МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК 519.81

ПОСТРОЕНИЕ АГРЕГИРОВАННОГО ОТНОШЕНИЯ, МИНИМАЛЬНО УДАЛЁННОГО ОТ ЭКСПЕРТНЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ

В. Н. Нефёдов, С. О. Смерчинская, Н. П. Яшина

Московский авиационный институт, г. Москва, Россия

Рассматривается задача группового выбора. Профиль индивидуальных предпочтений экспертов на множестве альтернатив может быть задан бинарными отношениями или численными оценками альтернатив. Предлагаются способы построения матриц предпочтений для различных типов экспертной информации, а также методы формирования агрегированного отношения, удовлетворяющего условию минимальности суммарного расстояния до экспертных предпочтений. Вид агрегированного отношения предпочтения зависит от выбора формулы для определения расстояния между матрицами предпочтений. Разработанная методика может быть использована и при решении многокритериальных задач.

Ключевые слова: *групповой выбор, агрегированное отношение, профиль индивидуальных предпочтений экспертов, минимальное расстояние от предпочтений, мажоритарный граф.*

DOI 10.17223/20710410/42/9

CONSTRUCTING AN AGGREGATED RELATION WITH A MINIMUM DISTANCE FROM THE EXPERT PREFERENCES

V. N. Nefedov, S. O. Smerchinskaya, N. P. Yashina

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

E-mail: svetlana_os@mail.ru

The paper considers the problem of collective choice. Profile of experts' individual preferences on the set of alternatives can be given by binary relations or numerical evaluations of alternatives. Methods for constructing preferences matrices for various types of expert information are proposed, as well as methods for forming an aggregated relation that satisfies the condition of minimizing the total distance to expert preferences. Let expert preferences in the form of binary relations $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ are given by the vertex adjacency matrices $R^1, R^2, \ldots, R^m$ of the corresponding digraphs. The distance between the relations is defined as the Hamming distance. We prove that the aggregate relation,which is built according to the rule of "the majority of experts", satisfies the condition of minimum distance from expert preferences. In the case, when the profile of expert preferences is given by relations of a strict order and the number of experts is odd, the aggregated relation is unique. Let the estimates of the alternatives $a_1, a_2, \ldots, a_n$ by the t-th expert be given in the form of a vector

$h^t = \langle h_1^t, h_2^t, \ldots, h_n^t \rangle$ with positive real components. Then the elements of the preference matrix $R^t = \|r_{ij}^t\|$ have the form $r_{ij}^t = \dfrac{h_i^t}{h_i^t + h_j^t}$, if the values of estimates on the scale are maximized. We prove that the aggregated preference relation depends on the choice of the formula for determining the distance between the preferences matrices. When you specify the distance through the module of the difference of the preference matrices elements, then the total distance is minimal if all the elements of the aggregated matrix are equal to the medians of the corresponding elements of expert matrices. When you specify the distance through the square of the elements difference, then the distance is minimal if all the elements of the aggregated matrix are equal to the arithmetic means of the corresponding elements of expert matrices. The developed technique can be used to solve multi-criteria problems in the assessment of alternatives in the scales of relations.

Keywords: *collective choice, aggregate relation, profile of experts' individual preferences, minimum distance from preferences, majority graph.*

Введение

При принятии сложных решений часто используются опыт и знания группы экспертов — специалистов в данной предметной области. К групповому решению обычно предъявляется ряд требований [1 – 5], важнейшими из которых являются непротиворечивость [2 – 5] и наиболее полный учёт индивидуальных предпочтений экспертов [1, 3, 5]. Непротиворечивость обычно характеризуется отсутствием контуров в графе агрегированного отношения предпочтения; приближённость к экспертным предпочтениям — числом голосов экспертов, отданных за построенное упорядочение. При разработке алгоритмов группового выбора основная трудность состоит в поиске разумного компромисса в выполнении этих условий.

Ещё Кондорсе пытался построить групповое ранжирование, разрушив контур по слабому звену — дуге с минимальной разностью в предпочтениях экспертов [3]. Построенное ранжирование должно было удовлетворять условию максимальности суммарных голосов экспертов, соответствующих данному упорядочению. Но Янг привел пример, в котором уже для четырёх альтернатив это условие не выполнялось. Алгоритм ранжирования, основанный на поиске пути, удовлетворяющего условию максимальности голосов экспертов, был предложен также Шульце. Одним из наиболее удачных, математически обоснованных методов нахождения коллективного ранжирования является построение медианы Кемени [2]. В качестве критерия приближённости к экспертным предпочтениям он берёт суммарное расстояние между исходными ранжированиями и групповым. Однако этот алгоритм имеет экспоненциальную вычислительную сложность и даже его эвристические модификации лишь незначительно её уменьшают, при этом не строя все возможные ранжирования.

