

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---

**ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

---

---

*Научный журнал*

---

---

**2019**

**№ 57**

Свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.  
выдано Федеральной службой по надзору  
в сфере массовых коммуникаций, связи  
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

### **Учредитель:**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

## **РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

### **РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА**

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.М. Моисеева (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.М. Гришин, А.Н. Ищенко, В.В. Конеv, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

### **EDITORIAL COUNCIL**

#### **Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics**

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

### **EDITORIAL BOARD**

#### **Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics**

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Kseniya M. Moiseeva (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Anatoliy M. Grishin, Aleksandr N. Ishchenko, Viktor V. Konev, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

**Адрес редакции:** 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

**Электронный адрес:** <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

**Контактный тел./факс:** (3822) 529-740

**E-mail:** [vestnik\\_tgu\\_mm@math.tsu.ru](mailto:vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru)

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

|   |    |
|---|----|
| <b>Иванов Д.Ю.</b> Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы области в случае двумерных задач нестационарной теплопроводности с граничными условиями второго и третьего рода..... | 5  |
| <b>Киричевский Р.В., Скринникова А.В.</b> Влияние аппроксимирующих функций при построении матрицы жесткости конечного элемента на скорость сходимости метода конечных элементов.....                        | 26 |
| <b>Пчелинцев Е.А., Перелевский С.С.</b> Адаптивное оценивание в гетероскедастичной непараметрической регрессии.....   | 38 |

### МЕХАНИКА

|  |     |
|--|-----|
| <b>Антонов Е.А., Меркурьев И.В., Подалков В.В.</b> Влияние нелинейной жесткости упругих элементов на динамику двухмассового микромеханического гироскопа $L-L$ -типа в режиме вынужденных колебаний..... | 53  |
| <b>Бубенчиков М.А., Бубенчиков А.М., Уколов А.В., Уколов Р.Ю., Челнокова А.С.</b> Исследование проницаемости углеродного нанополотна.....  | 62  |
| <b>Королев С.А., Липанов А.М., Русяк И.Г., Тенев В.А.</b> Разработка подходов к решению обратной задачи внешней баллистики в различных условиях применения.....  | 76  |
| <b>Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В., Эйсмонт Е.Р.</b> Компоненты напряжений на линии особых точек свободной от нагрузки торцевой поверхности слоистого цилиндра.....                         | 84  |
| <b>Садин Д.В., Давидчук В.А.</b> Особенности расчета взаимодействия ударной волны с газовым пузырем в мелкодисперсной газозвеси.....   | 99  |
| <b>Сбоев И.О., Гончаров М.М.</b> Особенности распространения тепла от локализованного источника в условиях высокочастотных вибраций.....   | 111 |
| СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ.....   | 125 |

## CONTENTS

### MATHEMATICS

|   |    |
|---|----|
| <b>Ivanov D.Y.</b> A refinement of the boundary element collocation method near the boundary of domain in the case of two-dimensional problems of non-stationary heat conduction with boundary conditions of the second and third kind..... | 5  |
| <b>Kirichevsky R.V., Skrynykova A.V.</b> The effect of approximating functions in the construction of the stiffness matrix of the finite element on the convergence rate of the finite element method.....                                  | 26 |
| <b>Pchelintsev E.A., Perelevskiy S.S.</b> Adaptive estimation in a heteroscedastic non-parametric regression.....   | 38 |

### MECHANICS

|   |     |
|---|-----|
| <b>Antonov E.A., Merkurjev I.V. , Podalkov V.V.</b> Influence of nonlinear rigidity of elastic elements on the $L-L$ type two-mass micromechanical gyroscope dynamics in a forced-oscillation regime..... | 53  |
| <b>Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Ukolov A.V., Ukolov R.Yu., Chelnokova A.S.</b> Investigation of a carbon nanofabric permeability. ....   | 62  |
| <b>Korolev S.A., Lipanov A.M., Rusyak I.G. Tenenev V.A.</b> Development of the approaches for solving an inverse problem of external ballistics in various application conditions.....                    | 76  |
| <b>Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V., Eismont E.R.</b> Stress components near the singular points at a load-free end section of a layered cylinder. ....                                       | 84  |
| <b>Sadin D.V., Davidchuk V.A.</b> Distinctive features of calculating interaction between shock wave and gas bubble in a finely dispersed gas suspension.....   | 99  |
| <b>Sboev I.O., Goncharov M.M.</b> Distinctive features of the heat propagation from a localized source under the high-frequency vibration conditions. ....  | 111 |
| BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS.....  | 125 |

## МАТЕМАТИКА

УДК 519.642.4

DOI 10.17223/19988621/57/1

MSC 80M15, 65E05

Д.Ю. Иванов

**УТОЧНЕНИЕ КОЛЛОКАЦИОННОГО МЕТОДА  
ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ  
В СЛУЧАЕ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ  
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ  
ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО РОДА**

Рассматривается решение двумерных начально-краевых задач для уравнения  $\partial_t u = a^2 \Delta_2 u - pu$  с постоянными  $a, p > 0$  с граничными условиями второго и третьего рода при нулевом начальном условии с помощью коллокационного метода граничных элементов. Для того чтобы приближенное решение сходилось к точному с кубической скоростью равномерно в пространственно-временной области  $\Omega \times [0, T]$ , при вычислении потенциала простого слоя в точке  $x$  интегралы на граничных элементах, отстоящих от точки  $x$  на расстоянии  $r$ , не превышающем, примерно, трети радиуса круга Ляпунова, аппроксимируются на основе аналитического интегрирования по некоторой компоненте расстояния  $r$ . Такая аппроксимация практически и теоретически осуществима для любой аналитически заданной границы  $\partial\Omega$  класса  $C^5$ .

**Ключевые слова:** нестационарная теплопроводность, граничные интегральные уравнения, тепловой потенциал простого слоя, сингулярный граничный элемент, коллокация, оператор, равномерная сходимость.

В настоящей работе рассматриваются внутренние и внешние начально-краевые задачи (НКЗ) для уравнения  $\partial_t u = a^2 \Delta_2 u - pu$  с постоянными  $a, p > 0$  в открытой двумерной пространственной области  $\Omega$  с граничными условиями второго и третьего рода при нулевом начальном условии. Предлагается полностью обоснованный коллокационный метод граничных элементов (КМГЭ) [1, с. 21], позволяющий получить равномерно сходящиеся в пространственно-временной области  $\Omega \times [0, T]$  приближенные решения указанных НКЗ. Решения ищутся в виде потенциала простого слоя с неизвестной функцией плотности, определяемой из граничного интегрального уравнения (ГИУ) второго рода. Ранее обоснование КМГЭ для решения таких НКЗ типа Неймана на основе ГИУ второго рода было выполнено в работах [2–5]. В работах [2, 4, 5] доказательство сходимости метода было сделано на границах класса гладкости  $C^\infty$ , а в работе [3] – на негладких поверхностях, удовлетворяющих условию типа Липшица. В работе [4] при решении ГИУ используется замена переменных, которая позволяет избавиться от сингулярности в правой части ГИУ.

В настоящей работе осуществляется кусочно-квадратичная интерполяция (ККИ) временной  $C_0$ -полугруппы  $U(\tau)$ , через которую выражаются ядра интегральных операторов, с равным шагом  $h_\tau$  по параметру полугруппы  $\tau$ . Кроме того, осуществляется ККИ функции плотности, при этом граница  $\partial\Omega$  разбивается на равные по длине дуги  $s$  граничные элементы (ГЭ).

Дальнейшая аппроксимация ГИУ осуществляется в соответствии с работой [6], где для вычисления интегралов по  $s$  на сингулярном ГЭ, а также на около-сингулярных ГЭ в некоторой фиксированной по длине дуги области, прилегающей к сингулярному ГЭ, используется точное интегрирование по переменной  $\tilde{r}$  – расстоянию от граничной точки, в которой вычисляется интеграл как функция от параметра, до текущей точки интегрирования  $x' \in \partial\Omega$  (сингулярным называется ГЭ, в котором достигается значение  $\tilde{r} = 0$ ). Такое интегрирование практически осуществимо для любой аналитически заданной границы  $\partial\Omega$ . Для дальнейшей аппроксимации потенциала в точках  $x \in \Omega$  здесь предлагается схожая методика. А именно, для вычисления интегралов по  $s$  на ГЭ, отстоящих от точки  $x$  на расстоянии, не превышающем, примерно, трети радиуса круга Ляпунова, используется точное интегрирование по некоторой компоненте  $\rho$  расстояния  $r$  от точки  $x$  до точки  $x' \in \partial\Omega$ :  $\rho \equiv \sqrt{r^2 - d^2}$  ( $d$  – расстояние от  $x$  до  $\partial\Omega$ ), также практически осуществимое для любой аналитически заданной кривой  $\partial\Omega$ . При таком интегрировании в качестве весовых функций берутся функции переменной  $\rho$ , порожденные фундаментальным решением уравнения теплопроводности, а остальная часть подынтегральной функции аппроксимируется с помощью квадратичной интерполяции по  $\rho$ . Другие интегралы по  $s$  на ГЭ вычисляются с помощью простых квадратурных формул Гаусса (ПКФГ) [1, с. 79]. Интегрирование по  $\tau$  проводится аналогично: множитель  $e^{-p\tau}$  аппроксимируется с помощью ККИ, и тогда интегралы вычисляются точно.

Матричные коэффициенты разрешающих НКЗ и ГИУ дискретных операторов экономно вычисляются в алгебре полиномов, образованных степенями оператора  $U(h_\tau)$ . С помощью разрешающего НКЗ дискретного оператора и значений граничной функции в точках коллокации  $t_n = nh_\tau$  вычисляются значения приближенного решения НКЗ в точках  $t_n$ , что позволяет осуществить ККИ приближенного решения НКЗ по времени  $t$ .

Доказано, что полученные таким образом приближенные решения НКЗ сходятся к точным с кубической относительно шагов по времени и длине дуги скоростью равномерной в области  $\Omega \times [0, T]$ . Доказана равномерная в  $\Omega \times [0, T]$  устойчивость приближенных решений НКЗ к возмущениям граничных функций. Полученные результаты справедливы для границы  $\partial\Omega$  с гладкостью  $C^5$ . В работе [5] также доказана равномерная сходимость приближенных решений, но в предположении, что интегралы на ГЭ вычислены точно. Вопрос аппроксимации интегралов на ГЭ в литературе считается чисто вычислительным и выносится за рамки доказательства сходимости. Обычно интегралы по  $s$  в потенциале рекомендуется вычислять с помощью ПКФГ, так как подынтегральная функция при  $x \in \Omega$ , стро-

го говоря, гладкая. Но при  $r \rightarrow +0$  подынтегральная функция, полученная после предварительного интегрирования по  $\tau$ , обладает логарифмической особенностью, поэтому применение ПКФГ при  $r \approx 0$  нарушает равномерную сходимость, что проявляется в снижении точности вблизи границы  $\partial\Omega$ .

Приведены результаты вычислительных экспериментов по решению НКЗ в круговой пространственной области, которые показывают, что применение точного интегрирования по  $\rho$  позволяет в значительной мере сократить уменьшение точности численных решений при приближении к границе  $\partial\Omega$  по сравнению с применением исключительно ПКФГ для аппроксимации интегралов по длине дуги на  $\Gamma\Omega$  при вычислении потенциала.

### Предварительные замечания

Пусть  $\overline{\Omega^+}$  — двумерная открытая ограниченная односвязная область, и  $\Omega^- \equiv \mathbf{R}^2 \setminus \Omega^+$  ( $\mathbf{R} \equiv (-\infty, +\infty)$ ). Кроме того, пусть  $\partial\Omega$ , граница области  $\Omega^+$ , является кривой класса гладкости  $C^2$ , если не оговорено особо. Рассмотрим внутренние и внешние краевые задачи:

$$a^2 \Delta_2 \mathbf{u}_2^\pm - p \mathbf{u}_2^\pm = \mathbf{B} \mathbf{u}_2^\pm \quad (\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2) \in \Omega^\pm), \quad \partial_{n(\mathbf{x})} \mathbf{u}_2^\pm - \eta \mathbf{u}_2^\pm = \mathbf{w}_2^\pm \quad (\mathbf{x} \in \partial\Omega), \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}_2^\pm(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{w}_2^\pm(\mathbf{x})$  — векторные функции со значениями в гильбертовом пространстве  $L_2 \equiv L_2(I_T)$  ( $I_T \equiv [0, T]$ ), заданные на множествах  $\Omega^\pm$  и  $\partial\Omega$  соответственно (все пространства функций здесь комплексные);  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  — нормаль к кривой  $\partial\Omega$ , проходящая через точку  $\mathbf{x}$  и направленная внутрь области  $\Omega^+$ ;  $\Delta_2 \equiv \partial_{x_1 x_1}^2 + \partial_{x_2 x_2}^2$  (непрерывность и дифференцируемость векторных функций предполагается здесь в норме пространства их значений, в данном случае —  $L_2$ );  $p > 0$ ,  $a > 0$  (коэффициент температуропроводности),  $\eta \geq 0$  (коэффициент теплообмена) — постоянные;  $\mathbf{B}$  — замкнутый оператор в  $L_2$ :  $(\mathbf{B}f)(t) = f'(t)$ , заданный на множестве  $D(\mathbf{B})$  классов функций  $f \in L_2$ , эквивалентных абсолютно непрерывным на промежутке  $I_T$  функциям  $f(t)$ , таким, что  $f(0) = 0$ .

Пусть  $C(\Omega')$  и  $C^k(\Omega')$  — пространства непрерывных и  $k$  раз непрерывно дифференцируемых на некотором множестве  $\Omega' \subset \mathbf{R}^2$  векторных функций со значениями в пространстве  $L_2$ . В работах [7, 8] доказана однозначная разрешимость задач (1) в классе  $C(\overline{\Omega^\pm}) \cap C^2(\Omega^\pm)$  при любых  $\mathbf{w}_2^\pm \in C(\partial\Omega)$ . Решения имеют вид векторных потенциалов — криволинейных интегралов первого рода:

$$\mathbf{u}_2^\pm(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_0(\mathbf{x}) \mathbf{v}_2^\pm \quad (\mathbf{x} \in \Omega^\pm), \quad (2a)$$

где функции  $\mathbf{v}_2^\pm \in C(\partial\Omega)$  находятся из соответствующих ГИУ:

$$(\mathbf{G}_2^\pm \mathbf{v}_2^\pm)(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_2^\pm(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \partial\Omega), \quad \mathbf{G}_2^\pm \equiv \mp 2^{-1} + \mathbf{G}_2 - \eta \mathbf{G}_0, \quad (2b)$$

$$\mathbf{G}_i(\mathbf{x}) \mathbf{f} = (\mathbf{G}_i \mathbf{f})(\mathbf{x}) \equiv \int_{\partial\Omega} \mathbf{K}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{f}(\mathbf{x}') ds' \quad (\mathbf{f} \in C(\partial\Omega), \quad i = 0, 2),$$

$K_i(x, x')$  ( $x \neq x'$ ) – ограниченные операторы в пространстве  $L_2$ , определяемые равенствами:

$$K_i(x, x')f \equiv \int_{I_T} g_i(x, x', \tau) e^{-p\tau} U(\tau) f d\tau \quad (f \in L_2, i = 0, 2),$$

$$g_0(x, x', \tau) \equiv a_0(r, \tau), \quad g_2(x, x', \tau) \equiv a_2(r, \tau) b_2(x, x'),$$

$$a_0(r, \tau) \equiv a(r, \tau), \quad a_2(r, \tau) \equiv -r \partial_r a(r, \tau), \quad b_2(x, x') \equiv \partial_{n(x)} \ln r^{-1}.$$

Здесь  $a(r, \tau) \equiv (4\pi\tau)^{-1} \exp[-r^2/(4a^2\tau)]$ ,  $r \equiv |x - x'|$ ; дифференцирование  $\partial_{n(x)}$  осуществляется по точке  $x$ . Операторы  $U(\tau)$  образуют  $C_0$ -полугруппу правых сдвигов, порождаемую оператором  $B$ :  $(U(\tau)f)(t) = f(t - \tau)$  при  $\tau \leq t$ ,  $(U(\tau)f)(t) = 0$  при  $\tau > t$ ,  $Bf = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau^{-1}(f - U(\tau)f)$  ( $f \in D(B)$ ). Заметим, что  $\|U(\tau)\| = 1$  при  $\tau < T$ ,  $U(\tau) = O$  при  $\tau \geq T$  ( $O$  – нулевой оператор). Имеют место равенства:

$$B^n U(\tau) f = U(\tau) B^n f \quad (f \in D(B^n), n \in \mathbf{N} \equiv \{1, 2, \dots\}). \quad (3)$$

Введем в рассмотрение параметрические уравнения кривой  $\partial\Omega$ :  $x_1 = \tilde{x}_1(s)$ ,  $x_2 = \tilde{x}_2(s)$ . Параметр  $s$  по модулю равен длине дуги, откладываемой от некоторой фиксированной точки и заканчивающейся в точке  $\tilde{x}(s) \equiv (\tilde{x}_1(s), \tilde{x}_2(s))$ , причем  $s > 0$ , если дуга откладывается по часовой стрелке, и  $s < 0$ , если против. Функции  $\tilde{x}_1(s)$ ,  $\tilde{x}_2(s)$ , периодические с периодом  $2S$  ( $S$  – половина длины  $\partial\Omega$ ), осуществляют взаимно-однозначное отображение множества  $I'_S \equiv [-S, S)$  на множество  $\partial\Omega$ . Условимся далее писать  $\partial\Omega \in C^k$ , если функции  $\tilde{x}_i(s)$  ( $i = 1, 2$ ) имеют непрерывные производные на замкнутом множестве  $\overline{I'_S}$  до порядка  $k$  включительно, причем  $\tilde{x}_i^{(l)}(-S+0) = \tilde{x}_i^{(l)}(S-0)$  ( $l = \overline{0, k}$ ).

Введем в рассмотрение банаховы пространства  $C^k(\partial\Omega)$  ( $k \in \mathbf{Z}_+ \equiv \{0, 1, \dots\}$ ) функций  $f \in C(\partial\Omega)$ , имеющих непрерывные на множестве  $\partial\Omega$  производные  $f^{(l)}$ :  $f^{(l)}(s) \equiv d^l f(\tilde{x}(s))/ds^l$  ( $s \in \overline{I'_S}$ ,  $l = \overline{0, k}$ ), с нормами  $\|f\|_{C^k(\partial\Omega)} = \max_{l=0, k} \sup_{s \in I'_S} \|f^{(l)}(s)\|$  ( $C^0(\partial\Omega) \equiv C(\partial\Omega)$ ). Обозначим через  $H^n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) гильбертовы пространства функций  $f \in L_2$ :  $B^m f \in L_2$  ( $m = \overline{1, n}$ ), с нормами  $\|f\|_{H^n} \equiv \left[ \sum_{m=0}^n \|B^m f\|_{L_2}^2 \right]^{1/2}$  ( $H^0 \equiv L_2$ ). Определим банаховы пространства  $C_n^k(\partial\Omega)$  ( $k \in \mathbf{Z}_+$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ) функций  $f \in C^k(\partial\Omega)$ :  $f(x) \in H^n$  ( $x \in \partial\Omega$ ) и  $B^m f \in C^k(\partial\Omega)$  ( $m = \overline{1, n}$ ), с нормами  $\|f\|_{C_n^k(\partial\Omega)} \equiv \max_{l=0, k} \sup_{s \in I'_S} \|f^{(l)}(s)\|_{H^n}$  ( $C_0^k(\partial\Omega) \equiv C^k(\partial\Omega)$ ). Зададим банаховы пространства  $C_{n,m}^k(\partial\Omega) \equiv C_n^k(\partial\Omega) \cap C_{n+m}(\partial\Omega)$  ( $C_n(\partial\Omega) \equiv C_n^0(\partial\Omega)$ ) с нормами  $\|f\|_{C_{n,m}^k(\partial\Omega)} \equiv \|f\|_{C_n^k(\partial\Omega)} + \|f\|_{C_{n+m}(\partial\Omega)}$  ( $k, n, m \in \mathbf{Z}_+$ ).

Условимся оператор  $A$ , отображающий банахово пространство  $B$  в банахово пространство  $C$ , обозначать как  $A [ B \rightarrow C ]$ , а если  $C = B$ , то  $A [ B ]$ . В силу следствия 3 [9] имеет место утверждение:

**Теорема 1.** Пусть  $\partial\Omega \in C^{k+2}$ . Тогда операторы  $G_2^\pm [ C_{n,m}^k(\partial\Omega) ]$  всюду определены, ограничены и ограниченно обратимы ( $k, n, m \in \mathbf{Z}_+$ ).

### Приближенное решение граничного интегрального уравнения

В настоящем параграфе кратко опишем результаты работы [6], касающиеся операторов, позволяющих получить приближенное решение ГИУ (2b) на сетке границы  $\partial\Omega$ .

Пусть  $s, s'$  – значения параметра, соответствующие точкам  $x, x' \in \partial\Omega$ . Введем обозначение:  $\sigma \equiv s' - s$ . На множестве  $\Theta \equiv \{(s, s') : \sigma \in \overline{I'_S}, s \in \overline{I'_S}\}$  зададим функцию  $\rho(s, s') : \rho = \tilde{r}$ , если  $\sigma \geq 0$ ;  $\rho = -\tilde{r}$ , если  $\sigma < 0$  ( $\tilde{r}(s, s') \equiv |\tilde{x}(s) - \tilde{x}(s')|$ ). Введем в рассмотрение функции  $\psi_i(s, s')$  ( $i = 0, 2, 3$ ), заданные на множестве  $\Theta$  при  $s' \neq s$  равенствами  $\psi_i \equiv \varphi_i / \sigma^2$  ( $i = 0, 2$ ) и  $\psi_3 \equiv \varphi_3 / \sigma$ , где

$$\varphi_0(s, s') \equiv \tilde{r}^2 = [\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)]^2 + [\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)]^2,$$

$$\varphi_2(s, s') \equiv 2^{-1} \partial_{n(x)} \varphi_0 = -\tilde{x}'_2(s) [\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)] + \tilde{x}'_1(s) [\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)],$$

$$\varphi_3(s, s') \equiv 2^{-1} \partial_s \varphi_0 = \tilde{x}'_1(s') [\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)] + \tilde{x}'_2(s') [\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)],$$

а при  $s' = s$  равенствами

$$\psi_0(s, s) = \psi_3(s, s) \equiv 1, \quad \psi_2(s, s) \equiv 2^{-1} [-\tilde{x}'_2(s) \tilde{x}''_1(s) + \tilde{x}'_1(s) \tilde{x}''_2(s)].$$

Кроме того, определим на множестве  $\Theta$  функции

$$\delta(s, s') \equiv (\partial_{s'} \rho)^{-1} = \sqrt{\psi_0} / \psi_3, \quad \delta_2(s, s') \equiv b_2(\tilde{x}(s), \tilde{x}(s')) = -\psi_2 / \psi_0.$$

**Теорема 2.** Пусть  $\partial\Omega \in C^{n+2}$  ( $n \in \mathbf{Z}_+$ ). Тогда существуют непрерывные на множестве  $\Theta$  производные  $\partial_s^j \delta_2$  ( $j = \overline{0, n}$ ). Кроме того, для любого  $M > 1$  существует число  $\Sigma : 0 < \Sigma \leq S$ , такое, что при  $(s, \sigma) \in \overline{I'_S} \times I'_\Sigma$  ( $I'_\Sigma \equiv [-\Sigma, \Sigma]$ ) функция  $\delta$  ограничена:  $1 \leq \delta \leq M$ , и существуют непрерывные производные  $\partial_s^j \delta$  ( $j = \overline{0, n}$ ).

**Следствие 1.** Пусть  $\partial\Omega \in C^{n+2}$  ( $n \in \mathbf{Z}_+$ ). Тогда функция  $\rho_s(\sigma) \equiv \rho(s, s + \sigma)$  при любых фиксированных  $s \in I'_S$  и  $M > 1$  диффеоморфно с гладкостью  $C^{n+1}$  отображает множество  $I'_\Sigma$  на множество  $\rho_s(I'_\Sigma) \equiv [\rho_s(-\Sigma), \rho_s(\Sigma)]$ . Функции  $\tilde{\delta}_0(s, \rho) \equiv \delta(s, s + \sigma_s(\rho))$ ,  $\tilde{\delta}_2(s, \rho) \equiv \delta_2(s, s + \sigma_s(\rho)) \delta_2(s, s + \sigma_s(\rho))$  ( $\sigma_s(\rho)$  – функция, обратная к функции  $\rho_s(\sigma)$ ) имеют непрерывные на множестве  $\overline{I'_S} \times \rho_s(I'_\Sigma)$  производные  $\partial_\rho^j \tilde{\delta}_i$  ( $j = \overline{0, n}$ ,  $i = 0, 2$ ).

Обозначим через  $\Lambda_m(z)$  и  $\tilde{\Lambda}_m(z)$  ( $z \in [a, b]$ ,  $m = \overline{0, 2}$ ) интерполяционные многочлены Лагранжа:

$$\Lambda_m(z) \equiv \prod_{j=0}^2 \frac{z-z_j}{z_m-z_j}, \quad z_j \equiv \bar{z} + q_j h_z \quad (j = \overline{0,2});$$

$$\tilde{\Lambda}_m(z) \equiv \prod_{j=0}^2 \frac{z-\tilde{z}_j}{z_m-\tilde{z}_j}, \quad \tilde{z}_j \equiv \bar{z} + \tilde{q}_j h_z \quad (j = \overline{0,2}).$$

Здесь  $h_z \equiv 2^{-1}(b-a)$ ,  $\bar{z} \equiv 2^{-1}(a+b)$ ;  $q_0 \equiv -1$ ,  $q_1 \equiv 0$ ,  $q_2 \equiv 1$ ;  $\tilde{q}_0 \equiv -\sqrt{3}/2$ ,  $\tilde{q}_1 \equiv 0$ ,  $\tilde{q}_2 \equiv \sqrt{3}/2$  [10, с. 92]. Пусть  $f(z)$  – трижды непрерывно дифференцируемая на промежутке  $[a, b]$  функция со значениями в произвольном банаховом пространстве  $B$ . Тогда для функций  $\tilde{f}_1(z) \equiv \sum_{m=0}^2 f(z_m) \Lambda_m(z)$ ,  $\tilde{f}_2(z) \equiv \sum_{m=0}^2 f(\tilde{z}_m) \tilde{\Lambda}_m(z)$  и первых и вторых производных функции  $\tilde{f}_1(z)$  при  $z \in [a, b]$  имеют место оценки:

$$\|\tilde{f}_1(z) - f(z)\|_B \leq c_\omega \sup_{z \in [a, b]} \|f^{(3)}(z)\|_B h_z^3, \quad \|\tilde{f}_2 - f\|_B \leq \tilde{c}_\omega \sup_{z \in [a, b]} \|f^{(3)}(z)\|_B h_z^3,$$

$$c_\omega \equiv 2\sqrt{3}/9, \quad \tilde{c}_\omega \equiv 4^{-1}; \quad (4)$$

$$\|\tilde{f}_1(z)\|_B \leq c_\Lambda \max_{m=0,2} \|f(z_m)\|_B, \quad \|\tilde{f}_2(z)\|_B \leq \tilde{c}_\Lambda \max_{m=0,2} \|f(\tilde{z}_m)\|_B,$$

$$c_\Lambda \equiv 3, \quad \tilde{c}_\Lambda \equiv 3^{-1}(7 + 2\sqrt{3}); \quad (5)$$

$$\|\tilde{f}_1^{(1)}(z)\|_B \leq c'_\Lambda \sup_{z \in [a, b]} \|f^{(1)}(z)\|_B, \quad \|\tilde{f}_1^{(2)}(z)\|_B \leq c''_\Lambda \sup_{z \in [a, b]} \|f^{(2)}(z)\|_B,$$

$$c'_\Lambda \equiv 3, \quad c''_\Lambda \equiv 2^{-1}. \quad (6)$$

Пусть  $N/2 \in \mathbf{N}$ ,  $\tilde{N}/2 \in \mathbf{N}$ ;  $\tau_n \equiv n h_\tau$  ( $n \in \mathbf{Z}_+$ ),  $h_\tau \equiv T/N$ ;  $\tilde{\tau}_n \equiv n \tilde{h}_\tau$  ( $n \in \mathbf{Z}_+$ ),  $\tilde{h}_\tau \equiv h_\tau / \tilde{N}$ .

Пусть  $L/2 \in N$ . Введем в рассмотрение пространства  $H_L$  векторных сеточных функций  $f$  со значениями  $f_l \in L_2$ , заданными в узлах  $x_l \equiv \tilde{x}(s_l)$  ( $s_l \equiv l h_s$ ,  $l = \overline{-L-1, L}$ ,  $h_s \equiv S/(L+1)$ ), с нормой  $\|f\|_{H_L} = \max_{-L-1 \leq l \leq L} \|f_l\|_{L_2}$ . Условимся считать, когда это будет необходимо, что  $x_{l+2L+2} = x_l$ . Зададим проекционные операторы  $P_L [C(\partial\Omega) \rightarrow H_L]$ :  $(P_L f)_l = f(x_l)$  ( $\|P_L\| \leq 1$ ).

Зададим ограниченные операторы  $\hat{G}_i \equiv \sum_{n=0}^{N-1} \hat{G}_{i,n} U(\tau_n) [H_L \rightarrow H_L]$  ( $i = 0, 2$ ):

$$\hat{G}_{i,0} \equiv \int_{\tau_0}^{\tau_2} \hat{A}_i(\tau) e(\tau) \Lambda_0(\tau) d\tau, \quad \hat{G}_{i,2n+1} \equiv \int_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}} \hat{A}_i(\tau) e(\tau) \Lambda_1(\tau) d\tau \quad (n = \overline{0, N/2-1}),$$

$$\hat{G}_{i,2n} \equiv \int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \hat{A}_i(\tau) e(\tau) \Lambda_2(\tau) d\tau + \int_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}} \hat{A}_i(\tau) e(\tau) \Lambda_0(\tau) d\tau \quad (n = \overline{1, N/2-1});$$

$$e(\tau) \equiv \sum_{m=0}^2 \exp[-p(\tilde{\tau}_{n\tilde{N}+2\tilde{n}+1} + \tilde{q}_m \tilde{h}_\tau)] \tilde{\Lambda}_m(\tau)$$

$$(\tau \in [\tilde{\tau}_{n\tilde{N}+2\tilde{n}}, \tilde{\tau}_{n\tilde{N}+2\tilde{n}+2}], \quad \tilde{n} = \overline{0, \tilde{N}/2-1}, \quad n = \overline{0, N-1}).$$

Операторы  $\hat{A}_l(\tau)$  [ $H_L \rightarrow H_L$ ] ( $\tau > 0$ ) подобно  $\hat{G}_{i,n}$  имеют вид скалярных квадратных матриц порядка  $2L+2$ :

$$\begin{aligned} (\hat{A}_l(\tau)\mathbf{f})_k &\equiv \sum_{l=-L-1}^L \hat{g}_{i,k,l}(\tau) \mathbf{f}_l \quad (k = \overline{-L-1, L}, \mathbf{f} \in H_L), \\ \hat{g}_{i,k,2l}(\tau) &\equiv \tilde{J}_{i,1,k,2l-1}(\tau) + \tilde{J}_{i,1,k,2l}(\tau), \\ \hat{g}_{i,k,2l-1}(\tau) &\equiv \tilde{J}_{i,2,k,2l-3}(\tau) + \tilde{J}_{i,2,k,2l-2}(\tau) + \tilde{J}_{i,0,k,2l-1}(\tau) + \tilde{J}_{i,0,k,2l}(\tau) \quad (l = \overline{-L/2, L/2}), \\ \tilde{J}_{i,m,k,l}(\tau) &\equiv \tilde{J}'_{i,m,k,l}(\tau) + \tilde{J}''_{i,m,k,l}(\tau) \quad (l = \overline{-L-1, L}). \end{aligned}$$

В свою очередь, функции  $\tilde{J}'_{i,m,k,l}(\tau)$  и  $\tilde{J}''_{i,m,k,l}(\tau)$  ( $\tau > 0$ ) определяются равенствами

$$\begin{aligned} \tilde{J}'_{i,m,k,l}(\tau) &\equiv \int_{\rho_k(s'_i)}^{\rho_k(s'_{i+1})} a_i(\rho, \tau) \hat{\delta}_{i,m,k}(\rho) d\rho \quad (i = 0, 2, m = \overline{0, 2}, k, l = \overline{-L-1, L}), \\ \hat{\delta}_{i,m,k}(\rho) &\equiv \sum_{m'=0}^2 \check{\delta}_{i,m,k}(\bar{\rho}_{k,l} + \tilde{q}_{m'} h'_{k,l}) \tilde{\Lambda}_{m'}(\rho) \quad (\rho \in [\rho_k(s'_i), \rho_k(s'_{i+1})]), \\ h'_{k,l} &\equiv 2^{-1} [\rho_k(s'_{i+1}) - \rho_k(s'_i)], \quad \bar{\rho}_{k,l} \equiv 2^{-1} [\rho_k(s'_i) + \rho_k(s'_{i+1})], \\ \check{\delta}_{i,m,k}(\rho) &\equiv \check{\delta}_i(s_k, \rho) \tilde{\Lambda}_m(s_k + \sigma_k(\rho)); \\ \tilde{J}''_{i,m,k,l}(\tau) &\equiv h_l'' \sum_{j=1}^{\gamma} \hat{w}_j \check{g}_{i,m,k}(\bar{s}_l + h_l'' z_j, \tau), \quad \bar{s}_l \equiv 2^{-1} (s_l'' + s_{l+1}''), \quad h_l'' \equiv 2^{-1} (s_{l+1}'' - s_l'') \\ &\quad (i = 0, 2, m = \overline{0, 2}, k, l = \overline{-L-1, L}). \end{aligned}$$

Здесь  $\rho_k(\sigma) \equiv \rho(s_k, s_k + \sigma)$ ;  $\sigma_k(\rho)$  – функция, обратная к функции  $\rho_k(\sigma)$ ;  $\tilde{\Lambda}_m(s)$  – кусочно-квадратичная функция, определенная на множестве  $\bar{I}_s$ :  $\tilde{\Lambda}_m(s) = \Lambda_m(s)$  ( $s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}]$ ,  $l = \overline{-L/2, L/2}$ );  $z_j$  – корни многочлена  $P_\gamma(z) \equiv [\gamma!/(2\gamma)!] (dz^\gamma/dz^\gamma) (z^2 - 1)^\gamma$  на промежутке  $[-1; 1]$ ,  $\hat{w}_j$  – весовые коэффициенты ПКФГ с  $\gamma$  узлами ( $\sum_{j=1}^{\gamma} \hat{w}_j = 2$ ,  $\hat{w}_j > 0$ ) [10, с. 255];  $\check{g}_{i,m,k}(\sigma, \tau) \equiv \check{g}_i(s_k, s_k + \sigma, \tau) \tilde{\Lambda}_m(s_k + \sigma)$ ,  $\check{g}_i(s, s', \tau) \equiv g_i(\tilde{x}(s), \tilde{x}(s'), \tau)$ . Кроме того, здесь  $s'_l \equiv \min\{s_l, \Sigma\}$ ,  $s''_l \equiv \max\{s_l, \Sigma\}$ , если  $s_l \geq 0$ , и  $s'_l \equiv \max\{s_l, -\Sigma\}$ ,  $s''_l \equiv \min\{s_l, -\Sigma\}$ , если  $s_l < 0$ , при этом число  $\Sigma > 0$  выбрано в соответствии с теоремой 2.

Введем в рассмотрение операторы в пространстве  $H_L$ :  $\hat{G}_2^\pm \equiv \mp 2^{-1} + \hat{G}_2 - \eta \hat{G}_0$ ,  $\hat{G}_{2,0}^\pm \equiv \mp 2^{-1} + \hat{G}_{2,0}$ ,  $\hat{G}_{2,n} \equiv \hat{G}_{2,n} - \eta \hat{G}_{0,n}$  ( $n = \overline{0, N-1}$ ). Определено  $N_{\min} \in \mathbf{N}$  [6], такое, что при  $N/2 \in \mathbf{N}_{\min} \equiv \{N_{\min}, N_{\min} + 1, \dots\}$  операторы  $\hat{G}_{2,0}^\pm$  ограниченно обратимы. Тогда операторы  $\hat{G}_2^\pm$  также ограниченно обратимы и имеют место формулы

$$\begin{aligned} (\hat{G}_2^\pm)^{-1} &= \sum_{n=0}^{N-1} \hat{G}_{2,n}^{\pm(-1)} U(\tau_n); \hat{G}_{2,0}^{\pm(-1)} \equiv (\hat{G}_{2,0}^\pm)^{-1}, \\ \hat{G}_{2,n}^{\pm(-1)} &\equiv - \left( \sum_{m=1}^n \hat{G}_{2,m-1}^{\pm(-1)} \hat{G}_{2,n+1-m} \right) \hat{G}_{2,0}^{\pm(-1)} \quad (n = \overline{1, N-1}). \end{aligned} \quad (7)$$

**Определение.** Будем говорить, что ограниченные операторы  $A_n [C \rightarrow D]$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) сходятся при  $n \rightarrow \infty$  по операторной норме к соответствующим ограниченным операторам  $B_n [C \rightarrow D]$ , если  $\|A_n f - B_n f\|_D \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно в шаре  $\|f\|_C \leq 1$ .

Доказаны следующие утверждения (см. теорему 6 и следствие 3 [6]):

**Теорема 3.** Пусть  $\partial\Omega \in C^2$ . Тогда операторы  $(\hat{G}_2^\pm)^{-1} [H_L]$  ( $L/2 \in \mathbf{N}$ ,  $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$ ) совокупно ограничены.

**Теорема 4.** Пусть  $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$  и  $\gamma \geq 2$ . Тогда операторы  $(\hat{G}_2^\pm)^{-1} P_L [C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow H_L]$  ( $L/2 \in \mathbf{N}$ ,  $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$ ) сходятся при  $L, N \rightarrow \infty$  по операторной норме к соответствующим операторам  $P_L (\hat{G}_2^\pm)^{-1} [C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow H_L]$  с порядком аппроксимации  $O(h_\tau^3 + h_s^3)$ .

### Сеточные аппроксимации решений краевых задач

Контур  $\partial\Omega \in C^2$  не имеет точек самопересечения, поэтому существует постоянная  $c_r \equiv \inf_{(s,s') \in \Theta} \psi_0 > 0$ . Справедлива оценка:  $\vartheta \leq c_K |\sigma| \leq c'_K c_r^{-1/2} r$ , где  $\vartheta$  – острый угол между нормальными, проходящими через точки  $\tilde{x}(s)$  и  $\tilde{x}(s')$  ( $s, s' \in I'_S$ );  $c'_K \equiv \sup_{(s,s') \in \Theta} K(s, s')$ ,  $K(s, s') \equiv |\partial_s^2 \varphi_2|$ ;  $c_K \equiv \sup_{s \in I'_S} K(s, s)$ ,  $K(s, s)$  – кривизна кривой в точке  $\tilde{x}(s)$ . Отложим на нормали к кривой  $\partial\Omega$  в каждой точке  $\tilde{x}(s)$  ( $s \in I'_S$ ) отрезок одной и той же длины  $d \in I_D \equiv [0, D]$  ( $D \equiv c_r^{1/2} / (3c'_K)$ ), направив этот отрезок внутрь области  $\Omega^\pm$ . Величина  $3D$  может быть взята в качестве радиуса круга Ляпунова (круг с таким радиусом с центром в точке  $\tilde{x}(s)$  обозначим через  $O(s)$ ), поэтому согласно [11, с. 313] концы таких отрезков  $\tilde{x}_d^\pm(s) \in \Omega^\pm$  образуют замкнутую линию  $\partial\Omega_d^\pm \in C^1$ , параллельную кривой  $\partial\Omega$ , т.е. каждая точка  $\tilde{x}_d^\pm(s)$  может быть получена указанным образом из единственной точки  $\tilde{x}(s)$ .

Введем в рассмотрение местную систему декартовых координат  $(\xi_s, \eta_s)$  с началом в точке  $\tilde{x}(s)$  и осью ординат, направленной по нормали внутрь области  $\Omega^-$ . Координаты  $(\xi_s, \eta_s)$  точек  $\tilde{x}_d^\pm(s)$  и  $\tilde{x}(s')$  равны соответственно  $(0, \mp d)$  и  $(-2^{-1} \partial_s \varphi_0, 2^{-1} \partial_{n(\tilde{x}(s))} \varphi_0)$ , поэтому  $r^2 = |\tilde{x}(s') - \tilde{x}_d^\pm(s)|^2 = \varphi_0 \pm 2d \varphi_2 + d^2$ . Зададим

на множестве  $\Theta$  функцию  $\varphi_4(s, s')$ , а на множестве  $\Upsilon \equiv I_D \times \Theta$  – функции  $\varphi_0^\pm(d, s, s')$  и  $\varphi_3^\pm(d, s, s')$ :

$$\begin{aligned} \varphi_4 &\equiv \partial_{s'} \varphi_2 = -\tilde{x}'_2(s) \tilde{x}'_1(s') + \tilde{x}'_1(s) \tilde{x}'_2(s'), \\ \varphi_0^\pm &\equiv \varphi_0 \pm 2d \varphi_2, \quad \varphi_3^\pm \equiv 2^{-1} \partial_{s'} \varphi_0^\pm = \varphi_3 \pm d \varphi_4. \end{aligned}$$

Так как кривая  $\partial\Omega$  и окружность радиуса  $d \in I_D$  с центром  $\tilde{x}_d^\pm(s)$  имеют только одну общую точку  $\tilde{x}(s)$  и  $\varphi_0^\pm = \tilde{r}^2 - 2\tilde{r}d \cos \alpha^\pm$ , где  $\alpha^\pm$  – угол между лучами  $\tilde{x}(s)\tilde{x}(s')$  и  $\tilde{x}(s)\tilde{x}_d^\pm(s)$ , то  $\varphi_0^\pm > 0$  при  $(d, s, s') \in \Upsilon$ ,  $s \neq s'$ . Следовательно, на множестве  $\Upsilon$  можно задать функцию  $\rho^\pm(d, s, s')$ :  $\rho^\pm = \sqrt{\varphi_0^\pm}$ , если  $\sigma \geq 0$ , и  $\rho^\pm = -\sqrt{\varphi_0^\pm}$ , если  $\sigma < 0$ . Введем также в рассмотрение функцию  $\psi_4(s, s')$ , заданную на множестве  $\Theta$  при  $s' \neq s$  равенством  $\psi_4 \equiv \varphi_4/\sigma$ , а при  $s' = s$  равенством  $\psi_4(s, s) \equiv -\tilde{x}'_2(s)\tilde{x}''_1(s) + \tilde{x}'_1(s)\tilde{x}''_2(s)$ , а также функции  $\psi_0^\pm(d, s, s')$ ,  $\psi_3^\pm(d, s, s')$ ,  $\delta^\pm(d, s, s')$ :  $\psi_0^\pm \equiv \psi_0 \pm 2d \psi_2$ ,  $\psi_3^\pm \equiv \psi_3 \pm d \psi_4$ ,  $\delta^\pm \equiv (\partial_{s'} \rho^\pm)^{-1} = \sqrt{\psi_0^\pm}/\psi_3^\pm$ . Так как  $\psi_0(s, s) = 1$ ,  $|\psi_2(s, s)| \equiv 2^{-1}K(s, s)$  и  $D \leq 1/(3c_K)$ , то при  $(d, s) \in I_D \times \overline{I'_S}$  имеем оценку:  $\psi_0^\pm(d, s, s) \geq 2/3$ . Поэтому  $\psi_0^\pm > 0$  на множестве  $\Upsilon$ .

При фиксированном  $s \in I'_S$  обозначим через  $E_s$  связный участок кривой  $\partial\Omega$  между двумя параллельными прямыми, находящимися на расстоянии  $D$  от прямой  $\tilde{x}(s)\tilde{x}_d^\pm(s)$ , причем  $\tilde{x}(s) \in E_s$ . Соответствующие значения  $\sigma$  обозначим через  $\Xi_s$ . Левую и правую границу отрезка  $\Xi_s$  обозначим через  $\Sigma'_s$  и  $\Sigma''_s$  соответственно.

**Лемма [9].** Пусть  $I$  – замкнутый интервал на вещественной оси. Предположим, что некоторая вещественная функция  $f(z, \zeta)$  имеет на множестве  $I \times I$  непрерывные производные  $\partial_z^i \partial_\zeta^j f$  ( $i = \overline{0, m}$ ,  $j = \overline{0, m'}$ ), причем  $m < m'$  и  $\partial_\zeta^j f|_{\zeta=z} = 0$  при  $z \in I$ ,  $j = \overline{0, q-1}$ , где  $q = m' - m$ . Тогда функция  $h(z, \zeta)$ , заданная при  $\zeta \neq z$  равенством  $h(z, \zeta) \equiv f/(\zeta - z)^q$ , а при  $\zeta = z$  – равенством  $h(z, z) \equiv \partial_\zeta^q f|_{\zeta=z}/q!$ , имеет на множестве  $I \times I$  непрерывные производные  $\partial_z^i \partial_\zeta^j h$  при  $i = \overline{0, m-j}$ ,  $j = \overline{0, m}$ .

**Теорема 5.** Пусть  $\partial\Omega \in C^{n+2}$  ( $n \in \mathbf{Z}_+$ ). Тогда на множестве  $\Upsilon' \equiv \{(d, s, s') : \sigma \in \Xi_s, s \in \overline{I'_S}, d \in I_D\}$  функция  $\delta^\pm$  положительна, ограничена сверху и существуют непрерывные производные  $\partial_{s'}^j \delta^\pm$  ( $j = \overline{0, n}$ ).

