4. Afanasyeva, L.G. & Bulinskaya, E.V. (1985) Certain asymptotic results for random walks in a strip. *Theory of Probability and Its Applications.* 29(4). pp. 677–693. DOI: 10.1137/1129094
4. Afanasyeva, L.G. & Bashtova, E.E. & Bulinskaya, E.V. (2012) Limit theorems for semi Markov queues and their applications. *Communications in Statistics. Part B: Simulation and Computation.* 41(6). pp. 688–709. DOI: 10.1080/03610918.2012.625255
5. Yarovaya, E.B. (2012) Branching Random Walks with Several Sources. *Mathematical Population Studies.* 20. pp. 14–26. DOI: 10.1080/08898480.2013.748571
6. Kelly, F. (1986) Blocking probabilities in large circuit-switched networks. *Advances in Applied Probability.* 18. pp. 473–505. DOI: 10.2307/1427309
8. Ross, K. (1995) *Multiservice loss models for broadband telecommunication networks*. London: Springer.
9. Basharin, G.P., Gaidamaka, Yu.V. & Samouylov, K.E. (2013) Mathematical theory of teletraffic and its applications to analysis of multiservice communication networks of next generations. *Avtomatika i vychislitel'naya tekhnika – Automatics and Computer Engineering.* 2. pp. 11–21. (In Russian).
10. Vishnevsky, V.M. & Semenova, O.V. (2012) *Polling systems: Theory and applications for broadband wireless networks.* London: Academic Publishing.
11. Ivchenko, G.I., Kashtanov, V.A. & Kovalenko, I.N. (1982) *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queuing theory]. Moscow: Vysshaya shkola.
12. Borovkov, A.A. (1986) *Teoriya veroyatnostey* [Probability theory]. Moscow: Nauka.