В качестве агрегированного отношения предпочтения мажоритарный граф, построенный по правилу большинства, удобен в силу того, что минимально удалён от экспертных предпочтений и выполняются условия Эрроу (универсальность, полнота, независимость, монотонность, ненавязанность, Парето) [1, 2]. Но Эрроу формулировал свою теорему для ранжирований, а мажоритарный граф с большой вероятностью не является ранжированием и может содержать противоречивые контуры [5].

В данной работе проводится анализ единственности агрегированного отношения предпочтения, построенного по правилу большинства и, следовательно, удовлетворяющего условию минимальности суммарного расстояния до экспертных предпочтений.

Профиль экспертных предпочтений может также быть задан численными оценками альтернатив или информацией о том, во сколько раз одна альтернатива предпочтительнее другой. В работе представлен способ построения матриц предпочтений в случае задания числовой экспертной информации. Предлагаются методы построения агрегированного отношения, удовлетворяющего условию минимальности суммарного расстояния до экспертных предпочтений. Вид группового решения зависит от выбора формулы для нахождения расстояния между предпочтениями. Разработанная методика может быть использована и при решении многокритериальных задач [6].

1. Агрегирование экспертных предпочтений, заданных бинарными отношениями

Рассмотрим задачу построения агрегированного отношения в случае, когда профиль экспертных предпочтений задан бинарными отношениями.

Дано множество альтернатив $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и множество экспертов $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$. Профиль индивидуальных предпочтений экспертов на множестве A задан бинарными отношениями предпочтения $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$. Требуется построить агрегированное отношение $\widehat{\rho}$, максимально согласованное с экспертными предпочтениями $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$.

На основе агрегированного отношения предпочтения обычно также требуется ранжировать альтернативы и\или выбрать наилучшие из них. Способы выбора наилучших альтернатив подробно описаны в работах [1 – 4] и основываются на стандартных процедурах на графах: нахождения внутренне и внешне устойчивых подмножеств, ядра графа, разбиения графа на уровни [7].

Индивидуальные предпочтения экспертов могут быть заданы отношениями строгого порядка (асимметричное и транзитивное), квазипорядка (рефлексивное и транзитивное), а также произвольными бинарными отношениями. В частности, предпочтения задаются строгим или нестрогим ранжированием альтернатив. Строгое ранжирование соответствует отношению строгого линейного порядка, нестрогое — отношению квазипорядка, в котором все альтернативы попарно сравнимы. Будем полагать, что $\langle a_i, a_j \rangle \in \rho_t$ $(t = 1, \ldots, m;\ a_i, a_j \in A)$, если элемент a_i не более предпочтителен, чем элемент a_j (отношения ρ_t можно выбрать и по-другому: $\langle a_i, a_j \rangle \in \rho_t$, если элемент a_i не менее предпочтителен, чем a_j, но стандартные процедуры на графах, используемые для выбора наилучших альтернатив, удобнее реализовывать для отношения «не более предпочтителен»).

Введём понятие расстояния между бинарными отношениями. Поставим в соответствие отношению ρ орграф $G = (A, \rho)$ с множеством вершин-альтернатив A, множеством дуг ρ и матрицей смежности $R = \|r_{ij}\|$. Экспертные предпочтения $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ будем задавать матрицами смежности $R^1, R^2, \ldots, R^m$ соответствующих орграфов.

Определение 1. Расстоянием между двумя отношениями ρ_k и ρ_t назовём величину $\mathrm{d}(\rho_k, \rho_t)$, определяемую по формуле

$$\mathrm{d}(\rho_k, \rho_t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |r_{ij}^k - r_{ij}^t|.$$

Фактически $\mathrm{d}(\rho_k,\, \rho_t)$ равно числу несовпадений элементов r_{ij}^k и r_{ij}^t матриц смежности этих отношений R^k и R^t $(i, j = 1, \ldots, n)$ и, следовательно, является расстоянием Хэмминга, удовлетворяющим аксиомам метрики.

Для построения отношения, наиболее полно отражающего предпочтения экспертов, необходимо, чтобы сумма расстояний между агрегированным отношением $\widehat{\rho}$ и отношениями $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ была минимальной.

Определение 2. Суммарное расстояние $D(\widehat{\rho})$ от отношения $\widehat{\rho}$ до отношений $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ минимально, если выполняется

$$D(\widehat{\rho}) = \sum_{t=1}^{m} \mathrm{d}(\widehat{\rho}, \rho_t) \to \min .$$

Пусть экспертные предпочтения $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ заданы матрицами смежности $R^1, R^2, \ldots, R^m$ и q — произвольное отношение с матрицей смежности $Q = \|q_{ij}\|$.