**Доказательство.** Условия леммы выполняются, если  $f = \varphi_4$ ,  $m = n$ ,  $q = 1$ ,  $z = s'$ ,  $\zeta = s$ ,  $I = \overline{I'_{2S}}$ . Тогда, согласно лемме, существуют непрерывные на множестве  $\overline{I'_{2S}} \times \overline{I'_{2S}}$  производные  $\partial_{s'}^j \psi_4$  ( $j = \overline{0, n}$ ). Аналогично (ср. с теоремами 1 [9] и 2 [6]) доказывается существование непрерывных на множестве  $\overline{I'_{2S}} \times \overline{I'_{2S}}$  произ-

водных  $\partial_s^j \psi_i$  ( $j = \overline{0, n}$ ,  $i = 0, 2, 3$ ). Следовательно, существуют непрерывные на множестве  $\Upsilon$  производные  $\partial_s^j \psi_0^\pm$  и  $\partial_s^j \psi_3^\pm$  ( $j = \overline{0, n}$ ). Так как  $\psi_0^\pm > 0$  на множестве  $\Upsilon$ , то существует положительная постоянная  $c_r^\pm \equiv \inf_{(d, s, s') \in \Upsilon} \psi_0^\pm$ .

Пусть  $\sigma \in \Xi_s$ ,  $s \in I'_S$ . Справедлива оценка:  $\partial_s \rho \geq 2^{-1}$ . Действительно, допустим обратное:  $\partial_s \rho < 2^{-1}$ . Имеем равенство:  $\rho(s, s' + \Delta s') - \rho(s, s') = \rho(s', s' + \Delta s') \sin \alpha + o(\Delta s)$ , где  $\alpha$  – угол  $\tilde{\mathbf{x}}(s) \tilde{\mathbf{x}}(s') \mathbf{x}_0$ ;  $\mathbf{x}_0$  – точка пересечения нормалей к  $\partial \Omega$ , проведенных через точки  $\tilde{\mathbf{x}}(s)$  и  $\tilde{\mathbf{x}}(s')$ . Так как  $\psi_0(s', s') = 1$ , то  $\lim_{\Delta s' \rightarrow 0} \rho(s', s' + \Delta s') / \Delta s' = 1$ , и поэтому  $\sin \alpha = \partial_s \rho < 2^{-1}$ , т.е.  $\alpha = \pi/6 - \varepsilon_1$  ( $\varepsilon_1 > 0$ ). Так как  $E_s \subset O(s)$  [11, с. 285], то угол  $\tilde{\mathbf{x}}(s) \mathbf{x}_0 \tilde{\mathbf{x}}(s')$  – угол между нормальями  $\mathbf{n}(\tilde{\mathbf{x}}(s))$  и  $\mathbf{n}(\tilde{\mathbf{x}}(s'))$  – равен  $\pi/3 - \varepsilon_2$ , где  $\varepsilon_2 \geq 0$  (см. оценку (7) [11, с. 283]). Следовательно, угол  $\tilde{\mathbf{x}}(s') \tilde{\mathbf{x}}(s) \mathbf{x}_0$  равен  $\pi/2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ . Тогда существует точка  $\tilde{\mathbf{x}}(s'')$  пересечения отрезка  $\tilde{\mathbf{x}}(s) \tilde{\mathbf{x}}(s')$  с дугой  $E_s$  (иначе существует прямая, параллельная  $\mathbf{n}(\tilde{\mathbf{x}}(s))$ , пересекающая  $E_s$  более чем в одной точке), такая, что угол между нормальями  $\mathbf{n}(\tilde{\mathbf{x}}(s'))$  и  $\mathbf{n}(\tilde{\mathbf{x}}(s''))$  не меньше  $\pi/3 + \varepsilon_1$ . Это невозможно, так как  $|\tilde{\mathbf{x}}(s') \tilde{\mathbf{x}}(s'')| \leq |\tilde{\mathbf{x}}(s) \tilde{\mathbf{x}}(s')| \leq 3D$ , следовательно, точка  $\tilde{\mathbf{x}}(s')$  находится внутри круга  $O(s'')$ . Получили противоречие, вследствие которого справедлива оценка  $\partial_s \rho \geq 2^{-1}$  при любых  $\sigma \in \Xi_s$ ,  $s \in I'_S$ .

В силу равенства  $\varphi_3 = \rho \partial_s \rho$  и неравенства  $\rho / \sigma \geq c_r^{1/2}$  получаем на основании доказанного оценку:  $\psi_3 \geq 2^{-1} c_r^{1/2}$  ( $\sigma \in \Xi_s$ ,  $s \in I'_S$ ). Кроме того,  $|\psi_4| \leq c'_K$  при  $(s, s') \in \Theta$ , и  $d \leq c_r^{1/2} / (3c'_K)$ , поэтому на множестве  $\Upsilon'$  выполняется неравенство  $\psi_3^\pm \geq 6^{-1} c_r^{1/2}$ . Следовательно, функция  $\delta^\pm$  положительна и  $\delta^\pm \leq 6 c_r^{-1/2} \sup_{(s, s') \in \Theta} \sqrt{\psi_0^\pm}$  на множестве  $\Upsilon'$ . Учитывая также, что  $\psi_0^\pm \geq c_r^\pm > 0$ , получаем остальные утверждения теоремы на основе представлений:  $\partial_s^j \delta^\pm = F_j / [(\psi_3^\pm)^{j+1} (\psi_0^\pm)^{j-1/2}]$ , где функции  $F_j$  суть многочлены, образованные степенями производных  $\partial_s^k \psi_0^\pm$ , и  $\partial_s^l \psi_3^\pm$  ( $k, l = \overline{0, j}$ ). Теорема доказана.

**Следствие 2.** Пусть  $\partial \Omega \in C^{n+2}$  ( $n \in \mathbf{Z}_+$ ). Тогда функция  $\rho_{d,s}^\pm(\sigma) \equiv \rho^\pm(d, s, s + \sigma)$  при любых фиксированных  $s \in I'_S$ ,  $d \in I_D$  диффеоморфно с гладкостью  $C^{n+1}$  отображает множество  $\Xi_s$  на множество  $\rho_{d,s}^\pm(\Xi_s)$ . Функция  $\tilde{\delta}^\pm(d, s, \rho) \equiv \delta^\pm(d, s, s + \sigma_{d,s}^\pm(\rho))$  ( $\sigma_{d,s}^\pm(\rho)$  – функция, обратная к функции  $\rho_{d,s}^\pm(\sigma)$ ) имеет непрерывные на множестве  $\tilde{\Upsilon}' \equiv \{(d, s, \rho) : \rho \in \rho_{d,s}^\pm(\Xi_s), s \in \overline{I'_S}, d \in I_D\}$  производные  $\partial_\rho^j \tilde{\delta}^\pm$  ( $j = \overline{0, n}$ ).

Операторы  $\mathbf{G}_0(\mathbf{x}) [C(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$  ( $\mathbf{x} \in \Omega^\pm$ ) представим в следующем виде:  
 $\mathbf{G}_0(\mathbf{x})\mathbf{f} = \int_{I_\tau} \mathbf{A}(\mathbf{x}, \tau) e^{-\rho\tau} \mathbf{U}(\tau)\mathbf{f} d\tau$  ( $\mathbf{f} \in C(\partial\Omega)$ ). Здесь  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \tau) [C(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$  ( $\tau > 0$ ) – ограниченные операторы:  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{f} \equiv \int_{\partial\Omega} a(r, \tau)\mathbf{f}(\mathbf{x}') ds'$ .

Замкнутую область, образованную всеми кривыми  $\partial\Omega_d^\pm$  ( $d \in I_D$ ), обозначим через  $\Omega_D^\pm$ . Пусть  $s \in I'_S$ ,  $d \in I_D$  и  $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s)$ . Используя местные координаты  $(\xi_s, \eta_s)$ , равенство  $d\xi_s = \cos\vartheta ds'$  ( $\vartheta$  – угол между векторами  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{n}(\mathbf{x}')$ ), оценку (7) [11, с. 283]:  $\cos\vartheta \geq 2^{-1}$  ( $\mathbf{x}' \in E_s$ ), и оценку  $r \geq |\xi_s|$ , получаем следующую оценку:

$$\int_{E_s} \exp\left[-r^2/(4a^2\tau)\right] ds' \leq 2 \int_{-D}^D \exp\left[-\xi_s^2/(4a^2\tau)\right] d\xi_s \leq 4a\sqrt{\pi} \tau^{1/2} \quad (\mathbf{x} \in \Omega_D^\pm, \tau > 0). \quad (8)$$

Представим операторы  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \tau)$  ( $\mathbf{x} \in \Omega^\pm$ ,  $\tau > 0$ ) в виде суммы:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \tau) + \mathbf{A}''(\mathbf{x}, \tau),$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{f} &\equiv \int_{E_s} a(r, \tau)\mathbf{f}(\mathbf{x}') ds' \quad (\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s) \in \Omega_D^\pm), \\ \mathbf{A}'(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{f} &\equiv 0 \quad (\mathbf{x} \in \Omega^\pm \setminus \Omega_D^\pm), \\ \mathbf{A}''(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{f} &\equiv \int_{\partial\Omega \setminus E_s} a(r, \tau)\mathbf{f}(\mathbf{x}') ds' \quad (\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s) \in \Omega_D^\pm), \\ \mathbf{A}''(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{f} &\equiv \int_{\partial\Omega} a(r, \tau)\mathbf{f}(\mathbf{x}') ds' \quad (\mathbf{x} \in \Omega^\pm \setminus \Omega_D^\pm). \end{aligned}$$

Так как нормаль  $\tilde{\mathbf{x}}(s)\tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s)$  к кривой  $\partial\Omega$  при любом  $s \in I'_S$  является и нормалью к кривой  $\partial\Omega_d^\pm$  ( $d \in I_D$ ) [11, с. 312], то  $r \geq D$ , если  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \Omega^\pm \setminus \Omega_D^\pm \times \partial\Omega$ . Действительно, допустим, что при некоторых  $s_1, s_2 \in I'_S$  существуют точки  $\tilde{\mathbf{x}}(s_1)$  и  $\tilde{\mathbf{x}}_D^\pm(s_2)$ , такие, что  $|\tilde{\mathbf{x}}(s_1)\tilde{\mathbf{x}}_D^\pm(s_2)| < D$ . Тогда существует  $s_3 \in I'_S$ , такое, что либо  $\tilde{\mathbf{x}}(s_1) \neq \tilde{\mathbf{x}}_D^\pm(s_3)$ , прямая  $\tilde{\mathbf{x}}(s_1)\tilde{\mathbf{x}}_D^\pm(s_3)$  является нормалью к кривой  $\partial\Omega_D^\pm$  и  $|\tilde{\mathbf{x}}(s_1)\tilde{\mathbf{x}}_D^\pm(s_3)| < D$ , либо  $\tilde{\mathbf{x}}(s_1) = \tilde{\mathbf{x}}_D^\pm(s_3)$ . В обоих случаях прямая  $\tilde{\mathbf{x}}(s_1)\tilde{\mathbf{x}}(s_3)$  является нормалью к кривой  $\partial\Omega$  в точке  $\tilde{\mathbf{x}}(s_3)$ , причем длина отрезка  $\tilde{\mathbf{x}}(s_1)\tilde{\mathbf{x}}(s_3)$  меньше  $2D$ , т.е. точка  $\tilde{\mathbf{x}}(s_1)$  лежит внутри круга  $O(s_3)$ . Следовательно, существует прямая, параллельная нормали  $\mathbf{n}(\tilde{\mathbf{x}}(s_3))$  и пересекающая дугу  $\tilde{\mathbf{x}}(s_1)\tilde{\mathbf{x}}(s_3)$  кривой  $\partial\Omega$  внутри круга  $O(s_3)$  более чем в одной точке. Это невозможно, поэтому  $r \geq D$ , если  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \Omega^\pm \setminus \Omega_D^\pm \times \partial\Omega$ .

Так как любая прямая, параллельная прямой  $\tilde{\mathbf{x}}(s)\tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s)$  ( $s \in I'_S$ ,  $d \in I_D$ ), пересекает границу  $\partial\Omega$  внутри круга  $O(s)$  не более чем в одной точке, то  $r \geq D$ , если

$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s) \in \Omega_D^\pm$ ,  $\mathbf{x}' \in \partial\Omega \setminus E_s$ . С учетом оценки (8) получаем следующие оценки норм операторов  $A'(\mathbf{x}, \tau)$ ,  $A''(\mathbf{x}, \tau)$  [ $C(\partial\Omega) \rightarrow L_2$ ] при  $\mathbf{x} \in \Omega^\pm$ ,  $\tau > 0$ :

$$\begin{aligned} \|A'(\mathbf{x}, \tau)\| &\leq c'_A \tau^{-1/2}, \quad c'_A \equiv \pi^{-1/2} a; \\ \|A''(\mathbf{x}, \tau)\| &\leq c''_A \equiv (2\pi)^{-1} S \sup_{\tau \in (0, \infty)} \tau^{-1} \exp[-D^2/(4a^2\tau)]. \end{aligned} \quad (9)$$

В силу оценок (9) имеем равномерную на множестве  $\Omega^\pm$  ограниченность операторов  $G_0(\mathbf{x})$  [ $C(\partial\Omega) \rightarrow L_2$ ]:

$$\|G_0(\mathbf{x})\| \leq 2\sqrt{T} c'_A + T c''_A \quad (\mathbf{x} \in \Omega^\pm). \quad (10)$$

Пусть  $N/2 \in \mathbf{N}$ ,  $\tilde{N}/2 \in \mathbf{N}$ . Зададим ограниченные операторы  $\tilde{G}_0(\mathbf{x})$  [ $C(\partial\Omega) \rightarrow L_2$ ] ( $\mathbf{x} \in \Omega^\pm$ ):

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0(\mathbf{x})\mathbf{f} &\equiv \int_{I_T} \tilde{A}(\mathbf{x}, \tau) \tilde{U}(\tau) \mathbf{f} d\tau \quad (\mathbf{f} \in C(\partial\Omega)), \quad \tilde{A}(\mathbf{x}, \tau) \equiv A(\mathbf{x}, \tau) e(\tau), \\ \tilde{U}(\tau) &\equiv \sum_{m=0}^2 U(\tau_{2n+1} + q_m h_\tau) \Lambda_m(\tau) \quad (\tau \in [\tau_{2n}, \tau_{2n+2}], \quad n = \overline{0, N/2-1}). \end{aligned}$$

Так как  $\|U(\tau)\| \leq 1$ ,  $|e^{-p\tau}| \leq 1$  ( $\tau \geq 0$ ), то  $\|\tilde{U}(\tau)\| \leq c_\Lambda$ ,  $|e(\tau)| \leq \tilde{c}_\Lambda$  (см. оценки (5)). В силу оценок (4) имеем оценки

$$\begin{aligned} \|\tilde{U}(\tau)\mathbf{f} - U(\tau)\mathbf{f}\|_{C(\partial\Omega)} &\leq c_\omega \|B^3 \mathbf{f}\|_{C(\partial\Omega)} h_\tau^3 \quad (\mathbf{f} \in C_3(\partial\Omega)), \\ |e(\tau) - e^{-p\tau}| &\leq (p^3/\tilde{N}^3) \tilde{c}_\omega h_\tau^3 \quad (t \in I_T). \end{aligned} \quad (11)$$

На основании оценок (9) и (11) при любых  $\mathbf{f} \in C_3(\partial\Omega)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega^\pm$  получаем оценки

$$\|\tilde{G}_0(\mathbf{x})\mathbf{f} - G_0(\mathbf{x})\mathbf{f}\|_{L_2} \leq (2c'_A \sqrt{T} + c''_A T) \left[ c_\omega \|B^3 \mathbf{f}\|_{C(\partial\Omega)} + c_\Lambda \tilde{c}_\omega (p^3/\tilde{N}^3) \|\mathbf{f}\|_{C(\partial\Omega)} \right] h_\tau^3,$$

из которых вытекает следующее утверждение:

**Теорема 6.** Пусть  $\partial\Omega \in C^2$ . Тогда операторы  $\tilde{G}_0(\mathbf{x})$  [ $C_3(\partial\Omega) \rightarrow L_2$ ] ( $N/2 \in \mathbf{N}$ ) сходятся при  $N \rightarrow \infty$  по операторной норме к соответствующим операторам  $G_0(\mathbf{x})$  [ $C_3(\partial\Omega) \rightarrow L_2$ ] равномерно по  $\mathbf{x} \in \Omega^\pm$  с порядком аппроксимации  $O(h_\tau^3)$ .

Пусть  $L/2 \in \mathbf{N}$ . Введем в рассмотрение операторы  $\tilde{P}_L$  [ $H_L \rightarrow C(\partial\Omega)$ ]:

$$(\tilde{P}_L \mathbf{f})(s) \equiv \sum_{m=0}^2 f_{2l-1+m} \Lambda_m(s) \quad (\mathbf{f} \in H_L, \quad s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}], \quad l = \overline{-L/2, L/2}).$$

На основании оценки (5) имеем оценку  $\|\tilde{P}_L\| \leq c_\Lambda$ . В силу оценки (4) справедливы оценки

$$\|\tilde{P}_L P_L \mathbf{f} - \mathbf{f}\|_{C(\partial\Omega)} \leq c_\omega \|f^{(3)}\|_{C(\partial\Omega)} h_s^3 \quad (\mathbf{f} \in C^3(\partial\Omega)). \quad (12)$$

С помощью равенств  $\tilde{G}_0(\mathbf{x})\mathbf{f} \equiv \int_{I_T} \tilde{A}(\mathbf{x}, \tau) \tilde{U}(\tau) \tilde{P}_L \mathbf{f} d\tau$  ( $\mathbf{f} \in H_L$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega^\pm$ ) зададим ограниченные операторы  $\tilde{G}_0(\mathbf{x})$  [ $H_L \rightarrow L_2$ ]. В силу оценок (9), (12),  $\|\tilde{U}(\tau)\| \leq c_\Lambda$  и

$|e(\tau)| \leq \tilde{c}_\Lambda$  имеем оценки

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{G}}_0(\mathbf{x})\mathbf{P}_L \mathbf{f} - \tilde{\mathbf{G}}_0(\mathbf{x})\mathbf{f}\|_{L_2} &\leq (2c'_A \sqrt{T} + c''_A T) c_\Lambda \tilde{c}_\Lambda c_\omega \|\mathbf{f}^{(3)}\|_{C(\partial\Omega)} h_s^3 \\ &(\mathbf{f} \in C^3(\partial\Omega), \mathbf{x} \in \Omega^\pm), \end{aligned}$$

позволяющие сделать следующее утверждение:

**Теорема 7.** Пусть  $\partial\Omega \in C^2$ . Тогда операторы  $\tilde{\mathbf{G}}_0(\mathbf{x})\mathbf{P}_L [C^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$  ( $L/2 \in \mathbf{N}$ ,  $N/2 \in \mathbf{N}$ ) сходятся при  $L \rightarrow \infty$  по операторной норме к соответствующим операторам  $\tilde{\mathbf{G}}_0(\mathbf{x}) [C^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$  равномерно по  $N$  и  $\mathbf{x} \in \Omega^\pm$  с порядком аппроксимации  $O(h_s^3)$ .

Операторы  $\tilde{\mathbf{G}}_0(\mathbf{x})$  могут быть представлены в виде конечных сумм:

$$\tilde{\mathbf{G}}_0(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\mathbf{G}}_{0,n}(\mathbf{x})U(\tau_n), \quad (13)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{0,0}(\mathbf{x}) \equiv \int_{\tau_0}^{\tau_2} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \tau) e(\tau) \Lambda_0(\tau) d\tau,$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{0,2n+1}(\mathbf{x}) \equiv \int_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \tau) e(\tau) \Lambda_1(\tau) d\tau \quad (n = \overline{0, N/2-1}),$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{0,2n}(\mathbf{x}) \equiv \int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \tau) e(\tau) \Lambda_2(\tau) d\tau + \int_{\tau_{2n}}^{\tau_{2n+2}} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \tau) e(\tau) \Lambda_0(\tau) d\tau \quad (n = \overline{1, N/2-1}).$$

Операторы  $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \tau) \equiv \mathbf{A}(\mathbf{x}, \tau)\tilde{\mathbf{P}}_L [H_L \rightarrow L_2]$  подобно  $\tilde{\mathbf{G}}_{0,n}(\mathbf{x})$  имеют вид скалярных матриц-строк длиной  $2L+2$ :

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{f} = \sum_{l=-L-1}^L \hat{g}_l(\mathbf{x}, \tau) f_l \quad (\mathbf{f} \in H_L); \quad \hat{g}_{2l}(\mathbf{x}, \tau) \equiv \int_{s_{2l-1}}^{s_{2l+1}} \tilde{g}_l(\mathbf{x}, s', \tau) ds',$$

$$\hat{g}_{2l-1}(\mathbf{x}, \tau) \equiv \int_{s_{2l-3}}^{s_{2l-1}} \tilde{g}_2(\mathbf{x}, s', \tau) ds' + \int_{s_{2l-1}}^{s_{2l+1}} \tilde{g}_0(\mathbf{x}, s', \tau) ds' \quad (l = \overline{-L/2, L/2}),$$

$$\tilde{g}_m(\mathbf{x}, s', \tau) \equiv g_0(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}(s'), \tau) \tilde{\Lambda}_m(s') \quad (m = \overline{0, 2}).$$

Все интегралы  $J_{m,l}(\mathbf{x}, \tau) \equiv \int_{s_l}^{s_{l+1}} \tilde{g}_m(\mathbf{x}, s', \tau) ds' \quad (l = \overline{-L-1, L}, m = \overline{0, 2})$  представим в виде суммы  $J_{m,l} = J'_{m,l} + J''_{m,l}$ . Здесь в случае  $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s) \in \Omega_D^\pm \quad (s \in \overline{I'_S})$

$$J'_{m,l}(d, s, \tau) \equiv \int_{\alpha_{s,l}}^{\alpha_{s,l+1}} \tilde{g}_m(\tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s), s + \sigma, \tau) d\sigma, \quad J''_{m,l}(\mathbf{x}, \tau) \equiv \int_{\beta_{s,l}}^{\beta_{s,l+1}} \tilde{g}_m(\mathbf{x}, s', \tau) ds'.$$

При этом  $\alpha_{s,l} \equiv \min\{s_l - s, \Sigma_s''\}$ ,  $\beta_{s,l} \equiv \max\{s_l, s + \Sigma_s''\}$ , если  $s_l \geq s$ ;  $\alpha_{s,l} \equiv \max\{s_l - s, \Sigma_s'\}$ ,  $\beta_{s,l} \equiv \min\{s_l, s + \Sigma_s'\}$ , если  $s_l < s$ . В случае  $\mathbf{x} \in \Omega^\pm \setminus \Omega_D^\pm$   $J'_{m,l} \equiv 0$ ,  $J''_{m,l} \equiv J_{m,l} \quad (\beta_{s,l} = s_l)$ .

В интегралах  $J'_{m,l}$  ( $d \in I_D$ ,  $s \in \overline{I'_S}$ ,  $\tau > 0$ ) на основании следствия 2 сделаем замену переменной  $\sigma = \sigma_{d,s}^\pm(\rho)$ :

$$J'_{m,l}(d,s,\tau) = \int_{\rho_{d,s}^\pm(\alpha_{s,l})}^{\rho_{d,s}^\pm(\alpha_{s,l+1})} a(\sqrt{\rho^2 + d^2}, \tau) \check{\delta}_m^\pm(d,s,\rho) d\rho \quad (m = \overline{0,2}, l = \overline{-L-1,L}),$$

$$\check{\delta}_m^\pm \equiv \tilde{\delta}^\pm(d,s,\rho) \check{\Lambda}_m(s + \sigma_{d,s}^\pm(\rho)).$$

Введем в рассмотрение интегралы  $\tilde{J}'_{m,l}$ , аппроксимирующие  $J'_{m,l}$ :

$$\tilde{J}'_{m,l}(d,s,\tau) \equiv \int_{\rho_{d,s}^\pm(\alpha_{s,l})}^{\rho_{d,s}^\pm(\alpha_{s,l+1})} a(\sqrt{\rho^2 + d^2}, \tau) \hat{\delta}_m^\pm(d,s,\rho) d\rho \quad (m = \overline{0,2}, l = \overline{-L-1,L}),$$

$$\hat{\delta}_m^\pm \equiv \sum_{m'=0}^2 \check{\delta}_m^\pm(d,s, \bar{\rho}_{d,s,l}^\pm + \tilde{q}_m h_{d,s,l}^\pm) \check{\Lambda}_{m'}(\rho) \quad (\rho \in [\rho_{d,s}^\pm(\alpha_{s,l}), \rho_{d,s}^\pm(\alpha_{s,l+1})]),$$

$$h_{d,s,l}^\pm \equiv 2^{-1} [\rho_{d,s}^\pm(\alpha_{s,l+1}) - \rho_{d,s}^\pm(\alpha_{s,l})], \quad \bar{\rho}_{d,s,l}^\pm \equiv 2^{-1} [\rho_{d,s}^\pm(\alpha_{s,l}) + \rho_{d,s}^\pm(\alpha_{s,l+1})].$$

Интегралы  $J''_{m,l}$  ( $\mathbf{x} \in \Omega^\pm$ ,  $\tau > 0$ ) аппроксимируем с помощью ПКФГ с  $\gamma$  узлами:

$$\tilde{J}''_{m,l}(\mathbf{x}, \tau) \equiv h''_{s,l} \sum_{j=1}^{\gamma} \hat{w}_j \check{g}_m(\mathbf{x}, \bar{\beta}_{s,l} + h''_{s,l} z_j, \tau) \quad (m = \overline{0,2}, l = \overline{-L-1,L}),$$

$$\bar{\beta}_{s,l} \equiv 2^{-1} (\beta_{s,l} + \beta_{s,l+1}), \quad h''_{s,l} \equiv 2^{-1} (\beta_{s,l+1} - \beta_{s,l}).$$

В силу следствия 2 и неравенства  $r \geq D$ , имеющего место, если  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \Omega^\pm \setminus \Omega_D^\pm \times \partial\Omega$  или  $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}_d^\pm(s) \in \Omega_D^\pm$ ,  $\mathbf{x}' \in \partial\Omega \setminus E(s)$ , при указанной гладкости кривой  $\partial\Omega$  могут быть определены константы:

$$\check{c}'_j \equiv \sup_{(d,s,\rho) \in \tilde{\Upsilon}'} |\partial_\rho^j \check{\delta}^\pm| \quad (\partial\Omega \in C^{n+2}), \quad \check{c}''_j \equiv \sup_{|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}(s')| \geq D, \tau > 0} |\partial_{s'}^j g_0(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}(s'), \tau)| \quad (\partial\Omega \in C^n \cap C^2)$$

$$(j = \overline{0,n}, n \in \mathbf{Z}_+).$$

Учитывая неравенства (4), (6) и  $h_{d,s,l}^\pm \leq 2^{-1} c_h h_s$  ( $c_h \equiv \sup_{(d,s,s') \in \Upsilon'} |\partial_{s'} \rho^\pm|$ ), при условиях  $\partial\Omega \in C^5$ ,  $\mathbf{f} \in C^2(\partial\Omega)$  при любых  $d \in I_D$ ,  $s \in \overline{I'_S}$ ,  $\tau > 0$  имеем оценку:

$$\left\| \sum_{l=-L/2}^{l=L/2} \sum_{m=0}^2 \sum_{l'=-1}^0 (\tilde{J}'_{m,2l+l'} - J'_{m,2l+l'}) \mathbf{f}_{2l-1+m} \right\|_{L_2} \leq$$

$$\leq 8^{-1} h_s^3 c_h^3 \check{c}_\omega \sup_{(d,s,\rho) \in \tilde{\Upsilon}'} \left\| \partial_\rho^3 [\tilde{\delta}^\pm \tilde{\mathbf{f}}(s + \sigma_{d,s}^\pm(\rho))] \right\|_{L_2} \sum_{l=-L/2}^{l=L/2} \int_{\rho_{d,s}^\pm(\alpha_{s,2l-1})}^{\rho_{d,s}^\pm(\alpha_{s,2l+1})} a(\sqrt{\rho^2 + d^2}, \tau) d\rho \leq$$

$$\leq \hat{c}' \tau^{-1/2} h_s^3 \|\mathbf{f}\|_{C^2(\partial\Omega)}, \quad \hat{c}' \equiv 16^{-1} a \pi^{-1/2} c_h^3 \check{c}_\omega [\check{c}'_3 c_\Lambda + (4\check{c}'_2 \check{c}'_0 + 3\check{c}'_1{}^2) c'_\Lambda + 6\check{c}'_1 \check{c}'_0{}^2 c''_\Lambda], \quad (14a)$$

где  $\mathbf{f}_l = \mathbf{f}(\mathbf{x}_l)$ ,  $\tilde{\mathbf{f}} \equiv \check{P}_L \mathbf{P}_L \mathbf{f}$ . Если  $\partial\Omega \in C^{2\gamma}$ , то при любых  $\mathbf{x} \in \Omega^\pm$ ,  $\tau > 0$  имеем оценку:

$$\left\| \sum_{l=-L/2}^{l=L/2} \sum_{m=0}^2 \sum_{l'=-1}^0 (\tilde{J}_{m,2l+l'}'' - J_{m,2l+l'}'') \mathbf{f}_{2l-1+m} \right\|_{L_2} \leq \hat{c}'' h_s^{2\gamma} \| \mathbf{f} \|_{C^2(\partial\Omega)},$$

$$\hat{c}'' \equiv \frac{2S(\gamma!)^4 [\tilde{c}_{2\gamma}'' c_\Lambda + 2\gamma \tilde{c}_{2\gamma-1}'' c_\Lambda' + \gamma(2\gamma-1) \tilde{c}_{2\gamma-2}'' c_\Lambda'']}{[(2\gamma)!]^3 (2\gamma+1)} \quad (14b)$$

[10, с. 259]. Операторы  $\tilde{\mathbf{G}}_0(\mathbf{x})$ ,  $\tilde{\mathbf{G}}_{0,n}(\mathbf{x})$  ( $n=0, N-1$ ), в которых интегралы  $J_{m,l}(\mathbf{x}, \tau)$  заменены выражениями  $\tilde{J}'_{m,l}(d, s, \tau)$  и  $\tilde{J}''_{m,l}(\mathbf{x}, \tau)$ , обозначим через  $\hat{\mathbf{G}}'_0(\mathbf{x})$ ,  $\hat{\mathbf{G}}'_{0,n}(\mathbf{x})$  и  $\hat{\mathbf{G}}''_0(\mathbf{x})$ ,  $\hat{\mathbf{G}}''_{0,n}(\mathbf{x})$  соответственно. В силу оценок (5), (14),  $\|P_L\| \leq 1$  имеем при условии  $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$  оценки:

$$\| \hat{\mathbf{G}}'_0(\mathbf{x}) P_L \mathbf{f} - \tilde{\mathbf{G}}_0(\mathbf{x}) P_L \mathbf{f} \|_{L_2} \leq c_\Lambda \tilde{c}_\Lambda (2\hat{c}'_i \sqrt{T} h_s^3 + \hat{c}''_i T h_s^{2\gamma}) \| \mathbf{f} \|_{C^2(\partial\Omega)} \quad (\mathbf{f} \in C^2(\partial\Omega))$$

$$(\hat{\mathbf{G}}_0(\mathbf{x}) \equiv \hat{\mathbf{G}}'_0(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{G}}''_0(\mathbf{x})),$$

из которых вытекает следующее утверждение:

**Теорема 8.** Пусть  $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$  и  $\gamma \geq 2$ . Тогда операторы  $\hat{\mathbf{G}}_0(\mathbf{x}) P_L$  [ $C^2(\partial\Omega) \rightarrow L_2$ ] ( $L/2 \in N$ ,  $N/2 \in \mathbf{N}$ ) сходятся при  $L \rightarrow \infty$  по операторной норме к соответствующим операторам  $\tilde{\mathbf{G}}_0(\mathbf{x}) P_L$  [ $C^2(\partial\Omega) \rightarrow L_2$ ] равномерно по  $N$  и  $\mathbf{x} \in \Omega^\pm$  с порядком аппроксимации  $O(h_s^3)$ .

С учетом оценок (5) получаем следующие неравенства:

$$\left\| \sum_{l=-L/2}^{l=L/2} \sum_{m=0}^2 \sum_{l'=-1}^0 \tilde{J}'_{m,2l+l'}(d, s, \tau) \mathbf{f}_{2l-1+m} \right\|_{L_2} \leq$$

$$\leq \tilde{c}_\Lambda \tilde{c}'_0 \| \mathbf{f} \|_{H_L} \sum_{l=-L/2}^{l=L/2} \int_{\rho_{d,s}^\pm(\alpha_s, 2l+1)}^{\rho_{d,s}^\pm(\alpha_s, 2l+1)} a(\sqrt{\rho^2 + d^2}, \tau) d\rho \leq 2^{-1} a \pi^{-1/2} \tilde{c}_\Lambda \tilde{c}'_0 \tau^{-1/2} \| \mathbf{f} \|_{H_L},$$

$$\left\| \sum_{l=-L/2}^{l=L/2} \sum_{m=0}^2 \sum_{l'=-1}^0 \tilde{J}''_{m,2l+l'}(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{f}_{2l-1+m} \right\|_{L_2} \leq 2S \tilde{c}''_0 \| \mathbf{f} \|_{H_L}$$

$$(d \in I_D, s \in \overline{I'_S}, \mathbf{x} \in \Omega^\pm, \mathbf{f} \in H_L, \tau > 0),$$

следствием которых являются неравенства

$$\| \hat{\mathbf{G}}_0(\mathbf{x}) \mathbf{f} \|_{L_2} \leq c_\Lambda \tilde{c}_\Lambda (\sqrt{T} a \pi^{-1/2} \tilde{c}_\Lambda \tilde{c}'_0 + 2TS \tilde{c}''_0) \| \mathbf{f} \|_{H_L} \quad (\mathbf{f} \in H_L).$$

Последние неравенства позволяют сделать утверждение:

**Следствие 3.** Пусть  $\partial\Omega \in C^2$ . Тогда операторы  $\hat{\mathbf{G}}_0(\mathbf{x})$  [ $H_L \rightarrow L_2$ ] ( $L/2 \in \mathbf{N}$ ,  $N/2 \in \mathbf{N}$ ) ограничены в совокупности на множестве  $\Omega^\pm$ .

При вычислении операторов  $\hat{\mathbf{G}}'_0(\mathbf{x})$  интегрирование по  $\tau$  осуществляется точно, и интегралы выражаются через интегральные показательные функции

$\text{Ei}(-z_n)$  ( $z_n \equiv (\rho^2 + d^2)/(4a^2\tilde{\tau}_n)$ ,  $n = \overline{1, N\tilde{N}}$ ). Затем вычисляются интегралы по  $\rho$ , но не все они вычисляются точно. В таких случаях для аналитического интегрирования функции  $\text{Ei}(-z_n)$  заменяются многочленами, образованными первыми членами разложения этих функций в знакпеременные и быстро сходящиеся ряды Тейлора, а именно:  $K$  членами со степенями  $(z_n)^k$  ( $k = \overline{1, K}$ ) и, кроме того, логарифмическим и постоянным членами. Значения  $\sigma_{d,s}^{\pm} (\bar{\rho}_{d,s,l}^{\pm} + \tilde{q}_m h_{d,s,l}^{\pm})$  ( $l = \overline{-L-1, L}$ ,  $m = \overline{0, 2}$ ) могут быть получены как численные решения уравнений  $\rho_{d,s}^{\pm}(\sigma) = \bar{\rho}_{d,s,l}^{\pm} + \tilde{q}_m h_{d,s,l}^{\pm}$ . Производные  $x_i'(s)$  ( $i = 1, 2$ ) вычисляются аналитически, так как аналитические выражения функций  $x_i(s)$  считаются известными.

На основании теорем 6–8 делаем следующий вывод:

**Следствие 4.** Пусть  $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$  и  $\gamma \geq 2$ . Тогда операторы  $\hat{\mathbf{G}}_0(\mathbf{x})\mathbf{P}_L$  [ $C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2$ ] ( $L/2 \in \mathbf{N}$ ,  $N/2 \in \mathbf{N}$ ) сходятся при  $L, N \rightarrow \infty$  по операторной норме к соответствующим операторам  $\mathbf{G}_0(\mathbf{x})$  [ $C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2$ ] равномерно по  $\mathbf{x} \in \Omega^{\pm}$  с порядком аппроксимации  $O(h_{\tau}^3 + h_s^3)$ .

Введем в рассмотрение операторы  $\mathbf{R}_2^{\pm}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{G}_0(\mathbf{x})(\mathbf{G}_2^{\pm})^{-1}$  и  $\hat{\mathbf{R}}_2^{\pm}(\mathbf{x}) \equiv \hat{\mathbf{G}}_0(\mathbf{x})(\hat{\mathbf{G}}_2^{\pm})^{-1}$  ( $L/2 \in \mathbf{N}$ ,  $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$ ). С учетом оценок (10), теорем 1, 4 и следствий 3, 4 получаем следующее утверждение:

**Следствие 5.** Пусть  $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$  и  $\gamma \geq 2$ . Тогда операторы  $\hat{\mathbf{R}}_2^{\pm}(\mathbf{x})\mathbf{P}_L$  [ $C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2$ ] ( $L/2 \in \mathbf{N}$ ,  $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$ ) сходятся при  $L, N \rightarrow \infty$  по операторной норме к соответствующим операторам  $\mathbf{R}_2^{\pm}(\mathbf{x})$  [ $C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2$ ] равномерно по  $\mathbf{x} \in \Omega^{\pm}$  с порядком аппроксимации  $O(h_{\tau}^3 + h_s^3)$ .

Введем в рассмотрение банахово пространство  $C(I_T)$  классов функций  $\mathbf{f} \in L_2$ , эквивалентных непрерывным на отрезке  $I_T$  функциям  $f(t)$ , с нормой  $\|\mathbf{f}\|_{C_T} \equiv \sup_{t \in I_T} |f(t)|$ . Имеют место вложение  $H^1 \subset C(I_T)$  и оценки:

$$|f(t)| = \left| \int_0^t (\mathbf{B}\mathbf{f})(t') dt' \right| \leq \left[ t \int_0^t |(\mathbf{B}\mathbf{f})(t')|^2 dt' \right]^{1/2} \leq \sqrt{T} \|\mathbf{f}\|_{H^1} \quad (t \in I_T, \mathbf{f} \in H^1). \quad (15)$$

Пусть  $N/2 \in \mathbf{N}$ . Введем в рассмотрение банаховы пространства  $C_N$  сеточных функций  $\mathbf{f}$  со скалярными комплексными значениями  $f_n$ , заданными в узлах  $\tau_n$  ( $n = \overline{0, N}$ ), с нормой:  $\|\mathbf{f}\|_{C_N} = \max_{0 \leq n \leq N} |f_n|$ . Зададим операторы  $\mathbf{P}_N$  [ $H^1 \rightarrow C_N$ ]:  $(\mathbf{P}_N \mathbf{f})_n = f(\tau_n)$  ( $\|\mathbf{P}_N\| \leq \sqrt{T}$  в силу оценок (15)), и  $\hat{\mathbf{P}}_N$  [ $C_N \rightarrow C(I_T)$ ]:

$$(\hat{\mathbf{P}}_N \mathbf{f})(t) \equiv \sum_{m=0}^2 f_{2n+m} \Lambda_m(t) \quad (\mathbf{f} \in C_N, t \in [\tau_{2n}, \tau_{2n+2}], n = \overline{0, N/2-1}).$$

В силу неравенств (4), (5) и (15) справедливы оценки:

$$\|\hat{P}_N P_N\| \leq c_\Lambda \sqrt{T}, \quad \|\hat{P}_N P_N f - f\|_{C(I_T)} \leq c_\omega \sqrt{T} \|f\|_{H^4} h_\tau^3 \quad (f \in H^4). \quad (16)$$

Учитывая оценки (10) и (16), теорему 1, следствие 5, равенства (3) и замкнутость оператора  $\mathbf{B}$ , приходим к окончательному выводу:

**Следствие 6.** Пусть  $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$  и  $\gamma \geq 2$ . Тогда операторы  $\hat{P}_N P_N \hat{R}_2^\pm(x) P_L$  [ $C_{1,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow C(I_T)$ ] ( $L/2 \in \mathbf{N}$ ,  $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$ ) сходятся при  $L, N \rightarrow \infty$  по операторной норме к соответствующим операторам  $R_2^\pm(x)$  [ $C_{1,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow C(I_T)$ ] равномерно по  $x \in \Omega^\pm$  с порядком аппроксимации  $O(h_\tau^3 + h_s^3)$ .

Следствие 6 позволяет получить приближенные решения задач (1). На основании теоремы 3, следствия 3, равенств (3), первой оценки (16) и оценки  $\|P_L\| \leq 1$  можно также сделать вывод об ограниченности операторов  $\hat{P}_N P_N \hat{R}_2^\pm(x) P_L$  [ $C_1(\partial\Omega) \rightarrow C(I_T)$ ] ( $x \in \Omega^\pm$ ) в совокупности. Сформулируем заключительное утверждение:

**Следствие 7.** Пусть  $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$  и  $\gamma \geq 2$ . Тогда, если  $w_2^\pm \in C_{1,3}^3(\partial\Omega)$ , то функции  $\tilde{u}_2^\pm(x, t): \tilde{u}_2^\pm(x) \equiv \hat{P}_N P_N \hat{R}_2^\pm(x) P_L w_2^\pm$  ( $L/2 \in \mathbf{N}$ ,  $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$ ), сходятся при  $L, N \rightarrow \infty$  к соответствующим решениям краевых задач (1)  $u_2^\pm(x, t)$  равномерно по  $(x, t) \in \Omega^\pm \times I_T$  (при почти всех  $t$ ) с порядком аппроксимации  $O(h_\tau^3 + h_s^3)$ . Кроме того,  $|\tilde{u}_2^{\pm[\delta]}(x, t) - u_2^\pm(x, t)| \rightarrow 0$  равномерно по  $(x, t) \in \Omega^\pm \times I_T$  (при почти всех  $t$ ) при  $L, N \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$  ( $\tilde{u}_2^{\pm[\delta]}(x) \equiv \hat{R}_2^\pm(x) P_L P_N w_2^{\pm[\delta]}$ ,  $w_2^{\pm[\delta]} \in C_1(\partial\Omega): \|w_2^{\pm[\delta]} - w_2^\pm\|_{C_1(\partial\Omega)} \leq \delta$ ).

Для вычисления решения  $\tilde{u}_2^\pm(x, t)$  в произвольной точке  $(x, t) \in \Omega^\pm \times I_T$  используем равенства:

$$\hat{R}_2^\pm(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{R}_{2,n}^\pm(x) U(\tau_n), \quad \hat{R}_{2,n}^\pm(x) \equiv \sum_{m=0}^n \hat{G}_{0,m}(x) \hat{G}_{2,n-m}^{\pm(-1)},$$

$$\hat{G}_{0,n}(x) \equiv \hat{G}'_{0,n}(x) + \hat{G}''_{0,n}(x) \quad (n = 0, N-1)$$

(см. формулы (7) и (13)), при этом операторы  $\hat{R}_{2,n}^\pm(x)$ , как и  $\hat{G}_{0,n}(x)$ , имеют вид скалярных матриц-строк длиной  $2L+2$ . Операторы  $P_N$  и  $U(\tau_n)$  коммутируют на множестве  $C(I_T)$ , поэтому функции  $\tilde{u}_2^\pm(x, t)$  сначала могут быть вычислены в трех узлах  $\tau_{2n+j}$  ( $j = 0, 1, 2$ ):  $\tilde{u}_2^\pm(x, \tau_{2n+j}) = \sum_{m=0}^{2n+j} \hat{R}_{2,m}^\pm(x) \tilde{w}_2^\pm(\cdot, \tau_{2n+j-m})$  ( $\tilde{w}_2^\pm \equiv P_L w_2^\pm$ ), а затем в любой точке  $t \in [\tau_{2n}, \tau_{2n+2}]$  ( $0 \leq n \leq N/2-1$ ) с помощью квадратичной интерполяции.

### Вычислительные эксперименты

Рассмотрим численное решение внутренних задач (1) в случае, когда граница  $\partial\Omega$  представляет собой окружность радиуса  $R=1$ . В выбранной таким образом геометрии имеем следующие значения:  $D=2/(3\pi)$ ,  $\Sigma_s'' = -\Sigma_s' = \arcsin(2/(3\pi))$  ( $s \in I'_S$ ). Решения  $\hat{\mathbf{u}}_2^+$  получаем согласно следствию 7. Кроме того, находим решения  $\tilde{\mathbf{u}}_2^+$ , отличающиеся от решений  $\hat{\mathbf{u}}_2^+$  только тем, что все интегралы  $J_{i,m,k,l}(\tau) \equiv \int_{s_l}^{s_l+1} \tilde{g}_{i,m,k}(\sigma, \tau) d\sigma$  и  $J_{m,l}(\mathbf{x}, \tau)$  ( $i=0,2$ ,  $m=\overline{0,2}$ ,  $k,l=\overline{-L-1,L}$ ,  $\tau > 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega^+$ ) вычисляются с помощью ПКФГ с  $\gamma$  узлами. Вычисления проводим при  $T=1$ ,  $a=1$ ,  $\tilde{N}=2$ ,  $M=2$  ( $\Sigma=2\pi/3$ ),  $K=10$ ,  $\eta=0$ ,  $p=0$ ,  $w_2^+(\varphi, t) = 16t^2(1-t)^2 \sin \varphi$  ( $\varphi$  — полярный угол). «Точные» решения  $\bar{\mathbf{u}}_i^+$  находим с помощью функций Грина, при этом интегрирование по временной переменной на промежутке  $[0; 9 \cdot 10^{-7}]$  осуществляем численно с помощью ПКФГ с 12 узлами, а все остальные интегралы вычисляем аналитически. Все решения получаем на окружностях  $\partial\Omega'$  с радиусами  $R' < 1$ , концентрических с окружностью  $\partial\Omega$ , в узлах  $(\mathbf{x}'_j, t_j)$  и  $(\mathbf{x}''_j, t_j)$  ( $l = \overline{-L-1, L}$ ,  $t_j \equiv jh_\tau$ ,  $j = \overline{0, N}$ ), где  $\mathbf{x}'_j$  и  $\mathbf{x}''_j$  — точки, получающиеся из граничных точек  $\mathbf{x}_l \equiv \tilde{\mathbf{x}}(s_l)$  и  $\mathbf{x}_{l+1/2} \equiv \tilde{\mathbf{x}}(s_l + h_s/2)$  соответственно, в результате сжимающего отображения окружности  $\partial\Omega$  на окружность  $\partial\Omega'$ . Вычисления проводим с обычной точностью.

Пусть  $\delta\tilde{\mathbf{u}} \equiv \|\hat{\mathbf{u}}_2^+ - \tilde{\mathbf{u}}_2^+\| / \|\bar{\mathbf{u}}_2^+\|$ ,  $\delta\tilde{\mathbf{u}} \equiv \|\hat{\mathbf{u}}_2^+ - \tilde{\mathbf{u}}_2^+\| / \|\bar{\mathbf{u}}_2^+\|$  ( $\|\cdot\|$  — среднеквадратичная норма). Через  $\delta\tilde{\mathbf{u}}'$  и  $\delta\tilde{\mathbf{u}}''$  обозначим значения  $\delta\tilde{\mathbf{u}}$  или  $\delta\tilde{\mathbf{u}}$ , вычисленные в узлах  $(\mathbf{x}'_j, t_j)$  и  $(\mathbf{x}''_j, t_j)$  соответственно. В таблице в каждой основной ячейке представлены три значения  $\delta\tilde{\mathbf{u}}'$  или  $\delta\tilde{\mathbf{u}}''$ : значение  $\delta\tilde{\mathbf{u}}$ , значение  $\delta\tilde{\mathbf{u}}$  при  $\gamma=4$  и значение  $\delta\tilde{\mathbf{u}}$  при  $\gamma=12$  в соответствующем порядке сверху вниз.

Практически той же точностью, что и решения  $\tilde{\mathbf{u}}_2^+$ , обладают решения  $\hat{\mathbf{u}}_2^+$ , отличающиеся от решений  $\tilde{\mathbf{u}}_2^+$  только тем, что все интегралы  $J_{m,l}(\mathbf{x}, \tau)$  вычисляются с помощью ПКФГ с  $\gamma$  узлами. Проведенные эксперименты позволяют утверждать, что применение исключительно ПКФГ для вычисления интегралов  $J_{m,l}(\mathbf{x}, \tau)$  влечет нарушение равномерной сходимости численных решений в области  $\Omega^+$ : при приближении к границе  $\partial\Omega$  точность решений  $\tilde{\mathbf{u}}_2^+$  и  $\hat{\mathbf{u}}_2^+$  существенно уменьшается (в меньшей степени — при приближении к точкам, лежащим на границе между двумя граничными элементами). В то же время применение точного интегрирования по компоненте  $\rho^+$  межточечного расстояния  $r$  для вычисления интегралов  $J'_{m,l}(d, s, \tau)$  обеспечивает почти равномерную сходимость в области  $\Omega^+$ : при приближении к любой точке границы  $\partial\Omega$  точность решений  $\tilde{\mathbf{u}}_2^+$  уменьшается менее чем в 10 раз. Близкие результаты были получены при значениях  $\eta=1$  и  $p=\pi^2$ .

Относительные среднеквадратичные отклонения  $\delta u$ 

| $R'$                          | $1 - 2/(3\pi)$ | 0.9                  | 0.99                 | 0.999                | 0.9999               | 0.99999              | 0.999999             |                      |
|-------------------------------|----------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $h_\tau = 1/16, h_s = \pi/7$  | $\delta u'$    | $9.19 \cdot 10^{-4}$ | $9.68 \cdot 10^{-4}$ | $9.77 \cdot 10^{-4}$ | $9.72 \cdot 10^{-4}$ | $9.79 \cdot 10^{-4}$ | $9.31 \cdot 10^{-4}$ |                      |
|                               |                | $9.26 \cdot 10^{-4}$ | $1.05 \cdot 10^{-3}$ | $3.67 \cdot 10^{-3}$ | $1.36 \cdot 10^{-2}$ | $1.50 \cdot 10^{-2}$ | $1.51 \cdot 10^{-2}$ | $1.51 \cdot 10^{-2}$ |
|                               |                | $9.26 \cdot 10^{-4}$ | $9.69 \cdot 10^{-4}$ | $9.65 \cdot 10^{-4}$ | $1.50 \cdot 10^{-3}$ | $2.56 \cdot 10^{-3}$ | $2.65 \cdot 10^{-3}$ | $2.65 \cdot 10^{-3}$ |
|                               | $\delta u''$   | $9.74 \cdot 10^{-4}$ | $1.20 \cdot 10^{-3}$ | $1.60 \cdot 10^{-3}$ | $1.65 \cdot 10^{-3}$ | $1.66 \cdot 10^{-3}$ | $1.63 \cdot 10^{-3}$ | $1.63 \cdot 10^{-3}$ |
|                               |                | $1.01 \cdot 10^{-3}$ | $2.69 \cdot 10^{-3}$ | $4.27 \cdot 10^{-2}$ | $5.51 \cdot 10^{-2}$ | $5.65 \cdot 10^{-2}$ | $5.66 \cdot 10^{-2}$ | $5.66 \cdot 10^{-2}$ |
|                               |                | $1.01 \cdot 10^{-3}$ | $1.21 \cdot 10^{-3}$ | $9.17 \cdot 10^{-3}$ | $1.93 \cdot 10^{-2}$ | $2.06 \cdot 10^{-2}$ | $2.07 \cdot 10^{-2}$ | $2.07 \cdot 10^{-2}$ |
| $h_\tau = 1/32, h_s = \pi/15$ | $\delta u'$    | $5.76 \cdot 10^{-5}$ | $6.72 \cdot 10^{-5}$ | $7.64 \cdot 10^{-5}$ | $7.70 \cdot 10^{-5}$ | $8.33 \cdot 10^{-5}$ | $6.60 \cdot 10^{-5}$ |                      |
|                               |                | $5.73 \cdot 10^{-5}$ | $7.07 \cdot 10^{-5}$ | $8.97 \cdot 10^{-4}$ | $5.25 \cdot 10^{-3}$ | $6.59 \cdot 10^{-3}$ | $6.68 \cdot 10^{-3}$ | $6.69 \cdot 10^{-3}$ |
|                               |                | $6.10 \cdot 10^{-5}$ | $6.98 \cdot 10^{-5}$ | $8.06 \cdot 10^{-5}$ | $6.55 \cdot 10^{-5}$ | $7.68 \cdot 10^{-4}$ | $8.54 \cdot 10^{-4}$ | $8.58 \cdot 10^{-4}$ |
|                               | $\delta u''$   | $5.76 \cdot 10^{-5}$ | $6.88 \cdot 10^{-5}$ | $9.42 \cdot 10^{-5}$ | $9.91 \cdot 10^{-5}$ | $1.05 \cdot 10^{-4}$ | $9.02 \cdot 10^{-5}$ | $9.04 \cdot 10^{-5}$ |
|                               |                | $5.75 \cdot 10^{-5}$ | $8.27 \cdot 10^{-5}$ | $1.35 \cdot 10^{-2}$ | $2.45 \cdot 10^{-2}$ | $2.59 \cdot 10^{-2}$ | $2.60 \cdot 10^{-2}$ | $2.60 \cdot 10^{-2}$ |
|                               |                | $6.10 \cdot 10^{-5}$ | $7.13 \cdot 10^{-5}$ | $1.24 \cdot 10^{-3}$ | $7.84 \cdot 10^{-3}$ | $9.18 \cdot 10^{-3}$ | $9.28 \cdot 10^{-3}$ | $9.28 \cdot 10^{-3}$ |
| $h_\tau = 1/64, h_s = \pi/31$ | $\delta u'$    | $6.76 \cdot 10^{-6}$ | $8.36 \cdot 10^{-6}$ | $1.02 \cdot 10^{-5}$ | $1.08 \cdot 10^{-5}$ | $1.79 \cdot 10^{-5}$ | $4.66 \cdot 10^{-5}$ |                      |
|                               |                | $5.87 \cdot 10^{-6}$ | $7.02 \cdot 10^{-6}$ | $4.28 \cdot 10^{-4}$ | $1.85 \cdot 10^{-3}$ | $3.10 \cdot 10^{-3}$ | $3.19 \cdot 10^{-3}$ | $3.19 \cdot 10^{-3}$ |
|                               |                | $7.26 \cdot 10^{-6}$ | $7.02 \cdot 10^{-6}$ | $1.10 \cdot 10^{-5}$ | $7.98 \cdot 10^{-5}$ | $2.82 \cdot 10^{-4}$ | $3.60 \cdot 10^{-4}$ | $3.64 \cdot 10^{-4}$ |
|                               | $\delta u''$   | $6.75 \cdot 10^{-6}$ | $8.37 \cdot 10^{-6}$ | $1.05 \cdot 10^{-5}$ | $1.13 \cdot 10^{-5}$ | $1.82 \cdot 10^{-5}$ | $3.63 \cdot 10^{-5}$ | $4.66 \cdot 10^{-5}$ |
|                               |                | $5.87 \cdot 10^{-6}$ | $7.02 \cdot 10^{-6}$ | $2.97 \cdot 10^{-3}$ | $1.11 \cdot 10^{-2}$ | $1.24 \cdot 10^{-2}$ | $1.25 \cdot 10^{-2}$ | $1.25 \cdot 10^{-2}$ |
|                               |                | $7.27 \cdot 10^{-6}$ | $7.02 \cdot 10^{-6}$ | $4.63 \cdot 10^{-5}$ | $3.09 \cdot 10^{-3}$ | $4.34 \cdot 10^{-3}$ | $4.44 \cdot 10^{-3}$ | $4.44 \cdot 10^{-3}$ |

Также были проведены вычислительные эксперименты по решению аналогичных задач Дирихле с помощью потенциала простого слоя [12]. При этом в случае использования аппроксимации  $\tilde{J}'_{m,l}(d,s,\tau)$  тоже наблюдалась более высокая точность полученных вблизи границы  $\partial\Omega$  численных решений, чем в случае аппроксимации интегралов  $J_{m,l}(\mathbf{x},\tau)$  только с помощью ПКФГ (для того, чтобы сравнение было корректным, в обоих случаях для решения соответствующих ГИУ первого рода использовалась аппроксимация  $\tilde{J}'_{0,m,k,l}(\tau)$ ). В заключение отметим, что точное интегрирование по  $\rho^\pm$  может быть аналогичным образом использовано для аппроксимации потенциалов простого слоя стационарных уравнений  $\Delta_2 u - pu = 0$  ( $p \geq 0$ ) в двумерной области  $\Omega^\pm$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
2. Onishi K. Convergence in the boundary element method for heat equation // Teaching for Robust Understanding of Mathematics. 1981. V. 17. P. 213–225.
3. Costabel M., Onishi K., Wendland W.L. A boundary element collocation method for the Neumann problem of the heat equation // Inverse and Ill-Posed Problems (H.W. Engl and C.W. Groetsch, ed.). Boston: Academic Press, 1987. P. 369–384.
4. Hongtao Y. On the convergence of boundary element methods for initial-Neumann problems for the heat equation // Mathematics of Computation. 1999. V. 68. No. 226. P. 547–557.

5. Iso Y., Takahashi S., Onishi K. Numerical convergence of the boundary solutions in transient heat conduction problems // Topics in Boundary Element Research (C.A. Brebbia, ed.). V. 3. Berlin: Springer, 1987. P. 1–24.
6. Иванов Д.Ю. О решении плоских задач нестационарной теплопроводности коллокационным методом граничных элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 50. С. 9–29. DOI: 10.17223/19988621/50/2.
7. Иванов Д.Ю. Решение двумерных краевых задач, соответствующих начально-краевым задачам диффузии на прямом цилиндре // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 8. С. 1094–1103.
8. Иванов Д.Ю., Держинский Р.И. Решение задач Робена для двумерных дифференциально-операторных уравнений, описывающих теплопроводность в прямом цилиндре // Научно-технический вестник Поволжья. 2016. № 1. С. 15–17.
9. Иванов Д.Ю. Устойчивая разрешимость в пространствах дифференцируемых функций некоторых двумерных интегральных уравнений теплопроводности с операторно-полугрупповым ядром // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 6 (38). С. 33–45. DOI: 10.17223/19988621/38/4
10. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 1. М.: ГИФМЛ, 1962. 464 с.
11. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 551 с.
12. Hamina M., Saranen J. On the spline collocation method for the single layer heat operator equation // Mathematics of Computation. 1994. V. 62. No. 205. P. 41–64. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1994-1208222-2>

Статья поступила 31.08.2018 г.

Ivanov D.Y. (2019) A REFINEMENT OF THE BOUNDARY ELEMENT COLLOCATION METHOD NEAR THE BOUNDARY OF DOMAIN IN THE CASE OF TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS OF NON-STATIONARY HEAT CONDUCTION WITH BOUNDARY CONDITIONS OF THE SECOND AND THIRD KIND. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 57. pp. 5–25

DOI 10.17223/19988621/57/1

Keywords: non-stationary heat conduction, boundary integral equation, single-layer heat potential, singular boundary element, collocation, operator, uniform convergence.

In this paper, we consider initial-boundary value problems (IBVPs) for the equation  $\partial_t u = a^2 \Delta_2 u - p u$  with constants  $a, p > 0$  in an open two-dimensional spatial domain  $\Omega$  with boundary conditions of the second and third kind at a zero initial condition. A fully justified collocation boundary element method is proposed, which makes it possible to obtain uniformly convergent in the space-time domain  $\Omega \times [0, T]$  approximate solutions of the abovementioned IBVPs. The solutions are found in the form of the single-layer potential with unknown density functions determined from boundary integral equations of the second kind.

To ensure the uniform convergence, integration on arc-length  $s$  when calculating the potential operator is carried out in two ways. If the distance  $r$  from the point  $x \in \Omega$  at which the potential is calculated to the integration point  $x' \in \partial\Omega$  does not exceed approximately one-third of the radius of the Lyapunov circle  $R_L$ , then we use exact integration with respect to a certain component  $\rho$  of the distance  $r$ :  $\rho \equiv (r^2 - d^2)^{1/2}$  ( $d$  is the distance from the point  $x \in \Omega$  to the boundary  $\partial\Omega$ ). This exact integration is practically feasible for any analytically defined curve  $\partial\Omega$ . In this integration, functions of the variable  $\rho$  are taken as the weighting functions and the rest of the integrand is approximated by quadratic interpolation on  $\rho$ . The functions of  $\rho$  are generated by the fundamental solution of the heat equation. The integrals with respect to  $s$  for  $r > R_L/3$  are calculated using Gaussian quadrature with  $\gamma$  points.

Under the condition  $\partial\Omega \in C^5 \cap C^{2\gamma}$  ( $\gamma \geq 2$ ), it is proved that the approximate solutions converge to an exact one with a cubic velocity uniformly in the domain  $\Omega \times [0, T]$ . It is also proved that the approximate solutions are stable to perturbations of the boundary function

uniformly in the domain  $\Omega \times [0, T]$ . The results of computational experiments on the solution of the IBVPs in a circular spatial domain are presented. These results show that the use of the exact integration with respect to  $\rho$  can substantially reduce the decrease in the accuracy of numerical solutions near the boundary  $\partial\Omega$ , in comparison with the use of exclusively Gauss quadratures in calculating the potential.

AMS Mathematical Subject Classification: 80M15, 65E05

IVANOV Dmitry Yurievich (Candidate of Physics and Mathematics, Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, Russian Federation). E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

#### REFERENCES

1. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. (1984) *Boundary element techniques*. New York: Springer-Verlag. 464 p.
2. Onishi K. (1981) Convergence in the boundary element method for heat equation. *Teaching for Robust Understanding of Mathematics*. 17. pp. 213–225.
3. Costabel M., Onishi K., Wendland W.L. (1987) A boundary element collocation method for the Neumann problem of the heat equation. *Inverse and Ill-Posed Problems (H.W. Engl and C.W. Groetsch, eds.)*. Boston: Academic Press. pp. 369–384.
4. Hongtao Y. (1999) On the convergence of boundary element methods for initial-Neumann problems for the heat equation. *Mathematics of Computation*. 68 (226). pp. 547–557.
5. Iso Y., Takahashi S., Onishi K. (1987) Numerical convergence of the boundary solutions in transient heat conduction problems. *Topics in Boundary Element Research (C.A. Brebbia, ed.)*, Vol. 3. Berlin: Springer. pp. 1–24.
6. Ivanov D.Yu. (2017) O reshenii ploskikh zadach nestatsionarnoy teploprovodnosti kollokatsionnym metodom granichnykh elementov [On the solution of plane problems of non-stationary heat conduction by the boundary element collocation method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 50. pp. 9–29. DOI: 10.17223/19988621/50/2.
7. Ivanov D.Yu. (2010) Solution of two-dimensional boundary-value problems corresponding to initial-boundary value problems of diffusion on a right cylinder. *Differential Equations*. 46(8). pp. 1104–1113. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266110080045>.
8. Ivanov D.Yu., Dzerzhinskiy R.I. (2016) Resheniye zadach Robena dlya dvumernykh differentsial'no-operatornykh uravneniy, opisyvayushchikh teploprovodnost' v pryamom tsilindre [Solution of the Robin problems for two-dimensional differential-operator equations describing the thermal conductivity in a straight cylinder]. *Nauchno-tekhnicheskiiy vestnik Povolzh'ya – Scientific and Technical Journal of the Volga Region*. 1. pp. 15–17.
9. Ivanov D.Yu. (2015) Ustoychivaya razreshimost' v prostranstvakh differentsiruemykh funktsiy nekotorykh dvumernykh integralnykh uravneniy teploprovodnosti s operatornopolugruppovym yadrom [Stable solvability in spaces of differentiable functions of some two-dimensional integral equations of heat conduction with an operator-semigroup kernel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6. pp. 33–45. DOI: 10.17223/19988621/38/4.
10. Berezin I.S., Zhidkov N.P. (1962) *Metody vychisleniy* [Methods of computations]. Vol. 1. Moscow: GIFML.
11. Smirnov V.I. (1964) *Kurs vysshey matematiki* [A course of higher mathematics]. Vol. 4. Part II. Moscow: Nauka. 551 p.
12. Hamina M., Saranen J. (1994) On the spline collocation method for the single layer heat operator equation. *Mathematics of Computation*. 62(205). pp. 41–64. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1994-1208222-2>

Received: August 31, 2018

УДК 539.3  
DOI 10.17223/19988621/57/2

MSC 74G15, 74S05, 65B99

**Р.В. Киричевский, А.В. Скринникова**

## **ВЛИЯНИЕ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОСТРОЕНИИ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА НА СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Целью работы является исследование влияния аппроксимирующих функций при построении матрицы жесткости конечного элемента на скорость сходимости метода конечных элементов (МКЭ). Для достижения этой цели получены коэффициенты тензора преобразования при различных аппроксимирующих функциях с использованием одномерных полиномов Лагранжа, которые используются для построения матрицы жесткости конечного элемента: линейной, квадратичной и кубической. Найденные коэффициенты тензора преобразования были использованы при расчете внутренних и внешних радиальных перемещений в полом толстостенном резиновом цилиндре, находящемся под внутренним давлением. Анализ сходимости МКЭ при выборе линейных, квадратичных и кубических аппроксимирующих функций перемещений для выполненных расчетов показал, что использование конечного элемента с аппроксимирующей кубической функцией позволяет ускорить сходимость МКЭ и получить более точные результаты. Этот факт доказывает перспективу использования аппроксимирующих функций высших порядков для различных классов задач механики, в данном случае для эластомерного элемента.

**Ключевые слова:** *метод конечных элементов, напряженно-деформированное состояние, эластомеры, кубическая аппроксимация.*

Одним из наиболее эффективных численных методов, позволяющих выполнять анализ напряженно-деформированного состояния конструкций из эластомеров, является метод конечных элементов (МКЭ).

Применение МКЭ накладывает определенные требования на системы автоматизированного проектирования (САПР) конструкций из эластомеров. Для расчетов с использованием МКЭ проектируемый объект должен быть представлен с помощью конечного числа элементарных объемов, называемых конечными элементами (КЭ) [1–4]. Задача дискретизации объекта на КЭ является весьма сложной и трудоемкой, особенно в трехмерном случае, что приводит к необходимости введения в САПР модуля, позволяющего автоматизировать данный процесс.

МКЭ основан на физической идеализации: одно из двух условий статического или кинематического равновесия выполняется точно, а другое приближенно. Это привело к тому, что МКЭ применяется в двух видах: в виде метода сил и метода перемещений. На практике чаще применяется метод перемещений, так как при его использовании легко представляются кинематические связи для произвольных конструкций. Однако в некоторых случаях более предпочтительным является метод сил, что приводит к необходимости реализации в САПР некоторого механизма выбора требуемого метода расчета [1].

При применении МКЭ возникает система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которая в общем случае может иметь весьма высокий порядок. Для ее решения приходится использовать специальные модификации методов решения СЛАУ, как прямые, так и итерационные. После решения СЛАУ необходимо вычислять дополнительные параметры напряженно-деформированного состояния, например по полученным перемещениям вычислять деформации и напряжения. Это приводит к появлению больших массивов численных данных, которые, в первую очередь, приходится исследовать на точность, достоверность и соответствие физическому смыслу задачи [2]. Данный процесс по времени и трудоемкости иногда превосходит все предыдущие этапы проектирования и расчетов.

Доказательства сходимости и скорости сходимости схем МКЭ рассмотрены в работах О.К. Зенкевича [3], М.В. Урева [5], А.С. Сахарова [6], А.А. Гусева [7], В. Nedjar [8] и др.

Таким образом, структуру САПР, базирующихся на применении МКЭ, условно делят на три взаимосвязанных блока:

1) подготовка начальных данных для расчетов, включая описание объекта конструирования, дискретизации его на КЭ, описание нагрузок, физических и геометрических параметров, уравнения состояния и краевых условий;

2) расчет с использованием МКЭ;

3) анализ полученных результатов, включая синтез дополнительных параметров напряженно-деформированного состояния на основе ранее вычисленных.

Покажем, как работает первый блок, ведь он является важным с точки зрения теоретического обоснования математического обеспечения САПР рассматриваемых объектов. Остановимся на вопросе дискретизации КЭ, а именно на вопросах выбора типа КЭ и функций формы, а также условий, которым они должны удовлетворять.

Обычно при построении матрицы жесткости трехмерных шестигранных криволинейных конечных элементов удобным является при произвольном порядке аппроксимации перемещений использование произведений одномерных интерполяционных полиномов Лагранжа [9]. Однако с целью упрощения вычислений интегралов, входящих в выражения для коэффициентов матрицы жесткости (МЖ), иногда целесообразным становится использование степенных координатных функций [7]. При этом построенная матрица коэффициентов для системы степенных функций (либо другой системы координатных функций) с помощью тензоров преобразования приводится к матрице жесткости КЭ. Это справедливо для любого принимаемого закона аппроксимации перемещений [7–9]. Рассмотрим следующие законы.

Вариацию энергии деформации конечного элемента представим в известной форме:

$$\delta W = \iiint_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv.$$

Компоненты тензоров напряжений и деформаций примем согласно следующим зависимостям:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}; \quad (1)$$

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (\xi_{kl} + \xi_{lk}), \quad (2)$$

где

$$\xi_{kl} = C_k^{n'} u_{,l}^{n'}; \quad (3)$$

$C_k^{n'}$  – компоненты тензора преобразования базисной  $z^{k'}$  и местной  $x^k$  систем координат. Штрих в индексах указывает на принадлежность компоненты к базисной декартовой системе координат (рис. 1).

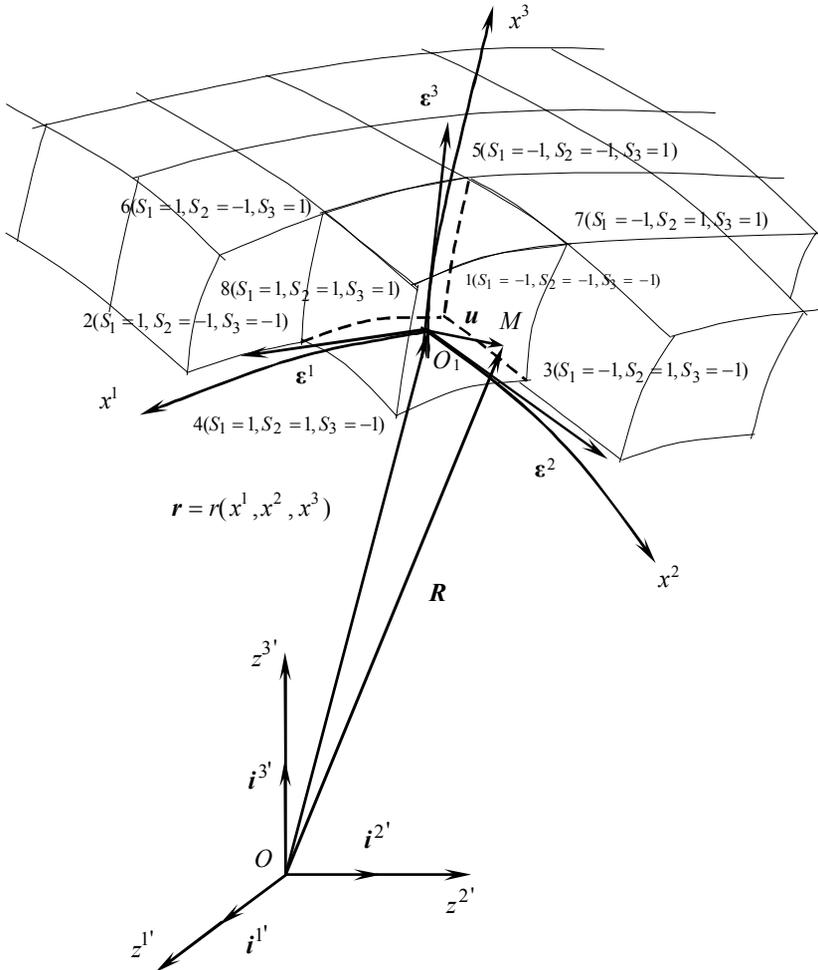


Рис. 1. Базисная и местная системы КЭ  
Fig. 1. Basic and local FE systems

Учитывая выражения (1) – (3), уравнение для вариации энергии деформации перепишем в виде

$$\delta W = \iiint_v H^{m'in'l} u_{,i}^{n'} \delta(u_{,i}^{m'}) dv, \quad (4)$$

где

$$H^{m'in'l} = C^{jikl} C_j^{m'} C_k^{n'}. \quad (5)$$

Введение нового тензора  $H^{m'in'l}$  как свертки тензора упругих постоянных с тензором преобразования координатных систем в несколько раз сокращает объем вычислений при построении МЖ КЭ [6].

Примем произвольный закон аппроксимации перемещений внутри КЭ:

$$u^{n'} = \sum_{\mu, \nu, \eta=0}^M b_{(\mu\nu\eta)}^{n'} \Psi_{(1)}^{(\mu)} \Psi_{(2)}^{(\nu)} \Psi_{(3)}^{(\eta)} \quad (6)$$

с использованием системы координатных функций вида

$$\Psi_{(1)}^{(\mu)} = \frac{(x^1)^\mu}{\mu!}; \quad \Psi_{(2)}^{(\nu)} = \frac{(x^2)^\nu}{\nu!}; \quad \Psi_{(3)}^{(\eta)} = \frac{(x^3)^\eta}{\eta!}, \quad (7)$$

где

$$\sum_{\mu, \nu, \eta=0}^M = \sum_{\mu=0}^M \sum_{\nu=0}^M \sum_{\eta=0}^M, \quad (8)$$

- $M = 1$  – для линейной аппроксимации;
- $M = 2$  – для квадратичной аппроксимации;
- $M = 3$  – для кубической аппроксимации и так далее.

На основании выражения (6) получим следующее выражение для распределения производной функции перемещений внутри КЭ:

$$u_{,l}^{n'} = \sum_{\mu, \nu, \eta=0}^M b_{(\mu\nu\eta)}^{n'} \Psi_{(1)}^{(\mu-\delta_l^1)} \Psi_{(2)}^{(\nu-\delta_l^2)} \Psi_{(3)}^{(\eta-\delta_l^3)} \cdot \rho, \quad (9)$$

где  $\rho = [\delta_l^1 (\mu - 1) + 1] [\delta_l^2 (\nu - 1) + 1] [\delta_l^3 (\eta - 1) + 1]$ .

Подставляя (9) в (4), получаем следующее выражение вариации энергии деформации:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 H^{m' in'l} \sum_{\mu, \nu, \eta=0}^M b_{(\mu\nu\eta)}^{n'} \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^M \delta(b_{(\alpha\beta\gamma)}^{m'}) \Psi_{(1)}^{(\mu+\alpha-\delta_l^1-\delta_l^i)} \Psi_{(2)}^{(\nu+\beta-\delta_l^2-\delta_l^i)} \Psi_{(3)}^{(\eta+\gamma-\delta_l^3-\delta_l^i)} \times \\ &\times \frac{(\mu + \alpha - \delta_l^1 - \delta_l^i)! (\nu + \beta - \delta_l^2 - \delta_l^i)! (\eta + \gamma - \delta_l^3 - \delta_l^i)!}{(\mu - \delta_l^1)! (\alpha - \delta_l^i)! (\nu - \delta_l^2)! (\beta - \delta_l^i)! (\eta - \delta_l^3)! (\gamma - \delta_l^i)!} dv = \\ &= \sum_{\mu} \sum_{\nu} \sum_{\eta} b_{(\mu\nu\eta)}^{n'} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \delta(b_{(\alpha\beta\gamma)}^{m'}) F_{m'n'}^{(\mu\nu\eta\alpha\beta\gamma)} = \sum_f \sum_{\phi} F_{(f\phi)} \delta u^{(f)} u^{(\phi)}, \quad (10) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f &= \mu + (M + 1)\nu + (M + 1)^2 \eta + 1, \\ \phi &= \alpha + (M + 1)\beta + (M + 1)^2 \gamma + 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Выражение (10) позволяет строить МЖ относительно коэффициентов  $b_{(\mu\nu\eta)}^{n'}$  и  $\delta b_{(\alpha\beta\gamma)}^{m'}$  при произвольном законе аппроксимации с использованием численного интегрирования.

В случае принятия допущения о постоянстве тензора упругих постоянных и компонент метрического тензора внутри КЭ становится возможным точное интегрирование в выражении (10). В этом случае будем иметь

$$\begin{aligned} I_{li(\alpha\beta\gamma)}^{(\mu\nu\eta)} &= I_{li(\alpha)}^{(\mu)} I_{li(\beta)}^{(\nu)} I_{li(\gamma)}^{(\eta)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u_{,l}^{n'} u_{,i}^{m'} dv = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{при } s \vee t \vee g - \text{четные,} \\ 2^3 \omega, & \text{при } s \wedge t \wedge g - \text{нечетные.} \end{cases} \quad (12) \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } \omega = \frac{1}{stg(\mu - \delta_1^l)!(\alpha - \delta_1^i)!(\nu - \delta_2^l)!(\beta - \delta_2^i)!(\eta - \delta_3^l)!(\gamma - \delta_3^i)!}, \quad (13)$$

$$s = \alpha + \mu - \delta_1^l - \delta_1^i + 1, \quad (14)$$

$$t = \beta + \nu - \delta_2^l - \delta_2^i + 1, \quad (15)$$

$$g = \gamma + \eta - \delta_3^l - \delta_3^i + 1, \quad (16)$$

$$I_{li(\alpha)}^{(\mu)} = \begin{cases} 0, \\ 2/s(\mu - \delta_1^l)!(\alpha - \delta_1^i)!; \end{cases} \quad (17)$$

$$I_{li(\beta)}^{(\nu)} = \begin{cases} 0, \\ 2/t(\nu - \delta_2^l)!(\beta - \delta_2^i)!; \end{cases} \quad (18)$$

$$I_{li(\gamma)}^{(\eta)} = \begin{cases} 0, \\ 2/g(\eta - \delta_3^l)!(\gamma - \delta_3^i)! \end{cases}. \quad (19)$$

Переходя к пределам интегрирования  $-\frac{1}{2} \leq x^i \leq \frac{1}{2}$ , получаем следующие значения интегралов (17)-(19):

$$\tilde{I}_{li(\alpha)}^{(\mu)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{s-1} \frac{\alpha! \mu!}{(\mu - \delta_1^l)!(\alpha - \delta_1^i)!} = \left(\frac{1}{2}\right)^{s-1} \frac{[\delta_1^l(\mu - 1) + 1][\delta_1^i(\alpha - 1) + 1]}{s}; \quad (20)$$

$$\tilde{I}_{li(\beta)}^{(\nu)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \frac{\nu! \beta!}{(\nu - \delta_2^l)!(\beta - \delta_2^i)!} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \frac{[\delta_2^l(\nu - 1) + 1][\delta_2^i(\beta - 1) + 1]}{t}; \quad (21)$$

$$\tilde{I}_{li(\gamma)}^{(\eta)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{g-1} \frac{\eta! \gamma!}{(\eta - \delta_3^l)!(\gamma - \delta_3^i)!} = \left(\frac{1}{2}\right)^{g-1} \frac{[\delta_3^l(\eta - 1) + 1][\delta_3^i(\gamma - 1) + 1]}{g}. \quad (22)$$

Матрица коэффициентов на этом этапе вычисляется из зависимости

$$F_{(f\Phi)} = \sum_{\mu, \nu, \eta=0}^M a_{(\mu\nu\eta)}^{n'} \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^M \delta(a_{(\alpha\beta\gamma)}^{m'}) H^{m' in' l} I_{il(\alpha\beta\gamma)}^{(\mu\nu\eta)}, \quad (23)$$

где

$$I_{il(\alpha\beta\gamma)}^{(\mu\nu\eta)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(s+t+g-3)} \frac{[\delta_1^l(\mu - 1) + 1][\delta_1^i(\alpha - 1) + 1]}{s} \times$$

$$\times \frac{[\delta_2^l(\nu - 1) + 1][\delta_2^i(\beta - 1) + 1][\delta_3^l(\eta - 1) + 1][\delta_3^i(\gamma - 1) + 1]}{tg}. \quad (24)$$

Для того чтобы перейти от МЖ при коэффициентах  $b_{(\mu\nu\eta)}^{n'}$  и  $\delta b_{(\alpha\beta\gamma)}^{m'}$  к обычной МЖ относительно  $u_{(pqr)}^i \delta u_{(stg)}^j$ , что равносильно переходу от одной системы координатных функций к другой, воспользуемся тензорами преобразования координатных функций. Для этой цели выпишем отдельно аппроксимации полей перемещений внутри КЭ по степенным функциям и по функциям с использованием

одномерных полиномов Лагранжа:

$$u^{n'} = \sum_{m_1=1}^M \sum_{m_2=1}^N \sum_{m_3=1}^L a'_{(m_1 m_2 m_3)} \frac{(x^1)^{m_1}}{(m_1)!} \frac{(x^2)^{m_2}}{(m_2)!} \frac{(x^3)^{m_3}}{(m_3)!}; \quad (25)$$

$$u^{n'} = \sum_{p_1=1}^M \sum_{p_2=1}^N \sum_{p_3=1}^L u'_{(p_1 p_2 p_3)} L^{p_1} L^{p_2} L^{p_3}, \quad (26)$$

где  $L^{p_1}$ ,  $L^{p_2}$ ,  $L^{p_3}$  – одномерные полиномы Лагранжа, определяемые по формуле

$$L^{p_k} = R_{j(p_k)}^M = \frac{\prod_{\delta=1}^M (x^{(j)} - x_{(\delta)}^j)}{\left(x^{(j)} - x_{(p_k)}^j\right) \prod_{r=1}^M \left(x_{(p_k)}^j - x_{(r)}^j + \delta_{(p_k)}^{(r)}\right)}. \quad (27)$$

На основании (25) и (26) имеем следующую зависимость для тензора преобразования координатных функций:

$$C_{m_k}^{p_k} (m_k - 1)! = \frac{\partial^{(m_k-1)} L^{p_k}}{\left(\partial x^k\right)^{m_k-1}} \Bigg|_{x^1=x^2=x^3=0}, \quad (28)$$

а связь между коэффициентами разложения имеет вид

$$a'_{(m_1 m_2 m_3)} = C_{m_1 m_2 m_3}^{p_1 p_2 p_3} u'_{p_1 p_2 p_3}, \quad (29)$$

где  $C_{m_1 m_2 m_3}^{p_1 p_2 p_3}$  представляет собой диадное тензорное произведение тензоров согласно формуле

$$C_{m_1 m_2 m_3}^{p_1 p_2 p_3} = C_{m_1}^{p_1} \cdot C_{m_2}^{p_2} \cdot C_{m_3}^{p_3} = C_m^p. \quad (30)$$

При этом имеет место очевидное равенство

$$C_{m_1}^{p_1} = C_{m_2}^{p_2} = C_{m_3}^{p_3}. \quad (31)$$

Коэффициенты МЖ  $F_{m'n'}$  при  $a'_{(\mu\nu\eta)}$  и  $\delta(a'_{(\alpha\beta\gamma)})$  вычисляются через коэффициенты МЖ  $F_{i'j'}$  при  $u'_{(pqr)} \delta u'_{(stg)}$  путем двойного умножения на тензоры преобразования

$$F_{i'j'} = C_{i'}^{m'} C_{j'}^{n'} F_{m'n'}. \quad (32)$$

Выведем коэффициенты тензора преобразования для различных законов аппроксимации.

Для **линейного закона аппроксимации** индексы, входящие в (25) и (27), приобретают следующие значения

$$M = N = L = 2, m_k = 1, 2, p_k = 1, 2, x_{(1)}^1 = -\frac{1}{2}, x_{(2)}^1 = \frac{1}{2}. \quad (33)$$

Так как тензоры преобразования одинаковы для всех направлений  $x^1, x^2, x^3$ , то достаточно вычислять их для одного направления, например,  $C_{m_1}^{p_1}$  при  $j=1$  для  $x^1$ . В этом случае выражение (27) для полинома Лагранжа с учетом (33) при-

нимает вид

$$\begin{aligned} L^{p_1} = R_{1(p_1)}^2 &= \frac{(x^1 - x_{(1)}^1)(x^1 - x_{(2)}^1)}{(x^1 - x_{(p_1)}^1)(x_{(p_1)}^1 - x_{(1)}^1 + \delta_{(p_1)}^{(1)})(x_{(p_1)}^1 - x_{(2)}^1 + \delta_{(p_1)}^{(2)})} = \\ &= \frac{\left(x^1 + \frac{1}{2}\right)\left(x^1 - \frac{1}{2}\right)}{(x^1 - x_{(p_1)}^1)\left(x_{(p_1)}^1 + \frac{1}{2} + \delta_{(p_1)}^{(1)}\right)\left(x_{(p_1)}^1 - \frac{1}{2} + \delta_{(p_1)}^{(2)}\right)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Используя формулу (28), вычисляем значения компонент тензора преобразования

$$\begin{aligned} C_1^1 &= L^1 \Big|_{x^1=0} = -\left(x^1 - \frac{1}{2}\right) \Big|_{x^1=0} = \frac{1}{2}, \\ C_2^1 &= \frac{\partial L^1}{\partial x^1} \Big|_{x^1=0} = \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{1}{2} - x^1\right) \Big|_{x^1=0} = -1, \\ C_1^2 &= L^2 \Big|_{x^1=0} = \left(x^1 + \frac{1}{2}\right) \Big|_{x^1=0} = \frac{1}{2}, \\ C_2^2 &= \frac{\partial L^2}{\partial x^1} \Big|_{x^1=0} = 1. \end{aligned} \quad (35)$$

Таким образом, имеем следующую матрицу тензора преобразования:

$$\left[ C_{m_1}^{p_1} \right] = \begin{bmatrix} C_1^1 & C_1^2 \\ C_2^1 & C_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Для **квадратичного закона аппроксимации** индексы, входящие в (25) и (27), имеют такие значения:

$$M = N = L = 3, \quad m_k = 1, 2, 3, \quad p_k = 1, 2, 3,$$

$$x_{(1)}^1 = -\frac{1}{2}, \quad x_{(2)}^1 = 0, \quad x_{(3)}^1 = \frac{1}{2}, \quad (37)$$

а одномерный полином Лагранжа суть:

$$\begin{aligned} L^{p_1} = R_{1(p_1)}^3 &= \frac{(x^1 - x_{(1)}^1)(x^1 - x_{(2)}^1)(x^1 - x_{(3)}^1)}{(x^1 - x_{(p_1)}^1)(x_{(p_1)}^1 - x_{(1)}^1 + \delta_{(p_1)}^{(1)})(x_{(p_1)}^1 - x_{(2)}^1 + \delta_{(p_1)}^{(2)})(x_{(p_1)}^1 - x_{(3)}^1 + \delta_{(p_1)}^{(3)})} = \\ &= \frac{\left(x^1 + \frac{1}{2}\right)x^1\left(x^1 - \frac{1}{2}\right)}{(x^1 - x_{(p_1)}^1)\left(x_{(p_1)}^1 + \frac{1}{2} + \delta_{(p_1)}^{(1)}\right)\left(x_{(p_1)}^1 + \delta_{(p_1)}^{(2)}\right)\left(x_{(p_1)}^1 - \frac{1}{2} + \delta_{(p_1)}^{(3)}\right)}. \end{aligned} \quad (38)$$

По формуле (28) получаем аналогично (35) следующую матрицу коэффициентов тензора преобразования:

$$\left[ C_{m_1}^{p_1} \right] = \begin{bmatrix} C_1^1 & C_1^2 & C_1^3 \\ C_2^1 & C_2^2 & C_2^3 \\ C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Для **кубического закона аппроксимации** значения индексов, входящих в (25) и (27), следующие:

$$M = N = L = 4, m_k = 1, 2, 3, 4, p_k = 1, 2, 3, 4;$$

$$x_{(1)}^1 = -\frac{1}{2}, x_{(2)}^1 = -\frac{1}{6}, x_{(3)}^1 = \frac{1}{6}, x_{(4)}^1 = \frac{1}{2}, \quad (40)$$

а одномерный полином Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} L^{p_1} &= R_{i(p_1)}^4 = \\ &= \frac{(x^1 - x_{(1)}^1)(x^1 - x_{(2)}^1)}{(x^1 - x_{(p_1)}^1)(x_{(p_1)}^1 - x_{(1)}^1 + \delta_{(p_1)}^{(1)})(x_{(p_1)}^1 - x_{(2)}^1 + \delta_{(p_1)}^{(2)})} \times \\ &\quad \times \frac{(x^1 - x_{(3)}^1)(x^1 - x_{(4)}^1)}{(x_{(p_1)}^1 - x_{(3)}^1 + \delta_{(p_1)}^{(3)})(x_{(p_1)}^1 - x_{(4)}^1 + \delta_{(p_1)}^{(4)})} = \\ &= \frac{\left(x^1 + \frac{1}{2}\right)\left(x^1 + \frac{1}{6}\right)}{\left(x^1 - x_{(p_1)}^1\right)\left(x_{(p_1)}^1 + \frac{1}{2} + \delta_{(p_1)}^{(1)}\right)\left(x_{(p_1)}^1 + \frac{1}{6} + \delta_{(p_1)}^{(2)}\right)} \times \\ &\quad \times \frac{\left(x^1 - \frac{1}{6}\right)\left(x^1 - \frac{1}{2}\right)}{\left(x_{(p_1)}^1 - \frac{1}{6} + \delta_{(p_1)}^{(3)}\right)\left(x_{(p_1)}^1 - \frac{1}{2} + \delta_{(p_1)}^{(4)}\right)}. \end{aligned} \quad (41)$$

Аналогично (35) получаем следующий вид матрицы коэффициентов тензора преобразования в случае кубического закона аппроксимации:

$$\left[ C_{m_1}^{p_1} \right] = \begin{bmatrix} C_1^1 & C_1^2 & C_1^3 & C_1^4 \\ C_2^1 & C_2^2 & C_2^3 & C_2^4 \\ C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & C_3^4 \\ C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16} & -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & -\frac{27}{8} & \frac{27}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{9}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{9}{4} \\ -\frac{9}{2} & \frac{27}{2} & -\frac{27}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix}.$$

Зная коэффициенты тензора преобразования для линейного (36), квадратичного (39) и кубического (42) законов аппроксимации перемещений по формуле (30), получаем общий тензор преобразования для коэффициентов МЖ КЭ.

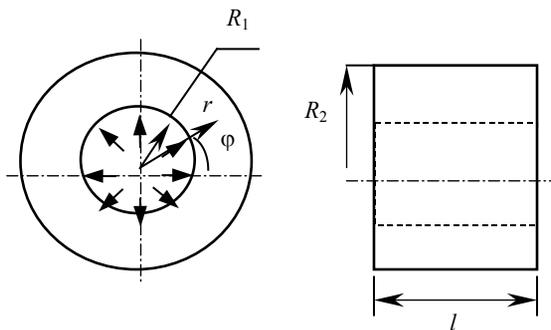
Такой подход к формированию коэффициентов МЖ при законах аппроксимации высоких порядков позволяет значительно сократить количество вычислений и легко строить МЖ для любых других видов аппроксимирующих полиномов.

Рассмотрим влияние типа аппроксимирующих функций для построенных МЖ КЭ на примере расчета резинового элемента конструкции в виде полого толсто-стенного цилиндра, находящегося под внутренним давлением, на скорость сходимости полученного приближенного решения МКЭ.

Толстостенные цилиндры широко используются в химической, нефтяной, военной промышленности, на атомных электростанциях. Они подвергаются высоким давлениям и температурам, которые имеют постоянный или циклический характер. Анализ конечных радиальных и ортогональных перемещений при внутреннем давлении в толстостенных цилиндрах проводят с целью обнаружения предела прочности материала, поскольку промышленные цилиндры часто подвергаются давлению выше предела текучести материала. Следовательно, необходим точный анализ напряженно-деформированного состояния цилиндров, чтобы полностью использовать их несущую способность и обеспечить безопасность эксплуатации.