Теорема 1. Суммарное расстояние $D(q) = \sum\limits_{t=1}^{m} \mathrm{d}(q, \rho_t)$ минимально, если $q_{ij} = 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow r_{ij}^t = 1$ не менее чем для половины экспертов $(i, j = 1, \ldots, n;\ t \in \{1, \ldots, m\})$. В случае $\sum\limits_{t=1}^{m} r_{ij}^t = m/2$ (при чётном m) $D(q)$ остается минимальным и при выборе $q_{ij} = 0$.

Доказательство. Запишем

$$D(q) = \sum_{t=1}^{m} \mathrm{d}(q, \rho_t) = \sum_{t=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |q_{ij} - r_{ij}^t| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{m} |q_{ij} - r_{ij}^t|.$$

Проведём декомпозицию по i, j. Тогда задача сводится к нахождению минимума величин $\sum\limits_{t=1}^{m} |q_{ij} - r_{ij}^t|$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Очевидно, что минимум достигается при $q_{ij} = 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \sum\limits_{t=1}^{m} r_{ij}^t \geqslant m/2 \Leftrightarrow r_{ij}^t = 1$ не менее, чем для половины экспертов. При этом в случае $\sum\limits_{t=1}^{m} r_{ij}^t = m/2$ (что возможно только при чётном m) минимум достигается при любом значении $q_{ij} \in \{0, 1\}$. ■

Пусть $\rho(A)$ — множество всех бинарных отношений, заданных на множестве A. Обозначим $\operatorname*{Argmin}\limits_{q \in \rho(A)} D(q)$ множество отношений, имеющих минимальное суммарное расстояние до экспертных предпочтений.

Полученный результат совпадает с результатом, доказанным в [1] для отношения-медианы по правилу большинства ρ_Σ, допускающему равенство числа экспертов: $\rho_\Sigma \in \operatorname*{Argmin}\limits_{q \in \rho(A)} D(q)$.

Другим примером агрегированного отношения, минимально удалённого от экспертных предпочтений, может служить медиана Кемени. В отличие от медианы по правилу большинства, процедура Кемени позволяет построить транзитивное и, следовательно, непротиворечивое агрегированное предпочтение. Медиана Кемени строится на основе экспертных ранжирований и сама является ранжированием альтернатив.

К сожалению, в силу неоднозначности построения отношения, для которого суммарное расстояние до экспертных предпочтений минимально, выбор его в качестве агрегированного не всегда целесообразен. Сложный переборный алгоритм Кемени позволяет найти лишь одно из возможных медианных ранжирований. Например, в случае, когда отношения ρ_1, ρ_2, q_1, q_2, q_3, q_4 имеют матрицы смежности

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

получим $D(q_1) = D(q_2) = D(q_3) = D(q_4) = 2$, т. е. все четыре отношения q_1, q_2, q_3, q_4 являются минимальными, причём два из них (q_3, q_4) — строгие ранжирования.

Из теоремы 1 следует, что неоднозначность минимального отношения происходит только в случае, когда число экспертов чётное.

Следствие 1. Пусть профиль экспертных предпочтений $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ задан произвольными бинарными отношениями. Тогда для всех $\rho_* \in \rho(A) \setminus \{\rho_\Sigma\}$ при нечётном числе экспертов m выполняется $D(\rho_\Sigma) < D(\rho_*)$.

Из следствия 1 в силу строгого неравенства следует и обратное утверждение.

Следствие 2. Пусть суммарное расстояние $D(\rho_*)$ от экспертных предпочтений до отношения ρ_*, заданного на множестве альтернатив A, при нечётном числе экспертов является минимальным. Тогда $\rho_\Sigma = \rho_*$.

Полученные утверждения показывают, что для мажоритарного графа (графа отношения ρ_Σ [1]) выполняется условие минимальности суммарного расстояния от агрегированного отношения до экспертных предпочтений. При нечётном числе экспертов минимальное отношение единственное, что даёт основание взять его в качестве агрегированного отношения. Напомним, что отношение ρ_Σ в общем случае не транзитивно (в частности, может содержать контуры), что затрудняет выбор наилучших альтернатив, а тем более их ранжирование.

Следующие два примера демонстрируют различие в построении минимального отношения для чётного и нечётного числа экспертов.

Пример 1. Профиль предпочтений четырёх экспертов задан ранжированием альтернатив (строгими и нестрогими). Сравним агрегированное отношение, построенное по правилу большинства, с медианой Кемени.

Экспертные ранжирования представлены в следующей таблице (наилучшие альтернативы в верхней строке):

ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4
a_3	a_2	—	—
a_2	a_3	a_1	a_4
a_4	a_4	$a_3 - a_4$	a_3
a_1	a_1	a_2	$a_1 - a_2$

Построим агрегированное отношение предпочтения по правилу большинства. Матрицы смежности экспертных предпочтений имеют следующий вид:

$$R^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Единицы на диагоналях матриц смежности объясняются тем, что нестрогое ранжирование соответствует отношению квазипорядка, которое является рефлексивным.

Согласно теореме 1, существует шестнадцать отношений, минимально удалённых от экспертных предпочтений (суммарное расстояние $D(\widehat{\rho}) = 16$), со следующими матрицами смежности:

$$Q^{\min} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 \vee 1 & 1 & 1 & 0 \vee 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \vee 1 \\ 0 & 0 \vee 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Среди них пять ранжирований:

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_1 - a_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 - a_4 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_3 - a_4 \\ a_1 - a_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Отношение ρ_Σ, построенное по правилу большинства, является одним из шестнадцати отношений, минимально удалённых от экспертных предпочтений. Матрица смежности этого отношения имеет вид

$$R_\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь ρ_Σ не транзитивно и, следовательно, не является ранжированием. Построенная на основе данного профиля экспертных предпочтений медиана Кемени (ранжирование, минимально удалённое от экспертных предпочтений) [8] является одним из пяти возможных ранжирований:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Пусть на множестве альтернатив $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ профиль предпочтений трёх экспертов ($m = 3$) задан отношениями строгого линейного порядка (строгим ранжированием):

ρ_1	ρ_2	ρ_3
a_1	a_2	a_3
a_2	a_3	a_4
a_3	a_4	a_1
a_4	a_1	a_2

Матрицы смежности соответствующих графов имеют следующий вид:

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

По следствию 1 в этом случае существует одно отношение, минимально удалённое от экспертных предпочтений ($D = 10$), и оно совпадает с ρ_Σ:

$$R_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мажоритарный граф $G = (A, \rho_\Sigma)$ изображен на рис. 1. Соответствующее ему отношение ρ_Σ является минимально удалённым от экспертных предпочтений и при этом единственным. Граф отношения ρ_Σ содержит контуры, что затрудняет выбор наилучших альтернатив. Действительно, граф имеет три доминирующих (внешне устойчивых) подмножества: $\{a_1, a_2\}$, $\{a_2, a_3\}$, $\{a_2, a_4\}$ [7]. Для нахождения наилучших альтернатив в этом случае можно воспользоваться процедурой Коупленда [2]: каждой вершине графа ставится в соответствие число, равное разности количеств входящих и исходящих из неё дуг (сумма единиц соответствующего столбца минус сумма единиц строки матрицы смежности). Согласно этому алгоритму, получим следующие индексы альтернатив: $a_1(-1)$, $a_2(1)$, $a_3(1)$, $a_4(-1)$. Наилучшие альтернативы, имеющие максимальный индекс, — a_2, a_3.

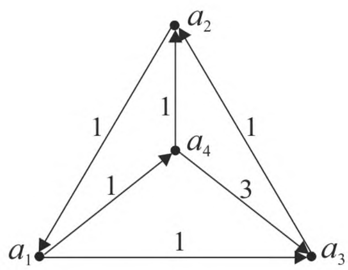

Рис. 1

Дополнительной характеристикой мажоритарного графа являются веса на дугах, равные разности чисел экспертов, для которых альтернатива a_i не более предпочтительна a_j и a_j не более предпочтительна a_i. Эту разность легко найти, введя матрицу суммарных предпочтений $P = \|p_{ij}\|$, где $p_{ij} = \sum\limits_{t=1}^{m} r_{ij}^t$. Тогда вес дуги $\langle a_i, a_j \rangle \in \rho_\Sigma$ равен $p_{ij} - p_{ji}$.

Веса на дугах мажоритарного графа (рис. 1) вычислены с помощью матрицы $P = R^1 + R^2 + R^3$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Модифицируем алгоритм Коупленда с учётом весов на дугах, поставив каждой альтернативе a_i в соответствие индекс равный $\sum\limits_{j=1}^{n} (p_{ji} - p_{ij})$. Получим $a_1(-1)$, $a_2(1)$, $a_3(3)$, $a_4(-3)$. В этом случае имеем строгое ранжирование альтернатив. Наилучшей оказалась альтернатива a_3.

В качестве индекса альтернативы можно взять также величину, равную не разности, а отношению сумм элементов столбца и строки матрицы суммарных предпочтений P, соответствующих данной альтернативе. Если сумма элементов строки равна нулю, то альтернатива является наилучшей и ей надо поставить в соответствие индекс, заведомо больший, чем у альтернатив с ненулевой суммой строки. Этим методом (его естественно назвать методом «отношения сумм») для рассматриваемого примера получим следующие индексы альтернатив: $a_1(1/2)$, $a_2(2)$, $a_3(4)$, $a_4(1/4)$. Полученное таким образом ранжирование совпадает с результатом применения модифицированной процедуры Коупленда.