Исходные данные: внутренний радиус  $R_1 = 0.25$  м, внешний радиус цилиндра  $R_2 = 0.5$  м, модуль сдвига  $\mu = 0.7$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.49999$ , давление  $P = 0.1$  МПа. Расчетная схема представлена на рис. 2, где  $r \in [R_1; R_2]$ . Перемещения внутренней и внешней поверхностей определялись по формуле [10]:

$$u(r) = \frac{PR_1^2}{\mu(R_2^2 - R_1^2)} \left[ (1-\nu)r + \frac{(1+\nu)R_2^2}{r} \right].$$



**Рис. 2.** Расчетная схема полого цилиндра под внутренним давлением  
**Fig. 2.** Calculation scheme for a hollow cylinder under internal pressure

Расчет внутренних радиальных,  $u_1$  (при  $r = 0.25$ ), и внешних радиальных,  $u_2$  (при  $r = 0.5$ ), перемещений выполнен в рамках вычислительного комплекса «МРЕЛА+» [1]. Результаты представлены в таблице. Здесь М1 – дискретизация по дуге, М2 – вдоль радиуса, М3 – по толщине цилиндра. Как видно из таблицы, увеличение степени аппроксимации перемещений в радиальном направлении способствует улучшению численных результатов при одинаковых сетках разбиения (точное решение:  $u_1/u_2 = 0,07738/0,04762$ ).

Скорости сходимости МКЭ для линейного, квадратичного и кубического законов аппроксимации перемещений проиллюстрирована на рис. 3. Как видно, увеличение степени дискретизации влечет более высокую точность решения. Кубическая аппроксимация дает более быструю сходимость МКЭ и на сетке  $2 \times 13 \times 2$  дает более точный результат. Тот факт, что аппроксимирующие функции более высокого порядка дают более точные результаты и быструю сходимость МКЭ, также подтверждается результатами, приведенными в работе [6] для неэластомерных конструкций.

## Результаты расчета полого цилиндра под внутренним давлением

| Закон аппроксимации | Размеры сетки $M1 \times M2 \times M3$ | Количество уравнений | Перемещения $u_1/u_2$ | Абсолютная погрешность решения |
|---------------------|--|----------------------|-----------------------|--------------------------------|
| Линейный            | 2×3×2                                  | 36                   | 0.0317/0.0524         | —                              |
|                     | 2×4×2                                  | 48                   | 0.0481/0.0678         | —                              |
|                     | 2×5×2                                  | 60                   | 0.0612/0.0728         | —                              |
|                     | 2×7×2                                  | 84                   | 0.0684/0.0915         | 0.00898/0.0335                 |
|                     | 2×9×2                                  | 108                  | 0.0711/0.0982         | 0.00628/0.0268                 |
|                     | 2×10×2                                 | 120                  | 0.0752/0.1049         | —                              |
|                     | 2×11×2                                 | 132                  | 0.0742/0.1093         | —                              |
| Квадратичный        | 2×3×2                                  | 36                   | 0.0428/0.0591         | —                              |
|                     | 2×5×2                                  | 60                   | 0.0623/0.0731         | —                              |
|                     | 2×7×2                                  | 84                   | 0.0722/0.0955         | 0.00518/0.0295                 |
|                     | 2×9×2                                  | 108                  | 0.0728/0.1042         | 0.00458/0.0208                 |
|                     | 2×11×2                                 | 132                  | 0.0760/0.1124         | —                              |
| Кубический          | 2×4×2                                  | 48                   | 0.0492/0.0684         | —                              |
|                     | 2×7×2                                  | 84                   | 0.0712/0.0963         | 0.00618/0.0287                 |
|                     | 2×9×2                                  | 120                  | 0.0753/0.1215         | 0.00208/0.0035                 |
|                     | 2×13×2                                 | 156                  | 0.0775/0.1244         | 0.00012/0.0006                 |

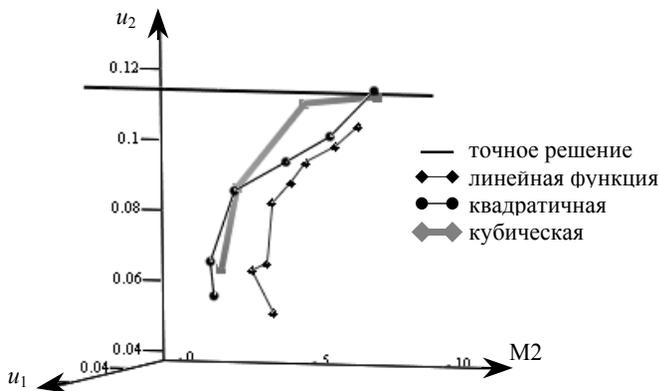


Рис. 3. Влияние аппроксимирующей функции на скорость сходимости МКЭ

Fig. 3. Effect of the approximating function on the FEM convergence rate

## Заключение

На примере полого толстостенного цилиндра показано функционирование трех условно выделенных блоков САПР конструкций из эластомеров, основанной на МКЭ. Полученные в первом блоке МЖ КЭ для линейного, квадратичного и кубического законов аппроксимации перемещений были использованы во втором блоке при расчете радиальных перемещений МКЭ. Анализ полученных результатов в третьем блоке показал, что использование КЭ с аппроксимирующей кубической функцией позволяет ускорить сходимость МКЭ и получить более точные ре-

зультаты в сравнении с линейной в 10 раз и с квадратичной функцией в 2 раза по абсолютной погрешности. Таким образом, порядок аппроксимирующей функции при построении матрицы жесткости конечного элемента существенно влияет на скорость сходимости МКЭ, что доказывает перспективность использования аппроксимирующих функций более высоких порядков для определения параметров напряженно-деформированного состояния изделий из эластомеров, в частности толстостенных цилиндров.

При выборе аппроксимирующих функций для вычисления МЖ КЭ необходимо учитывать, что количество опорных точек интегрирования должно быть выбрано рациональным, так как от них зависит объем вычислений при интегрировании, который пропорционален в трехмерных задачах  $n^3$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Киричевский В.В., Дохняк БМ., Козуб Ю.Г. и др. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МИРЕЛА+». Киев: Наукова думка, 2005. 403 с.
2. Solin P. Partial Differential Equations and the Finite Element Method. New Jersey: Wiley-Interscience, 2005. 504 p.
3. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013. 672 p. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2009-0-26332-X>.
4. Fialko S.Yu. Application of rigid links in structural design models // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2017. V. 13. No. 3. P. 119–137. <https://doi.org/10.22337/1524-5845-2017-13-3-119-137>.
5. Урев М.В. Сходимость МКЭ для эллиптического уравнения с сильным вырождением // Сибирский журнал индустриальной математики. 2014. Т. 17. № 2. С. 137–148.
6. Завьялов Г.Г., Киричевский В.В., Сахаров А.С. Уточненные схемы МКЭ для расчета массивных конструкций // Проблемы прочности. 1978. № 6. С. 76–82.
7. Гусев А.А. Метод конечных элементов высокого порядка точности решения краевых задач для эллиптического уравнения в частных производных // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия математика, информатика, физика. 2017. Т. 25. № 3. С. 217–233. <http://dx.doi.org/10.22363/2312-9735-2017-25-3-217-233>.
8. Nedjar B., Baaser H., Martin R., Neff P. A finite element implementation of the isotropic exponentiated Hencky-logarithmic model and simulation of the eversion of tubes // Computational Mechanics. 2017. P. 1–20. <https://doi.org/10.1007/s00466-017-1518-9>.
9. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Вахнина О.В. Конечно-элементный анализ оболочек вращения при использовании высокоточного треугольного элемента дискретизации с корректирующими множителями Лагранжа // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика, механика. 2016. № 5. С. 59–63.
10. Гребенюк С.М., Бова А.А. Визначення напружено-деформованого стану гумової труби на основі уточненої моментної схеми скінченного елемента // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. 2014. Вып. 22. С. 67–79.

Статья поступила 28.07.2018 г.

Kirichevsky R.V., Skrynnykova A.V. (2019) THE EFFECT OF APPROXIMATING FUNCTIONS IN THE CONSTRUCTION OF THE STIFFNESS MATRIX OF THE FINITE ELEMENT ON THE CONVERGENCE RATE OF THE FINITE ELEMENT METHOD. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 57. pp. 26–38

DOI 10.17223/19988621/57/2

Keywords: finite element method, stress-strain state, elastomers, cubic approximation.

The aim of this article is to study the influence of approximating functions on the convergence rate of the finite element method (FEM) when constructing the finite element stiffness matrix. To achieve this aim, coefficients of the transformation tensor have been obtained for different approximating functions with the use of one-dimensional Lagrange polynomials which are used for constructing the stiffness matrix of a finite element (linear, quadratic, and cubic). The found coefficients of the transformation tensor are used in the calculation of internal and external radial displacements in a hollow thick-walled resin cylinder under internal pressure. The analysis of the FEM convergence with linear, quadratic, and cubic approximation functions of displacements for the performed calculations shows that the use of a finite element with an approximating cubic function makes it possible to accelerate the FEM convergence and to obtain more accurate results. This fact proves the perspectiveness of using higher order approximating functions for different classes of problems in mechanics (in our case, for the elastomeric element).

AMS Mathematical Subject Classification 74G15, 74S05, 65B99

*KIRICHEVSKY Rostislav Viktorovich* (Candidate of Technical Sciences, Luhansk Taras Shevchenko National University, Luhansk, Ukraine). E-mail: rost71@mail.ru

*SKRYNNYKOVA Anna Vladimirovna* (Luhansk Taras Shevchenko National University, Luhansk, Ukraine). E-mail: ann3005@rambler.ru

#### REFERENCES

1. Kirichevsky V.V., Dohnjak B.M., Kozub Yu.G., et al. (2005) *Method konechnykh elementov v vichislitel'nom komplekse "MIRELA+"* [Finite element method in the MIRELA+ computer system]. Kiev: Nauk. Dumka. 403 p.
2. Šolín P. (2005) *Partial Differential Equations and the Finite Element Method*. New Jersey: Wiley-Interscience. 504 p.
3. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. (2013) *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Oxford: Butterworth-Heinemann. pp. 672. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2009-0-26332-X>
4. Fialko S.Yu. (2017) Application of rigid links in structural design models. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 13 (3). pp. 119–137. <https://doi.org/10.22337/1524-5845-2017-13-3-119-137>.
5. Urev M.V. (2014) Convergence of the finite element method for an elliptic equation with strong degeneration. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 8(3). pp. 411–421. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1990478914030144>.
6. Zav'yalov G.G., Kirichevsky V.V., Sakharov A.S. (1978) Utochnenie chemy MKSE dlja rascheta massivnykh konstrukciy [Refinement of the FEM scheme for the calculation of massive constructions]. *Problemy prochnosti*. 6. pp. 76–82.
7. Gusev A.A. (2017) High-Accuracy Finite Element Method for Solving Boundary-Value Problems for Elliptic Partial Differential Equations. *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics*. 25(3). pp. 217–233. <http://dx.doi.org/10.22363/2312-9735-2017-25-3-217-233>.
8. Nedjar B., Baaser H., Martin R., Neff P. (2017) A finite element implementation of the isotropic exponentiated Hencky-logarithmic model and simulation of the eversion of tubes. *Computational Mechanics*. 2017. pp. 1–20. <https://doi.org/10.1007/s00466-017-1518-9>.
9. Klochkov U.V., Nikolaev A.P., Vahina O.V. (2016) Finite element analysis of shells of revolution using triangular discretization elements with corrective Lagrange multipliers. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 71(5). pp. 114–117. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0027133016050034>.
10. Grebenyuk S.M., Bova A.A. (2014) Determination of stress-strain state of rubber tube on the basis of precise finite element moment scheme. *Problems of computational mechanics and strength of structures*. 22. pp. 67–79.

Received: July 28, 2018

Е.А. Пчелинцев, С.С. Перелевский

**АДАПТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ  
В ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНОЙ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ<sup>1</sup>**

Рассматривается задача оценивания неизвестной функции гетероскедастичной регрессии. Предлагается адаптивная процедура выбора модели, основанная на улучшенных взвешенных оценках наименьших квадратов со специально подобранными весовыми коэффициентами. Устанавливается, что процедура имеет более высокую среднеквадратическую точность по сравнению с процедурой, основанной на классических взвешенных оценках наименьших квадратов. Для среднеквадратического риска предлагаемой процедуры доказывается неасимптотическое оракульное неравенство, определяющее для него точную верхнюю границу по всевозможным оценкам. Приводятся результаты численного моделирования.

**Ключевые слова:** гетероскедастичная регрессия, улучшенное непараметрическое оценивание, процедура выбора модели, оракульное неравенство.

**1. Введение**

Предположим, что наблюдения  $(y_j)_{1 \leq j \leq n}$  описываются уравнением гетероскедастичной регрессии

$$y_j = S(x_j) + \sigma_j \xi_j, \quad 1 \leq j \leq n, \tag{1}$$

где  $x_j = j/n$ ;  $S(\cdot) \in L_2[0,1]$  – неизвестная 1-периодическая  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ -функция, которую требуется оценить;  $(\xi_j)_{1 \leq j \leq n}$  – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, таких, что  $E(\xi_j) = 0$ ,  $E(\xi_j^2) = 1$ ,  $E(\xi_j^4) = \xi^* < \infty$ ;  $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq n}$  – неизвестные коэффициенты волатильности, которые в общем случае зависят от  $x_j$  и функции  $S$ ;  $n$  – число наблюдений. Предполагается, что коэффициенты  $\sigma_j$  в (1) удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sigma_j^2 \leq \bar{\sigma}, \quad \min_{1 \leq j \leq n} \sigma_j^2 \geq \sigma_0, \tag{2}$$

где граница  $\bar{\sigma}$  является функцией от  $n$ , т.е.  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_n$  такая, что для любого  $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{\sigma}_n}{n^\delta} = 0,$$

$\sigma_0$  – некоторая положительная величина.

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект № 2.3208.2017/4.6) и при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00121 А).

Модели вида (1) с  $\sigma = \sigma(x_j)$  были введены как обобщение непараметрической модели ANCOVA [1]. Следует отметить, что гетероскедастичные регрессии с таким коэффициентом волатильности встречаются в эконометрических исследованиях, а именно, в анализе инвестиционного поведения фирм [2, 3]. Например, для задачи потребления используют некоторые параметрические аналоги модели (1) с коэффициентами волатильности

$$\sigma_j = c_0 + c_1 x_j + c_2 S^2(x_j^2),$$

где  $c_0, c_1, c_2$  – некоторые неотрицательные неизвестные постоянные. Отметим, что регрессионная модель (1) является важной в стохастических дифференциальных уравнениях для аппроксимации диффузионных процессов с непрерывным временем путем использования последовательных ядерных оценок, имеющих асимптотически минимальные отклонения (см., например, [4–6]).

Цель работы — построить адаптивную процедуру выбора модели для оценивания функции  $S$  в модели (1), которая имеет более высокую среднеквадратичскую точность по сравнению с оценками МНК для конечного объема наблюдений, и получить оракульное неравенство для среднеквадратического риска построенной процедуры выбора модели.

Напомним, что метод выбора моделей появился в пионерских работах Акайке [7] и Мэллоуза [8], которые предложили ввести пенализационное слагаемое в критерий максимального правдоподобия. Далее, Барон, Бирже и Массар [9], Массар [10] и Кнайп [11] развили этот метод для получения неасимптотических оракульных неравенств в непараметрических регрессионных моделях с гауссовскими шумами в дискретном времени. К сожалению, этот метод не может быть применен к регрессиям с негауссовскими шумами, поскольку для таких моделей оценки коэффициентов Фурье являются, вообще говоря, зависимыми случайными величинами и, как правило, с неизвестными корреляционными коэффициентами. Этот факт делает невозможным применение метода Барона–Бирже–Массара–Кнайпа для получения оракульных неравенств для таких моделей. По этой причине в данной работе для оценивания функции в модели (1) применяется метод, развитый в [12].

В отличие от упомянутых работ, в статье разрабатывается процедура выбора моделей для адаптивного оценивания функции, основанная на взвешенных улучшенных оценках наименьших квадратов со специально подобранными коэффициентами. Применение метода улучшенного оценивания, известного как феномен Стейна, для параметрических моделей регрессии в непрерывном времени стало возможно благодаря работам [13, 14], а для непараметрических моделей – работам [15, 16], в которых предложены соответствующие модификации известной процедуры Джеймса – Стейна для регрессионных моделей с шумами, содержащими импульсные компоненты. В данной работе этот метод применен к процедуре выбора моделей с заменой классических оценок наименьших квадратов на их улучшенные версии. Это позволяет улучшить среднеквадратичскую точность оценивания. Процедура выбора моделей дает адаптивное правило выбора лучшей оценки (в смысле точного неасимптотического оракульного неравенства) в определен-

ном семействе проекционных оценок. Точное оракульное неравенство означает оценивание сверху неасимптотического риска минимальным риском по выбранному семейству оценок, умноженным на коэффициент, стремящийся к единице с ростом отношения сигнал/шум. Такие неравенства позволяют доказывать эффективность процедур без знания регулярности оцениваемой функции, т.е. в адаптивной постановке [17].

Статья состоит из следующих разделов. В разделе 2 предлагаются улучшенные взвешенные оценки наименьших квадратов. Доказывается, что такие оценки превосходят классические оценки МНК по среднеквадратической точности. В разделе 3 строится адаптивная процедура выбора моделей для оценивания функции, основанная на взвешенных улучшенных оценках наименьших квадратов. Получено точное неасимптотическое оракульное неравенство для риска процедуры. Раздел 4 содержит результаты численного сравнения эмпирических рисков данной адаптивной улучшенной процедуры с процедурой, предложенной в [12]. Доказательства основных результатов приводятся в приложении.

## 2. Улучшенные взвешенные оценки МНК

Для оценивания неизвестной функции  $S$  в модели (1) воспользуемся ее разложением в ряд Фурье по тригонометрическому базису  $\phi_j(x)_{j \geq 1}$  в пространстве  $L_2[0,1]$ :

$$S(x) = \sum_{j \geq 1} \theta_j \phi_j(x), \quad (3)$$

где  $\phi_1 = 1$ ,  $\phi_j(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \cos(2\pi[j/2]x), & \text{для четных } j, \\ \sqrt{2} \sin(2\pi[j/2]x), & \text{для нечетных } j, \end{cases}$

$[a]$  – целая часть числа  $a$  и коэффициенты Фурье

$$\theta_j = (S, \phi_j)_n = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n S(x_l) \phi_j(x_l)$$

– эмпирическое скалярное произведение функций  $S$  и  $\phi_j$  на сетке  $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ . Поскольку они зависят от неизвестной функции  $S$ , то также являются неизвестными и подлежат оцениванию. Если  $n$  является нечетным, то  $\phi_j(x)_{j \geq 1}$  – ортонормированный базис относительно введенного эмпирического скалярного произведения, т.е. для всех  $1 \leq j \leq n$

$$(\phi_i, \phi_j)_n = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \phi_i(x_l) \phi_j(x_l) = \delta_{ij},$$

где  $\delta_{ij}$  – символы Кронекера. Используя этот факт, получаем, что оценки МНК коэффициентов Фурье определяются формулой

$$\hat{\theta}_{j,n} = (Y, \phi_j)_n.$$

Здесь  $Y = (y_1, \dots, y_n)'$  и штрих обозначает транспонирование. Из (1) следует, что оценки МНК удовлетворяют следующему уравнению:

$$\hat{\theta}_{j,n} = \theta_j + \frac{1}{n} \xi_{j,n}, \quad \xi_{j,n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^n \sigma_l \xi_l \phi_j(x_l). \quad (4)$$

Теперь, как и в [12], определим класс взвешенных оценок МНК функции  $S$  следующим образом:

$$\hat{S}_\lambda(x) = \sum_{j=1}^n \lambda(j) \hat{\theta}_{j,n} \phi_j(x), \quad (5)$$

где  $x \in [0, 1]$ ; вектор весовых коэффициентов  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  принадлежит некоторому конечному множеству  $\Lambda \subset [0, 1]^n$  для  $n \geq 3$ . Пусть  $\nu = |\Lambda|$  – мощность множества  $\Lambda$ ,

$$\nu_n = \max_{\lambda \in \Lambda} \sum_{j=1}^n \lambda(j), \quad \nu_{1,n} = \max_{\lambda \in \Lambda} \sup_{1 \leq l \leq n} \left| \sum_{j=1}^n \lambda(j) (\phi_j^2(x_l) - 1) \right|.$$

Предположим, что существует целое число  $d = d(n) \leq n$ , такое, что  $\lambda(j) = 1$  для  $j = \overline{1, d}$ . Учитывая такой вид весовых коэффициентов, для оценивания неизвестной функции  $S$  в (1) вместо взвешенных оценок МНК предлагается использовать оценки вида

$$S_\lambda^*(x) = \sum_{j=1}^n \lambda(j) \theta_{j,n}^* \phi_j(x), \quad \theta_{j,n}^* = (1 - g(j)) \hat{\theta}_{j,n}, \quad (6)$$

где 
$$g(j) = \frac{c_n}{\|\tilde{\theta}_n\|_d} I_{\{1 \leq j \leq d\}}, \quad \|\tilde{\theta}_n\| = \sum_{j=1}^d \hat{\theta}_{j,n}^2,$$

$I_A$  – индикатор множества  $A$  и

$$c_n = \frac{(d-1)\sigma_0^2}{n(r_n + \sqrt{d\sigma^2/n})}.$$

Здесь  $r_n$  – положительный параметр, такой, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$  и для любого  $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{n^\delta} = 0.$$

Далее обозначим разность эмпирических среднеквадратических рисков предложенной оценки (6) и оценки МНК (5) как

$$\Delta_n(S) = E_S \|S_\lambda^* - S\|_n^2 - E_S \|\hat{S}_\lambda - S\|_n^2, \quad (7)$$

где  $E_S$  – математическое ожидание относительно распределения наблюдений  $Y = (y_1, \dots, y_n)'$  при фиксированной функции  $S$  и

$$\|S\|_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n S^2(x_l).$$

Предложенная оценка (6) обладает следующим свойством.

**Теорема 1.** Пусть в модели (1) коэффициенты волатильности  $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq n}$  удовлетворяют неравенствам (2). Тогда для всех  $\lambda \in \Lambda$  оценка (6) превосходит по среднеквадратической точности взвешенную оценку МНК (5). При этом разность среднеквадратических рисков (7) удовлетворяет следующему неравенству:

$$\Delta_n(S) \leq -c_n^2. \quad (8)$$

**Замечание 1.** Теорема 1 утверждает, что оценка (6) обладает более высокой среднеквадратической точностью по сравнению с оценкой МНК (5), причем минимальный выигрыш в точности равен  $c_n^2$ .

### 3. Выбор модели. Оракульное неравенство

В данном разделе предлагается правило выбора из введенного класса оценок (6) наилучшей оценки в смысле точного оракульного неравенства. Такой метод позволяет решить задачу в адаптивной постановке, т.е. в случае, когда неизвестна степень гладкости функции  $S$  в (1). Для построения адаптивной процедуры выбора модели определим множество  $\Lambda$ . С этой целью зададим сетку

$$A = \{1, \dots, k\} \times \{t_1, \dots, t_m\},$$

где  $t_i = i\varepsilon$  и  $m = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil$ . Считаем, что параметры  $k \geq 1$  и  $0 < \varepsilon < 1$  – функции от  $n$ ,

т.е.  $k = k_n$  и  $\varepsilon = \varepsilon_n$ , такие, что

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} k_n = +\infty, & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{\ln n} = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0, & \lim_{n \rightarrow \infty} n^\delta \varepsilon_n = +\infty, \end{cases} \quad (9)$$

для любого  $\delta > 0$ . Например, можно взять для  $n \geq 3$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\ln n}, \quad k_n = \bar{k} + \sqrt{\ln n},$$

где  $\bar{k}$  – некоторая неотрицательная постоянная. Для любого  $\alpha = (\beta, t) \in A$  положим, что весовой вектор  $\lambda_\alpha = (\lambda_\alpha(1), \dots, \lambda_\alpha(n))'$  с компонентами

$$\lambda_\alpha(j) = 1_{\{1 \leq j \leq j_\alpha\}} + (1 - (j/\omega_\alpha)^\beta) 1_{\{1 \leq j \leq \omega_\alpha\}}. \quad (10)$$

Здесь  $d = d(n) = \lceil \omega_\alpha / \ln n \rceil$ ,

$$\omega_\alpha = \varpi + (A_\beta t n)^{1/(2\beta+1)}, \quad A_\beta = (\beta+1)(2\beta+1)/(\pi^{2\beta}\beta)$$

и  $\varpi$  – некоторая неотрицательная постоянная. Отметим, что в этом случае  $v = tk$ .

**Замечание 2.** Весовые коэффициенты вида (10) были введены Пинскером [18] и Нюссбаумом [19] для доказательства асимптотической эффективности оценок гауссовских сигналов. Для негауссовской гетероскедастичной модели весовые коэффициенты (10) использовались в работах [12, 17].

Для того чтобы выбрать вектор весовых коэффициентов  $\lambda \in \Lambda$  в (6), необходимо минимизировать эмпирическую квадратическую ошибку вида

$$Err_n(\lambda) = \|S_\lambda^* - S\|_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (S_\lambda^*(x_l) - S(x_l))^2,$$

которую в силу равенств (6) и (3) можно переписать, как

$$Err_n(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left( \sum_{l=1}^n (\lambda(j)\theta_{j,n}^* - \theta_j)\phi_j(x_l) \right)^2. \quad (11)$$

Затем, учитывая, что  $n^{-1} \sum_{l=1}^n \phi_j^2(x_l) = 1$ , перепишем (11) следующим образом:

$$Err_n(\lambda) = \sum_{j=1}^n \lambda^2(j)\theta_{j,n}^{*2} - 2 \sum_{j=1}^n \lambda(j)\theta_{j,n}^*\theta_j + \|S\|^2,$$

Так как в этом равенстве коэффициенты  $\theta_j$  неизвестны, необходимо величины  $\theta_{j,n}^*\theta_j$  заменить некоторыми оценками. В качестве таких оценок предлагаются

$$\bar{\theta}_{j,n} = \theta_{j,n}^* \hat{\theta}_{j,n} - \frac{1}{n} \hat{\varsigma}_n,$$

где  $\hat{\varsigma}_n$  – некоторая оценка интегрированной дисперсии шума

$$\varsigma_n = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \sigma_l^2.$$

При осуществлении этой замены в эмпирической ошибке нужно заплатить «штраф». Определим платежную функцию как

$$J_n(\lambda) = \sum_{j=1}^n \lambda^2(j)\theta_{j,n}^{*2} - 2 \sum_{j=1}^n \lambda(j)\bar{\theta}_{j,n} + \rho \hat{P}_n(\lambda), \quad (12)$$

где  $0 < \rho < 1$  – некоторый положительный коэффициент, который будет определен ниже. Пенализационное слагаемое

$$\hat{P}_n(\lambda) = \frac{|\lambda|^2 \hat{\varsigma}_n}{n}, \quad |\lambda|^2 = \sum_{j=1}^n \lambda^2(j). \quad (13)$$

Отметим, что если последовательность  $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq n}$  известна, то

$$P_n(\lambda) = \frac{|\lambda|^2 \varsigma_n}{n}.$$

Теперь, полагая

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda \in \Lambda} J_n(\lambda),$$

определим процедуру выбора модели равенством

$$S^* = S_{\lambda^*}. \quad (14)$$

Заметим, что  $\lambda^*$  существует, поскольку множество  $\Lambda$  конечно. В случае, когда  $\lambda^*$  не единственное, берем любое из них. Далее получим неасимптотическую верхнюю границу для среднеквадратического риска оценки (14).

**Теорема 2.** Пусть наблюдения описываются уравнением (1). Тогда для любого  $0 < \rho < 1/3$  среднеквадратический риск предложенной процедуры выбора модели (14) для функции  $S$  удовлетворяет следующему оракульному неравенству:

$$R(S^*, S) \leq \frac{1-\rho}{1-2\rho} \min_{\lambda \in \Lambda} R(S_\lambda^*, S) + \frac{1}{n\rho} \Psi_n, \quad (15)$$

где

$$R(S_\lambda^*, S) = \mathbf{E}_S \|S_\lambda^* - S\|_n^2$$

$$\text{и} \quad \Psi_n = 3 \left[ (8c_n + 64\bar{\sigma} + v\bar{\sigma}) \left( 1 + 2n^{-1} + \bar{\sigma}(v_{1,n} + v_n) \sqrt{\xi^*/n} \right) + v_n \mathbf{E}_S |\zeta_n - \hat{\zeta}_n| \right].$$

#### 4. Численное моделирование

В этом разделе проиллюстрируем теоретически установленный результат в теореме 1 с помощью численного моделирования в среде Matlab. В качестве функции  $S$  в модели (1) выберем

$$S(x) = x \sin(2\pi x) + x^2(1-x) \cos(4\pi x), \quad \sigma_j^2 = 2 + S(x_j),$$

$(\xi_j)_{1 \leq j \leq n}$  – последовательность н.о.р.  $N(0,1)$  с.в. Для вычисления весовых коэффициентов  $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$  положим в (10)

$$k^* = 100 + \sqrt{\ln n}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\ln n}, \quad m = \lceil \ln^2 n \rceil, \quad \rho = \frac{1}{3 + \ln^2 n}, \quad \omega_\alpha = 100 + (A_\beta t n)^{\frac{1}{2\beta+1}}.$$

В таблице приведены результаты моделирования эмпирических среднеквадратических рисков по  $N = 1000$  реализациям процедур выбора модели (14), построенным на основе предложенных улучшенных оценок (6) и на основе оценок МНК (5):

$$\tilde{R}(S^*, S) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \|S_m^* - S\|_n^2,$$

где  $S_m^*$  – оценка, полученная по  $m$ -й реализации выборки.

#### Эмпирические квадратические риски

| $n$             | 101     | 401     | 1001    |
|-----------------|---------|---------|---------|
| $R(S^*, S)$     | 0.2779  | 0.0596  | 0.0196  |
| $R(\hat{S}, S)$ | 0.9276  | 0.1297  | 0.1011  |
| $\Delta_n(S)$   | -0.6497 | -0.0701 | -0.0815 |

Из таблицы видно, что эмпирический риск предложенной процедуры (6) меньше, чем для процедуры выбора модели  $\hat{S}$ , построенной на основе оценок МНК (5).

Далее на рис. 1 представлены графики истинной функции  $S$  (сплошная линия) и ее оценок  $S^*$  (штрихованная линия) и  $\hat{S}$  (пунктирная линия) при  $n = 401$ .

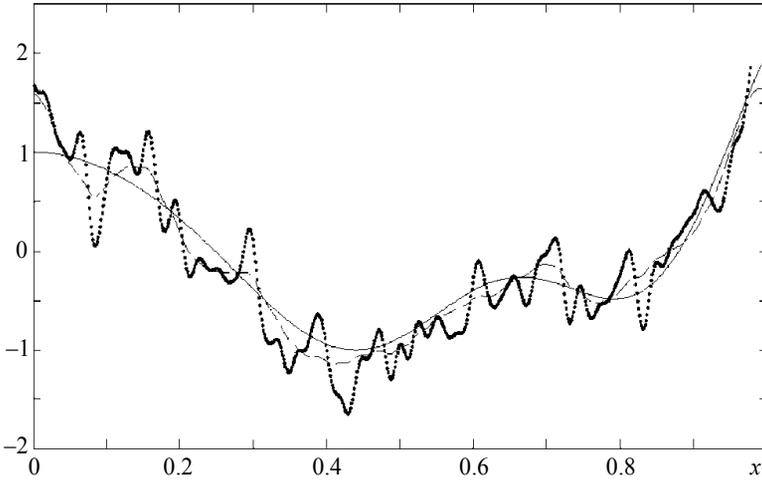


Рис. 1. Графики функции регрессии и ее оценок при  $n = 401$   
 Fig. 1. Plots of the regression function and its estimates at  $n = 401$

5. Приложение

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим среднеквадратический риск оценки (6)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \|S_\lambda^* - S\|_n^2 &= \frac{1}{n} \mathbf{E} \sum_{l=1}^n (S_\lambda^*(x_l) - S(x_l))^2 = \\ &= \frac{1}{n} \mathbf{E} \sum_{l=1}^n \left( \sum_{j=1}^d \theta_{j,n}^* \phi_j(x_l) + \sum_{j=d+1}^n \lambda(j) \hat{\theta}_{j,n} \phi_j(x_l) - S(x_l) \right)^2, \end{aligned}$$

где  $g(j) = c_n / \|\tilde{\theta}_n\|$ . Так как

$$\hat{S}(x_l) - S(x_l) = \sum_{k=1}^n (\lambda_k \hat{\theta}_{k,n} - \theta_k) \phi_k(x_l)$$

и  $(\phi_k)_{k \geq 1}$  – ортонормированная система функций, то

$$2\mathbf{E} \left( \hat{S}_\lambda - S, \sum_{j=1}^d g(j) \hat{\theta}_{j,n} \phi_j \right)_n = \frac{2}{n} \mathbf{E} \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^n (\lambda_k \hat{\theta}_{k,n} - \theta_k) \phi_k(x_l) \right) = 2c_n \mathbf{E} \sum_{j=1}^d (\hat{\theta}_{j,n} - \theta_j) \frac{\hat{\theta}_{j,n}}{\|\tilde{\theta}_n\|}$$

и 
$$\mathbf{E} \left\| \sum_{j=1}^d g(j) \hat{\theta}_{j,n} \phi_j \right\|_n^2 = c_n^2.$$

Отсюда 
$$\Delta_n(n) = c_n^2 - 2c_n \mathbf{E} \sum_{j=1}^d (\hat{\theta}_{j,n} - \theta_j) \frac{\hat{\theta}_{j,n}}{\|\tilde{\theta}_n\|}.$$

Далее, вычисляя здесь математическое ожидание, как показано в доказательстве теоремы 2.1 в [13], получаем неравенство

$$\Delta_n(n) \leq c_n^2 - 2c_n \frac{(d-1)\sigma_0^2}{n(r_n + \sqrt{\sigma^2/n})}.$$

Минимизируя правую часть относительно  $c_n$ , имеем

$$\Delta_n(n) \leq -c_n^2.$$

Теорема 1 доказана.

**Доказательство теоремы 2.** Представим эмпирическую квадратическую ошибку  $Err_n(\lambda)$  следующим образом:

$$Err_n(\lambda) = J_n(\lambda) + 2 \sum_{j=1}^n \lambda(j) (\bar{\theta}_{j,n} - \theta_{j,n}^* \theta_j) + \|S\|_n^2 - \rho \hat{P}_n(\lambda), \quad (16)$$

где  $J_n(\lambda)$  определена в (12). Используя (4) и (6), перепишем (16) в виде

$$Err_n(\lambda) = J_n(\lambda) + 2 \sum_{j=1}^n \lambda(j) \hat{\theta}_{j,n} \xi_{j,n} - \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \lambda(j) g(j) \hat{\theta}_{j,n} \xi_{j,n} + \|S\|_n^2 - \rho \hat{P}_n(\lambda) + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \lambda(j) \hat{\zeta}_n.$$

Положим

$$\varsigma_{j,n} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \sigma_l^2 \phi_j^2(x_l), \quad \mu_{j,n} = \xi_{j,n}^2 - \varsigma_{j,n} = \mu'_{j,n} + \mu''_{j,n},$$

где

$$\mu'_{j,n} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \sigma_l^2 \phi_j^2(x_l) (\xi_l^2 - 1), \quad \mu''_{j,n} = 2 \sum_{l=2}^n \tau_{j,l} \xi_l, \quad \tau_{j,l} = \frac{1}{n} \sigma_l \phi_j(x_l) \sum_{k=1}^{l-1} \sigma_k \phi_j(x_k) \xi_k.$$

Определим функции

$$M(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \lambda(j) \theta_j \xi_{j,n}, \quad \Delta(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \lambda(j) (\varsigma_{j,n} - \hat{\zeta}_n), \quad N'(\lambda) = \sum_{j=1}^n \lambda(j) \mu'_{j,n},$$

$$N''(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{n\varsigma_n}} \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}(j) \mu''_{j,n} 1_{\{\varsigma_n > 0\}}, \quad B_{1,n}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \lambda(j) g(j) \hat{\theta}_{j,n} \xi_{j,n},$$

где  $\bar{\lambda}(j) = \lambda_j / |\lambda|$ . Тогда

$$Err_n(\lambda) = J_n(\lambda) + 2M(\lambda) + 2\Delta(\lambda) + 2N'(\lambda) + 2N''(\lambda) - 2B_{1,n}(\lambda) + \|S\|_n^2 - \rho \hat{P}_n(\lambda). \quad (17)$$

Теперь для некоторого фиксированного  $\lambda_0 \in \Lambda$  и  $\lambda^* \in \Lambda$  рассмотрим разность

$$Err_n(\lambda^*) - Err_n(\lambda_0) \leq 2M(x) - B_{1,n}(\lambda^*) + B_{1,n}(\lambda_0) + 2\Delta(x) + \frac{2}{n} N'(x) + 4\sqrt{P_n(\lambda^*)} N''(\lambda^*) - 4\sqrt{P_n(\lambda_0)} N''(\lambda_0) - \rho \hat{P}_n(\lambda^*) + \rho \hat{P}_n(\lambda_0),$$

где  $x = \lambda^* - \lambda_0 \in \Lambda_1$ ,  $\Lambda_1 = \Lambda \setminus \{\lambda_0\}$ . Далее оценим каждое слагаемое в правой части этого неравенства. Рассмотрим

$$\Delta(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \lambda(j) (\varsigma_{j,n} - \varsigma_n + \varsigma_n - \hat{\zeta}_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \lambda(j) (\varsigma_{j,n} - \varsigma_n) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \lambda(j) (\varsigma_n - \hat{\zeta}_n).$$

Тогда 
$$|\Delta(\lambda)| \leq \frac{\bar{\sigma}v_{1,n}}{n} + \frac{v_n |\varsigma_n - \hat{\varsigma}_n|}{n} \tag{18}$$

и 
$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{E} |N'(x)| \leq \bar{\sigma}(v_{1,n} + v_n) \frac{\sqrt{\xi^*}}{\sqrt{n}}. \tag{19}$$

Используя неравенство

$$2|ab| \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}, \tag{20}$$

имеем для любого  $\varepsilon > 0$

$$4\sqrt{P_n(\lambda)}N''(\lambda) \leq \varepsilon P_n(\lambda) + \frac{4(N''(\lambda))^2}{\varepsilon}. \tag{21}$$

Заметим, что

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}^n} \mathbf{E} (N''(\lambda))^2 \leq \frac{2\bar{\sigma}}{n}. \tag{22}$$

Из неравенства Коши–Буняковского и неравенства (20) следует, что

$$\begin{aligned} 2B_{1,n}(\lambda) &= 2 \frac{|\lambda|}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}(j) g(j) \hat{\theta}_{j,n} \xi_{j,n} \leq \\ &\leq P_n(\lambda) + \frac{c_n}{\varepsilon \sqrt{\varsigma_n}} \left( \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}^2 \xi_{j,n}^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon P_n(\lambda) + \frac{c_n}{\varepsilon \varsigma_n} \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}^2 \xi_{j,n}^2. \end{aligned}$$

Учитывая равенство

$$\sum_{j=1}^n \bar{\lambda}^2(j) (\xi_{j,n} - \varsigma_{j,n} - \varsigma_n) = \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}^2(j) (\mu_{j,n} + \varsigma_n) = N'(\bar{\lambda}^2) + N''(\bar{\lambda}^2),$$

получаем 
$$2B_{1,n}(\lambda) \leq \varepsilon P_n(\lambda) + \frac{c_n}{\varepsilon \varsigma_n} N'(\bar{\lambda}^2) + N''(\bar{\lambda}^2)$$

и 
$$2\mathbf{E} B_{1,n}(\lambda) \leq \varepsilon \hat{P}_n(\lambda) + \frac{c_n}{\varepsilon \bar{\sigma}} \left( \frac{2\bar{\sigma}}{n} + \bar{\sigma}(v_{1,n} + v_n) \frac{\sqrt{\xi^*}}{\sqrt{n}} \right).$$

Заметим, что

$$\hat{P}_n(\lambda) = \frac{|\lambda|(\hat{\varsigma}_n - \varsigma_n + \varsigma_n)}{n} \leq P_n(\lambda) + \frac{|\lambda| |\hat{\varsigma}_n - \varsigma_n|}{n} \leq P_n(\lambda) + \frac{v_n |\varsigma_n - \hat{\varsigma}_n|}{n}.$$

При  $\varepsilon = \rho/4$  имеем

$$\begin{aligned} Err_n(\lambda^*) &\leq Err_n(\lambda) + \frac{(2+2\rho)v_n |\varsigma_n - \hat{\varsigma}_n|}{n} + 2M(x) + \\ &+ \frac{4c_n}{\rho \varsigma_n} (N'(\bar{\lambda}_0^2) + N''(\bar{\lambda}_0^2)) + \frac{4c_n}{\rho \varsigma_n} (N'(\bar{\lambda}^{*2}) + N''(\bar{\lambda}^{*2})) + 2N'(x) + \\ &+ \frac{16(N''(\lambda^*))^2}{\rho} + \frac{16(N''(\lambda_0))^2}{\rho} - \frac{\rho}{2} P_n(\lambda^*) + \frac{3}{2} \rho P_n(\lambda_0). \end{aligned}$$

Теперь оценим третье слагаемое в правой части. Заметим, что для любого  $\varepsilon > 0$

$$2|M(x)| \leq \varepsilon \|S_x\|_n^2 + \frac{Z^*}{n\varepsilon}, \quad Z^* = \sup_{x \in \Lambda_1} \frac{nM^2(x)}{\|S_x\|_n^2}, \quad (23)$$

где  $S_x = \sum_{j=1}^n x(j)\theta_j\phi_j$ . Поскольку

$$\mathbf{E}M^2(x) \leq \frac{\bar{\sigma}}{n} \sum_{j=1}^n x^2(j)\theta_j^2 = \frac{\bar{\sigma}}{n} \|S_x\|_n^2, \quad (24)$$

то

$$\mathbf{E}Z^* \leq \sum_{x \in \Lambda_1} \frac{nM^2(x)}{\|S_x\|_n^2} \leq v\bar{\sigma}.$$

Рассмотрим далее

$$\|S_{\lambda^*} - S_{\lambda_0}^*\|_n^2 = \sum_{j=1}^n (x(j) + \beta(j))^2 \hat{\theta}_{j,n}^2 \geq \|\hat{S}_x\|_n^2 + 2 \sum_{j=1}^n x(j)\beta(j)\hat{\theta}_{j,n}, \quad (25)$$

где  $\beta(j) = \lambda_0(j)g(j)(\lambda) - \lambda(j)g(j)(\lambda)$ . Оценим разность

$$\begin{aligned} \|S_x\|_n^2 - \|S_{\lambda^*} - S_{\lambda_0}^*\|_n^2 &\leq \|S_x\|_n^2 - \|\hat{S}_x\|_n^2 - 2 \sum_{j=1}^n x(j)\beta(j)\hat{\theta}_{j,n} \\ &\leq -2M_1(x) - 2 \sum_{j=1}^n x(j)\beta(j)\hat{\theta}_{j,n}\theta_j - \frac{2}{\sqrt{n}}\Phi(x). \end{aligned}$$

Здесь

$$M_1(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n x^2(j)\theta_j\xi_{j,n}, \quad \Phi(x) = \sum_{j=1}^n x(j)\beta(j)\hat{\theta}_{j,n}\xi_{j,n}.$$

Принимая во внимание, что  $|x(j)| \leq 1$  для любого  $x \in \Lambda_1$ , получаем

$$2|M_1(x)| \leq \varepsilon \|S_x\|_n^2 + \frac{Z_1^*}{n\varepsilon}, \quad Z_1^* = \sup_{x \in \Lambda_1} \frac{nM_1^2(x)}{\|S_x\|_n^2}.$$

Заметим, что

$$\mathbf{E}Z_1^* \leq v\bar{\sigma}$$

и для любого  $0 < \varepsilon < 1$

$$\|S_x\|_n^2 \leq \varepsilon \|S_x\|_n^2 + \frac{Z_1^*}{n\varepsilon} + \|S_{\lambda^*} - S_{\lambda_0}^*\|_n^2 - 2 \sum_{j=1}^n x(j)\beta(j)\hat{\theta}_{j,n}\theta_j - \frac{2}{\sqrt{n}}\Phi(x).$$

Так как

$$\sum_{j=1}^n \beta^2(j)\hat{\theta}_{j,n}^2 \leq \frac{4c_n}{\varepsilon n} \quad (26)$$

и принимая во внимание, что  $|x(j)| \leq 1$  и выполняется неравенство (20), получаем для любого  $\varepsilon > 0$

$$2 \left| \sum_{j=1}^n x(j)\beta(j)\hat{\theta}_{j,n}\theta_j \right| \leq \varepsilon \|S_x\|_n^2 + \frac{4c_n}{\varepsilon n}.$$

Используя неравенства Коши–Буняковского и (26), имеем

$$\frac{2}{\sqrt{n}} |\Phi(\lambda)| \leq \varepsilon P_n(\lambda) + \frac{c_n}{\varepsilon \varsigma_n} \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}^2(j) \xi_{j,n}^2 \leq \varepsilon P_n(\lambda) + \frac{c_n (N'(\bar{\lambda}^2) + N''(\bar{\lambda}^2))}{n \bar{\sigma} \varepsilon}.$$

Тогда

$$\frac{2}{\sqrt{n}} |\Phi(x)| \leq \varepsilon P_n(\lambda^*) + \varepsilon P_n(\lambda_0) + \frac{c_n}{n \bar{\sigma} \varepsilon} (N'(\bar{\lambda}_0^2) + N''(\bar{\lambda}_0^2) + N'(\bar{\lambda}^{*2}) + N''(\bar{\lambda}^{*2})).$$

Применяя неравенство (23) для  $M_1(x)$  в (25), получаем верхнюю границу для  $\|S_x\|_n^2$ , т.е.

$$\begin{aligned} \|S_x\|_n^2 &\leq \frac{1}{1-2\varepsilon} \left( \|S_\lambda^* - S_{\lambda_0}^*\|_n^2 + \frac{Z_1^*}{n\varepsilon} + \varepsilon P_n(\lambda^*) + \varepsilon P_n(\lambda_0) + \frac{4c_n}{\varepsilon n} \right) + \\ &+ \frac{c_n}{(1-2\varepsilon)n\bar{\sigma}\varepsilon} (N'(\bar{\lambda}_0^2) + N''(\bar{\lambda}_0^2) + N'(\bar{\lambda}^{*2}) + N''(\bar{\lambda}^{*2})). \end{aligned}$$

Учитывая это неравенство и  $\|S_\lambda^* - S_{\lambda_0}^*\|_n^2 \leq 2(Err_n(\lambda) - Err_n(\lambda_0))$  в (23), находим

$$\begin{aligned} 2|M(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{1-2\varepsilon} \left( 2((Err_n(\lambda) + Err_n(\lambda_0)) + \frac{Z_1^*}{n\varepsilon} + \frac{4c_n}{\varepsilon n} + \varepsilon P_n(\lambda^*) + \varepsilon P_n(\lambda_0) + \right. \\ &\left. + \frac{c_n}{n\bar{\sigma}\varepsilon} (N''(\bar{\lambda}_0^2) + N'(\bar{\lambda}^{*2}) + N'(\bar{\lambda}_0^2) + N''(\bar{\lambda}^{*2})) \right) + \frac{Z^*}{n\varepsilon}. \end{aligned}$$

Из неравенств (20) – (25) следует, что

$$\begin{aligned} Err_n(\lambda^*) &\leq Err_n(\lambda_0) + \frac{(2+2\rho)\upsilon_n |\varsigma_n - \hat{\varsigma}_n|}{n} + \frac{4c_n}{\rho \varsigma_n} (N'(\bar{\lambda}^{*2}) + N''(\bar{\lambda}^{*2})) + \\ &+ \frac{4c_n}{\rho \varsigma_n} \left( N'(\bar{\lambda}_0^2) + N''(\bar{\lambda}_0^2) - \frac{\rho}{2} P_n(\lambda^*) + \frac{3}{2} \rho P_n(\lambda_0) \right) + 2N'(x) + \frac{16(N''(\lambda^*))^2}{\rho} + \\ &+ \frac{16(N''(\lambda_0))^2}{\rho} + \frac{\varepsilon}{1-2\varepsilon} (2(Err_n(\lambda) + Err_n(\lambda_0)) + \frac{Z_1^*}{n\varepsilon} + \frac{4c_n}{\varepsilon n} + \\ &+ N''(\bar{\lambda}_0^2) + N'(\bar{\lambda}^{*2}) + N'(\bar{\lambda}_0^2) + N''(\bar{\lambda}^{*2}) + \varepsilon P_n(\lambda^*) + \varepsilon P_n(\lambda_0)) + \frac{Z^*}{n\varepsilon}. \end{aligned}$$

Используя Лемму 1 (приведенную ниже), делая необходимые преобразования при  $\varepsilon = \rho/2$ , получаем неравенство

$$R(S_{\lambda^*}^*, S) \leq \frac{1-\rho}{1-2\rho} \min_{\lambda \in \Lambda} R(S_\lambda^*, S) + \frac{1}{n\rho} \Psi_n.$$

Теорема 2 доказана.