Легко убедиться, что у всех построенных ранжирований суммарное расстояние до экспертных предпочтений больше минимального.

С помощью процедур нахождения ранжирования альтернатив на основе мажоритарного графа, содержащего контуры, не всегда возможно получить агрегированное отношение, минимально удалённое от экспертных предпочтений. В частности, если профиль экспертных предпочтений — строгие ранжирования и число экспертов нечётно, то единственное отношение с минимальным суммарным расстоянием соответствует мажоритарному графу. При этом, если граф содержит контуры, он не соответствует строгому ранжированию альтернатив. Тогда можно рекомендовать лицу, принимающему решения, выбирать ранжирование с суммарным расстоянием, ближайшим к минимальному.

2. Агрегирование предпочтений, заданных численными оценками альтернатив

Рассмотрим задачу нахождения минимального агрегированного отношения в случае, когда профиль индивидуальных предпочтений экспертов задан численными оценками альтернатив. Предложим способ формирования матриц экспертных предпочтений и алгоритм построения минимального агрегированного предпочтения.

Пусть предпочтения экспертов на множестве альтернатив $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ заданы векторами $h^1, h^2, \ldots, h^m$, где $h^t = \langle h_1^t, h_2^t, \ldots, h_n^t\rangle$ — вектор с компонентами $h_i^t \in \mathbb{R}^+$, равными численным оценкам альтернатив ($i \in \{1, \ldots, n\}$, $t \in \{1, \ldots, m\}$). Предполагается, что эксперты могут оценивать альтернативы в разных шкалах, что затрудняет возможность построения суммарной оценки для каждой альтернативы.

Матрицы экспертных предпочтений $R^1, R^2, \ldots, R^m$ построим на основе векторов $h^1, h^2, \ldots, h^m$ следующим образом: $R^t = \|r_{ij}^t\|$ — квадратная матрица порядка n (n — число альтернатив, m — число экспертов) с элементами

$$r_{ij}^t = \begin{cases} \dfrac{h_j^t}{h_i^t + h_j^t}, & \text{если значения оценок } t\text{-го эксперта максимизируются,} \\ \dfrac{h_i^t}{h_i^t + h_j^t}, & \text{если значения оценок } t\text{-го эксперта минимизируются,} \end{cases} \qquad (i \neq j);$$

$r_{ii}^t = 1$; $i, j = 1, \ldots, n$, $t = 1, \ldots, m$.

Заметим, что для элементов матрицы предпочтений R^t выполняется:

1) $\dfrac{r_{ij}^t}{r_{ji}^t} = \begin{cases} h_j^t/h_i^t, & \text{если значения оценок } t\text{-го эксперта максимизируются,} \\ h_i^t/h_j^t, & \text{если значения оценок } t\text{-го эксперта минимизируются} \end{cases}$
(сохраняется информация о том, во сколько раз альтернатива a_j предпочтительнее альтернативы a_i);
2) $r_{ij}^t + r_{ji}^t = 1$ ($i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$), что фактически заменяет процедуру приведения шкал экспертных предпочтений к однородным.

Для формирования матриц экспертных предпочтений необязательно задавать численные оценки альтернатив. Достаточно задать информацию о том, во сколько раз одна альтернатива предпочтительнее другой. Если альтернатива a_i предпочтительнее a_j в α_{ij} раз, то элементы r^t_{ij} и r^t_{ji} $(i \neq j)$ матрицы предпочтений R^t вычисляются следующим образом:

$$r^t_{ij} = \frac{1}{1+\alpha_{ij}}, \quad r^t_{ji} = \frac{\alpha_{ij}}{1+\alpha_{ij}}.$$

Следует отметить, что для получения полной и непротиворечивой информации достаточно сравнить между собой $n-1$ пару альтернатив, например, a_1 со всеми остальными альтернативами.

Найдём отношение q, имеющее минимальное суммарное расстояние до экспертных предпочтений $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$, заданных матрицами $R^1, R^2, \ldots, R^m$, для элементов которых выполняются условия $r^t_{ij} \in [0;1]$ и $r^t_{ji} = 1 - r^t_{ij}$ $(t = 1, \ldots, m)$. Пусть q — бинарное отношение с матрицей предпочтения $Q = \|q_{ij}\|$, $q_{ij} \in [0,1]$. Суммарное расстояние до экспертных предпочтений вычисляется по формуле

$$D(q) = \sum_{t=1}^{m} \mathrm{d}(q, \rho_t) = \sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |q_{ij} - r^t_{ij}| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{m} |q_{ij} - r^t_{ij}|. \tag{1}$$

Проведём декомпозицию по i, j. Тогда задача сводится к нахождению минимума величин $\sum\limits_{t=1}^{m} |q_{ij} - r^t_{ij}|$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Будем для простоты обозначений считать, что для данных i, j выполняется $r^{t_1}_{ij} \leqslant r^{t_2}_{ij} \leqslant \cdots \leqslant r^{t_m}_{ij}$. Рассмотрим случай, когда число экспертов нечётно. Покажем, что если $m = 2k+1$, минимум достигается при $q_{ij} = r^{t_{k+1}}_{ij}$. Найдём сумму модулей

$$\begin{gathered}|q_{ij} - r^{t_1}_{ij}| + |q_{ij} - r^{t_2}_{ij}| + \ldots + |q_{ij} - r^{t_{2k}}_{ij}| + |q_{ij} - r^{t_{2k+1}}_{ij}| = \\ = \Big(|q_{ij} - r^{t_1}_{ij}| + |q_{ij} - r^{t_{2k+1}}_{ij}|\Big) + \ldots + \Big(|q_{ij} - r^{t_k}_{ij}| + |q_{ij} - r^{t_{k+2}}_{ij}|\Big) + |q_{ij} - r^{t_{k+1}}_{ij}| \geqslant \\ \geqslant |r^{t_1}_{ij} - r^{t_{2k+1}}_{ij}| + \ldots + |r^{t_k}_{ij} - r^{t_{k+2}}_{ij}| + |q_{ij} - r^{t_{k+1}}_{ij}|.\end{gathered}$$

Последнее соотношение следует из неравенства треугольников, причём величина $q_{ij} = r^{t_{k+1}}_{ij}$ — медиана, она находится внутри каждого из полученных интервалов, следовательно, при $q_{ij} = r^{t_{k+1}}_{ij}$ неравенство обращается в равенство и достигается наименьшее значение искомой суммы. В противном случае получим строгое неравенство.

Так как по определению матриц предпочтения $r^t_{ji} = 1 - r^t_{ij}$, элементы r^t_{ji} упорядочиваются в обратном порядке, а наименьшее значение достигается при $q_{ij} = 1 - r^{t_{k+1}}_{ij}$. Таким образом, для элементов матрицы Q, как и для матриц экспертных предпочтений, выполняется $q_{ij} + q_{ji} = 1$.

Аналогично можно доказать, что для чётного числа экспертов $m = 2k$ наибольшее значение сумма модулей принимает при любом значении $q_{ij} \in [r^{t_k}_{ij}, r^{t_{k+1}}_{ij}]$, т. е. матрица предпочтений Q отношения q, доставляющего минимальное значение величины $D(q)$, в этом случае строится неоднозначно. Очевидно, что условие $q_{ij} + q_{ji} = 1$ может не выполняться.

Из приведённых рассуждений следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. При нечётном числе экспертов суммарное расстояние $D(q)$, заданное по формуле (1), минимально, если все элементы q_{ij} матрицы предпочтений Q равны медиане соответствующих элементов матриц экспертных предпочтений $r^1_{ij}, \ldots, r^m_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

Отношение ρ_Σ, соответствующее матрице суммарных предпочтений $P = \sum\limits_{k=1}^{m} R^k$ и, следовательно, матрице $\dfrac{1}{m}P$, не совпадает с минимальным отношением q из теоремы 2. Элементы матрицы $\dfrac{1}{m}P$ равны средним арифметическим значениям элементов матриц экспертных предпочтений, а матрицы Q — медианным. Как известно, значение медианы заданных чисел в общем случае не совпадает с их средним арифметическим.

Покажем, что матрица предпочтений минимального суммарного отношения будет равна средним арифметическим значениям соответствующих элементов матриц экспертных предпочтений, если расстояние между отношениями задать по формуле

$$\mathrm{d}(\rho_k, \rho_t) = \mathrm{d}(R^k, R^t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(r_{ij}^k - r_{ij}^t\right)^2.$$

Тогда минимальное суммарное расстояние до экспертных предпочтений

$$D(q) = \sum_{t=1}^{m} \mathrm{d}(q, \rho_t) = \sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(q_{ij} - r_{ij}^t\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\left(q_{ij} - r_{ij}^t\right)^2 \tag{2}$$

достигается для матрицы Q со средними арифметическими значениями элементов $r_{ij}^1, \ldots, r_{ij}^m$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Действительно, минимум сильно выпуклой функции

$$f(q_{ij}) = (q_{ij} - r_{ij}^1)^2 + \ldots + (q_{ij} - r_{ij}^m)^2$$

достигается при $q_{ij} = (r_{ij}^1 + \ldots + r_{ij}^m)/m$, так как в этом (и только в этом) случае выполняется

$$f'(q_{ij}) = 2(q_{ij} - r_{ij}^1) + \cdots + 2(q_{ij} - r_{ij}^m) = 0.$$

Заметим, что для булевых матриц

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(r_{ij}^k - r_{ij}^t\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|r_{ij}^k - r_{ij}^t|.$$

Теорема 3. Суммарное расстояние $D(q)$, заданное по формуле (2), минимально, если все элементы q_{ij} матрицы предпочтений Q равны среднему арифметическому значению соответствующих элементов матриц экспертных предпочтений $r_{ij}^1, \ldots, r_{ij}^m$, т. е. при $q_{ij} = (r_{ij}^1 + \ldots + r_{ij}^m)/m$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

Матрица средних арифметических значений соответствующих элементов R^1, R^2, $\ldots$, R^m вычисляется через матрицу суммарных предпочтений $P = \sum\limits_{t=1}^{m} R^t$ и равна $\dfrac{1}{m}P$.