**Лемма 1.** Для всех  $n \geq 3$ ,  $\lambda \in \Lambda$  и  $\varepsilon > 0$

$$P_n(\lambda) \leq \frac{\mathbf{E}Err_n(\lambda)}{1-\varepsilon} + \frac{c_n}{\varepsilon(1-\varepsilon)}. \quad (27)$$

*Доказательство.* По определению  $Err_n(\lambda)$  имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Err_n(\lambda) &= \sum_{j=1}^n (\lambda_j \theta_{j,n}^* - \theta_j)^2 = \sum_{j=1}^n (\lambda_j (\theta_{j,n}^* - \theta_j) + (\lambda_j - 1)\theta_j)^2 \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 (\theta_{j,n}^* - \theta_j)^2 + \sum_{j=1}^n (\lambda_j (\lambda_j - 1)\theta_j (\theta_{j,n}^* - \theta_j)). \end{aligned}$$

Взяв математическое ожидание и принимая во внимание, что второе слагаемое равно нулю, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Err_n(\lambda) &\geq \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \mathbf{E}(\theta_{j,n}^* - \theta_j)^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \mathbf{E}(\hat{\theta}_{j,n} - \theta_j - \beta_j(\lambda)\hat{\theta}_{j,n})^2 = \\ &= P_n(\lambda) - 2\mathbf{E} \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \beta_j(\lambda) \hat{\theta}_{j,n} (\hat{\theta}_{j,n} - \theta_j) + \mathbf{E} \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \beta_j^2(\lambda) \hat{\theta}_{j,n}^2 \geq (1 - \varepsilon)P_n(\lambda) - \frac{c_n}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$P_n(\lambda) \leq \frac{\mathbf{E}Err_n(\lambda)}{1 - \varepsilon} + \frac{c_n}{\varepsilon(1 - \varepsilon)}.$$

Лемма 1 доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Akritas M.G., VanKeilegom I.* ANCOVA methods for heteroscedastic nonparametric regression models // J. Amer. Statist. Assoc. 2001. No. 96. P. 220–232. DOI: <https://doi.org/10.1198/016214501750332802>
2. *Goldfeld S.M., Quandt R.E.* Nonlinear Methods in Econometrics. London: North–Holland, 1972.
3. *Cai T., Wang L.* Adaptive variance function estimation in heteroscedastic nonparametric regression // Annals of Statistics. 2008. V. 36. No. 5. P. 2025–2054.
4. *Galtchouk L., Pergamenschikov S.* Nonparametric sequential estimation of the drift in diffusion processes // Mathematical Methods of Statistics. 2004. V. 13. No. 1. P. 25–49.
5. *Galtchouk L., Pergamenschikov S.* Asymptotic efficient sequential kernel estimates of the drift coefficient in ergodic diffusion processes // Statistical Inference for Stochastic Process. 2006. V. 9. No. 1. P. 1–16.
6. *Galtchouk L., Pergamenschikov S.* Adaptive sequential estimation for ergodic diffusion processes in quadratic metric // Journal of Nonparametric Statistics. 2011. V. 23. No. 2. P. 255–285. DOI: <https://doi.org/10.1080/10485252.2010.544307>.
7. *Akaike H.* A new look at the statistical model identification // IEEE Trans. on Automatic Control. 1974. V. 19. No. 7. P. 716–723.
8. *Mallows C.* Some comments on Cp // Technometrics. 1973. V. 15. P. 661–675.
9. *Barron A., Birgé L., Massart P.* Risk bounds for model selection via penalization // Probab. Theory Relat. Fields. 1999. V. 113. P. 301–415
10. *Massart P.* A non-asymptotic theory for model selection // European Congress of Mathematics. Zurich: Eur. Math. Soc. 2005.
11. *Kneip A.* Ordered linear smoothers // Annals of Statistics. 1994. V. 22. P. 835–866.
12. *Galtchouk L., Pergamenschikov S.* Sharp non-asymptotic oracle inequalities for nonparametric heteroscedastic regression models // J. Nonparametric Statistics. 2009. V. 21. No. 1. P. 1–16. DOI: <https://doi.org/10.1080/10485250802504096>.
13. *Pchelintsev E.* Improved estimation in a non-Gaussian parametric regression // Statistical Inference for Stochastic Processes. 2013. V. 16. No. 1. P. 15–28. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11203-013-9075-0>.

14. Конев В.В., Пергаменищиков С.М., Пчелинцев Е.А. Оценивание регрессии с шумами импульсного типа по дискретным наблюдениям // Теория вероятностей и ее применения. 2013. Т. 58. № 3. С. 454–471. DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4520>.
15. Pchelintsev E., Pchelintsev V., Pergamenshchikov S. Non asymptotic sharp oracle inequality for the improved model selection procedures for the adaptive nonparametric signal estimation problem // Communications – Scientific Letters of the University of Zilina. 2018. V. 20. No. 1. P. 72–76.
16. Pchelintsev E., Pergamenshchikov S. Oracle inequalities for the stochastic differential equations // Statistical Inference for Stochastic Processes. 2018. V. 21. No. 2. P. 469–483. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11203-018-9180-1>.
17. Galtchouk L., Pergamenshchikov S. Adaptive asymptotically efficient estimation in heteroscedastic nonparametric regression // J. Korean Statistical Society. 2009. V. 38. No. 4. P. 305–322.
18. Pinsker M.S. Optimal filtration of square integrable signals in Gaussian white noise // Problems Transmiss. information. 1981. No. 17. P. 120–133.
19. Nussbaum M. Spline smoothing in regression models and asymptotic efficiency in L2 // Ann. Statist. 1985. No. 13. P. 984–997.

Статья поступила 20.10.2018 г.

Pchelintsev E.A., Perelevskiy S.S. (2019) ADAPTIVE ESTIMATION IN A HETEROSCEDASTIC NONPARAMETRIC REGRESSION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 57. pp. 39–53

DOI 10.17223/19988621/57/3

Keywords: heteroscedastic regression, improved nonparametric estimation, model selection procedure, oracle inequality.

The paper considers the problem of estimating the unknown function of heteroscedastic regression. An adaptive model selection procedure based on improved weighted estimates of least squares with specially selected weight coefficients is proposed. It is established that the procedure has a higher mean-square accuracy than the procedure based on classical weighted least-squares estimates. For the mean square risk of the proposed procedure, a non-asymptotic oracle inequality is proved that determines the exact upper bound for it in all possible estimates. The results of numerical simulation are given.

AMS Mathematical Subject Classification: 62G05, 62G08

**Financial support.** This work was done under the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the research Project No. 2.3208.2017/4.6 and by RFBR Grant No.16-01-00121.

*PCHELINTSEV Evgenii Anatol'evich* (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).  
E-mail: [evgen-pch@yandex.ru](mailto:evgen-pch@yandex.ru)

*PERELEVSKY Svyatoslav Sergeevich* (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).  
E-mail: [slavaperelevskiy@mail.ru](mailto:slavaperelevskiy@mail.ru)

#### REFERENCES

1. Akritas M.G., VanKeilegom I. (2001) ANCOVA methods for heteroscedastic nonparametric regression models. *J. Amer. Statist. Assoc.* 96. pp. 220–232. DOI: <https://doi.org/10.1198/016214501750332802>.
2. Goldfeld S.M., Quandt R.E. (1972) *Nonlinear Methods in Econometrics*. London: North-Holland.
3. Cai T., Wang L. (2008) Adaptive variance function estimation in heteroscedastic nonparametric regression. *Annals of Statistics*. 36(5). pp. 2025–2054.

4. Galtchouk L., Pergamenshchikov S. (2004) Nonparametric sequential estimation of the drift in diffusion processes. *Mathematical Methods of Statistics*. 13(1). pp. 25–49.
5. Galtchouk L., Pergamenshchikov S. (2006) Asymptotic efficient sequential kernel estimates of the drift coefficient in ergodic diffusion processes. *Statistical Inference for Stochastic Process*. 9(1). pp. 1–16.
6. Galtchouk L., Pergamenshchikov S. (2011) Adaptive sequential estimation for ergodic diffusion processes in quadratic metric. *Journal of Nonparametric Statistics*. 23(2). pp. 255–285. DOI: <https://doi.org/10.1080/10485252.2010.544307>
7. Akaike H. (1974) A new look at the statistical model identification. *IEEE Trans. on Automatic Control*. 19(7). pp. 716–723.
8. Mallows C. (1973) Some comments on Cp. *Technometrics*. 15. pp. 661–675.
9. Barron A., Birgé L., Massart P. (1999) Risk bounds for model selection via penalization. *Probab. Theory Relat. Fields*. 113. pp. 301–415
10. Massart P. (2005) A non asymptotic theory for model selection. *Proceedings of the 4th European Congress of Mathematicians* (Ed. Ari Laptev). European Mathematical Society. pp. 309–323.
11. Kneip A. (1994) Ordered linear smoothers. *Annals of Statistics*. 22. pp. 835–866.
12. Galtchouk L., Pergamenshchikov S. (2009) Sharp non-asymptotic oracle inequalities for nonparametric heteroscedastic regression models. *Journal of Nonparametric Statistics*. 21(1). pp. 1–16. DOI: <https://doi.org/10.1080/10485250802504096>.
13. Pchelintsev E. (2013) Improved estimation in a non-Gaussian parametric regression // *Statistical Inference for Stochastic Processes*. 16(1). pp. 15–28. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11203-013-9075-0>
14. Konev V.V., Pergamenshchikov S.M., Pchelintsev E.A. Estimation of a Regression with the Pulse Type Noise from Discrete Data. *Theory Probab. Appl.* 58(3). pp. 442–457. DOI: <https://doi.org/10.1137/S0040585X9798662X>.
15. Pchelintsev E., Pchelintsev V., Pergamenshchikov S. (2018) Non asymptotic sharp oracle inequality for the improved model selection procedures for the adaptive nonparametric signal estimation problem. *Communications - Scientific Letters of the University of Zilina*. 20(1). pp. 72–76.
16. Pchelintsev E., Pergamenshchikov S. (2018) Oracle inequalities for the stochastic differential equations. *Statistical Inference for Stochastic Processes*. 21(2). pp. 469–483. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11203-018-9180-1>
17. Galtchouk L., Pergamenshchikov S. (2009) Adaptive asymptotically efficient estimation in heteroscedastic nonparametric regression. *Journal of the Korean Statistical Society*. 38(4). pp. 305–322.
18. Pinsker M.S. (1981) Optimal filtration of square integrable signals in Gaussian white noise. *Problems Transimis. information*. 17. pp. 120–133.
19. Nussbaum M. (1985) Spline smoothing in regression models and asymptotic efficiency in L2. *Ann. Statist.* 13. pp. 984–997.

Received: October 20, 2018

## МЕХАНИКА

УДК 531.383  
DOI 10.17223/19988621/57/4

Е.А. Антонов, И.В. Меркурьев, В.В. Подалков

**ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЖЕСТКОСТИ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ  
НА ДИНАМИКУ ДВУХМАССОВОГО МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО  
ГИРОСКОПА  $L-L$ -ТИПА В РЕЖИМЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ<sup>1</sup>**

Проведено исследование динамики микромеханического гироскопа, далее ММГ, типа  $L-L$  с двумя активными массами (массами обладают чувствительный элемент и рамка) в режиме вынужденных колебаний. Получена математическая модель рассматриваемой конструкции ММГ, приведены дифференциальные уравнения движения в переменных Ван-дер-Поля. Было построено численное решение полученных уравнений движения и построены графики. На основе этих графиков и полученных аналитических зависимостей был проведен анализ влияния нелинейности упругих элементов ММГ, наличия произвольной угловой скорости основания и присутствия в системе второй массы (массы рамки) на характер поведения системы.

**Ключевые слова:** *двухмассовый микромеханический гироскоп, нелинейная жесткость упругих элементов, вынужденные колебания, произвольная угловая скорость основания.*

На сегодняшний день ни одну современную систему управления, навигации и ориентации нельзя представить без датчиков, созданных на основе технологии МЭМС (микроэлектромеханических систем). Микромеханические гироскопы имеют ряд неоспоримых преимуществ: в первую очередь – миниатюрность, порой габариты гироскопа могут быть десятки микрометров, а также незначительное энергопотребление и низкую себестоимость [1, 2].

Из-за малых размеров ММГ не всегда удается выстроить качественную защиту прибора от внешнего воздействия. Повышение надежности конструкции и точности, получаемой от прибора информации, – на сегодняшний день одно из приоритетных направлений научной деятельности многих крупных компаний (таких, как *Bosch* и *Analog Devices*), занимающихся системами навигации и ориентации [3].

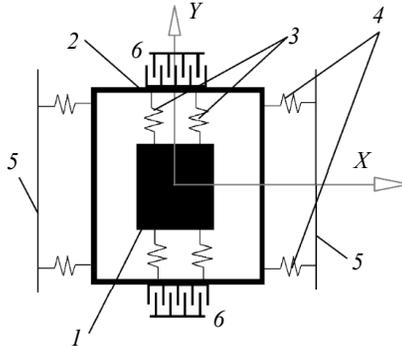
При проектировании конкурентоспособных гироскопических систем необходимо тщательно рассматривать возникающие в разрабатываемой модели динамические эффекты, обусловленные нелинейностью в системе, особенностью изготовления, сборки и т.д. С целью повышения точности технических характеристик для анализа была выбрана двухмассовая модель ММГ, так она более стабильна, чем модель с одной активной массой [4]. Нелинейность упругих элементов в системе представляет большой интерес, что доказывает наличие множества работ, посвященных изучению нелинейных факторов в гироскопах [4 – 8].

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 16-01-00772-а, № 16-08-01269-а).

В итоге для анализа динамики была выбрана двухмассовая концепция ММГ  $L-L$ -типа в режиме вынужденных колебаний с присутствием в системе нелинейности упругих элементов и произвольной скорости основания, на которое устанавливается рассматриваемый гироскоп.

### Постановка задачи

Рассмотрим выбранную нами модель (кинематическую) микромеханического гироскопа  $L-L$ -типа:



**Рис. 1.** Кинематическая модель ММГ  $L-L$ -типа  
**Fig. 1.** A kinematic model of an  $LL$ -type micromechanical gyroscope

Чувствительный элемент (далее ЧЭ) изображен на рис. 1. Конструкция его состоит из инерционной массы  $I$ , которая крепится к рамке 2 при помощи четырех одинаковых внутренних торсионов 3. Рамка 2 четырьмя одинаковыми внешними торсионами 4 прикреплена к основанию 5. Торсионы имеют особую форму, что обеспечивает их работу только на изгиб, исключая их растяжение. На рамке 2 и подложке основания 5 размещена гребенчатая структура 6, являющаяся, по сути, системой плоских конденсаторов. Данная модель ЧЭ обеспечивает степени свободы вдоль осей  $X$  и  $Y$ .

Цель данной работы в том, чтобы проанализировать динамический эффект, который возникает из-за наличия в системе нелинейной жесткости торсионов и произвольной угловой скорости основания в двухмассовой модели микромеханического гироскопа  $L-L$ -типа в режиме вынужденных колебаний. Необходимо создать математическую модель такой системы и построить аналитическое решение. Проанализировать полученные дифференциальные уравнения ММГ.

### Построение уравнений движения

Чувствительный элемент рассматривается как система «инерционная масса – рамка», которая закреплена на вращающемся с произвольной угловой скоростью  $\Omega$  основании. В таком случае кинетическая энергия будет записываться следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} m_p (\dot{x}^2 + (x \cdot \Omega)^2) + \frac{1}{2} m_{ин} ((\dot{x} - y \cdot \Omega)^2 + (\dot{y} + x \cdot \Omega)^2),$$

где введены следующие обозначения:  $x, y$  – координаты ЧЭ в системе координат,

связанной с основанием;  $m_{\text{ин}}$  – масса инерционной массы;  $m_p$  – масса рамки;  $\Omega$  – угловая скорость основания.

Потенциальная энергия системы включает в себя энергию, обусловленную нелинейной жесткостью упругих торсионов:

$$\Pi = c_x \frac{x^2}{2} + c_y \frac{y^2}{2} + d(x^4 + y^4),$$

здесь  $c_i$  – жесткость упругого элемента (торсиона), а  $d$  – параметр, характеризующий нелинейность упругих свойств торсионов.

Таким образом, лагранжиан системы записывается в виде

$$L = \frac{1}{2} m_p (\dot{x}^2 + (x \cdot \Omega)^2) + \frac{1}{2} m_{\text{ин}} ((\dot{x} - y \cdot \Omega)^2 + (\dot{y} + x \cdot \Omega)^2) - c_x \frac{x^2}{2} - c_y \frac{y^2}{2} - d(x^4 + y^4). \quad (1)$$

Пусть  $\Omega$  – постоянная произвольная угловая скорость основания, а  $F \cdot \sin \omega t$  – вынуждающая внешняя сила. В таком случае, воспользовавшись формализмом Лагранжа, получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}M + c_x x - 2m_{\text{ин}}\Omega\dot{y} - M\Omega^2 x + 4dx^3 &= F \sin \omega t; \\ \ddot{y}m_{\text{ин}} + c_y y + 2m_{\text{ин}}\Omega\dot{x} - m_{\text{ин}}\Omega^2 y + 4dy^3 &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $F$  – амплитуда вынуждающей силы,  $\omega$  – частота вынуждающей силы,  $M$  – сумма  $m_{\text{ин}}$  и  $m_p$ .

Пусть коэффициенты  $c_x$ , и  $c_y$ , удовлетворяют соотношению

$$c_x = \frac{m_p + m_{\text{ин}}}{m_{\text{ин}}} c_y. \quad (3)$$

Соотношение (3) вводится для улучшения резонансных свойств ММГ, т.е. характеристики торсионов подбираются таким образом, чтобы резонансные частоты по обобщенным координатам совпадали.

Запишем систему (2) в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + 2\gamma\dot{\alpha} - 2\frac{1}{1+\delta}v\dot{\beta} + (1-v^2)\alpha + 4\varepsilon\tilde{d}\frac{1}{1+\delta}\alpha^3 &= \varepsilon f_0 \sin \mu\tau; \\ \ddot{\beta} + 2\gamma\dot{\beta} + 2v\dot{\alpha} + (1-v^2)\beta + 4\varepsilon\tilde{d}\beta^3 &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\tau$  – безразмерное время,  $\alpha$  и  $\beta$  – малые безразмерные амплитуды колебаний. Нормирующим параметром в данном случае служила величина  $h$  – зазор между гребенками контактов, образующих систему плоских конденсаторов. В таком случае

$$x = \sqrt{\varepsilon}h\alpha; \quad y = \sqrt{\varepsilon}h\beta; \quad \tau = \omega_0 t; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c_y}{m_{\text{ин}}}}.$$

В нормализованной системе дифференциальных уравнений (4) точкой обозначается дифференцирование по времени;  $v$  – безразмерная угловая скорость основания;  $\delta$  – параметр, характеризующий наличие второй массы в гироскопе (отношение массы рамки к массе чувствительного элемента);  $\tilde{d}$  – безразмерный параметр, характеризующий нелинейные свойства упругих элементов (торсионов);  $f_0$  – безразмерная амплитуда вынуждающей силы;  $\mu$  – безразмерная частота внешнего воздействия.

Отметим, что амплитуда вынуждающей силы  $f_0$  мала по отношению к жесткости торсионов  $c$ , т. е. будем рассматривать мягкое возбуждение, при котором значение  $f_0$  порядка  $\varepsilon^{3/2}$ .

В работе принимается безразмерный коэффициент вязкого трения  $\gamma$  порядка малого параметра  $\varepsilon$ , то есть  $\gamma = \varepsilon\gamma_1$ . Так как масса рамки существенно меньше инерционной массы, поэтому  $\delta$  – порядка  $\varepsilon$ , т.е.  $\delta = \varepsilon\delta_1$ . Перепишем систему (4) с учетом принятых допущений:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - 2v\dot{\beta} + (1 - v^2)\alpha &= -\varepsilon(2\gamma\dot{\alpha} + 2v\delta\dot{\beta} + 4\tilde{d}\dot{\alpha}^3 - f_0 \sin \mu\tau); \\ \ddot{\beta} + 2v\dot{\alpha} + (1 - v^2)\beta &= -\varepsilon(2\gamma\dot{\beta} + 4\tilde{d}\dot{\beta}^3). \end{aligned} \quad (5)$$

Для дальнейшего упрощения записи уравнений в (5) индекс «1» у коэффициентов  $\delta$  и  $\gamma$  опущен, а в правой части уравнений введены замены:

$$\begin{aligned} F_1 &= 2\gamma\dot{\alpha} + 2v\delta\dot{\beta} + 4\tilde{d}\dot{\alpha}^3 - f_0 \sin \mu\tau; \\ F_2 &= 2\gamma\dot{\beta} + 4\tilde{d}\dot{\beta}^3. \end{aligned}$$

### Анализ динамики чувствительного элемента

Для решения системы (5) была применена методика Крылова – Боголюбова [5]. Решение в переменных амплитуда – фаза имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha &= A \sin(\mu\tau + \varphi_1) + B \sin(\mu\tau + \varphi_2); \\ \beta &= A \cos(\mu\tau + \varphi_1) - B \cos(\mu\tau + \varphi_2). \end{aligned}$$

Перейдем от переменных  $A, B, \varphi_1, \varphi_2$  к переменным Ван-дер-Поля  $p_1, p_2, q_1, q_2$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= p_1 \sin \mu\tau + q_1 \cos \mu\tau + p_2 \sin \mu\tau + q_2 \cos \mu\tau; \\ \beta &= p_1 \cos \mu\tau - q_1 \sin \mu\tau - p_2 \cos \mu\tau + q_2 \sin \mu\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

Из решения однородного уравнения системы (5) следует, что собственные частоты системы будут равны

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 1 + v; \\ \omega_2 &= 1 - v, \end{aligned} \quad (7)$$

а решение однородной системы уравнений будет иметь вид

$$\begin{aligned} \alpha &= p_1 \sin \omega_1 \tau + q_1 \cos \omega_1 \tau + p_2 \sin \omega_2 \tau + q_2 \cos \omega_2 \tau; \\ \beta &= p_1 \cos \omega_1 \tau - q_1 \sin \omega_1 \tau - p_2 \cos \omega_2 \tau + q_2 \sin \omega_2 \tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Для построения частного решения системы (5) запишем производные медленных амплитуд  $\alpha$  и  $\beta$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= p_1\mu \cos \mu\tau - q_1\mu \sin \mu\tau + p_2\mu \cos \mu\tau - q_2\mu \sin \mu\tau; \\ \dot{\beta} &= -p_1\mu \sin \mu\tau - q_1\mu \cos \mu\tau + p_2\mu \sin \mu\tau + q_2\mu \cos \mu\tau. \end{aligned} \quad (9)$$

Преобразуем (9) с учетом (8)

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= p_1\omega_1 \cos \mu\tau - q_1\omega_1 \sin \mu\tau + p_1(\mu - \omega_1) \cos \mu\tau - q_1(\mu - \omega_1) \sin \mu\tau + \\ &+ p_2\omega_2 \cos \mu\tau - q_2\omega_2 \sin \mu\tau + p_2(\mu - \omega_2) \cos \mu\tau - q_2(\mu - \omega_2) \sin \mu\tau; \\ \dot{\beta} &= -p_1\omega_1 \sin \mu\tau - q_1\omega_1 \cos \mu\tau - p_1(\mu - \omega_1) \sin \mu\tau - q_1(\mu - \omega_1) \cos \mu\tau + \\ &+ p_2\omega_2 \sin \mu\tau + q_2\omega_2 \cos \mu\tau + p_2(\mu - \omega_2) \sin \mu\tau + q_2(\mu - \omega_2) \cos \mu\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Условие совместности записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 \sin \mu\tau + \dot{q}_1 \cos \mu\tau + \dot{p}_2 \sin \mu\tau + \dot{q}_2 \cos \mu\tau &= 0; \\ \dot{p}_1 \cos \mu\tau - \dot{q}_1 \sin \mu\tau - \dot{p}_2 \cos \mu\tau + \dot{q}_2 \sin \mu\tau &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Продифференцировав (9), получим вторые производные для амплитуд  $\alpha$  и  $\beta$ . Подставив найденные производные в исходную систему уравнений (5), получим

$$\begin{aligned} \dot{p}_1\mu \cos \mu\tau - \dot{q}_1\mu \sin \mu\tau + \dot{p}_2\mu \cos \mu\tau - \dot{q}_2\mu \sin \mu\tau &= -\varepsilon G_1 - H_1; \\ -\dot{p}_1\mu \sin \mu\tau - \dot{q}_1\mu \cos \mu\tau + \dot{p}_2\mu \sin \mu\tau + \dot{q}_2\mu \cos \mu\tau &= -\varepsilon G_2 - H_2, \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} G_1 &= 2\gamma\ddot{\alpha} + 2\nu\delta\dot{\beta} + 4\tilde{d}\ddot{\alpha}^3 - f_0 \sin \mu\tau; \quad G_2 = 2\gamma\dot{\beta} + 4\tilde{d}\dot{\beta}^3; \\ H_1 &= -p_1\Delta_1 \sin \mu\tau - q_1\Delta_1 \cos \mu\tau - p_2\Delta_2 \sin \mu\tau - q_2\Delta_2 \cos \mu\tau; \\ H_2 &= -p_1\Delta_1 \cos \mu\tau + q_1\Delta_1 \sin \mu\tau + p_2\Delta_2 \cos \mu\tau - q_2\Delta_2 \sin \mu\tau, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \mu^2 - \omega_1^2 - 2\nu(\mu - \omega_1); \\ \Delta_2 &= \mu^2 - \omega_2^2 + 2\nu(\mu - \omega_2). \end{aligned}$$

Разрешив (12) и (11) относительно переменных  $p_1, p_2, q_1, q_2$ , получим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\varepsilon \frac{1}{2\mu} (G_1 - G_2) \cos \mu\tau - \frac{1}{2\mu} (H_1 - H_2) \cos \mu\tau; \\ \dot{q}_1 &= \varepsilon \frac{1}{2\mu} (G_1 + G_2) \sin \mu\tau + \frac{1}{2\mu} (H_1 + H_2) \sin \mu\tau; \\ \dot{p}_2 &= -\varepsilon \frac{1}{2\mu} (G_1 + G_2) \cos \mu\tau - \frac{1}{2\mu} (H_1 + H_2) \cos \mu\tau; \\ \dot{q}_2 &= \varepsilon \frac{1}{2\mu} (G_1 - G_2) \sin \mu\tau + \frac{1}{2\mu} (H_1 - H_2) \sin \mu\tau. \end{aligned} \quad (13)$$

Согласно (13), переменные  $p_1, p_2, q_1, q_2$  являются медленными функциями времени, поэтому корректно будет воспользоваться методом усреднения.

Результат усреднения правых частей системы уравнений (13) дает следующую систему дифференциальных уравнений в переменных Ван-дер-Поля:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\varepsilon \frac{1}{2\mu} \{ \gamma\mu(p_1 + p_2 + q_1 - q_2) + \nu\delta\mu(-q_1 + q_2) + \\ &+ \tilde{d} \frac{3}{2} (D_1 - D_2) \} - \frac{1}{2\mu} \{ (p_1 - q_1)\Delta_1 + (q_2 - p_2)\Delta_2 \}; \\ \dot{q}_1 &= \varepsilon \frac{1}{2\mu} \{ \gamma\mu(-q_1 - q_2 - p_1 + p_2) + \nu\delta\mu(-p_1 + p_2) + \\ &+ \tilde{d} \frac{3}{2} (D_3 - D_4) - \frac{1}{2} f_0 \} - \frac{1}{2\mu} \{ (p_1\Delta_1 - p_2\Delta_2 - q_1\Delta_3 + q_2\Delta_4) \}; \\ \dot{p}_2 &= -\varepsilon \frac{1}{2\mu} \{ \gamma\mu(p_1 + p_2 - q_1 + q_2) + \nu\delta\mu(-q_1 + q_2) + \\ &+ \tilde{d} \frac{3}{2} (D_1 + D_2) \} + \frac{1}{2\mu} \{ (p_1\Delta_1 - p_2\Delta_2 + q_1\Delta_3 + q_2\Delta_4) \}; \\ \dot{q}_2 &= \varepsilon \frac{1}{2\mu} \{ \gamma\mu(-q_1 - q_2 + p_1 - p_2) + \nu\delta\mu(-p_1 + p_2) + \\ &+ \tilde{d} \frac{3}{2} (D_3 + D_4) - \frac{1}{2} f_0 \} - \frac{1}{2\mu} \{ (p_1 + q_1)\Delta_1 - (q_2 - p_2)\Delta_2 \}, \end{aligned} \quad (14)$$

где были введены следующие замены:

$$\Delta_1 = \mu^2 - \omega_1^2 - 2\nu(\mu - \omega_1);$$

$$\Delta_2 = \mu^2 - \omega_2^2 + 2\nu(\mu - \omega_2);$$

$$\Delta_3 = \mu^2 - \omega_1^2 + 2\nu(\mu - \omega_1);$$

$$\Delta_4 = \mu^2 - \omega_2^2 - 2\nu(\mu - \omega_2);$$

$$D_1 = (q_1 + q_2) \left[ (p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2 \right];$$

$$D_2 = (p_1 - p_2) \left[ (p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2 \right];$$

$$D_3 = (p_1 + p_2) \left[ (q_1 + q_2)^2 + (p_1 + p_2)^2 \right];$$

$$D_4 = (q_1 - q_2) \left[ (p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2 \right].$$

### Числовой пример

Проведем численную оценку, полученных выражений. Рассмотрим двухмассовый микромеханический гироскоп со следующими характеристиками: масса чувствительного элемента  $m_{\text{ч}} = 10^{-6}$  кг; величина зазора между контактами гребенки (контакты при этом образуют систему плоских конденсаторов)  $h = 100$  мкм; угловая скорость основания  $\Omega = 500$  рад/с; малый параметр  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Для такого случая построим амплитудно-частотные характеристики.

Вначале запишем АЧХ для системы, где отсутствуют нелинейные слагаемые:

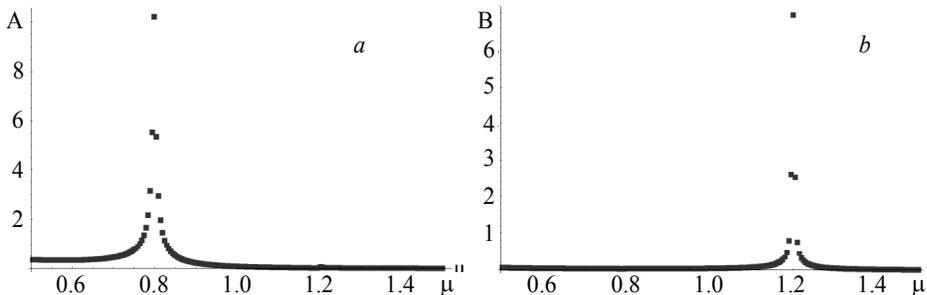


Рис. 2. АЧХ для линейной системы  
Fig. 2. Amplitude-frequency response of a linear system

Проанализировав графики, представленные на рис. 2 (*a* и *b*) можно сделать вывод, что при частоте внешней вынуждающей силы  $\mu$  близкой к первой собственной частоте колебаний  $\omega_1$  амплитуда колебаний «А» возрастает, в то время как амплитуда «В» имеет порядок  $\varepsilon$ , т.е. происходят колебания с очень малой амплитудой. Когда же частота  $\mu$  близка ко второй собственной частоте колебаний  $\omega_2$ , картина меняется, т.е. теперь амплитуда «В» бесконечно возрастает, а амплитуда «А» стремится к нулю.

Теперь построим АЧХ для нелинейной системы уравнений (14).

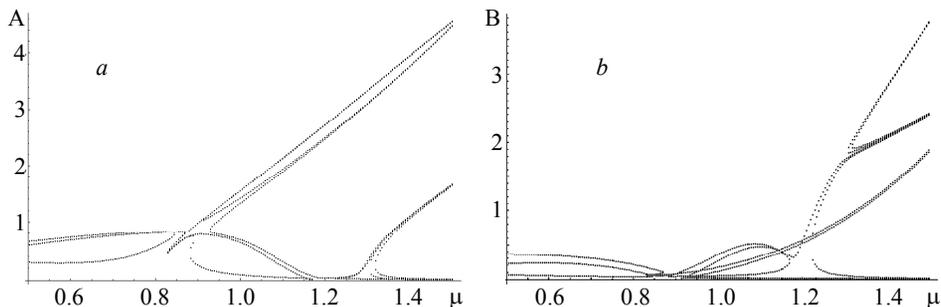


Рис. 3. АЧХ для нелинейной системы

Fig. 3. Amplitude-frequency response of a nonlinear system

Введение в систему нелинейных слагаемых изменило вид АЧХ (рис. 3) по сравнению с линейной системой (рис. 2), но интересные закономерности в поведении амплитуд можно наблюдать и на этих АЧХ. При нахождении частоты внешнего воздействия около  $\omega_1$  амплитуда «А» возрастает, а «В» становится достаточно малой, такой же результат мы наблюдали и в линейной системе. Аналогично с линейной системой ведет себя и нелинейная система при  $\mu$  близком к  $\omega_2$ .

### Заключение

В данной работе построена математическая модель двухмассового микромеханического гироскопа  $L-L$ -типа в режиме вынужденных колебаний. В полученной модели учтены: вязкое трение в системе, произвольная угловая скорость основания, нелинейные упругие свойства торсионов (упругих элементов). Особый интерес представляет тот факт, что в данной задаче угловая скорость основания не  $\sim \varepsilon$ , а является произвольной величиной. Также полученные уравнения позволяют учесть вторую массу рассматриваемого ММГ. Построены АЧХ как для линейно системы, так и для системы с нелинейными слагаемыми. Сделаны соответствующие выводы о поведении системы.

Особо интересным результатом данной работы стал вывод о том, что в рассматриваемой системе при приближении частоты внешнего воздействия к одной из собственных частот системы происходит резкое возрастание амплитуды колебаний по одной моде, а по другой моде, напротив, амплитуда становится достаточно малой.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Baranova E.A., Evstifeev M.I., Eliseev D.H. Simulation of Translational Vibrations Effect on Torque-to-Balance RR-Type MEMS Gyroscope. *Gyroscopy and Navigation*. 2018. V. 9. No. 1. P. 50–56.
2. Пешихонов В.Г. Современное состояние и перспективы развития гироскопических систем // *Гироскопия и навигация*. 2011. № 1. С. 3–17.
3. Shkel A. Microtechnology comes of age // *GPS World*, Sep. 2011. V. 22. P. 43–50.
4. Лестев А.М., Ефимовская А.В. О влиянии нелинейных факторов на динамику микромеханического гироскопа с двухмассовым чувствительным элементом // *Изв. вузов. Приборостроение*. 2012. Т. 55. № 5. С. 40–46.
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.

6. Лестев М.А. Нелинейный параметрический резонанс в динамике микромеханического гироскопа // Известия вузов. Приборостроение. 2004. Т. 47. № 2. С. 36–42.
7. Мартыненко Ю.Г., Меркурьев И.В., Подалков В.В. Управление нелинейными колебаниями вибрационного кольцевого микрогироскопа // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 77–89.
8. Меркурьев И.В., Подалков В.В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М.: Физматлит, 2009. 228 с.

Статья поступила 13.06.2018 г.

Antonov E.A., Merkuryev I.V., Podalkov V.V. (2019) INFLUENCE OF NONLINEAR RIGIDITY OF ELASTIC ELEMENTS ON THE  $L-L$  TYPE TWO-MASS MICROMECHANICAL GYROSCOPE DYNAMICS IN A FORCED-OSCILLATION REGIME. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 57. pp. 54–62

DOI 10.17223/19988621/57/4

Keywords: two-mass micromechanical gyroscope, nonlinear rigidity of elastic elements, forced oscillations, arbitrary angular velocity of the base.

In this paper, an  $L-L$  type micromechanical gyroscope is considered in a forced-oscillation regime. The main purpose is to analyze the effect of nonlinearity on the gyroscope dynamics. In this case, the nonlinearity is caused by difference in the rigidity of elastic elements. A distinctive feature of this work is that the angular velocity of the base is supposed to be arbitrary. A mathematical model of the micromechanical gyroscope, which is characterized by two active masses, is developed assuming that the mass of the frame is far less than that of the sensitive element. The problem solution is obtained using the Van der Pol variables. The differential equations of motion of the  $L-L$  type two-mass micromechanical gyroscope are solved numerically with an application of the mathematical package "Mathematica". The amplitude-frequency responses are plotted on the basis of calculated results. The obtained data allowed one to analyze the system behavior and to make an appropriate conclusion. It was revealed that when the frequency of driving force approaches the system natural frequencies, one of the amplitudes rapidly increases while another tends to zero.

**Financial support.** The reported study was funded by RFBR according to the research project № 16-01-00772-a and №16-08-01269-a.

*ANTONOV Egor Aleksandrovich* (National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russian Federation). E-mail: Ve.no.m@yandex.ru

*MERKURYEV Igor' Vladimirovich* (Doctor of Technical Sciences, Head of Department, National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russian Federation). E-mail: merkuryeviv@ya.ru

*PODALKOV Valeriy Vladimirovich* (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russian Federation).

#### REFERENCES

1. Baranova E.A., Evstifeev M.I., Eliseev D.H. (2018) Simulation of translational vibrations effect on torque-to-balance RR-type MEMS gyroscope. *Gyroscopy and Navigation*. 9(1). pp. 50–56. DOI: 10.1134/S2075108718010029.
2. Peshekhonov V.G. (2011) Gyroscopic navigation systems: current status and prospects. *Gyroscopy and navigation*. 2(3). pp. 111–118. DOI: 10.1134/S2075108711030096.
3. Shkel A.M. (2011) Microtechnology comes of age. *GPS World*. 22. pp. 43–50.
4. Lestev A.M., Efimovskaya A.V. (2012) O vliyani nelineynykh faktorov na dinamiku mikromekhanicheskogo giroskopa s dvukhmassovym chuvstvitel'nyim elementom [On the

- influence of nonlinear factors on the dynamics of micromechanical gyroscope with a two-mass sensitive element]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie – Journal of Instrument Engineering*. 55(5). pp. 40–46.
5. Bogolyubov N.N., Mitropol'skiy Yu.A. (1974) *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations]. Moscow: Nauka.
  6. Lestev A.M. (2004) Nelineyny parametricheskii rezonans v dinamike mikromekhanicheskogo giroskopa [Nonlinear parametric resonance in micromechanical gyroscope dynamics]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie – Journal of Instrument Engineering*. 47(2). pp. 36–42.
  7. Martynenko Yu.G., Merkur'ev I.V., Podalkov V.V. (2008) Control of nonlinear vibrations of vibrating ring microgyroscope. *Mechanics of Solids*. 43(3). pp. 379–390. DOI: 10.3103/S0025654408030102.
  8. Merkur'ev I.V., Podalkov V.V. (2009) *Dinamika mikromekhanicheskogo i volnovogo tverdotel'nogo giroskopov* [Dynamics of the micromechanical and wave solid-state gyroscopes]. Moscow: Fizmatlit.

Received: June 13, 2018

УДК 539.196.3

DOI 10.17223/19988621/57/5

М.А. Бубенчиков, А.М. Бубенчиков, А.В. Уколов,  
Р.Ю. Уколов, А.С. Челнокова

### ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОНИЦАЕМОСТИ УГЛЕРОДНОГО НАНОПОЛОТНА<sup>1</sup>

Проведено конструирование нанонити пересекающимися сферическими частицами, после чего выполнены построения, определяющие ячеистую структуру плоского полотна. Представленная в работе математическая модель является классической моделью динамики молекул в потенциальных полях сферических частиц. Систематическими расчетами установлено, что для однослойных структур, составленных центрально-симметричными частицами, относительная проницаемость структуры есть относительная площадь свободной зоны прохождения ячейки нанополотна, найденная по эффективному радиусу нанонити.

**Ключевые слова:** *нанонить, сферическая частица, потенциал Леннарда-Джонса, молекулярная динамика, эффективный радиус, относительная проницаемость.*

Нанонити являются конструктивным элементом во многих новых материалах. Производство нанонитей, равномерно ориентированных по любой произвольно выбранной оси кристалла, является важной, но нерешенной проблемой в материаловедении. В работе [1] представлено обобщенное решение этой проблемы. Авторами был предложен метод огибающего углового осаждения в сочетании с быстрым изменением направления осаждения между положениями симметрии кристалла. В работе [2] авторы предложили экономически выгодный способ получения пористых нанонитей на основе кремния методом химического травления. Материал, сконструированный на основе таких нитей, обеспечивает хорошую проницаемость, как для ионов лития, так и для электронов. Авторам статьи [3] удалось синтезировать нанонити из карбида титана с помощью хлоридной карботермической реакции с использованием сахарозы. Полученная нанонить имеет длину в десятки микрометров. Нанонити, синтезированные из карбида титана, хорошо проявили себя при поглощении электромагнитных волн в диапазоне 8.2–12.4 ГГц. Авторам [4] удалось получить гибридный наноматериал, состоящий из одномерных сверхтонких платиновых нанонитей, выращенных на двумерном однослойном гидроксиде никеля. В статье [5] обсуждается вопрос получения прозрачного проводящего гибридного пластика, который имеет широкое применение в оптоэлектронике. Авторам удалось создать указанный пластик на основе металлических нанонитей, инкапсулированных между монослоем графена и пластиковой подложкой. В [6] представлен углубленный критический обзор основных экспе-

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (госзадание № 1.13557.2019/13.1).

риментальных и теоретических работ в области проводящих полимерных нанокompозитов, таких, как углеродные нанотрубки и металлические нанонити. Это универсальный класс материалов, которые представляют интерес для широкого применения. Авторами [7] созданы нанонити на основе оксида железа ( $\sim 20$  нм), который при электрохимической обработке переходит в нанонити ультрамалого диаметра (2–5 нм). Продемонстрировано, что сверхмалые нанонити  $\text{NiFeO}_x$ , индуцированные литием, являются активными бифункциональными катализаторами, обладающими высокой активностью и стабильностью для общего расщепления воды. В работе [8] авторы рассказывают о создании волокнистых, изотропно связанных эластичных аэрогелей с иерархической клеточной структурой путем замораживания нановолокон. Авторы [9] с помощью модифицированного процесса электроспиннинга и использования метода усиления межфазной поляризации получили наночастицы  $\text{BaTiO}_3$  с внедренными нановолокнами  $\text{TiO}_2$ . В [10] основное внимание уделяется прогрессу в применении метода электроспиннинга в производстве биodeградируемых нановолокон в новую область биомедицины. Авторами обсуждаются вопросы получения и применения широкополосных биоразлагаемых нановолокон и сравнивается скорость разрушения наноразмерных материалов вследствие влияния макромасштабных объектов. В [11] представлен метод получения цинкосодежащих пористых активированных углеродных нановолокон путем одношагового электроспиннинга, с использованием ацетата цинка и полиакрилонитрила с последующей термообработкой. Вопросы математического моделирования проницаемости на базе молекулярно-кинетических моделей рассмотрены в работах [12–16].

Таким образом, как видно из приведенного краткого обзора, большинство работ посвящено синтезу нанонитей, а также получению материалов на их основе, обладающих заданными свойствами. Работ по математическому моделированию технологий с использованием нановолокнистых материалов крайне мало.

Исходя из этого, целью данной работы является оценка фильтрационных свойств нанополотна, составленного алмазными нанонитями, а также определение эффективного радиуса для наиболее вероятного диапазона скоростей молекул метана и атомов гелия.

### Уравнение движения проникающей молекулы

Поскольку селективные поры наносетчатых структур имеют размер  $10^{-9}$  м, а средняя длина свободного пробега молекул газов при нормальных условиях порядка  $10^{-7}$  м, то для описания взаимодействия молекул со структурой необходимо использовать модель разряженного газа либо метод одиночной частицы, а статистику набирать множественными испытаниями движений молекул. Существует ещё один подход, основанный на использовании уравнений для функции, определяющей плотность вероятности распределения случайной величины. Однако в случае решения задач прохождения молекул через нанопористую структуру, он требует интегрирования пространственных уравнений переноса с неизвестными условиями на границе. Поэтому в дальнейшем будем опираться на первый подход, решая задачу проникновения как задачу множественных испытаний, а задачу

физической сорбции как задачу накопления молекул в потенциальных ямах структуры.

Уравнения динамики перемещающейся молекулы запишем в стандартной форме в виде второго закона Ньютона, который в проекциях на оси декартовых координат имеет вид

$$m \frac{du}{dt} = \sum_{j=1}^{N_p} X_j, \quad m \frac{dv}{dt} = \sum_{j=1}^{N_p} Y_j, \quad m \frac{dw}{dt} = \sum_{j=1}^{N_p} Z_j. \quad (1)$$

Здесь  $m$  – масса пробной молекулы, пропускаемой через фильтр,  $N_p$  – количество частиц, составляющих фрагмент структуры;  $X_j$ ,  $Y_j$ ,  $Z_j$  – проекции сил взаимодействия пробной молекулы и  $j$ -й наночастицы, которые определяются следующим образом:

$$X_j = a_j \frac{x - x_j^0}{\rho_j} m, \quad Y_j = a_j \frac{y - y_j^0}{\rho_j} m, \quad Z_j = a_j \frac{z - z_j^0}{\rho_j} m, \quad (2)$$

где  $a_j$  – величина ускорения, приобретаемого пробной молекулой под действием  $j$ -й наночастицы,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – координаты, определяющие положение пробной молекулы,  $x_j^0$ ,  $y_j^0$ ,  $z_j^0$  – координаты частиц, образующих полотно.

Потенциал взаимодействия наночастица – молекула выбирается в форме, предложенной В.Я. Рудяком и С.Л. Краснолуцким [17]:

$$\Phi_9^3(\rho_j) = \Phi_9(\rho_j) - \Phi_3(\rho_j). \quad (3)$$

Здесь  $\rho_j$  – расстояние от центра наночастицы до центра пробной молекулы,  $\rho_p$  – радиус наночастицы (эта же величина будет собственным радиусом нанонити).

$$\Phi_9(\rho_j) = C_9 \left\{ \left[ \frac{1}{(\rho_j - \rho_p)^9} - \frac{1}{(\rho_j + \rho_p)^9} \right] - \frac{9}{8\rho_j} \left[ \frac{1}{(\rho_j - \rho_p)^8} - \frac{1}{(\rho_j + \rho_p)^8} \right] \right\}, \quad (4)$$

$$\Phi_3(\rho_j) = C_3 \left\{ \left[ \frac{1}{(\rho_j - \rho_p)^3} - \frac{1}{(\rho_j + \rho_p)^3} \right] - \frac{3}{2\rho_j} \left[ \frac{1}{(\rho_j - \rho_p)^2} - \frac{1}{(\rho_j + \rho_p)^2} \right] \right\}. \quad (5)$$

Тогда величина модуля ускорения  $a_j$ , входящая в правые части соотношений (2), будет являться производной от потенциала (3) по  $\rho_j$ , деленной на массу  $m$ :

$$a_j = \frac{1}{m} \frac{d}{d\rho_j} \Phi_9^3(\rho_j) = \frac{1}{m} \left[ \frac{d}{d\rho_j} \Phi_9(\rho_j) - \frac{d}{d\rho_j} \Phi_3(\rho_j) \right]. \quad (6)$$

При этом  $C_9 = \frac{4\pi\epsilon_{12}\sigma_{12}^{12}}{45V_1}$ ,  $C_3 = \frac{2\pi\epsilon_{12}\sigma_{12}^6}{3V_1}$ ,  $V_1$  – объем физического пространства,

приходящийся на один атом углерода в кристаллической структуре алмаза. Потенциал (3) получен интегрированием парного  $LJ$ -потенциала по объему наночастицы [17].

Значения констант взаимодействия  $\epsilon$  и  $\sigma$ , входящих в  $LJ$ -потенциал для некоторых пар одинаковых молекул, приведены в таблице [18, 19].

| Взаимодействующие молекулы            | Относительная глубина потенциальной ямы | Радиус влияния LJ-потенциала |
|---------------------------------------|---|------------------------------|
| C – C (1)                             | $\epsilon/k = 51.2 \text{ K}$           | $\sigma = 0.335 \text{ нм}$  |
| He – He (2)                           | $\epsilon/k = 10.2 \text{ K}$           | $\sigma = 0.228 \text{ нм}$  |
| H <sub>2</sub> – H <sub>2</sub> (3)   | $\epsilon/k = 34 \text{ K}$             | $\sigma = 0.29 \text{ нм}$   |
| O <sub>2</sub> – O <sub>2</sub> (4)   | $\epsilon/k = 117 \text{ K}$            | $\sigma = 0.35 \text{ нм}$   |
| CH <sub>4</sub> – CH <sub>4</sub> (5) | $\epsilon/k = 148 \text{ K}$            | $\sigma = 0.38 \text{ нм}$   |

Примечание:  $k$  – постоянная Больцмана.

Параметры парных взаимодействий для различных веществ  $\epsilon_{12}$  и  $\sigma_{12}$  определяются по формулам среднего арифметического и среднего геометрического:

$$\sigma_{12} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, \quad \epsilon_{12} = (\epsilon_{11} \cdot \epsilon_{22})^{1/2}. \quad (7)$$

Если дополнить уравнения (1) кинематическими соотношениями

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w, \quad (8)$$

то получим систему шести дифференциальных уравнений первого порядка для движения пробной молекулы через структуру полотна, составленного нанонитями. Эти уравнения с очевидными начальными условиями будем решать численно явными методами пошаговых вычислений.

Для сферических частиц, обладающих центральной симметрией, зависимость потенциала взаимодействия частицы от угла ее ориентации по отношению к направлению движения будет отсутствовать. Это обеспечивает значительные преимущества при нахождении расстояний от перемещающейся молекулы до элементарного фрагмента структуры.

### Учет несферической формы проникающих молекул

Взаимодействие молекул с нанопористыми структурами, составленными теми или иными фрагментами, можно представить как взаимодействие системы атомов, входящих в молекулу с теми же фрагментами структуры. Такой подход является простым в реализации. Архитектура расположения атомов известна для каждой молекулы. Поэтому многоатомную молекулярную систему удобно рассматривать как недеформируемую стержневую конструкцию, в узлах которой находятся атомы, а сами стержни моделируют устойчивые химические связи. При этом тепловые колебания атомов составляют не более 10 % от межатомных расстояний.

В результате уравнение движения центра масс многоатомной молекулы можно записать следующим образом:

$$m \frac{dv_c}{dt} = - \sum_{i=1}^S \sum_{k=1}^{N_p} \text{grad} U(r_{ik}). \quad (9)$$

Здесь  $m$  – масса молекулы;  $v_c$  – скорость центра масс перемещающейся молекулы;  $S$  – число атомов в этой молекуле;  $N_p$  – количество сферических частиц, составляющих структуру рассматриваемого пористого материала;

$$r_{ik} = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2};$$

$U(r)$  – потенциал взаимодействия «атом – сферическая частица», зависящий от сорта атома (в нашем случае либо углерод, либо водород).

Как видим из (9), движение центра масс многоатомной молекулы определяется суммой сферических воздействий на пористый материал, который в нашем случае представлен также сферическими воздействиями от атомов, составляющих молекулу.

Если рассматривается проникновение молекулы метана, то в ней центры атомов водорода находятся в вершинах тетраэдра, а в центре масс этой системы находится атом углерода. Тетраэдрический валентный угол составляет  $109^\circ$ , а расстояние от атома углерода до любого из атомов водорода составляет величину 0.109 нм. Тетраэдр имеет множество плоскостей симметрии. В результате мы имеем компактную укладку атомов, а сама конструкция является высокосимметричной. Поэтому для прохождения такой молекулы через извилистые нанопоры вряд ли будет важна ориентация молекулы в пространстве.

Бывают вытянутые молекулы, ориентация осей которых очень важна в смысле их прохождения через узкие поры. Вытянутыми можно считать все двухатомные молекулы, а также линейные многоатомные молекулы. Однако у метана все линейные размеры, спроецированные на ортогональный декартовый базис, практически одинаковы. Тем не менее движение молекулы метана как пирамидальной конструкции может быть определено более точно, нежели через эффективное молекулярное воздействие. Для этого необходимо использовать атомное представление молекулы и эйлеров подход, ставший классическим при описании движения тел в пространстве.

Согласно этому подходу, положение тела наряду с тремя координатами центра масс определяется еще и тремя углами Эйлера. Следовательно, в общем случае, наряду с уравнением (9) должны использоваться еще три скалярных уравнения для проекций вектора угловой скорости на подвижные, связанные с каркасной структурой, молекулы оси координат (динамические уравнения Эйлера). Полученная таким образом система уравнений динамики дополняется связями проекций вектора мгновенной угловой скорости с углами Эйлера, получившими названия кинематических соотношений Эйлера.

В нашем примере с метаном потенциальное поле весьма грубо, но все-таки можно принять сферическим. При этом, однако, атомы следует считать разнесенными в пространстве, тогда ближние взаимодействия молекулы будут реализовываться непосредственно через атомы водорода. Если принять, что повороты молекулы метана не так важны, и рассматривать ее движение как поступательное, то движение пирамидальной конструкции будет определяться уравнением (9), которое необходимо дополнить векторным кинематическим соотношением

$$\frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \mathbf{v}_c. \quad (10)$$

Тогда система (9), (10) будет замкнутой и ее можно будет интегрировать численно.

Система (9), (10) должна интегрироваться со следующими начальными условиями:

$$t = 0, \quad \mathbf{v}_c = \mathbf{v}_c^0, \quad \mathbf{r}_c = \mathbf{r}_c^0,$$

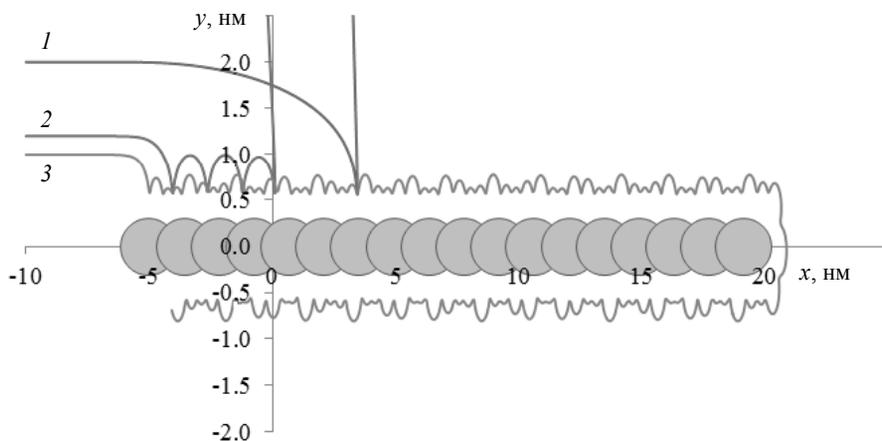
где  $\mathbf{r}_c$  – радиус-вектор центра масс молекулы;  $\mathbf{v}_c$  – скорость центра масс молекулы; индекс «ноль» относится к начальному моменту времени.

В связи с возможностью описания движения проникающей молекулы метана, как эффективной сферической частицы, индекс «с», отличающий положение центра масс молекулы  $\text{CH}_4$ , в дальнейшем будем опускать.

### Результаты расчетов

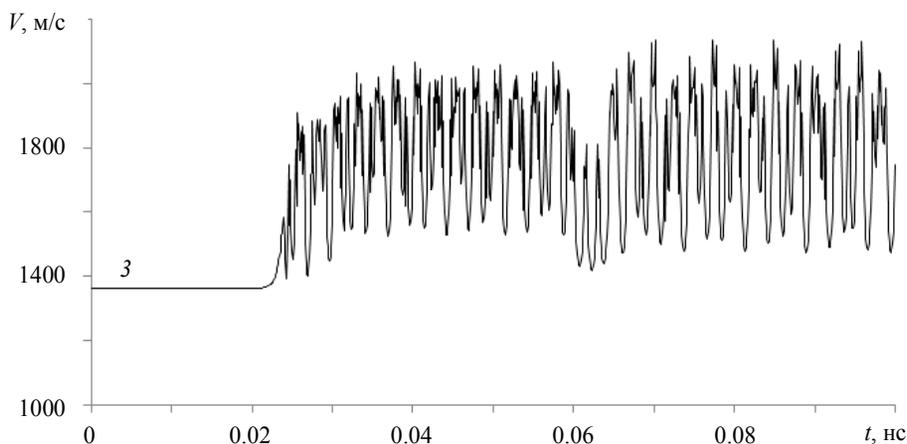
Далее будем считать, что структура составлена алмазными нанонитями, а каждая нить в свою очередь составлена сферическими частицами с пересекающимися объемами, как показано на рис. 1 – 3. Пересечения выполнены таким образом, чтобы впадины между частицами могли быть скомпенсированы двойной массой в местах пересечения сфер.

Рис. 1 – 4 иллюстрируют характер движения молекул метана и атомов гелия около углеродной нанонити. Кривые 1–3 отвечают различным начальным положениям молекул и атомов, пущенных со среднеквадратичной скоростью вдоль нити: 1)  $y = 2$  нм; 2)  $y = 1.2$  нм; 3)  $y = 1$  нм.



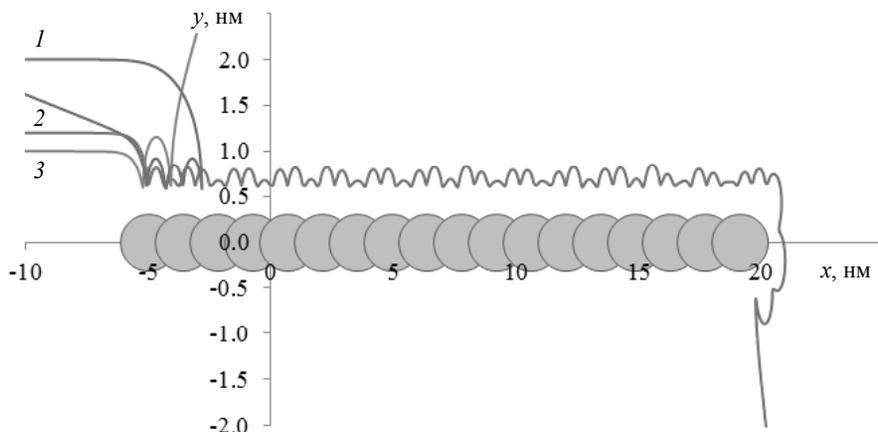
**Рис. 1.** Траектории движения атомов гелия около нанонити, имеющей собственный радиус 0.355 нм

**Fig. 1.** Trajectories of helium atoms' motion near the nanowire whose radius is of 0.355 nm

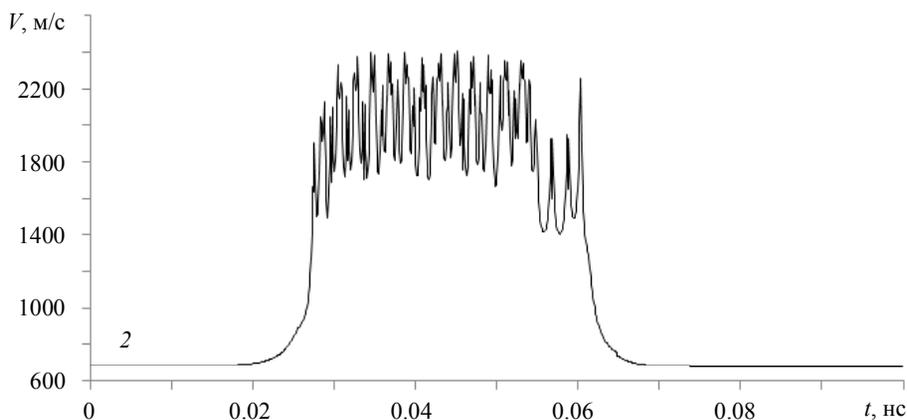


**Рис. 2.** Значения скорости атома гелия, проходящего через структуру

**Fig. 2.** Velocity of the helium atom when passing through the structure



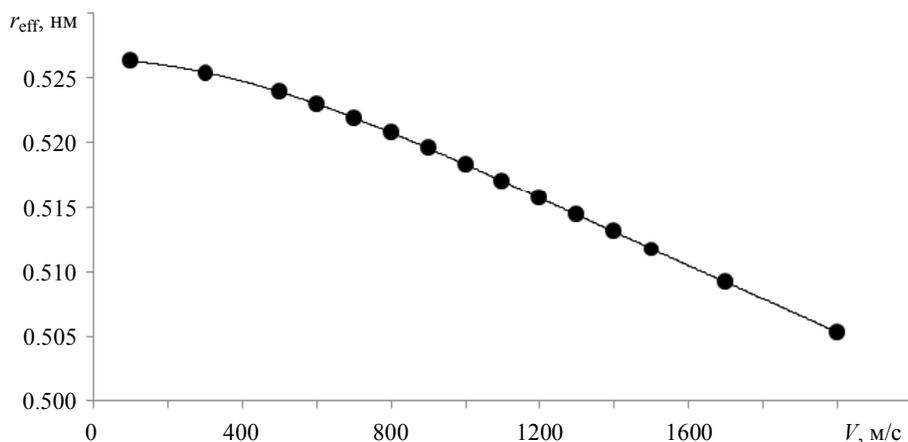
**Рис. 3.** Траектории движения отдельных молекул метана около углеродной нанонити  
**Fig. 3.** Trajectories of some methane molecules' motion near the carbon nanowire



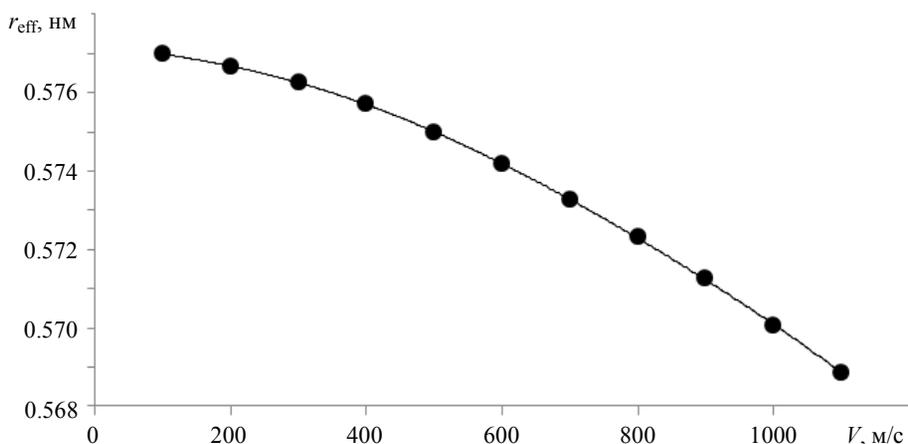
**Рис. 4.** Значения скорости молекулы метана, проходящей через структуру  
**Fig. 4.** Velocity of the methane molecule when passing through the structure

Как видно из представленных рисунков, при близком прохождении молекул и атомов в направлении, параллельном оси нити, наблюдается их сорбционный захват. Причем, в случае метана, в варианте 2, наблюдается глубокий захват молекулы, при котором она в колебательном режиме перемещается по самому дну потенциальной ямы нити, но в конечном счете выходит из ямы и покидает нанонить. Расчеты показывают, что сорбционные движения характеризуются не полным захватом молекул, а лишь длительностью времени пребывания молекулы около структуры или наночастицы.

Естественно, что эффективный радиус отталкивания молекулы от нанонити зависит от сорта проникающей молекулы. Расчеты показали также, что эта величина зависит и от скорости молекулы. Такие зависимости, выявленные расчетным образом (точки на графиках), и их аппроксимации полиномами третьей степени (сплошные линии) показаны на рис. 5 и 6.



**Рис. 5.** Эффективный радиус нанонити по отношению к атому гелия  
**Fig. 5.** Effective radius of nanowire as a function of helium atom velocity

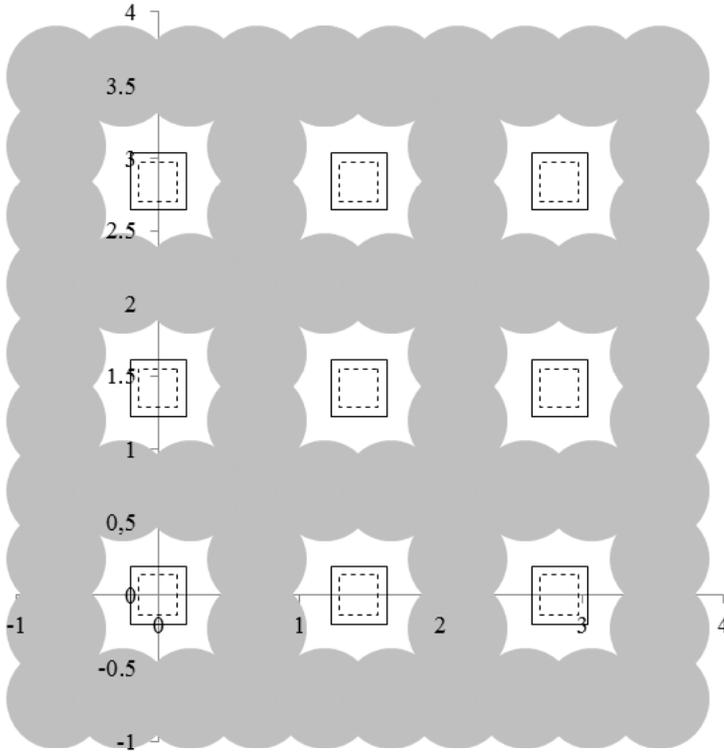


**Рис. 6.** Эффективный радиус нанонити по отношению к молекуле метана  
**Fig. 6.** Effective radius of nanowire as a function of methane molecule velocity

На основе этих распределений легко найти локальный, отвечающий данной скорости, размер окна проницаемости. Этот размер будет зависеть и от рассматриваемой компоненты, в нашем случае это гелий или метан. Рассчитанные для среднеквадратичной скорости указанных компонент окна проницаемости показаны на рис. 7.

Расчеты показывают, что время пребывания газовых компонент около структуры незначительно и из-за этого не происходит физической сорбции, переводящей режим свободного прохождения молекул (атомов) в диффузионный режим движения.

Поскольку полотно является однослойной структурой, то по площадям окон прохождения можно оценить проницаемость полотна в отношении тех или иных компонент газовой смеси. В этом случае относительная проницаемость



**Рис. 7.** Окна проницаемости для гелия (сплошная линия), для метана (пунктир)  
**Fig. 7.** Permeability windows for helium (solid line) and methane (dotted line)

определится как доля свободной площади прохождения молекул или атомов в площади ячейки полотна:

$$D(\text{He}) = \frac{S_f(\text{He})}{h^2}, \quad (11)$$

$$D(\text{CH}_4) = \frac{S_f(\text{CH}_4)}{h^2}. \quad (12)$$

Здесь  $S_f$  – площадь свободного прохождения молекул, рассчитанная по средней тепловой скорости их движения,  $h$  – шаг укладки нитей в полотне. Эта оценка может быть существенно улучшена, если учесть изменение величины эффективного радиуса нити с изменением скорости перемещающейся частицы. Тогда относительные проницаемости полотна, в отношении рассматриваемых компонент, найдутся следующим образом:

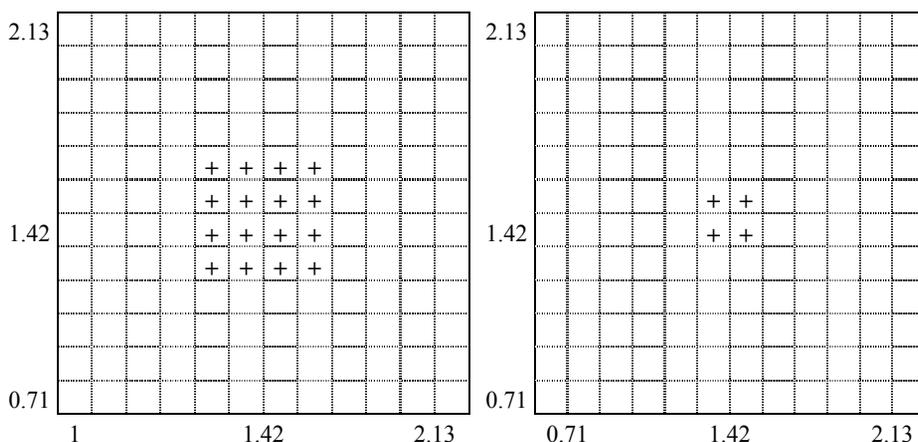
$$D(\text{He}) = \frac{4\alpha^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} v^2 \exp(-\alpha v^2) \left[ \frac{(h - 2r_{\text{eff}}(v, \text{He}))^2}{h^2} \right] dv, \quad (13)$$

$$D(\text{CH}_4) = \frac{4\alpha^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} v^2 \exp(-\alpha v^2) \left[ \frac{(h - 2r_{\text{eff}}(v, \text{CH}_4))^2}{h^2} \right] dv. \quad (14)$$

Здесь  $a = m/2kT$ , где  $m$  – масса проникающей молекулы (атома),  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура;  $r_{\text{eff}}(v, \text{He})$ ,  $r_{\text{eff}}(v, \text{CH}_4)$  – аппроксимирующая кубическая функция, построенная по значениям эффективных радиусов нанонити по отношению к соответствующим газовым компонентам.

Если выражение в квадратных скобках принять за единицу и внести под знак интеграла величины, не зависящие от скорости, то под интегралом окажется функция распределения Максвелла по модулю скорости. Проинтегрировав её в указанных пределах, мы получим единицу. Это отвечает случаю полного прохождения всех компонент, т.е. случаю отсутствия барьера на пути прохождения молекул.

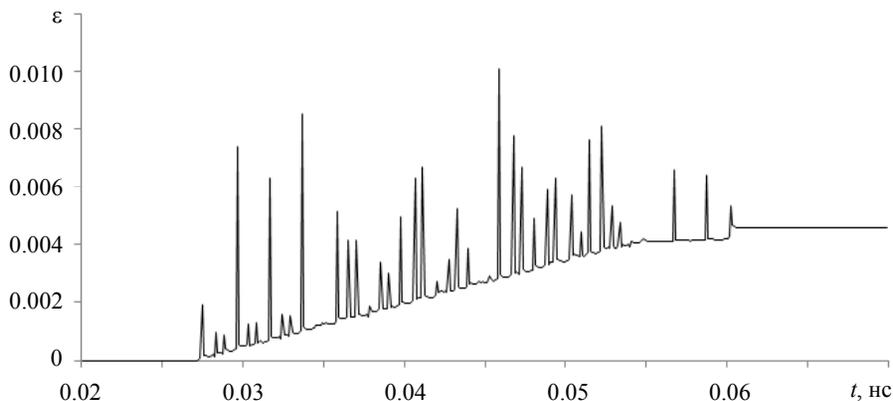
Квадратную ячейку полотна с площадью  $h^2$  мы покрываем сеткой  $11 \times 11$  и отодвигаем гипотетическую сетку, перемещая её по нормали на 10 нм от полотна в ту сторону, где находится смесь газов. В центре построенных сеточных ячеек, мы помещаем пробные молекулы или атомы, выпуская их со среднеквадратичной для каждой из компонент скоростью, а также организуя их движение по нормали к полотну. Результаты таких испытаний показаны на рисунке 8. В случае алмазных нитей диаметром 0.71 нм эти результаты подтверждают теорию окон проницаемости, найденных по эффективному радиусу нанонитей.



**Рис. 8.** Окна проницаемости на сетке начальных позиций молекул для гелия (слева) и метана (справа)

**Fig. 8.** Permeability windows on the grid of initial positions for helium (on the left) and methane (on the right)

Каждый пуск молекулы (атома), направленной в сторону полотна, сопровождается расчетом точности выполнения баланса полной энергии перемещающейся частицы. При этом для молекул, направленных перпендикулярно поверхности мембраны, относительная погрешность расчетов имела величину, не превосходящую  $10^{-5}$ . Однако реализуются случаи, хотя и не имеющие отношения к прохождению молекул через полотно, но характеризующиеся множественными отражениями (молекула движется параллельно оси нанонити, вариант 2). В этом примере погрешность возрастает с каждым новым отражением (рис. 9) и в результате имеет величину существенно большую, чем в случае фронтального обстрела молекулами мембраны. Тем не менее и здесь погрешность не превосходит одного процента.



**Рис. 9.** Относительная величина погрешности расчета баланса полной энергии молекулы метана, перемещающейся вдоль нанонити (вариант 2)

**Fig. 9.** Relative error of the total energy balance calculated for a methane molecule moving along the nanowire (2nd case)

### Заключение

Для полотна, выполненного из алмазных нанонитей диаметром 0.71 нм, показано, что не происходит накопления газовых компонент в потенциальных ямах структуры. Таким образом, рассматриваемая идеальная углеродная структура является «чистой». Это позволяет надеяться, что режим фильтрации газовых компонент будет кинетическим, а не диффузионным. В этом случае сетка из алмазных нитей может выполнять функцию основного разделительного слоя нанопористой мембраны. Систематическими расчетами показано, что относительная проницаемость той или иной компоненты есть доля площади окна проницаемости в общей площади ячейки полотна.

Таким образом, для того чтобы рассчитать относительную проницаемость, не проводя многочисленных статистических расчетов, необходимо взять аналитические формы линейных аппроксимаций, представленных на рис. 5 и 6 и подставить их в интегралы (13) и (14).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Tao Y., Degen C.L. Growth of magnetic nanowires along freely selectable crystal directions // Nature Communications. 2018. V. 9. Art. number: 339. DOI: 10.1038/s41467-017-02519-8.
2. Chen Yu, Lui L., Xiong J., Yang T., Qin Y., Yan C. Porous Si nanowires from cheap metallurgical silicon stabilized by a surface oxide layer for lithium ion batteries // Advanced Functional Materials. 2015. V. 25 (43). P. 6701–6709. DOI: 10.1002/adfm.201503206.
3. Yuan X., Cheng L., Kong L., et al. Preparation of titanium carbide nanowires for application in electromagnetic wave absorption // J. Alloys and Compounds. 2014. V. 596. P. 132–139.
4. Yin H., Zhao S., Zhao K., et al. Ultrathin platinum nanowires grown on single-layered nickel hydroxide with high hydrogen evolution activity // Nature Communications. 2015. V. 6. Art. number: 6430. DOI: 10.1038/ncomms7430.
5. Deng B., Hsu P.-C., Chen G., et al. Roll-to-Roll encapsulation of metal nanowires between graphene and plastic substrate for high-performance flexible transparent electrodes // Nano Lett. 2015. V. 15. P. 4206–4213. DOI: 10.1021/acs.nanolett.5b01531.
6. Mutiso R.M., Winey K.I. Electrical properties of polymer nanocomposites containing rod-like nanofillers // Progress in Polymer Science. 2015. V. 40. P. 63–84.

7. Wang H., Lee H.-W., Deng Y., et al. Bifunctional non-noble metal oxide nanoparticle electrocatalysts through lithium-induced conversion for overall water splitting // *Nature Communications*. 2015. V. 6. Art. number: 261. DOI: 10.1038/ncomms8261.
8. Si Y., Fu Q., Wang X., et al. Superelastic and superhydrophobic nanofiber-assembled cellular aerogels for effective separation of oil/water emulsions // *American Chemical Society*. 2015. V. 9 (5). P. 3791–3799. DOI: 10.1021/nn506633b.
9. Zhang X., Shen Y., Zhang Q., et al. Ultrahigh energy density of polymer nanocomposites containing BaTiO<sub>3</sub>@TiO<sub>2</sub> nanofibers by atomic-scale interface engineering // *Advanced Functional Materials*. 2014. V. 27. P. 819–824. DOI: 10.1002/adma.201404101.
10. Kai D., Liow S.S., Loh X.J. Biodegradable polymers for electrospinning: Towards biomedical applications // *Materials Science and Engineering*. 2014. V. 45. P. 659–670. DOI: 10.1016/j.msec.2014.04.051.
11. Kim C.H., Kim B.H. Zinc oxide/activated carbon nanofiber composites for high-performance supercapacitor electrodes // *Journal of Power Sources*. 2015. V. 274 (15). P. 512–520. DOI: 10.1016/j.jpowsour.2014.10.126.
12. Бубенчиков М.А. Движение нанотрубок в воздушной среде под воздействием электромагнитного поля // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2010. № 4 (12). С. 68–77.
13. Бубенчиков М.А. Двухфазная фильтрация в анизотропном пространстве // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2013. № 6 (26). С. 70–78.
14. Бубенчиков М.А., Потеекаев А.И. Седиментация наночастиц в поле центробежных сил // *Изв. вузов. Физика*. 2011. № 2. С. 74–80.
15. Бубенчиков М.А. Проницаемость туннеля из сферических наночастиц // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2014. № 5 (31). С. 69–75.
16. Бубенчиков М.А. Об идеальных колебаниях нанотрубок в естественном магнитном поле // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2010. № 2 (10). С. 45–52.
17. Rudyak V.Y., Krasnolutskiy S.L. The calculation and measurements of nanoparticles diffusion coefficient in rarefied gases // *J. Aerosol Science*. 2003. V. 34. Suppl. 1. P. 579–580. DOI: 10.1016/S0021-8502(03)00148-4.
18. Глушко В.П. Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания. Т. 1. М., 1971. 263 с.
19. Справочник химика. Т. 1 / под ред. Б.П. Никольского. М.; Л.: Химия, 1982. 1072 с.

Статья поступила 16.03.2018 г.

Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Ukolov A.V., Ukolov R.Yu., Chelnokova A.S. (2019) INVESTIGATION OF A CARBON NANOFABRIC PERMEABILITY. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 57. pp. 63–76

DOI 10.17223/19988621/57/5

Keywords: nanowire; spherical particle, Lennard-Jones potential, molecular dynamics, effective radius, relative permeability.

The theoretical and practical experience of membrane transport shows that the selectivity of membrane increases with a decrease in its thickness at constant surface porosity. The nanowire stacked up in one or two layers determines the minimum thickness of the layer obtained on the basis of the selected structural element, i.e. nanowire. At present, only wires of a certain length and structure are synthesized. Synthesis of such materials as nanofabric is not yet completed. Leaving aside the experimental difficulties of producing such materials, we proceed to describe the passage of mobile particles through the nanofabrics. This work presents a study on the interaction of gas phase molecules and atoms with an ideal structure of two-dimensional stack of

spherical diamond particles. The Rudyak - Krasnolutskiy potential is taken as a “nanoparticle-molecule” interaction potential.

The calculations are carried out using the model of a Hamiltonian system which includes moving molecules and atoms, as well as stationary particles representing the structure of the material. The stationary particles are characterized by a central-symmetric potential of interaction with moving particles which significantly simplifies the calculations. As a result of systematic calculations, it is revealed that in the case of a single-layer fabric structure, relative permeability is proportional to the relative area of free passage of molecules and atoms through the structure, which is determined by the effective radius of the nanowire.

**Financial support.** This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (state assignment No. 1.13557.2019/13.1).

*BUBENCHIKOV Mikhail Alekseevich* (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Gazprom Transgaz Tomsk Ltd., Tomsk, Russian Federation). E-mail: michael121@mail.ru

*BUBENCHIKOV Aleksey Mikhaylovich* (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bubenchikov\_am@mail.ru

*UKOLOV Anton Vadimovich* (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: Ukolov33@gmail.ru

*UKOLOV Roman Yur'evich* (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: roman\_ukolov@bk.ru

*CHELNOKOVA Anna Sergeevna* (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: smolina-nyuta@mail.ru

## REFERENCES

1. Tao Y., Degen C.L. (2018) Growth of magnetic nanowires along freely selectable crystal directions. *Nature Communications*. 9(339). DOI: 10.1038/s41467-017-02519-8.
2. Chen Yu, Lui L., Xiong J., Yang T., Qin Y., Yan C. (2015) Porous Si nanowires from cheap metallurgical silicon stabilized by a surface oxide layer for lithium ion batteries. *Advanced Functional Materials*. 25(43). pp. 6701–6709. DOI: 10.1002/adfm.201503206.
3. Yuan X., Cheng L., Kong L., Yin X., Zhang L. (2014) Preparation of titanium carbide nanowires for application in electromagnetic wave absorption. *Journal of Alloys and Compounds*. 596. pp. 132–139. DOI: 10.1016/j.jallcom.2014.01.022.
4. Yin H., Zhao S., Zhao K., Muqsit A., Tang H., Chang L., Zhao H., Gao Y., Tang Z. (2015) Ultrathin platinum nanowires grown on single-layered nickel hydroxide with high hydrogen evolution activity. *Nature Communications*. 6(6430). DOI: 10.1038/ncomms7430.
5. Deng B., Hsu P.-C., Chen G., Chandrashekar B., Liao L., Ayitimuda Z., Wu J., Guo Y., Lin L., Zhou Y., Aisijiang M., Xie Q., Cui Y., Liu Z., Peng H. (2015) Roll-to-Roll Encapsulation of metal nanowires between graphene and plastic substrate for high-performance flexible transparent electrodes. *Nano Letters*. 15. pp. 4206–4213. DOI: 10.1021/acs.nanolett.5b01531.
6. Mutiso R.M., Winey K.I. (2015) Electrical properties of polymer nanocomposites containing rod-like nanofillers. *Progress in Polymer Science*. 40. pp. 63–84. DOI: 10.1016/j.progpolymsci.2014.06.002.
7. Wang H., Lee H.-W., Deng Y., Lu Z., Hsu P.-C., Liu Y., Lin D., Cui Y. (2015) Bifunctional non-noble metal oxide nanoparticle electrocatalysts through lithium-induced conversion for overall water splitting. *Nature Communications*. 6(261). DOI: 10.1038/ncomms8261.
8. Si Y., Fu Q., Wang X., Zhu J., Yu J., Sun G., Ding B. (2015) Superelastic and superhydrophobic nanofiber-assembled cellular aerogels for effective separation of oil/water emulsions. *American Chemical Society*. 9(5). pp. 3791–3799. DOI: 10.1021/nn506633b.
9. Zhang X., Shen Y., Zhang Q., Gu L., Hu Y., Du J., Lin Y., Nan C.-W. (2014) Ultrahigh energy density of polymer nanocomposites containing BaTiO<sub>3</sub>@TiO<sub>2</sub> nanofibers by atomic-

- scale interface engineering. *Advanced Functional Materials*. 27. pp. 819–824. DOI: 10.1002/adma.201404101.
10. Kai D., Liow S.S., Loh X.J. (2014) Biodegradable polymers for electrospinning: Towards biomedical applications. *Materials Science and Engineering*. 45. pp. 659–670. DOI: 10.1016/j.msec.2014.04.051.
  11. Kim C.H., Kim B.H. (2015) Zinc oxide/activated carbon nanofiber composites for high-performance supercapacitor electrodes. *Journal of Power Sources*. 274(15). pp. 512–520. DOI: 10.1016/j.jpowsour.2014.10.126.
  12. Bubenchikov M.A. (2010) Dvizhenie nanotrubok v vozduшной среде pod vozdeystviem elektromagnitnogo polya [Motion of nanotubes in an air medium under the influence of an electromagnetic field]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(12). pp. 68–77.
  13. Dil' D.O., Bubenchikov M.A. (2013) Dvukhfaznaya fil'tratsiya v anizotropnom prostranstve [Two-phase filtration in an anisotropic medium]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(26). pp. 70–78.
  14. Bubenchikov M.A., Potekaev A.I. (2011) Sedimentatsiya nanochastits v pole tsentrobeznykh sil [Sedimentation of nanoparticles in the field of centrifugal forces]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russ. Phys. J.* 54(2). pp. 211–220.
  15. Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Potekaev A.I., Usenko O.V., Sherstobitov A.A. (2014) Pronitsaemost' tunnelya iz sfericheskikh nanochastits [Permeability of the tunnel of spherical nanoparticles]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(31). pp. 69–75.
  16. Bubenchikov M.A. (2010) Ob ideal'nykh kolebaniyakh nanotrubok v estestvennom magnitnom pole [On perfect oscillations of nanotubes in the natural magnetic field]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(10). pp. 45–52.
  17. Rudyak V.Yu., Krasnolutskii S.L. (2003) The calculation and measurements of nanoparticles diffusion coefficient in rarefied gases. *Journal of Aerosol Science*. 34(1). pp. 579–580. DOI: 10.1016/S0021-8502(03)00148-4.
  18. Glushko V.P. (1974) *Thermodynamic and Thermophysical Properties of Combustion Products*. Israel Program for Scientific Translations.
  19. Nikol'skiy B.P. (1982) *Spravochnik khimika* [Chemist's handbook]. Vol. 1. Moscow; Leningrad: Khimiya.

Received: March 16, 2018

УДК 531.554

DOI 10.17223/19988621/57/6

С.А. Королев, А.М. Липанов, И.Г. Русяк, В.А. Тенев

**РАЗРАБОТКА ПОДХОДОВ К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ  
ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ В РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПРИМЕНЕНИЯ**

Представлены два подхода к решению обратной задачи внешней баллистики. Первый подход, основанный на итерационном методе последовательных приближений, позволяет получить решение обратной задачи с заданным уровнем точности для любых условий стрельбы. Второй подход, основанный на предварительно построенных аппроксиматорах для заданных диапазонов изменения условий стрельбы, позволяет значительно упростить алгоритм и сократить время решения обратной задачи внешней баллистики.

**Ключевые слова:** *внешняя баллистика, обратная задача, итерационный алгоритм, аппроксиматор, нейронная сеть.*

При решении задач внешней баллистики предъявляются особые требования к точности и оперативности расчетных алгоритмов. Точность решения прямой задачи внешней баллистики зависит от полноты факторов, учитываемых в расчете, полноты и точности математической модели и методов расчета [1, 2]. Исследование устойчивости движения снаряда на траектории требует применения методов интегрирования дифференциальных уравнений высокого порядка точности с малым шагом по времени. При решении практических задач поражения цели разработанная методика расчета позволяет определить параметры наведения с заданным уровнем точности для любых условий стрельбы. В случае подвижных целей важным фактором является оперативность решения задачи определения параметров наведения. Применение прямых методов решения внешнебаллистической задачи в силу вычислительной трудоемкости может быть неприемлемым по времени из-за увеличения погрешности прогнозирования координат положения движущейся цели. В этой связи необходима разработка быстрых алгоритмов, в частности, основанных на аппроксимации баллистических данных.

**Прямая задача внешней баллистики**

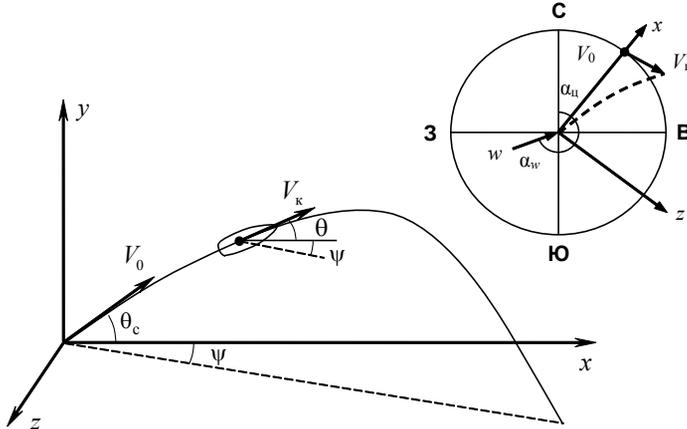
Прямая задача внешней баллистики состоит в вычислении траектории движения снаряда при заданных параметрах выстрела (характеристики снаряда, координаты орудия и направление стрельбы) и известном состоянии атмосферы (давление, температурные и ветровые показатели). Математическая модель прямой задачи внешней баллистики описана в [1, 2].

Прямую задачу внешней баллистики представим в виде преобразования

$$L = (P_k, \tau_k) = \Phi(P_0, \theta_c, \alpha_{ц}, A), \quad (1)$$

где  $P_k = (X_k, Y_k, Z_k)$  – конечная точка стрельбы (координаты цели);  $\tau_k$  – время полета снаряда,  $P_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$  – начальная точка стрельбы (координаты орудия);  $\theta_c$  – угол стрельбы;  $\alpha_{ц}$  – дирекционный угол цели (см. рис. 1). Вектор  $A$  со-

держит характеристики снаряда и орудия, геофизические и атмосферные данные. Точность решения прямой задачи внешней баллистики определяется, в первую очередь, точностью определения аэродинамических коэффициентов сопротивления метаемых тел. Методика расчета аэродинамических коэффициентов метаемых тел приведена в [3, 4].



**Рис. 1.** Траектория движения снаряда  
**Fig. 1.** Trajectory of a projectile motion

Для численного решения задачи (1), представляющей собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, применен метод Рунге-Кутты – Вернера 6-го порядка точности с контролем погрешности вычислений [5].

### Обратная задача внешней баллистики

В общем случае обратная задача внешней баллистики заключается в определении угла стрельбы  $\theta_c$  и дирекционного угла  $\alpha_{ц}$  при известном начальном расположении цели, ее скорости и направлении перемещения. Важную роль при определении этих параметров играет точность решения прямой задачи внешней баллистики, включая учет аэродинамического взаимодействия снаряда с воздухом атмосферы и геофизических условий стрельбы.