В случае, когда заданы весовые коэффициенты $k_1, k_2, \ldots, k_m$, оценивающие компетентность экспертов [9], матрицы экспертных предпочтений фактически примут вид $k_1R^1, \ldots, k_mR^m$. Тогда элементы q_{ij} матрицы Q будут в соответствии с введённым расстоянием равны медианному или среднему арифметическому значению элементов $k_1r_{ij}^1, \ldots, k_mr_{ij}^m$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

Рассмотрим пример, в котором агрегированные отношения строятся на основе медианных и средних арифметических значений элементов матриц экспертных предпочтений.

Пример 3. Пусть множество альтернатив $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Профиль предпочтений трёх экспертов задан численными оценками альтернатив (значения по шкалам экспертных оценок максимизируются):

	h^1	h^2	h^3
a_1	3	4	2
a_2	2	3	4
a_3	3	3	2
a_4	2	4	4

Матрицы парных сравнений альтернатив для каждого эксперта соответственно имеют вид

$$R^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2/5 & 1/2 & 2/5 \\ 3/5 & 1 & 3/5 & 1/2 \\ 1/2 & 2/5 & 1 & 2/5 \\ 3/5 & 1/2 & 3/5 & 1 \end{pmatrix}, \ R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 & 1/2 \\ 4/7 & 1 & 1/2 & 4/7 \\ 4/7 & 1/2 & 1 & 4/7 \\ 1/2 & 3/7 & 3/7 & 1 \end{pmatrix}, \ R^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/2 & 2/3 \\ 1/3 & 1 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 2/3 & 1 & 2/3 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу суммарных предпочтений P:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 157/105 & 10/7 & 47/30 \\ 158/105 & 3 & 43/30 & 11/7 \\ 11/7 & 47/30 & 3 & 172/105 \\ 43/30 & 10/7 & 143/105 & 3 \end{pmatrix}.$$

Агрегированное предпочтение строим на основе матрицы, содержащей средние арифметические значения элементов матриц экспертных предпочтений и равной $\frac{1}{4}P$. Матрица смежности соответствующего мажоритарного графа имеет следующий вид:

$$R_\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Граф отношения ρ_Σ изображён на рис. 2 (для лучшего восприятия петли на рисунке отсутствуют).

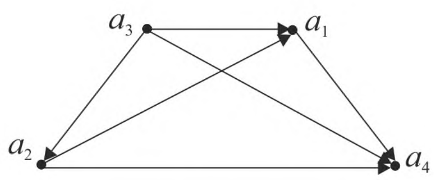

Рис. 2

Граф (без учёта петель) не содержит контуров — его можно разбить на уровни с помощью алгоритма Демукрона [7] (рис. 3).

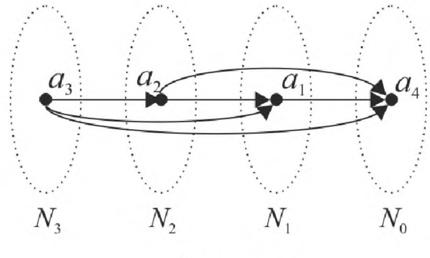

Рис. 3

Получим ранжирование всех альтернатив, начиная с наилучшей: $a_4 - a_1 - a_2 - a_3$. Процедуры Коупленда (простая и модифицированная) дают то же самое упорядочение альтернатив.

Построим минимальное отношение на основе медианных значений соответствующих элементов матриц R^1, R^2, R^3. Матрица Q медианных значений имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 1/2 & 1/2 \\ 4/7 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 4/7 \\ 1/2 & 1/2 & 3/7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим матрицу смежности $R(Q)$ агрегированного предпочтения:

$$R(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующий граф изображён на рис. 4. Граф содержит контуры. Для выбора наилучших альтернатив можно воспользоваться процедурой Коупленда. Получим $a_1(1)$, $a_2(-1)$, $a_3(-1)$, $a_4(1)$. Наилучшие альтернативы по разности входящих в вершину и исходящих из неё дуг a_1 и a_4. Модифицированная процедура Коупленда с учётом весов на дугах и процедура отношения весов дуг дают тот же результат. Индексы альтернативы a_i $(i = 1, \ldots, 4)$ в процедуре отношения весов дуг можно вычислить, разделив сумму элементов i-го столбца на сумму элементов i-й строки матрицы Q (без учёта диагональных элементов, не несущих в данном случае какой-либо существенной информации). Отношения полученных индексов показывают (в каком-то смысле), во сколько раз одна альтернатива более (или менее) предпочтительнее другой.