Обратная задача заключается в нахождении обратного преобразования

$$Q = (\theta_c, \alpha_{ц}, P_{к}, \tau_{\Sigma}) = \Phi^{-1}(P_0, P_{ц}^0, V_{ц}, A), \quad (2)$$

где  $P_{ц}^0 = (X_{ц}^0, Y_{ц}^0, Z_{ц}^0)$  – начальные координаты цели;  $V_{ц} = (V_{1ц}, V_{2ц}, V_{3ц})$  – вектор скорости перемещения цели в геодезической системе координат. В данном случае время  $\tau_{\Sigma}$  определяется суммой времени решения обратной задачи  $\tau_p$ , времени наведения орудия  $\tau_n$  и времени полета снаряда  $\tau_k$ :  $\tau_{\Sigma} = \tau_p + \tau_n + \tau_k$ .

При решении обратной задачи (2) рассматриваются два подхода. В первом подходе используется итерационный метод последовательных приближений на основе метода хорд. При этом на каждом шаге итерационного алгоритма необходимо решать прямую задачу внешней баллистики. Данный алгоритм позволяет найти решение задачи для заданных условий стрельбы с любым требуемым уров-

нем точности. Однако время расчетов здесь может играть существенную роль с точки зрения погрешности прогнозирования положения цели в момент ее предполагаемой встречи со снарядом. Поэтому также рассматривается второй «быстрый» способ решения обратной задачи на основе предварительно построенных аппроксиматоров.

### Итерационный алгоритм решения обратной задачи

При заданном значении расстояния до цели задача (2) имеет два решения, условно разделяемые углом максимальной дальности  $\theta_c^{\max} = \operatorname{argmax} X_k(\theta_c)$  на настильную и навесную траекторию.

Итерационный алгоритм нахождения углов  $\theta_c$  и  $\alpha_{ц}$  по заданным параметрам цели  $\alpha_{ц}^0, X_{ц}^0, Y_{ц}^0, V_{ц} = (V_{1ц}, V_{2ц}, V_{3ц})$  состоит в следующем. Сначала задаем начальное положение цели  $\alpha_{ц} = \alpha_{ц}^0, X_{ц} = X_{ц}^0, Y_{ц} = Y_{ц}^0, Z_{ц} = 0$ . При заданном значении  $X_{ц}$  проводятся итерации по определению угла стрельбы по методу хорд. Для настильной траектории:

1.  $i = 0: a = 0^\circ; \theta_c^i = b = \theta_c^{\max};$
2.  $X_k = \Phi(\alpha_{ц}, \theta_c^i, Y_{ц}, A);$
3.  $i = i + 1: \theta_c^i = a + \frac{X_{ц}}{X_k}(\theta_c^{i-1} - a).$

Для навесной траектории:

1.  $i = 0: \theta_c^i = a = \theta_c^{\max}; b = 90^\circ;$
2.  $X_k = \Phi(\alpha_{ц}, \theta_c^i, Y_{ц}, A);$
3.  $i = i + 1: \theta_c^i = b - \frac{X_{ц}}{X_k}(b - \theta_c^{i-1}).$

Шаги 2, 3 повторяются до выполнения условия  $|\theta_c^i - \theta_c^{i-1}| < \varepsilon_\theta$ , где  $\varepsilon_\theta$  – заданная величина погрешности.

На каждой итерации для текущего значения  $\theta_c^i$  определяется время полета снаряда  $\tau_k$  и боковое отклонение  $Z_k$ . Перемещение цели за время полета  $\tau_k$  определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \Delta X_{ц} &= \tau_k (V_{3ц} \cos \alpha_{ц} - V_{1ц} \sin \alpha_{ц}), \\ \Delta Y_{ц} &= \tau_k V_{2ц}, \\ \Delta Z_{ц} &= \tau_k (V_{3ц} \sin \alpha_{ц} + V_{1ц} \cos \alpha_{ц}). \end{aligned} \quad (5)$$

Затем корректируем положение цели

$$X_{ц} = X_{ц}^0 + \Delta X_{ц}, \quad Y_{ц} = Y_{ц}^0 + \Delta Y_{ц}, \quad Z_{ц} = \Delta Z_{ц}$$

и вводим поправку к дирекционному углу

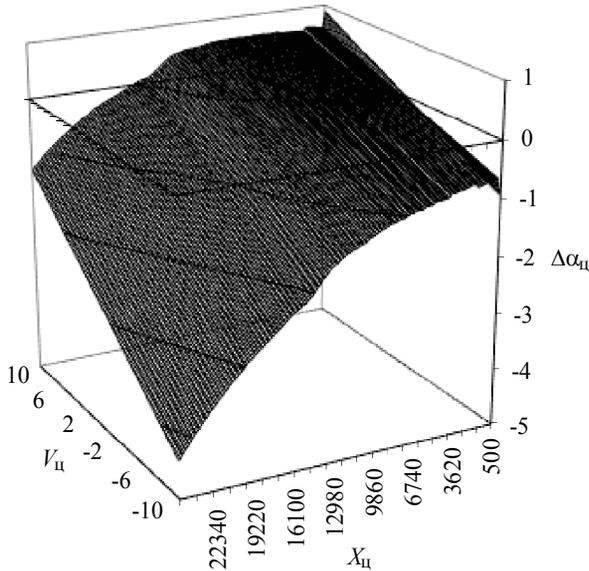
$$\Delta \alpha_{ц} = \arctan \left( \frac{\Delta Z_{ц} - Z_k}{X_{ц}} \right), \quad \alpha_{ц}^i = \alpha_{ц}^0 + \Delta \alpha_{ц}. \quad (6)$$

Итерации повторяются до сходимости по углу  $\alpha_{ц}$  :

$$|\alpha_{ц}^i - \alpha_{ц}^{i-1}| < \varepsilon_{\alpha},$$

где  $\varepsilon_{\alpha}$  – заданная величина погрешности вычислений.

В качестве примера рассматривалась стрельба из 152-миллиметрового орудия осколочно-фугасным снарядом. По результатам расчетов получена следующая зависимость  $\Delta\alpha_{ц}(X_{ц}, V_{ц})$ , показанная на рис. 2, для конкретных метеоусловий, координат орудия и дирекционного угла  $\alpha_{ц} = 0$  при  $V_{ц} = (0, 0, V_{ц})$ .



**Рис. 2.** Зависимость поправки дирекционного угла от дальности и скорости движения цели  
**Fig. 2.** Correction of the direction angle as a function of the target range and speed

### Решение обратной задачи на основе аппроксиматоров

Второй способ решения обратной задачи внешней баллистики основан на использовании предварительно разработанной базы знаний. Современные технологии извлечения знаний из данных позволяют применить методы для аппроксимации нелинейных зависимостей с большим количеством факторов. Имея алгоритм численного решения задачи (1), можно предварительно провести серию расчетов для рассматриваемой артиллерийской системы с изменением не только величины углов  $\theta_{с}$  и  $\alpha_{ц}$ , но и параметров вектора **A**: направления  $\alpha_w$  и скорости  $w$  ветра, географической широты  $B$  и др. Таким образом, для анализа получаем таблицу данных:

$$(x^h; L^h) = (\theta_{с}^h, \alpha_{ц}^h, \alpha_w^h, w^h, B^h; X_{к}^h, Y_{к}^h, Z_{к}^h, \tau_{к}^h), h = \overline{1, H},$$

где  $H$  – объем выборки.

Полученная выборка делится на две части: обучающую и тестовую. На обучающей выборке проводится обучение аппроксиматоров переменных  $L = (X_k, Y_k, Z_k, \tau_k)$ , а на тестовой выборке проверяется адекватность модели.

В работе рассматривалось несколько типов аппроксиматоров: линейный, многослойная нейронная сеть, радиальная нейронная сеть, метод нечетких деревьев решений [6]. Лучшие результаты по точности и скорости вычислений показал аппроксиматор на основе многослойной нейронной сети. Рассматривались следующие интервалы изменения переменных:

$$\alpha_{\text{ц}} \in [0; 360^\circ], \theta_{\text{с}} \in [0; 20^\circ], \alpha_{\text{w}} \in [0; 360^\circ], w \in [0; 6,0 \text{ м/с}], B \in [45^\circ; 75^\circ].$$

Объем выборки составлял  $H = 4000$  точек, объем обучающей выборки варьировался в диапазоне  $H_0 = 500 - 4000$ . В ходе исследований было определено, что при  $H_0 \geq 2500$  точность аппроксимации не меняется, поэтому для сокращения времени обучения объем обучающей выборки  $H_0 = 2500$ .

В многослойной нейронной сети входной сигнал  $z^0$  преобразуется в выходной сигнал  $z^K$  в соответствии с выражениями

$$u_i^k = \sum_{j=0}^{N_{k-1}} w_{ij}^k z_j^{k-1}, z_i^k = g(u_i^k), i = \overline{1, N_k}, k = \overline{1, K}.$$

Здесь  $g(u) = \frac{1}{1 + \exp(-\beta u)}$  – функция активации;  $\beta \in [0,5; 3,0]$  – параметр крутизны функции активации;  $K$  – количество слоев;  $N_k$  – количество нейронов в  $k$ -м слое,  $k = \overline{1, K}$  ( $N_0$  – количество входных сигналов);  $w_{ij}^k$  – весовые коэффициенты. Обучение нейронной сети проводилось с помощью алгоритма обратного распространения ошибки. Найденные в процессе обучения сети весовые коэффициенты образуют базу знаний для системы управления стрельбой.

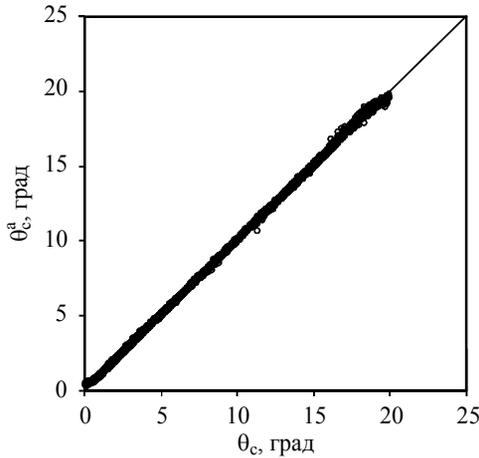
При решении обратной задачи внешней баллистики (2) в качестве входного вектора нейронной сети выступает  $z^0 = (X_k, Y_k, \alpha_{\text{ц}}, \alpha_{\text{w}}, w, B)$ , аппроксимируемыми величинами являются  $z^K = (\theta_{\text{с}}^a, Z_k^a, \tau_k^a)$ . Используя нейросетевую модель, получаем зависимости

$$\begin{aligned} \theta_{\text{с}}^a &= F_1(X_k, Y_k, \alpha_{\text{ц}}, \alpha_{\text{w}}, w, B), \\ Z_k^a &= F_2(X_k, Y_k, \alpha_{\text{ц}}, \alpha_{\text{w}}, w, B), \\ \tau_k^a &= F_3(X_k, Y_k, \alpha_{\text{ц}}, \alpha_{\text{w}}, w, B). \end{aligned} \quad (7)$$

Для рассматриваемого варианта задачи структура нейронной сети определяется параметрами:  $N_k = (6, 20, 15, 10, 3)$ ,  $k = \overline{0, 4}$ .

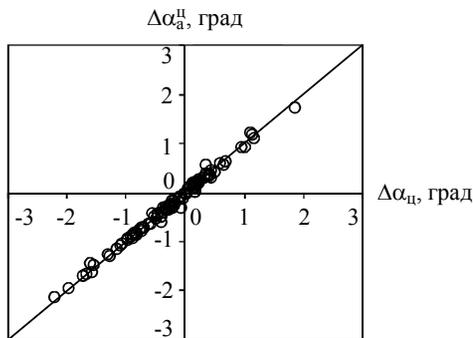
Сравнение аппроксимированных значений угла стрельбы  $\theta_{\text{с}}^a$ , полученных по нейронной сети (7), и расчетных значений  $\theta_{\text{с}}$ , найденных с помощью итерационного алгоритма (3)–(6), показано на рис. 3. Прямая линия на графике показывает идеальную аппроксимацию. Как следует из рисунка, нейронная сеть показывает удовлетворительную аппроксимацию решения обратной задачи внешней балли-

стики: среднеквадратичная ошибка по углу  $\theta_c$  составляет менее  $0.1^\circ$ . При этом отклонение по дальности  $X_k$  не превышает  $0.5\%$  при стрельбе на расстояние до  $20$  км.



**Рис. 3.** Сравнение значений угла стрельбы, полученных с помощью нейронной сети  $\theta_c^a$  и итерационного алгоритма  $\theta_c$   
**Fig. 3.** Comparison of the shooting angles  $\theta_c^a$  and  $\theta_c$  obtained using the neural network and iterative algorithm, respectively

Корректирующие поправки для дирекционного угла при стрельбе по подвижной цели определяются на основе значений  $Z_k$  и  $\tau_k$  по формулам (5) и (6). Сравнение значений поправки к дирекционному углу  $\Delta\alpha_{ц}^a$ , полученных с помощью нейронной сети, и значений  $\Delta\alpha_{ц}$ , найденных с помощью итерационного алгоритма, показано на рис. 4. Ошибка аппроксимации нейронной сетью поправки к дирекционному углу составила менее  $0.1^\circ$ . При этом отклонение по боковой координате  $Z_k$  не превышает  $30$  м при стрельбе на максимальную дальность.



**Рис. 4.** Сравнение значений поправки дирекционного угла, полученных с помощью нейронной сети  $\Delta\alpha_{ц}^a$  и итерационного алгоритма  $\Delta\alpha_{ц}$   
**Fig. 4.** Comparison of the direction angle corrections  $\Delta\alpha_{ц}^a$  and  $\Delta\alpha_{ц}$  obtained using the neural network and iterative algorithm, respectively

### Заключение

Разработанные алгоритмы решения обратной задачи внешней баллистики в зависимости от предъявляемых требований позволяют обеспечить высокую точность и оперативность решения задачи. Итерационный метод решения обратной задачи, основанный на разработанной методике решения прямой задачи внешней баллистики, позволяет найти решение задачи для заданных условий стрельбы с требуемым уровнем точности. Аппроксимационный метод, реализованный с помощью многослойной нейронной сети, обеспечивает простой и быстрый алгоритм решения обратной задачи внешней баллистики. Нейросетевая модель также существенно упрощает реализацию алгоритма определения параметров наведения орудия при стрельбе по движущимся целям, что снижает требования к программным и аппаратным средствам систем управления стрельбой.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриевский А.А., Лысенко Л.Н. Внешняя баллистика. М.: Машиностроение, 2005. 608 с.
2. Королев С.А., Липанов А.М., Русяк И.Г. К вопросу о точности решения прямой задачи внешней баллистики // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 47. С. 63–74.
3. Королев С.А., Карсканов С.А. Математическое моделирование обтекания тела вращения сверхзвуковым потоком газа // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2014. №3. С. 123–133.
4. Русяк И.Г., Карпов А.И., Королев С.А., Карсканов С.А. Расчет траектории движения снаряда в атмосфере с учетом гидродинамики его обтекания // Вопросы оборонной техники. Серия 14. 2015. Вып. 2. С. 130–141.
5. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations. Vol. 1. Berlin: Springer-Verlag, 1991. 528 p.
6. Тенев В.А., Якимович Б.А. Генетические алгоритмы в моделировании систем. Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2010. 308 с.

Статья поступила 01.06.2018 г.

Korolev S.A., Lipanov A.M., Russyak I.G. Tenenev V.A. (2019) DEVELOPMENT OF THE APPROACHES FOR SOLVING AN INVERSE PROBLEM OF EXTERNAL BALLISTICS IN VARIOUS APPLICATION CONDITIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 57. pp. 77–84

DOI 10.17223/19988621/57/6

Keywords: external ballistics, inverse problem, iterative algorithm, approximator, neural network.

The article proposes two approaches for solving an inverse problem of external ballistics. The first approach is based on the iterative method of successive approximations, and allows obtaining the solution to inverse problem with a stated accuracy for any shooting conditions. Simultaneous determining of the angles and direction of shooting makes it possible to reduce a total time of solving the inverse problem. The second approach, which is based on the pre-built approximators for assigned range of variation in the shooting conditions, can significantly simplify and speed up the algorithm for solving the inverse problem of external ballistics. Several types of approximators have been considered: linear approximator, multilayered neural network, radial neural network, and the method of fuzzy decision trees. The best results on the computational accuracy and speed were achieved using the approximator based on a multilayered neural network.

*KOROLEV Stanislav Anatol'evich* (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assoc. Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: stkj@mail.ru

*LIPANOV Aleksey Matveevich* (Doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Keldysh Institute of Applied Mathematics Russian Academy of Sciences, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: AML35@yandex.ru

*RUSYAK Ivan Grigor'yeovich* (Doctor of Technical Sciences, Professor, Russian Academy of Missile and Artillery Sciences, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: primat@istu.ru

*TENENEV Valentin Alekseevich* (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: tenenev@istu.ru

#### REFERENCES

1. Dmitrievskiy A.A., Lysenko L.N. (2005) *Vneshnyaya ballistika* [External Ballistics]. Moscow: Mashinostroenie.
2. Korolev S.A., Lipanov A.M., Rusyak I.G. (2017) K voprosu o tochnosti resheniya pryamoy zadachi vneshney ballistiki [On the issue of accuracy of the solution of the direct problem of external ballistics]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 63–74. DOI: 10.17223/19988621/47/7.
3. Korolev S.A., Karskanov S.A. (2014) Matematicheskoe modelirovanie obtekaniya tela vrashcheniya sverkhzvukovym potokom gaza [Mathematical simulation of supersonic airflow around the rotary body]. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer sciences*. 3. pp. 123–133.
4. Rusyak I.G., Karpov I.A., Korolev S.A., Karskanov S.A. (2015) Raschet traektorii dvizheniya snaryada v atmosfere s uchetom gidrodinamiki ego obtekaniya [Calculation of a projectile trajectory in the atmosphere with account for external flow hydrodynamics]. *Voprosy oboronnoy tekhniki – Defense Engineering Issues*. 14(2). pp. 130–141.
5. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. (1991) *Solving Ordinary Differential Equations. Vol. 1*. Berlin: Springer-Verlag.
6. Tenenev V.A., Yakimovich B.A. (2010) *Geneticheskie algoritmy v modelirovanii sistem* [Genetic algorithms in the modeling of systems]. Izhevsk: ISTU Publishing House.

Received: June 1, 2018

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/57/7

**В.М. Пестренин, И.В. Пестренина, Л.В. Ландик, Е.Р. Эйсмонт****КОМПОНЕНТЫ НАПРЯЖЕНИЙ НА ЛИНИИ ОСОБЫХ ТОЧЕК  
СВОБОДНОЙ ОТ НАГРУЗКИ ТОРЦЕВОЙ ПОВЕРХНОСТИ  
СЛОИСТОГО ЦИЛИНДРА**

На основе представления об особой точке деформируемого тела в виде бесконечно малой частицы, получаемой в результате стягивания к ней элементарного объема, изучаются ограничения на параметры состояния в точках края поверхности соединения двухслойного цилиндра. Устанавливаются варианты возможных постановок задач механики деформируемого твердого тела. Выявляются критические сочетания геометрических и материальных параметров, приводящие к сингулярному характеру напряженного состояния в особых точках.

**Ключевые слова:** *особые точки, неклассические задачи, двухслойный цилиндр, температурная нагрузка.*

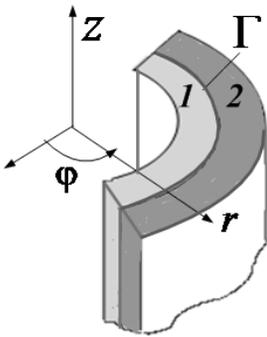
В настоящее время для исследования полей напряжений вблизи особых точек деформируемых тел (вершин клиньев, конусов, многогранников, точек края поверхностей соединения тел и т.п.) применяются два подхода. Первый из них (далее классический или асимптотический) разрабатывается авторами публикаций [1–17 и др.]. Классический подход характерен тем, что особая точка в нем исключается из области поиска решения. Это делается путем помещения в особую точку полюса криволинейной системы координат (полюс не может быть точкой области построения решения, так как в нем отсутствует однозначное соответствие между координатами и точкой тела). Исключение особой точки приводит к неадекватному определению напряжений в ее окрестности, так как при этом не рассматриваются условия непосредственно в особой точке. Кроме того, в данном случае отсутствует механический смысл получаемого асимптотического решения, поскольку невозможно указать элементарный объем, в котором такое решение реализуется. Альтернативный (неклассический) подход к изучению напряжений в особых точках и их окрестностях предлагается в публикациях [18–24]. В этом подходе особая точка считается бесконечно малой частицей среды (тела), получающейся путем стягивания в нее элементарного объема. Такое представление о точке сплошной среды разработано учеными XVIII века (Даниил и Иоганн Бернулли, Ж. Л. Д'Аламбер и Л.Эйлер [25]) и используется современными исследователями. Элементарным объемом в рассматриваемом контексте является континуальная модель представительного объема изучаемого тела. Параметры состояния элементарного объема однородны и сохраняют свои значения при стягивании в бесконечно малую частицу. Поэтому параметры состояния в точке сплошной среды (в частности, в особой точке) совпадают с параметрами состояния содержащего ее элементарного объема. Изучение напряженного состояния в особых точках и их окрестностях на основе альтернативного подхода показывает, что необычность (уникальность) этих точек в деформируемых твердых телах проявляется в избыточном количестве (по сравнению с обычными точками поверхности те-

ла) задаваемых в них ограничений [18–24]. Данное обстоятельство обуславливает неклассическую постановку задач механики деформируемого твердого тела, содержащего особые точки. Неклассические (в указанном смысле) задачи рассматривались в работах [18] – однородные плоские клинья, [20, 21] – составные плоские клинья, [22] – составные пространственные ребра, [23] – круговые и составные конусы, [24] – внутренние особые точки плоских элементов конструкций.

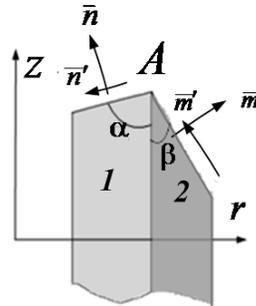
В настоящей статье неклассический подход используется для изучения параметров состояния на линии особых точек, расположенной на свободной торцевой поверхности составного цилиндра и представляющей собой ребро, образованное пересечением торцевых поверхностей составляющих элементов. Устанавливаются соответствующие постановки задач механики деформируемого твердого тела (МДГТ). Приводится решение задачи о температурной нагрузке двухслойного полого цилиндра, согласующееся со всеми задаваемыми в особых точках ограничениями.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается двухслойный цилиндр. Его торцевое и осевое сечения представлены на рис. 1 и 2. Принимается, что торцевые поверхности составляющих цилиндров 1 и 2 образуют ребро  $\Gamma$ . Считается, что плоскости  $\varphi = const$  являются нормальными плоскостями ребра  $\Gamma$ . Углы между касательными к линиям пересечения нормальной плоскости ребра  $\Gamma$  и общей образующей цилиндров 1 и 2 обозначаются соответственно  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 2).



**Рис. 1.** Торцевое сечение двухслойного цилиндра  
**Fig. 1.** End section of a double-layered cylinder



**Рис. 2.** Осевое сечение двухслойного цилиндра  
**Fig. 2.** Axial section of a double-layered cylinder

Область изменения параметров  $\alpha$  и  $\beta$  задается неравенствами:

$$0 < \alpha < \pi, \quad 0 < \beta < \pi, \quad 0 < \alpha + \beta < 2\pi. \quad (1)$$

Через  $\bar{n}$ ,  $\bar{m}$  обозначаются нормали в точках ребра  $\Gamma$  к касательным плоскостям поверхностей, образующих ребро. Через  $\bar{n}'$ ,  $\bar{m}'$  обозначаются орты, перпендикулярные соответственно направлениям  $\bar{n}$ ,  $\bar{m}$ . Приняты обозначения:  $E_k$ ,  $G_k$ ,  $\nu_k$ ,  $\omega_k$  ( $k = 1, 2$ ) – модули Юнга, модули сдвига, коэффициенты Пуассона и температурной деформации составляющих цилиндров;  $\sigma_{ij}^{(k)}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ) – физические

ские компоненты напряжений и деформаций;  $\sigma_n, \tau_{n1}, \tau_{n2}$  – нормальное и касательные напряжения в направлении соответственно  $\bar{n}'$  и  $\bar{r}_2$  ( $\bar{r}_2$  – орт, определяющий угловое направление цилиндрической системы координат) на площадке, ориентируемой ортом  $\bar{n}$ ;  $\sigma_m, \tau_{m1}, \tau_{m2}$  – нормальное и касательные напряжения в направлении соответственно  $\bar{m}'$  и  $\bar{r}_2$  на площадке, ориентируемой ортом  $\bar{m}$ ;  $\Delta T$  – приращение температуры. Считается, что на торцевом сечении отсутствует поверхностная нагрузка. К ребру (т.А) примыкают элементарные объемы скрепленных цилиндров 1 и 2. В соответствии с принятой концепцией эти элементарные объемы при стягивании к точке А образуют особые точки. Напряжения и деформации в особых точках совпадают с напряжениями и деформациями соответствующих элементарных объемов. Для параметров состояния в рассматриваемых элементарных объемах выполняются следующие условия:

1) равенство нулю поверхностных нагрузок:

$$\sigma_n = 0, \tau_{n1} = 0, \tau_{n2} = 0; \sigma_m = 0, \tau_{m1} = 0, \tau_{m2} = 0; \quad (2)$$

2) непрерывность напряжений на поверхности соединения составляющих цилиндров

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)} = \sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi}^{(2)} = \sigma_{r\varphi}, \sigma_{rz}^{(1)} = \sigma_{rz}^{(2)} = \sigma_{rz}; \quad (3)$$

3) непрерывность деформаций на поверхности соединения составляющих элементов (следует из совпадения поверхностей скрепляемых тел с поверхностью соединения)

$$\varepsilon_{zz}^{(1)} = \varepsilon_{zz}^{(2)}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)}, \quad \varepsilon_{\varphi z}^{(1)} = \varepsilon_{\varphi z}^{(2)}. \quad (4)$$

Через физические компоненты тензоров напряжений равенства (2) с использованием равенств (3) в цилиндрической системе координат запишутся соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} \cos^2 \alpha - 2\sigma_{rz} \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{zz}^{(1)} \sin^2 \alpha &= 0, \\ (\sigma_{rr} - \sigma_{zz}^{(1)}) \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{rz} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} \cos^2 \beta + 2\sigma_{rz} \cos \beta \sin \beta + \sigma_{zz}^{(2)} \sin^2 \beta &= 0, \\ (\sigma_{zz}^{(2)} - \sigma_{rr}) \cos \beta \sin \beta + \sigma_{rz} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\sigma_{r\varphi} \cos \alpha + \sigma_{z\varphi}^{(1)} \sin \alpha &= 0, \\ \sigma_{r\varphi} \cos \beta + \sigma_{z\varphi}^{(2)} \sin \beta &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения (5) являются автономной системой линейных однородных уравнений относительно компонент  $\sigma_{zz}^{(1)}, \sigma_{zz}^{(2)}, \sigma_{rr}, \sigma_{rz}$ . Определитель этой системы уравнений

$$\Delta = -\sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta) \quad (7)$$

в области (1) изменения параметров  $\alpha, \beta$  обращается в нуль в точках

$$\alpha + \beta = \pi. \quad (8)$$

Равенства (4) с использованием физических уравнений термоупругости и равенств (3) преобразуются к виду

$$\frac{1}{E_1} \left( \sigma_{zz}^{(1)} - \nu_1 \sigma_{rr} - \nu_1 \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} \right) + \omega_1 \Delta T = \frac{1}{E_2} \left( \sigma_{zz}^{(2)} - \nu_2 \sigma_{rr} - \nu_2 \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} \right) + \omega_2 \Delta T; \quad (9)$$

$$\frac{1}{E_1} \left( \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \nu_1 \sigma_{rr} - \nu_1 \sigma_{zz}^{(1)} \right) + \omega_1 \Delta T = \frac{1}{E_2} \left( \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} - \nu_2 \sigma_{rr} - \nu_2 \sigma_{zz}^{(2)} \right) + \omega_2 \Delta T; \quad (10)$$

$$\frac{1}{G_1} \sigma_{z\varphi}^{(1)} = \frac{1}{G_2} \sigma_{z\varphi}^{(2)}. \quad (11)$$

Задача состоит в исследовании возможных решений построенных уравнений (5), (6), (9) – (11) и выявлении в зависимости от геометрических и материальных параметров независимых ограничений на параметры состояния в особых точках.

## 2. Построение ограничений на параметры состояния в особых точках

Ограничениями на параметры состояния в особых точках являются решения систем уравнений (5) и (6), (11). В этом пункте рассматриваются возможные случаи таких решений. Каждому случаю отвечает независимая постановка задачи, потому что ограничения в каждом случае различаются и количеством и содержанием.

### 2.1. Случай $\alpha + \beta \neq \pi$ .

Определитель (7) системы уравнений (5) не обращается в нуль. Ее решение

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(2)} = \sigma_{rz} = \sigma_{rr} = 0. \quad (12)$$

Равенства (9), (10) приводятся к системе уравнений относительно напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}$  и  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$

$$\frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = (\omega_1 - \omega_2) \Delta T, \quad -\frac{1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} + \frac{1}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = (\omega_1 - \omega_2) \Delta T. \quad (13)$$

Определитель этой системы

$$\Delta_1 = \frac{1}{E_1 E_2} (\nu_1 - \nu_2) \quad (14)$$

обращается в нуль при выполнении равенства  $\nu_1 = \nu_2$ , поэтому возможны случаи

1)  $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0$ . Система уравнений (13) однородна.

а) если  $\nu_1 \neq \nu_2$ , ее решение тривиально  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0$ .

б) если  $\nu_1 = \nu_2$ , уравнения (13) линейно зависимы. Напряжения  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$  связаны равенством

$$E_2 \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - E_1 \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0. \quad (15)$$

2)  $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0$ .

а) если  $\nu_1 \neq \nu_2$ , система уравнения (13) имеет решение

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = \frac{(\omega_1 - \omega_2) \Delta T (1 + \nu_2) E_1}{(\nu_1 - \nu_2)}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = \frac{(\omega_1 - \omega_2) \Delta T (1 + \nu_1) E_2}{(\nu_1 - \nu_2)}. \quad (16)$$

б) если  $\nu_1 = \nu_2$ , ранг расширенной матрицы уравнений (13) оказывается большим, чем ранг системы, поэтому она несовместна. Напряжения  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$  при стремлении  $\nu_1$  к  $\nu_2$  в особых точках стремятся к неограниченно большим значениям.

Равенства (6), (11) образуют систему линейных однородных уравнений относительно напряжений  $\sigma_{r\varphi}, \sigma_{z\varphi}^{(1)}, \sigma_{z\varphi}^{(2)}$ . Определитель этой системы

$$\Delta_2 = \frac{1}{G_1} \sin \beta \cos \alpha + \frac{1}{G_2} \sin \alpha \cos \beta$$

обращается в нуль при условии

$$\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta = 0. \quad (17)$$

Если условия (17) не выполняются, уравнения (6), (11) имеют тривиальное решение

$$\sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0. \quad (18)$$

Если условие (17) выполняется, ранг системы уравнений (6), (11) равен двум, напряжения  $\sigma_{z\varphi}^{(1)}, \sigma_{z\varphi}^{(2)}$  могут быть выражены через  $\sigma_{r\varphi}$ :

$$\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \quad \sigma_{z\varphi}^{(2)} = -\sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \beta. \quad (19)$$

Рассмотренные выше случаи сведены в табл.1.

Таблица 1

**Ограничения на компоненты напряжений в особых точках  
для случая  $\alpha + \beta \neq \pi$**

| № | Условия на материальные параметры и $\Delta T$  | Ограничения (дополнительно к равенствам (3))   | Количество ограничений |
|---|---|--|------------------------|
| 1 | 2   | 3  | 4                      |
| 1 | $\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta \neq 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0, \quad v_1 \neq v_2$    | $\sigma_{zz}^{(1)} = 0, \sigma_{zz}^{(2)} = 0, \sigma_{rz} = 0, \sigma_{rr} = 0,$<br>$\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$<br>$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0$  | Двенадцать             |
| 2 | $\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta \neq 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0, \quad v_1 = v_2$       | $\sigma_{zz}^{(1)} = 0, \sigma_{zz}^{(2)} = 0, \sigma_{rz} = 0, \sigma_{rr} = 0,$<br>$\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$<br>$E_2 \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - E_1 \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0$   | Одиннадцать            |
| 3 | $\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta \neq 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0, \quad v_1 \neq v_2$ | $\sigma_{zz}^{(1)} = 0, \sigma_{zz}^{(2)} = 0, \sigma_{rz} = 0, \sigma_{rr} = 0,$<br>$\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$<br>$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T (1 + v_2) E_1}{(v_1 - v_2)},$<br>$\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T (1 + v_1) E_2}{(v_1 - v_2)}$ | Двенадцать             |
| 4 | $\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta \neq 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0, \quad v_1 = v_2$    | Ограничения несовместны  | —                      |

Окончание табл. 1

| 1 | 2   | 3  | 4           |
|---|---|--|-------------|
| 5 | $\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta = 0,$ $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0, \quad v_1 \neq v_2$    | $\sigma_{zz}^{(1)} = 0, \sigma_{zz}^{(2)} = 0, \sigma_{rz} = 0, \sigma_{rr} = 0,$ $\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = -\sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \beta,$ $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0$   | Одиннадцать |
| 6 | $\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta = 0,$ $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0, \quad v_1 = v_2$       | $\sigma_{zz}^{(1)} = 0, \sigma_{zz}^{(2)} = 0, \sigma_{rz} = 0, \sigma_{rr} = 0,$ $\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = -\sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \beta,$ $E_2 \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - E_1 \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0$  | Десять      |
| 7 | $\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta = 0,$ $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0, \quad v_1 \neq v_2$ | $\sigma_{zz}^{(1)} = 0, \sigma_{zz}^{(2)} = 0, \sigma_{rz} = 0, \sigma_{rr} = 0,$ $\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = -\sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \beta,$ $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T (1 + v_2) E_1}{(v_1 - v_2)},$ $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T (1 + v_1) E_2}{(v_1 - v_2)}$ | Одиннадцать |
| 8 | $\frac{1}{G_1} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{G_2} \operatorname{ctg} \beta = 0,$ $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0, \quad v_1 = v_2$    | Ограничения несовместны  | —           |

Таким образом, для случая  $\alpha + \beta \neq \pi$  возможны шесть различных вариантов формулировки ограничений в особых точках и, следовательно, шесть различных постановок задач МДТТ. Во всех этих вариантах, различающихся условиями для материальных и геометрических параметров, количество ограничений в особых точках превосходит количество обычно принимаемых авторами в подобных задачах ограничений равное девяти (равенства (2), (3)). Это увеличение связано с включением в список ограничений соотношений (4), которые в случае различных материальных параметров составляющих цилиндров не выполняются тождественно.

## 2.2. Случай $\alpha + \beta = \pi$ .

Уравнения (5), (6) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} \cos^2 \alpha - 2\sigma_{rz} \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{zz}^{(1)} \sin^2 \alpha &= 0, \\ (\sigma_{rr} - \sigma_{zz}^{(1)}) \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{rz} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} \cos^2 \alpha - 2\sigma_{rz} \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{zz}^{(2)} \sin^2 \alpha &= 0, \\ -(\sigma_{zz}^{(2)} - \sigma_{rr}) \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{rz} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= 0; \end{aligned}$$

$$-\sigma_{r\varphi} \cos \alpha + \sigma_{z\varphi}^{(1)} \sin \alpha = 0, \quad -\sigma_{r\varphi} \cos \alpha + \sigma_{z\varphi}^{(2)} \sin \alpha = 0. \quad (21)$$

Ранг матрицы системы уравнений (20) равен трем. Следовательно, три компонента напряжений выражаются через четвертый:

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \quad \sigma_{zz}^{(2)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \quad \sigma_{rz} = \operatorname{ctg} \alpha \sigma_{rr}. \quad (22)$$

Из уравнений (21) следуют зависимости

$$\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \quad \sigma_{z\varphi}^{(2)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha. \quad (23)$$

Соотношения (9), (10), (11) запишутся равенствами

$$\frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} + F \sigma_{rr} = (\omega_1 - \omega_2) \Delta T, \quad (24)$$

$$-\frac{1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} + \frac{1}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} + H \sigma_{rr} = (\omega_1 - \omega_2) \Delta T, \quad (25)$$

$$\left( \frac{1}{G_1} - \frac{1}{G_2} \right) \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha = 0. \quad (26)$$

В этих равенствах обозначено

$$F = -\frac{1}{E_1} (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu_1) + \frac{1}{E_2} (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu_2), \quad H = \left( \frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) (\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1).$$

Возможны следующие случаи решений системы уравнений (24) и (25)

1)  $\nu_1 \neq \nu_2$ . Ранг системы уравнений (24), (25) равен двум. Напряжения  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$  можно выразить через напряжение  $\sigma_{rr}$  и приращение температуры:

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = -\frac{(F + H\nu_2) E_1 \sigma_{rr} + (\omega_1 - \omega_2) \Delta T (1 + \nu_2) E_1}{(\nu_1 - \nu_2)}; \quad (27)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = -\frac{(F + H\nu_1) E_2 \sigma_{rr} + (\omega_1 - \omega_2) \Delta T (1 + \nu_1) E_2}{(\nu_1 - \nu_2)}. \quad (28)$$

2)  $\nu_1 = \nu_2 \neq \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ . Ранг системы уравнений (24), (25) равен двум. Определяется напряжение

$$\sigma_{rr} = \frac{(\omega_1 - \omega_2) \Delta T E_1 E_2}{(E_1 - E_2) [\operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)]} \quad (29)$$

и линейная комбинация

$$\frac{1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = \frac{-\operatorname{ctg}^2 \alpha (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)}. \quad (30)$$

3)  $\nu_1 = \nu_2 = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ . Ранг системы уравнений (24), (25) равен единице. Ранг

расширенной матрицы равен двум, если  $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0$ . Ограничения на параметры состояния в особых точках несовместны. Когда геометрические и материальные параметры элемента конструкции стремятся к данному сочетанию, напряжения в особых точках неограниченно возрастают. При выполнении условия  $(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0$  ранги матрицы системы уравнений (24), (25) и ее расширенной матрицы совпадают, уравнения становятся зависимыми. Любое из них определяет связь между напряжениями  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}$  и  $\sigma_{rr}$ .

Из равенства (26) следует, что при выполнении какого-либо из условий

$$G_1 = G_2, \quad \operatorname{ctg} \alpha = 0 \quad (31)$$

на напряжения  $\sigma_{r\varphi}$  ограничения не накладываются. Если ни одно из условий (31)

не выполняется, напряжения  $\sigma_{r\varphi}$  подчиняются ограничению

$$\sigma_{r\varphi} = 0. \tag{32}$$

Результаты данного пункта сведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

**Ограничения в особых точках для случая  $\alpha + \beta = \pi$**

| № | Условия на материальные параметры и $\Delta T$  | Ограничения (дополнительно к равенствам (1.3))   | Количество ограничений |
|---|---|--|------------------------|
| 1 | 2   | 3  | 4                      |
| 1 | $(G_2 - G_1) \text{ctg} \alpha \neq 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0,$<br>$v_1 \neq v_2$   | $\sigma_{rz} = \text{ctg} \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(1)} = \text{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(2)} = \text{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr},$<br>$\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$<br>$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = -\frac{(F + H v_2) E_1 \sigma_{rr} + (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T (1 + v_2) E_1}{(v_1 - v_2)},$<br>$\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = -\frac{(F + H v_1) E_2 \sigma_{rr} + (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T (1 + v_1) E_2}{(v_1 - v_2)}$  | Одиннадцать            |
| 2 | $(G_2 - G_1) \text{ctg} \alpha \neq 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0,$<br>$v_1 = v_2 = v \neq \frac{\text{ctg}^2 \alpha}{1 + \text{ctg}^2 \alpha}$ | $\sigma_{rz} = \text{ctg} \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(1)} = \text{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(2)} = \text{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr},$<br>$\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$<br>$\frac{1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = -\frac{\text{ctg}^2 \alpha (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T}{\text{ctg}^2 \alpha - v (1 + \text{ctg}^2 \alpha)},$<br>$\sigma_{rr} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T E_1 E_2}{(E_1 - E_2) (\text{ctg}^2 \alpha - v (1 + \text{ctg}^2 \alpha))}$ | Одиннадцать            |
| 3 | $(G_2 - G_1) \text{ctg} \alpha \neq 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0,$<br>$v_1 = v_2 = v = \frac{\text{ctg}^2 \alpha}{1 + \text{ctg}^2 \alpha}$    | Ограничения несовместны  | —                      |
| 4 | $(G_2 - G_1) \text{ctg} \alpha \neq 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0,$<br>$v_1 \neq v_2$  | $\sigma_{rz} = \text{ctg} \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(1)} = \text{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(2)} = \text{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr},$<br>$\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$<br>$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = -\frac{(F + H v_2) E_1 \sigma_{rr}}{(v_1 - v_2)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = -\frac{(F + H v_1) E_2 \sigma_{rr}}{(v_1 - v_2)}$   | Одиннадцать            |
| 5 | $(G_2 - G_1) \text{ctg} \alpha \neq 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0,$<br>$v_1 = v_2 = v \neq \frac{\text{ctg}^2 \alpha}{1 + \text{ctg}^2 \alpha}$    | $\sigma_{rz} = \text{ctg} \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(1)} = \text{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(2)} = \text{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr},$<br>$\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$<br>$\frac{1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0, \sigma_{rr} = 0$   | Одиннадцать            |
| 6 | $(G_2 - G_1) \text{ctg} \alpha \neq 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0,$<br>$v_1 = v_2 = v = \frac{\text{ctg}^2 \alpha}{1 + \text{ctg}^2 \alpha}$       | $\sigma_{rz} = \text{ctg} \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(1)} = \text{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(2)} = \text{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr},$<br>$\sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0,$<br>$-\frac{1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} + \frac{1}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} + H \sigma_{rr} = 0$   | Десять                 |

Окончание табл. 2

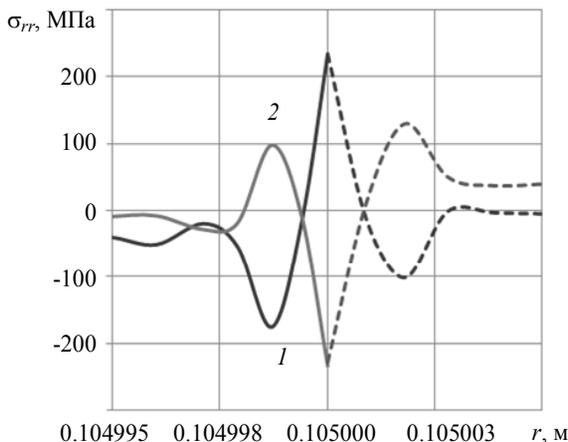
| 1  | 2  | 3   | 4      |
|----|--|---|--------|
| 7  | $(G_2 - G_1) \operatorname{ctg} \alpha = 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0,$<br>$v_1 \neq v_2$   | $\sigma_{rz} = \operatorname{ctg} \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(1)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(2)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr},$<br>$\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha,$<br>$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = -\frac{(F + H v_2) E_1 \sigma_{rr} + (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T (1 + v_2) E_1}{(v_1 - v_2)},$<br>$\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = -\frac{(F + H v_1) E_2 \sigma_{rr} + (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T (1 + v_1) E_2}{(v_1 - v_2)}$  | Десять |
| 8  | $(G_2 - G_1) \operatorname{ctg} \alpha = 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0,$<br>$v_1 = v_2 = v \neq \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$                     | $\sigma_{rz} = \operatorname{ctg} \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(1)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(2)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr},$<br>$\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha,$<br>$\frac{1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = \frac{-\operatorname{ctg}^2 \alpha (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - v (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)},$<br>$\sigma_{rr} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T E_1 E_2}{(E_1 - E_2) (\operatorname{ctg}^2 \alpha - v (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha))}$ | Десять |
| 9  | $(G_2 - G_1) \operatorname{ctg} \alpha = 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T \neq 0,$<br>$\alpha \neq \pi/2$<br>$v_1 = v_2 = v = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ | Ограничения несовместны   | —      |
| 10 | $(G_2 - G_1) \operatorname{ctg} \alpha = 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0,$<br>$v_1 \neq v_2$  | $\sigma_{rz} = \operatorname{ctg} \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(1)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(2)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr},$<br>$\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha,$<br>$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = -\frac{(F + H v_2) E_1 \sigma_{rr}}{(v_1 - v_2)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = -\frac{(F + H v_1) E_2 \sigma_{rr}}{(v_1 - v_2)}$   | Десять |
| 11 | $(G_2 - G_1) \operatorname{ctg} \alpha = 0,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0,$  | $\sigma_{rz} = \operatorname{ctg} \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(1)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr}, \sigma_{zz}^{(2)} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \sigma_{rr},$<br>$\sigma_{z\varphi}^{(1)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \alpha$  | Десять |
|    | $v_1 = v_2 = v \neq \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$   | $\frac{1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{1}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = 0,$<br>$\sigma_{rr} = 0$   |        |
| 12 | $(G_2 - G_1) = 0, \alpha \neq \pi/2$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0,$<br>$v_1 = v_2 = v = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$                                   | Соединяемые элементы имеют одинаковые материальные параметры. Постановка упругой задачи совпадает с постановкой в классическом случае   |        |
| 13 | $G_2 \neq G_1,$<br>$(\omega_1 - \omega_2) \Delta T = 0,$<br>$v_1 = v_2 = v$<br>$\alpha = \pi/2$  | $\sigma_{rz} = 0, \sigma_{zz}^{(1)} = 0, \sigma_{zz}^{(2)} = 0,$<br>$\sigma_{z\varphi}^{(1)} = 0, \sigma_{z\varphi}^{(2)} = 0, -\frac{1}{E_1} \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} + \frac{1}{E_2} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} + H \sigma_{rr} = 0$  | Десять |

Из табл. 2 видно, что для случая  $\alpha + \beta = \pi$  возможны одиннадцать совместных вариантов формулировки ограничений в особых точках. В варианте 12 материальные параметры  $G$  и  $\nu$  соединяемых элементов совпадают, поэтому он отвечает нагружению однослойного цилиндра (при  $\Delta T = 0$  различие коэффициентов  $\omega_1$  и  $\omega_2$  не сказывается на решении задачи). Равенства (24) – (26) выполняются тождественно. Задача становится классической. Во всех остальных вариантах количество ограничений в особых точках превосходит количество ограничений, вытекающих из равенств (2), (3), принимаемых во внимание в классическом подходе.