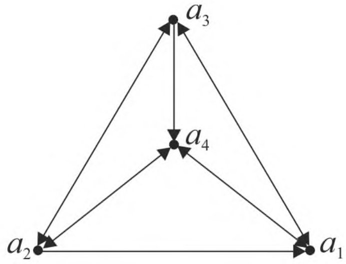

Рис. 4

Агрегированные отношения, построенные для средних арифметических и для медианных значений элементов матриц экспертных предпочтений, не совпадают, но наиболее предпочтительные альтернативы и в том и в другом случае — a_1 и a_4.

Заключение

Разработаны алгоритмы построения агрегированного отношения предпочтения, удовлетворяющего требованию минимальности суммарного расстояния до экспертных предпочтений. Профиль экспертных предпочтений может быть задан бинарными отношениями на множестве альтернатив или численными оценками альтернатив. Предложен способ построения матриц предпочтения в случае задания численных оценок альтернатив или информации о том, во сколько раз одна альтернатива превосходит другую. Вид агрегированного отношения, минимально удалённого от экспертных предпочтений, зависит от типа экспертной информации и формы её представления, а также от выбора формулы для нахождения расстояния между матрицами предпочтений. Проведён сравнительный анализ предложенных алгоритмов, который позволит лицу, принимающему решение, найти разумный компромисс между непротиворечивостью агрегированного отношения и максимальным учётом экспертной информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Миркин Б. Г.* Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974. 256 с.
2. *Петровский А. Б.* Теория принятия решений. М.: Академия, 2009. 400 с.
3. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. М.: Мир, 1991. 464 с.
4. *Осипова В. А., Подиновский В. В., Яшина Н. П.* О непротиворечивом расширении отношений предпочтения в задачах принятия решений // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1984. № 6. С. 831–839.
5. *Нефедов В. Н., Осипова В. А., Смерчинская С. О., Яшина Н. П.* Непротиворечивое агрегирование отношений строгого порядка // Изв. вузов. Математика. 2018. № 5. С. 71–85.
6. *Smerchinskaya S. O. and Yashina N. P.* On an algorithm for pairwise comparison of alternatives in multi-criteria problems // Intern. J. Modeling, Simulation, and Scientific Computing. 2018. V. 9. No. 1.
7. *Нефедов В. Н., Осипова В. А.* Курс дискретной математики. М.: Изд-во МАИ, 1992. 262 с.
8. `http://helpiks.org/3-61482.html` — Электронный учебник по теории принятия решений.
9. *Смерчинская С. О., Яшина Н. П.* Анализ компетентности экспертов в задачах группового выбора // Информационные и телекоммуникационные технологии. 2012. № 15. С. 103–115.

REFERENCES

1. *Mirkin B. G.* Group Choice. V. H. Winston & Sons Publ., 1979. 252 p.
2. *Petrovskiy A. B.* Teoriya prinyatiya resheniy [Decision Making Theory]. Moscow, Akademiya Publ., 2009. 400 p. (in Russian)
3. *Moulin H.* Axioms of Cooperative Decision Making. Cambridge, Cambridge University Press, 1988.
4. *Osipova V. A., Podinovski V. V. and Yashina N. P.* On non-contradictory extension of preference relations in decision making problems. USSR Comput. Math. and Math. Physics, 1984, vol. 24, pp. 128–134.
5. *Nefyodov V. N., Osipova V. A., Smerchinskaya S. O., and Yashina N. P.* Non-contradictory aggregation of strict order relations. Russian Mathematics, 2018, vol. 62, pp. 61–73.
6. *Smerchinskaya S. O. and Yashina N. P.* On an algorithm for pairwise comparison of alternatives in multi-criteria problems. Intern. J. of Modeling, Simulation, and Scientific Computing, 2018, vol. 9, no. 1.
7. *Nefedov V. N. and Osipova V. A.* Kurs diskretnoy matematiki [Discrete Mathematics Course]. Moscow, MAI Publ., 1992. 262 p. (in Russian)
8. `http://helpiks.org/3-61482.html` — Electronic textbook on decision making theory.
9. *Smerchinskaya S. O. and Yashina N. P.* Analiz kompetentnosti ekspertov v zadachakh gruppovogo vybora [Analysis of the competence of experts in the problems of group selection]. Inform. Telecomm. Technologies, 2012, no. 15, pp. 103–115. (in Russian)