### 3. Пример. Температурное нагружение двухслойного полого цилиндра

Рассматривается температурное нагружение двухслойного полого цилиндра (рис. 1 и 2) при следующих геометрических и материальных параметрах:  $R = 0.1$  м,  $h_1 = 0.005$  м,  $h_2 = 0.001$  м,  $H = 0.3$  м,  $E_1 = 100$  ГПа,  $\nu_1 = 0.3$ ,  $\nu_2 = 0.28$ ,  $\omega_1 = 0.5 \cdot 10^{-5}$  1/град,  $\omega_2 = 0.8 \cdot 10^{-5}$  1/град,  $\Delta T = 100^\circ \text{C}$ ,  $\alpha = \beta = \pi/2$ . Жесткость внешнего цилиндра  $E_2$  варьируется (60–146 ГПа). В табл. 2. (случай 1) выписаны ограничения, накладываемые на физические компоненты напряжений. Решение задачи строится численно-аналитическим итерационным методом, описанным в работе [19]. Характерный размер конечно-элементной сетки вблизи точек ребра был равен  $0.5 \cdot 10^{-5}$  м. Результаты вычислений приводятся на рис. 3 – 4.

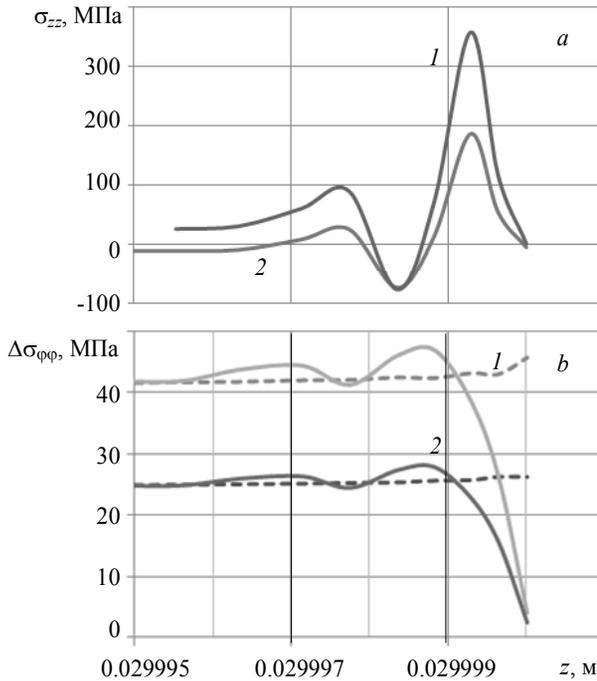
На рис. 3 показаны радиальные напряжения вблизи линии особых точек в торцевом сечении. Интересно, что знак этих напряжений зависит от жесткости цилиндров. При повышении температуры в точках края поверхности соединения напряжения растягивающие, если внутренний цилиндр более жесткий, и сжимающие, – если менее жесткий. Это обстоятельство можно использовать, к примеру, в задачах защиты цилиндрических конструкций от коррозии.



**Рис. 3.** Напряжения  $\sigma_{rr}$  в точках торцевого сечения: сплошная линия во внутреннем цилиндре, штриховая – во внешнем. 1 –  $E_2 = 60$  ГПа; 2 –  $E_2 = 146$  ГПа

**Fig. 3.** Stress values  $\sigma_{rr}$  at the points of end section: the solid line corresponds to the inner cylinder; the dashed, to the outer cylinder.  $E_2 = (1) 60$  and (2) 146 GPa

На рис. 4, *a* показаны напряжения  $\sigma_{zz}$  в составляющих цилиндрах вблизи линии особых точек в направлении общей образующей. Видно, что эти напряжения в окрестности особой точки имеют значительную величину, но равны нулю в самой точке, что согласуется с соотношениями, представленными в табл. 2.



**Рис. 4.** Напряжения в окрестности особой точки вдоль образующей поверхности соединения цилиндров: 1 – внутренний цилиндр; 2 – внешний цилиндр,  $E_2 = 60$  ГПа: *a* –  $\sigma_{zz}$ ; *b* – невязка выполнения равенств (27), (28). Сплошная линия – итерационное решение; штриховая линия – ANSYS-решение

**Fig. 4.** Stress values in the vicinity of singular point along a generator of cylinders' joint surface: 1, inner cylinder and 2, outer cylinder at  $E_2 = 60$  GPa: *a*)  $\sigma_{zz}$  and *b*) discrepancy in the equalities (27) and (28). The solid line indicates the iterative solution; the dashed line, the ANSYS-solution

На рис. 4, *b* показана умноженная на разность  $(v_1 - v_2)$  невязка выполнения равенств (27), (28). На линии особых точек торцевого сечения эти равенства должны выполняться, поэтому невязка в этих точках должна обращаться в нуль. Видно, что при приближении к линии особых точек невязка по равенствам (27), (28) в решении задачи стремится к нулю. В ANSYS-решении (классический подход), построенном на той же конечно элементной сетке, ограничения (27), (28) на компоненты напряжений в особой точке не выполняются. Вне малой окрестности особой точки классическое и неклассическое решения совпадают.

### Заключение

Представление о точке сплошной среды в виде бесконечно малой частицы, получаемой в результате стягивания к ней элементарного объема, распространяется на особые точки деформируемых тел. Предлагаемый подход позволяет сформулировать в особых точках задаваемые условия (ограничения) на параметры состояния. Показано, что количество таких ограничений в рассматриваемой задаче определяется материальными и геометрическими параметрами элемента конструкции и, как правило, превышает количество граничных условий в обычной точке поверхности тела. Это обстоятельство обуславливает неклассическую постановку задач МДГТ. Установлены сочетания материальных и геометрических параметров, указывающие на критическое состояние элемента конструкции в том смысле, что при выполнении таких сочетаний напряжения в особых точках неограниченно возрастают. С использованием итерационного численно-аналитического метода [19] исследовано напряженное состояние двухслойного цилиндра при температурной нагрузке. Показано, что полученное решение на линии особых точек торцевой поверхности согласуется со всеми задаваемыми в этих точках ограничениями.

Приведенные в работе результаты найдут применение в исследовании краевых эффектов слоистых конструкций, механике композитов, изучении концентрации напряжений в точках края поверхностей клеевых соединений, и т.п.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1967. 402 с.
2. Vogy D.B. Two Edge-bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles under Surface Traction // Trans. ASME. Ser. E. 1971. V. 38. No. 2. P. 87–96. DOI: 10.1115/1.3408786.
3. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.
4. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation and analysis // App. Mech. Rev. 2004. V. 57. No. 4. P. 251–297.
5. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification // App. Mech. Rev. 2004. V. 57. No. 4. P. 385–439.
6. Barut A., Guven I., Madenci E. Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading // Int. J. of Solid and Structures. – 2001. V. 38. No. 50–51. P. 9077–9109.
7. Шемякин Е.И. О краевых задачах теории упругости для областей с угловыми точками (плоская деформация) // ДАН. – 1996. – Т. 347. № 3. С. 342–345.
8. Задоян М.А. Прочность соединения составных плит // Механика твердого тела. – 2003. № 1. – С.111–122.
9. Paggi M., Carpintery A. On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion // Mech. Rev., 61 (2008) 020801. <http://dx.doi.org/10.1115/1.2885134>.
10. Xu L.R., Kuai H., Sengupta S. Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part I. A Biologically Inspired Design // Experimental mechanics. 2004. V. 44. No. 6. P. 608–615.
11. Xu L.R., Kuai H., Sengupta S. Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part II. An integrated numerical analysis // Experimental mechanics. 2004. V. 44. No. 6. P. 616–621.
12. Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Шуляковская Т.Д. Разложения по функциям Фадля – Папковича. Примеры решений в полуполосе // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 136–158.

13. *Luangarpa C., Koguchi H.* Analysis of singular stresses at a vertex and along a singular line in three-dimensional bonded joints using a conservative integral // *Europ. J. of Mechanics – A/Solids*. 2016. V. 60. P. 208–216.
14. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // *Тр. Моск. матем. об-ва*. 1967. Т. 16. С. 209–292.
15. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи ребра // *ДАН СССР*. 1976. Т. 229. № 1. С. 33–36.
16. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
17. *Kozlov V.A., Mazyra V.G., Schwab C.* On singularities of solutions of the displacement problem of linear elasticity near the vertex of a cone // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1992. No. 119. P. 197–227.
18. *Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В.* Нестандартные задачи для однородных элементов конструкций с особенностями в виде клиньев в условиях плоской задачи // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2014. № 1(27). С. 95–109.
19. *Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В.* Итерационный конечно-элементный алгоритм исследования напряженного состояния элементов конструкций с особыми точками и его реализация // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2015. № 4. С. 171–187. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.11
20. *Pestrenin V. M., Pestrenina I. V., Landik L.V.* Stress state at the vertex of a composite wedge, one side of which slides without friction along a rigid surface // *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2017. V. 14. No. 11. P. 2067–2088. <http://dx.doi.org/10.1590/1679-78253826>.
21. *Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В.* Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины составного клина с жестко защемленными образующими // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2016. № 3. С. 131–147. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.09.
22. *Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V.* Nonstandart problems for structural elements with spatial composite ribs // *Mechanics of Composite Materials*. 2015. V. 51. No. 4. P. 489–504.
23. *Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В.* Ограничения на параметры напряженного состояния в вершине кругового конуса // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2018. № 52. С. 89–101.
24. *Pestrenin V.M., Pestrenina I.V.* Constraints on stress components at the internal singular point of an elastic compound structure // *Mechanics of Composite Materials*. 2017. V. 53. No. 1. P. 107–116. DOI: 10.1007/s11029-017-9644-1. <http://link.springer.com/article/10.1007/s11029-017-9644-1>
25. *Ковалев Б.Д.* Формирование Эйлеровой гидродинамики // *Исследования по истории механики. Сборник статей*. М.: Наука, 1983. С. 146–167.

Статья поступила 05.09.2018 г.

Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V., Eismont E.R.(2019) STRESS COMPONENTS NEAR THE SINGULAR POINTS AT A LOAD-FREE END SECTION OF A LAYERED CYLINDER. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 57. pp. 85–99

DOI 10.17223/19988621/577

Keywords: singular points, non-classical problems, double-layered cylinder, temperature load.

In this paper, special points of a composite deformable body (points on the edge of joint surface) are considered as ordinary points of continuous medium representing infinitely small particles obtained by contracting elementary volumes towards these points. Such an approach supposes the singular points to be located in the solution area and makes it possible to formulate

the conditions (restrictions) for state parameters in these points. It is shown that the number of restrictions on the line of singular points on the end face of double-layered cylinder is defined by material and geometric parameters of the structural element, and, generally, exceeds the number of boundary conditions specified at the ordinary points of body surface. This fact specifies a non-classical formulation of the problem of deformable solid mechanics. In this work, various statements of the solid mechanics problems are developed for a considered construction element. The critical combinations of geometric and material parameters leading to a singular nature of the stress state at the singular points are revealed. A solution to the problem of double-layered cylinder under temperature loading is obtained using the numerical-analytical iterative method. The results presented could be applied in mechanics of composites and during the study of edge effects in the layered structures or stress concentration at the points of surface edge of glue joints.

*PESTRENIN Valery Mikhaylovich* (Candidate of Physics and Mathematics, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: PestreninVM@mail.ru

*PESTRENINA Irena Vladimirovna* (Candidate of Technical Science, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: IPestrenina@gmail.com

*LANDIK Lidiya Vladimirovna* (Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: LidiaLandik@gmail.com

*EISMONT Elena Romanovna* (Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: eis-elena@yandex.ru

#### REFERENCES

1. Uflyand Ya.S. (1967) *Integral'nye preobrazovaniya v zadachakh teorii uprugosti* [Integral transformations in problems of the theory of elasticity]. Moscow; Leningrad: AN SSSR Publ.
2. Bogy D.B. (1971) Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions. *Trans. ASME. Ser.E.* 38(2). pp. 87–96. DOI:10.1115/1.3408786.
3. Chobanyan K.S. (1987) *Napryazheniya v sostavnykh uprugikh telakh* [Stresses in the composite elastic bodies]. Yerevan: AN ArmSSR Publ.
4. Sinclar G.B. (2004) Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation and analysis. *App. Mech. Rev.* 57(4). pp. 251–297.
5. Sinclar G.B. (2004) Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification. *App. Mech. Rev.* 57(4). pp. 385–439.
6. Barut A., Guven I., Madenci E. (2001) Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading. *Int. J. of Solid and Structures.* 38(50-51). pp. 9077–9109.
7. Shemyakin E.I. (1996) O kraevykh zadachakh teorii uprugosti dlya oblastey s uglovymi tochkami (ploskaya deformatsiya) [On the boundary value problems of the theory of elasticity for domains with angular points (plane deformation)]. *Dokl. Akad. Nauk.* 347(3). pp. 342–345.
8. Zadoyan M.A. (2003) Prochnost' soedineniya sostavnykh plit [Bonding strength of the composite plates]. *Mechanics of Solids.* 1. pp. 111–122.
9. Paggi M., Carpintery A. (2008) On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion. *Mech. Rev.* 61(020801). DOI: 10.1115/1.2885134.
10. Xu L.R., Kuai H., Sengupta S. (2004) Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part I. A Biologically Inspired Design. *Experimental mechanics.* 44(6). pp. 608–615.
11. Xu L.R., Kuai H., Sengupta S. (2004) Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part II. An integrated numerical analysis. *Experimental mechanics.* 44(6). pp. 616–621.
12. Kovalenko M.D., Men'shova I.V., Shulyakovskaya T.D. (2013) Razlozheniya po funktsiyam Fadlya-Papkovicha. Primery resheniy v polupolose [Expansions in Fadle-Papkovich. Examples of solutions in a half-strip]. *Izv. Akad. Nauk MTT.* 5. pp.136–158.

13. Luangarpa C., Koguchi H. (2016) Analysis of singular stresses at a vertex and along a singular line in three-dimensional bonded joints using a conservative integral. *Europ. J. of Mechanics – A/Solids*. 60. pp. 208–216. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2016.08.002.
14. Kondrat'ev V.A. (1967) Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy v oblastiakh s konicheskimi ili uglovymi tochkami [Boundary value problems for elliptic equations in the domains with conical or angular points]. *Proceedings of Moscow Mathematical Society*. 16. pp. 209–292.
15. Maz'ya V.G., Plamenevsky B.A. (1976) O koeffitsientakh v asimptotike resheniy ellipticheskikh kraevykh zadach vblizi rebra [On coefficients in the asymptotics of solutions to the elliptic boundary value problems in the vicinity of edge]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 229(1). pp. 33–36.
16. Parton V.Z., Perlin P.I. (1984) *Mathematical Methods of the Theory of Elasticity*. Moscow: Mir.
17. Kozlov V.A., Mazya V.G., Schwab C. (1992) On singularities of solutions of the displacement problem of linear elasticity near the vertex of a cone. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 119. pp. 197–227.
18. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2014) Nestandartnye zadachi dlya odnorodnykh elementov konstruksiy s osobennostyami v vide klin'ev v usloviyakh ploskoy zadachi [Non-standard problems of homogeneous structural elements with wedge shape features in the plane case]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 27(1). pp. 95–109.
19. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2015) Iteratsionnyy konechno-elementnyy algoritm issledovaniya napryazhenno sostoynaniya elementov konstruksiy s osobymi tochkami i ego realizatsiya [Iterative finite element algorithm and its implementation for stress state of structural elements with singular points]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 4. pp. 171–187. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.11.
20. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2017) Stress state at the vertex of a composite wedge, one side of which slides without friction along a rigid surface. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 14(11). pp. 2067–2088. DOI: 10.1590/1679-78253826.
21. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2016) Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie v okrestnosti vershiny sostavnogo klina s zhestko zashchemlennymi obrazuyushchimi [Stress-strain state near the wedge top with rigidly fastened sides]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 3. pp. 131–147. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.09.
22. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2015) Nonstandard problems for structural elements with spatial composite ribs. *Mechanics of Composite Materials*. 51(4). pp. 489–504. DOI: 10.1007/s11029-015-9520-9.
23. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2018) Ogranicheniya na parametry napryazhenno sostoynaniya v vershine krugovogo konusa [Restrictions on stress components in the top of round cone]. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 52. pp. 89–101. DOI: 10.17223/19988621/56/9.
24. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V. (2017) Constraints on stress components at the internal singular point of an elastic compound structure. *Mechanics of Composite Materials*. 53(1). pp. 107–116. DOI: 10.1007 / s11029-017-9644-1.
25. Kovalev B.D. (1983) Formirovanie Eylerovoy gidrodinamiki [Formation of the Euler hydrodynamics]. *Issledovaniya po istorii mekhaniki. Sbornik statey* [Research of the history of mechanics. Collected papers]. Moscow: Nauka. pp. 146–167.

Received: May 5, 2018

УДК 533.6.011.72; 519.63  
DOI 10.17223/19988621/57/8

Д.В. Садин, В.А. Давидчук

## ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ГАЗОВЫМ ПУЗЫРЕМ В МЕЛКОДИСПЕРСНОЙ ГАЗОВЗВЕСИ

Численно исследуется задача взаимодействия ударной волны с газовым пузырем в мелкодисперсной газозвеси. Для расчета применяется схема со вторым порядком точности по пространству и времени. Высокая устойчивость схемы обеспечивается неявным учетом межфазных взаимодействий, предложенным и развиваемым в последние десятилетия. Схема верифицирована на тестовых задачах, отражающих существенные черты рассматриваемого явления. Изучена ударно-волновая картина, развитие неустойчивости Рихтмайера – Мешкова на поверхности раздела сред и образование крупномасштабной турбулентности.

**Ключевые слова:** ударная волна, газозвесь, газовый пузырь, неустойчивость Рихтмайера – Мешкова, разностная схема

Потоки газозвесей находят широкое применение в практических приложениях [1–3]. Для таких явлений характерно наличие существенного диапазона изменения газодинамических параметров течений, границы раздела сред, неоднородностей по плотности и крупных включений. Несомненный интерес представляют структурно-сложные задачи, которые отличают рефракция ударных волн на границе раздела сред и одновременно развитие неустойчивости и турбулентности.

При численном моделировании ударно-волновых процессов в газозвесах с мелкодисперсной фракцией возникает ряд проблем. Для таких течений характерно явление жесткости, связанное с существенным различием времен релаксации фаз. Применение традиционных явных алгоритмов расчета становится практически не пригодным ввиду неоправданно малого шага по времени. Для преодоления этой трудности более 20 лет назад предложены неявные и полунеявные методы расчета источниковых членов (межфазных взаимодействий) [4–6]. На модельных односкоростных и двухскоростных уравнениях в частных производных показано, что такой подход справедлив для широкого класса разностных схем [4, 5]. Продемонстрирована высокая устойчивость схем даже для некорректно поставленных разностных задач – возможность устойчивого проведения расчетов с числом Куранта больше единицы  $CFL > 1$ . В частности, для линейных задач построены аппроксимирующие схемы, доказана их устойчивость при  $CFL > 1$ , но из этих двух свойств не следует сходимость [6]. Проведенный анализ схем для двухскоростной динамики гетерогенных сред показал, что для практически важных случаев достаточно неявно рассчитывать только быстрые компоненты решения (газовую фазу). Изучены влияние на допустимый шаг по времени (число Куранта) шага расчетной сетки, размеров частиц газозвеси, концентрации дисперсной фазы и других величин [5]. Введено понятие К-устойчивости схемы – условия устойчивости не зависят от интенсивности межфазных взаимодействий и размеров сетки [7, 8]. Другой подход основан на расщеплении законов сохранения газозвесей на однородную систему уравнений (без источников) и введение корректирующего шага для

релаксационных процессов в виде обыкновенных дифференциальных уравнений [9]. Однако в работе [10] показано, что указанная стратегия построения разностной схемы может приводить к существенному дисбалансу градиентно-потокowych и источниковых членов уравнений, например, при получении численного решения методом установления. Интерес в исследованиях при численном моделировании ударно-волновых течений газозвесей вызывает явление жесткости [11].

Весьма важным требованием, предъявляемым к разностным схемам, является возможность разрешения деталей ударной волновой картины и часто сопровождаемых явлений развития неустойчивости на контактных поверхностях и турбулентности. Схемы первого порядка точности являются избыточно диссипативными и их применение требует значительных временных затрат для получения требуемого качества решения для структурно-сложных течений газа и газозвесей. Для сохранения монотонности при повышении порядка аппроксимации схемы используют схемы высокой разрешающей способности типа Годунова [9, 12], TVD [10], WENO-типа [13], с адаптивной искусственной вязкостью [14] и др.

Еще ряд проблем связан с численным моделированием взаимодействия волн с границами раздела сред с различными уравнениями состояния и сходимостью численных решений к равновесным течениям при уменьшении размеров частиц газозвеси. Газодинамические течения в рамках сплошной среды в общем случае описываются уравнениями Навье–Стокса. Численное моделирование таких течений является корректным при условии – численная диффузия существенно меньше физической. В настоящей работе используется подход [13, 15] в рамках уравнения Эйлера, например для оценки разрешения сеток, обеспечивающих в последующих исследованиях корректное моделирование на основе уравнений Навье–Стокса при заданном числе Рейнольдса [13].

### Постановка задачи

Для описания ударно-волновых процессов в газозвесах запишем уравнения двухскоростной двухтемпературной динамики двухфазной среды [16] при известных допущениях в виде [14]

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla_d \mathbf{G} + \mathbf{B}(\nabla_d \mathbf{F}) = \mathbf{H}(\mathbf{q}), \quad (1)$$

$$\mathbf{q} = [\rho_1, \rho_2, \rho_1 v_1, \rho_2 v_2, \rho_2 e_2, \rho_1 E_1 + \rho_2 K_2]^T;$$

$$\mathbf{G} = [\rho_1 v_1, \rho_2 v_2, \rho_1 v_1 v_1, \rho_2 v_2 v_2, \rho_2 e_2 v_2, \rho_1 E_1 v_1 + \rho_2 K_2 v_2]^T;$$

$$\mathbf{F} = [0, 0, p, p, 0, p(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)]^T, \quad \mathbf{H} = [0, 0, -F_\mu, F_\mu, Q_T, -Q_T]^T;$$

$$\nabla_d = \text{diag}(\nabla \cdot, \nabla \cdot, \nabla, \nabla, \nabla \cdot, \nabla \cdot), \quad \mathbf{B} = \text{diag}[1, 1, \alpha_1, \alpha_2, 1, 1];$$

$$\rho_i = \rho_i^\circ \alpha_i \quad (i = 1, 2), \quad E_1 = e_1 + v_1^2 / 2, \quad K_2 = v_2^2 / 2.$$

Здесь и далее индексы 1 и 2 внизу относятся соответственно к параметрам несущей и дисперсной фаз, индекс  $\circ$  сверху относится к истинным значениям плотности;  $\nabla$  – оператор Гамильтона. Через  $\alpha_i, \rho_i, v_i, E_i, e_i, p$  обозначены объемная доля, приведенная плотность, вектор скорости, полная и внутренняя энергии единицы массы  $i$ -й фазы, давление газа;  $F_\mu, Q_T$  – соответственно вязкая составляющая силы межфазного взаимодействия, мощность теплообмена между газом и частицами в единице объема;  $t$  – время.

Для замыкания системы (1) используем уравнения состояния идеального калорически совершенного газа и несжимаемых твердых частиц:  $p = (\gamma_1 - 1)\rho_1^\circ e_1$ ,  $e_1 = c_v T_1$ ,  $e_2 = c_2 T_2$ ,  $\{\gamma_1, c_v, c_2, \rho_2^\circ\} \equiv \text{const}$ , где  $T_1, T_2$  – температура несущей фазы и частиц;  $\gamma_1, c_v$  – показатель адиабаты и удельная теплоемкость газа при постоянном объеме;  $c_2$  – удельная теплоемкость частиц. Интенсивности межфазного трения и теплообмена  $F_\mu, Q_T$  задаются на основе экспериментальных соотношений [17–19]. Начальные условия задаются применительно к рассматриваемым ниже задачам. Граничные условия: на стенках – отражения, на внешних границах (во всех рассматриваемых ниже задачах слева и справа расчетной области) – экстраполяция.

### Метод решения

Для численного решения используем схему с настраиваемыми диссипативными свойствами [14, 20] в конечно-объемной реализации [21] с аппроксимацией второго порядка по времени и пространству на гладких решениях – CDP2 (customizable dissipative properties).

Переход на следующий временной слой выполняется двухшаговым TVD-методом Рунге-Кутты [22]:

$$q^{(1)} = q^k + \tau L(q^k), \quad q^{k+1} = 0.5(q^k + q^{(1)}) + 0.5\tau L(q^{(1)}).$$

При этом на каждом шаге производится расщепление пространственного разностного оператора  $L(q)$  по физическим процессам с использованием искусственной вязкости  $Q_{n\pm 1/2}^k$  типа Христенсена [23] с ограничителями вязкости  $\psi_v$  [20, 21]:

$$1) \quad q_n^{k+1/2} - \delta H(q_n^{k+1/2})\tau = q_n^k + (1 - \delta)H(q_n^k)\tau - B_n^k(\tilde{F}_{n+1/2}^k - \tilde{F}_{n-1/2}^k)\tau/h,$$

где 
$$\tilde{F}_{n\pm 1/2}^k = \left[ 0, 0, \tilde{p}_{n\pm 1/2}^k, \tilde{p}_{n\pm 1/2}^k, 0, \tilde{p}_{n\pm 1/2}^k(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)_{n\pm 1/2}^k \right]^T,$$

$$\tilde{p}_{n\pm 1/2}^k = p_{n\pm 1/2}^k + Q_{n\pm 1/2}^k;$$

$$2) \quad q_n^{(1)} = q_n^{k+1/2} - \tau[\nabla_d \mathbf{G}]_{TVD}^{k+1/2}.$$

Здесь  $\tau, h$  – временные и пространственные шаги сетки; верхний индекс  $k$  относится к временному слою; нижний целый индекс  $n$  относится к центру ячейки, а полуцелые  $n\pm 1/2$  к ее граням;  $[\nabla_d \mathbf{G}]_{TVD}^{k+1/2}$  – TVD-реконструкция потоков путем взвешенной линейной комбинации противопоточной и центральной аппроксимаций конвективных членов с ограничителями потоков  $\psi_f$  [21];  $\delta$  – весовой множитель источниковых членов ( $\delta = 1$  неявный учет межфазных взаимодействий,  $\delta = 0$  – явный).

Высокая устойчивость обеспечивается учетом межфазных взаимодействий на верхнем временном слое ( $\delta = 1$ ), что ранее было предложено и обосновано в работах [4, 5, 14 и др.]. Искомые функции рассчитываются явно (без итераций) при линейной зависимости источниковых членов от решения. Однако при использо-

вании эмпирических критериальных соотношений такие зависимости – нелинейные. Например, сила межфазного трения определяется суммой слагаемых, зависящих от разности скоростей фаз в различных степенях. Для исключения итерационных процедур используем линеаризацию источников, учитывая неявно линейную часть [5]. Как показал опыт расчетов течений газозвесей в широком диапазоне параметров потоков и размеров частиц (от 100 нм и выше), запас устойчивости алгоритма при таком подходе сохраняется. Число Куранта для всех задач в настоящей работе принято  $CFL = 0.4$ , а ограничители искусственной вязкости и потоков – Van Leer [21].

### Верификация метода

Особенностью рассматриваемой задачи взаимодействия ударной волны с газовым пузырем в мелкодисперсной газозвеси является сложная ударно-волновая структура и развивающаяся неустойчивость (турбулентность) на контактном разрыве. С целью проверки возможности метода CDP2 для разрешения тонких деталей течения, диссипативных свойств и монотонности схемы рассмотрим тестовые задачи.

Первая из них – задача распада разрыва в газозвеси, имеющая точное автомодельное решение в равновесном приближении [24, 14]. Тестовая задача решается на интервале  $x/L_1 \in (0,1)$  с начальным разрывом в точке  $x_0/L_1 = 0.48$  и на отрезке времени  $t \in [0, t_1]$ , где  $L_1 = 1$  м – размер расчетной сетки с разрешением  $h/L_1 = 1/500$ ;  $t_1 = 1.2$  мс – время окончания счета. Начальные условия задачи в системе СИ представлены в табл. 1. Газодинамические величины помечены индексом  $L$  – слева от разрыва, а индексом  $R$  – справа. Двухфазная смесь в начальный момент находится в состоянии покоя. Частицы – монодисперсные, диаметром  $d = 0.1$  мкм, поровый газ – воздух с показателем адиабаты  $\gamma = 7/5$ .

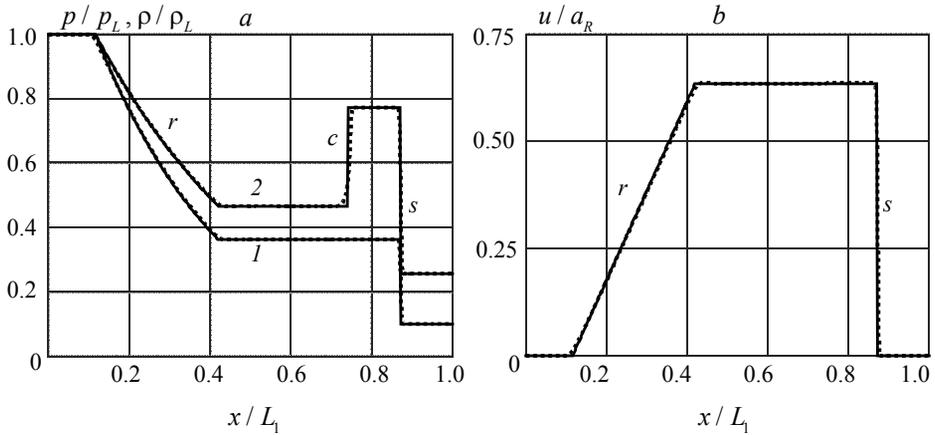
Таблица 1

Начальные условия тестовой задачи распада разрыва в газозвеси

| $\alpha_{2L}$ | $\rho_{1L}^{\circ}$ | $p_L$  | $\alpha_{2R}$ | $\rho_{1R}^{\circ}$ | $p_R$  |
|---------------|---------------------|--------|---------------|---------------------|--------|
| 0.001         | 11.8919             | $10^6$ | 0.001         | 1.18919             | $10^5$ |

После распада начального разрыва влево по газозвеси распространяется волна разрежения  $r$  (рис. 1), а вправо ударная волна  $s$ , разделенные комбинированным разрывом (скачком пористости)  $c$  и зоной постоянного течения между ними. Для заданных мелких частиц времена скоростной и тепловой релаксаций малы, много меньше шага по времени, поэтому течение практически равновесное и сходится к точному решению (рис. 1, сплошные кривые).

Второй одномерный тест представляет собой модификацию известной задачи Карни и Кёрка [25]. В нашем случае ударная волна распространяется по газозвеси и взаимодействует с ограниченной областью «чистого» газа (воздуха). Особенностью данной задачи является прохождение ударной волны и ее взаимодействие со средами, описываемыми различными уравнениями состояний. Кроме того, вычислительные трудности при решении этой задачи связаны с большим перепадом плотности.



**Рис. 1.** Сравнение численных решений (пунктирные кривые) с точными (сплошные линии) задачи о распаде разрыва в газозвеси в момент времени  $t_f = 1.2$  мс:  $a$  – величины давления 1 и плотности смеси 2, отнесенные к соответствующим начальным параметрам слева от разрыва;  $b$  – скорость смеси, отнесенная к скорости звука в газе справа от разрыва

**Fig. 1.** Comparison of numerical (dashed lines) and exact solutions (solid lines) to the problem of decay of discontinuity in a gas suspension at the time instant of  $t_f=1.2$  ms: (a) 1, the pressure and 2, the density of mixture which are related to the corresponding initial parameters to the left of discontinuity; (b) the velocity of mixture related to a sound velocity in a gas to the right of discontinuity

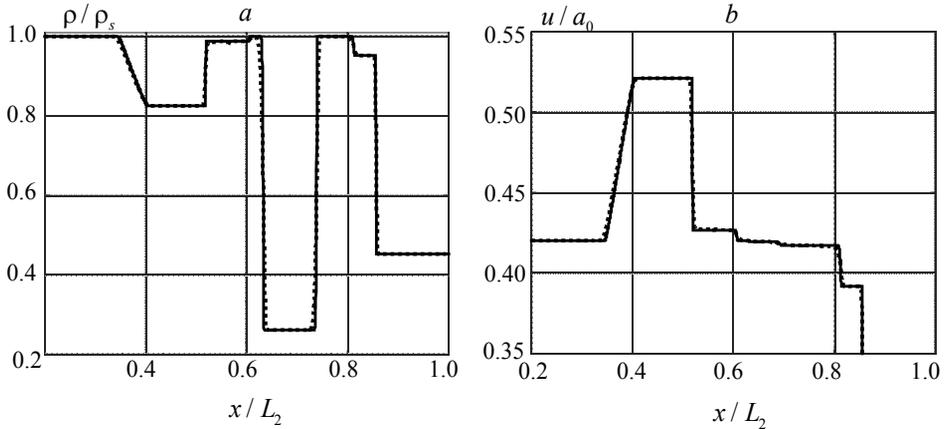
В начальный момент времени ударная волна, удовлетворяющая соотношениям Рэнкина – Гюгоньо в равновесной газозвеси [14], расположена в точке  $x_1/L_2 = 0.25$ , а газовая область между  $x_2/L_2 = 0.4$  и  $x_3/L_2 = 0.6$ , где  $L_2 = 1$  м – расчетная область. Как и в предыдущей задаче частицы имеют размер  $d = 0.1$  мкм, а поровый газ – воздух. Исходные данные в системе СИ сведены в табл. 2.

Расчет выполнялся до момента времени  $t_2 = 2$  мс на сетке с разрешением  $h/L_2 = 1/800$ . Сравнение производилось с решением на достаточно мелкой сетке  $h/L_2 = 1/4000$ , принятым за эталон. Результаты представлены на рис. 2 в виде распределений относительной плотности и скорости плотности смеси. Ко времени окончания счета реализуются пять распадов разрыва на контактных поверхностях с образованием волны разрежения и двух ударных волн слева от газовой области и двух ударных волн – справа. Полученное численное решение сохраняет монотонность с хорошим разрешением указанных деталей течения.

Таблица 2

**Начальные условия модифицированной задачи Карни и Кёрка**

| Характерные области                        | $\alpha_2$              | $\rho_1^0$ | $u$     | $p$    |
|--|-------------------------|------------|---------|--------|
| $x/L_2 \leq 0.25$                          | $2.21214 \cdot 10^{-3}$ | 2.63384    | 144.163 | 247467 |
| $0.25 < x/L_2 \leq 0.4$<br>и $x/L_2 > 0.6$ | $10^{-3}$               | 1.18919    | 0       | 100000 |
| $0.4 < x/L_2 \leq 0.6$                     | $10^{-10}$              | 1.18919    | 0       | 100000 |



**Рис. 2.** Сравнение численных решений (пунктирные кривые) с эталонными (сплошные линии) модифицированной задачи Карни и Кёрка в газозвеси в момент времени  $t_2 = 2$  мс:  $a$  – плотность смеси, отнесенная к этой величине за ударной волной;  $b$  – скорость смеси, отнесенная к скорости звука в газе перед ударной волной

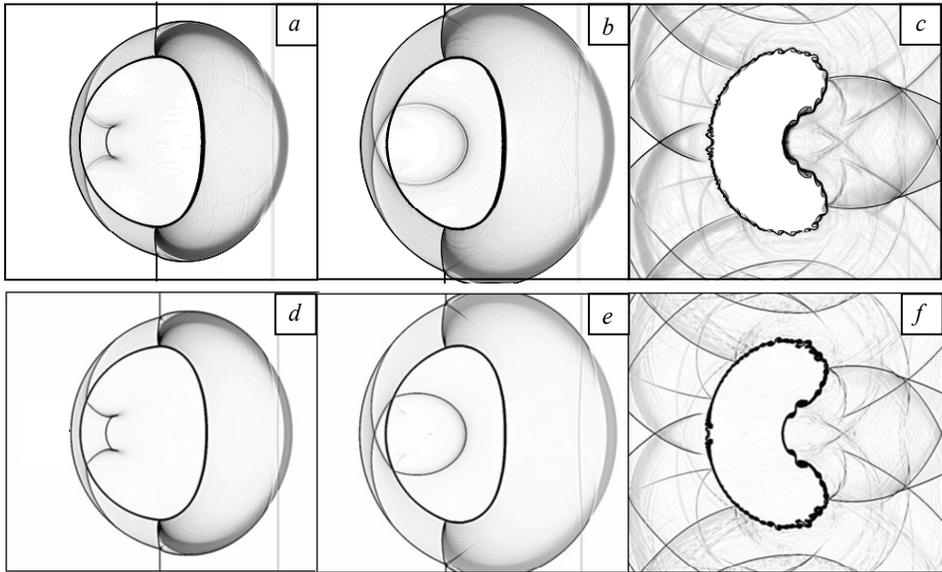
**Fig. 2.** Comparison of numerical (dashed lines) and benchmark solutions (solid lines) to a modified Karni and Quirk problem in the case of gas suspension at the time instant of  $t_2 = 2$  ms: (a) the density of mixture related to that after shock wave and (b) the velocity of mixture related to a sound velocity in a gas before shock wave

Еще одна важная особенность связана с пространственными эффектами интерференции волн разрежения, ударных волн и контактных разрывов, разделяющих два газа с различными показателями адиабаты. Рассмотрим показательную с этой точки зрения задачу о взаимодействии ударной волны с цилиндрическим пузырем гелия, которая нашла широкое применение при тестировании разностных схем. Ударная волна с числом Маха 1.22 движется влево по каналу с поперечным размером 8.9 см и встречает пузырь диаметром 5 см смеси гелия и воздуха с массовой долей 28 %. Перед ударной волной воздух и воздушно-гелиевая смесь находятся в состоянии покоя при температуре 293.23 К и давлении 101325 Па.

Результаты расчета по схеме CDP2 в виде численных ширен-изображений функции градиента плотности газа показаны на рис. 3,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Время отсчитывается от момента прихода ударной волны на границу пузыря. Для сравнения приведем численные данные, полученные по схеме WENO-типа четвертого порядка точности по пространству и третьего порядка по времени [15] (рис. 3,  $d$ ,  $e$ ,  $f$ ). Расчеты выполнены при одинаковых исходных данных, числе Куранта и дискретизации сеток с шагом  $h=50$  мкм. Численные решения хорошо согласуются между собой. Схема CDP2 демонстрирует возможности по разрешению тонких деталей ударно-волновой структуры, обладает малой диссипацией при сохранении монотонности решения. При этом вычислительные затраты существенно меньше, чем при использовании цитируемой WENO-схемы.

### Результаты расчета

Продолжим рассмотрение задачи распада разрыва в газозвеси при изменении размеров частиц, когда эффекты неравновесности становятся существенными. Задача решается при исходных данных (см. табл. 1), а диаметры частиц заданы 10 и 100 мкм. После распада разрыва возникает релаксирующее течение газозвеси.



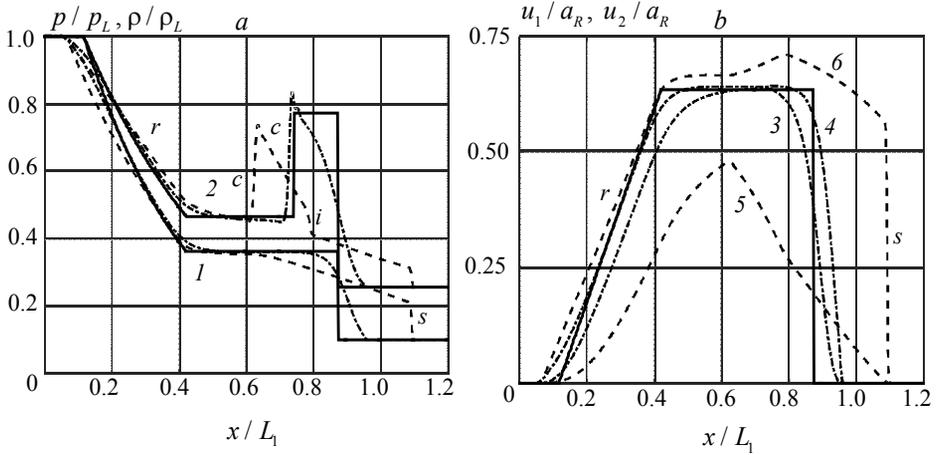
**Рис. 3.** Численные шлирен-изображения функции градиента плотности газа в моменты времени: *a, d* – 62; *b, e* – 80; *c, f* – 245 мкс. Верхний ряд (*a–c*) – схема CDP2, нижний ряд (*d–f*) – WENO из [15]

**Fig. 3.** Numerical schlieren-images of the function of gas density gradient at the time instants of (*a*), (*d*) 62; (*b*), (*e*) 80; and (*c*), (*f*) 245  $\mu$ s. Upper row (*a–c*) corresponds to the CDP2 scheme; bottom row (*d–f*), the WENO from [15]

Вправо по поровому газу движется ударная волна уменьшающейся интенсивности (рис. 4, *s*). Влево распространяется волна разрежения (рис. 4, *r*). К моменту времени  $t_2 = 2$  мс ударная волна в газовой среде с частицами  $d = 100$  мкм имеет скачок конечной интенсивности (рис. 4, штриховые кривые). Комбинированный разрыв *c*, который образовывался в равновесной газовой среде (рис. 1, *a*), распадается на контактный разрыв в поровом газе *i* и скачок пористости *c* (рис. 4, *a*). В смеси с частицами  $d = 10$  мкм ударная волна вырождается в звуковую волну (рис. 4, штрихпунктирные кривые). При уменьшении размеров частиц зоны релаксации монотонно уменьшаются, а численное решение сходится к точному (рис. 4, сплошные линии).

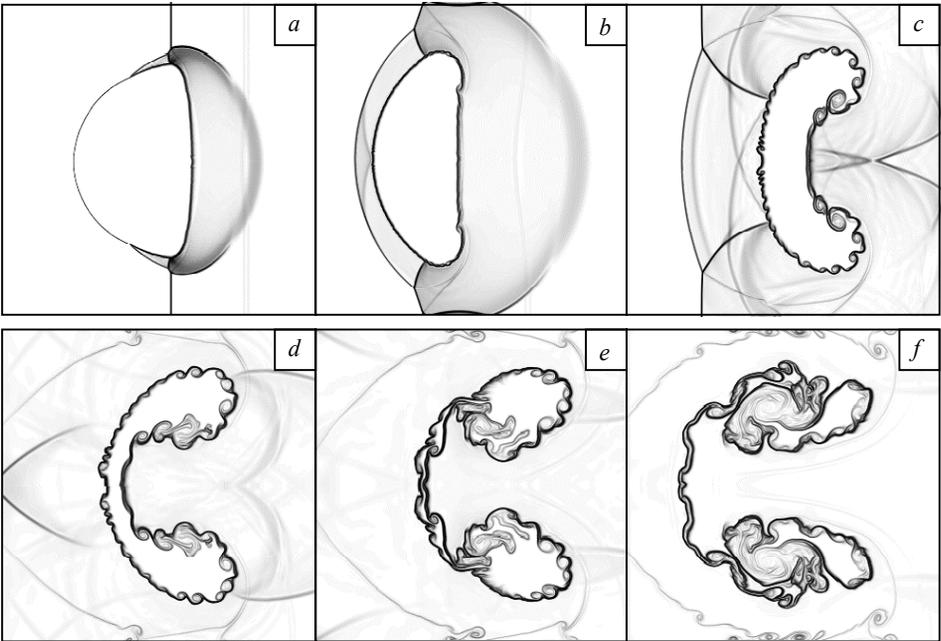
В практически важных случаях ударно-волновые возмущения распространяются в газовой среде, неоднородных по плотности. Поэтому задача взаимодействия ударной волны с газовым пузырем представляет как теоретический интерес, так и прикладное значение. Геометрические параметры соответствуют задаче взаимодействия ударной волны с гелиевым пузырем. А начальные условия – см. табл. 2 (за исключением скорости, которая имеет обратный знак). Задача решалась на равномерной сетке  $4500 \times 534$  ячеек с одинаковыми шагами по пространственным координатам.

Плоская ударная волна распространяется в канале по мелкодисперсной ( $d = 0.1$  мкм) газовой среде и в некоторый момент времени встречает на своем пути неоднородность в виде воздушного пузыря. При этом возникает распад разрыва: с ударной волной внутри пузыря и ее рефракцией во внешнюю область, а также отраженной волной разрежения в противоположном направлении (см. рис. 5, *a*).



**Рис. 4.** Сравнение численных решений (штрихпунктирные –  $d=10 \mu\text{м}$ , пунктирные кривые –  $d=100 \mu\text{м}$ ) с точными равновесными решениями (сплошные линии) задачи о распаде разрыва в газозвеси в момент времени  $t_f=2 \text{ мс}$ : *a* – относительные давления *l* и плотности смеси *2*; *b* – относительные скорости частиц *3, 5* ( $d=10 \mu\text{м}$ ) и газа *4, 6* ( $d=100 \mu\text{м}$ )

**Fig. 4.** Comparison of numerical solutions (dotted-and-dashed lines at  $d=10 \mu\text{m}$ ; dashed lines at  $d=100 \mu\text{m}$ ) and exact equilibrium solutions (solid lines) to the problem of decay of discontinuity in a gas suspension at the time instant of  $t_f=2 \text{ ms}$ : (*a*) the relative values of *l*, pressure and *2*, density of mixture; (*b*) the relative velocity of *3, 5*, particles ( $d=10 \mu\text{m}$ ) and *4, 6*, gas ( $d=100 \mu\text{m}$ )



**Рис. 5.** Численные шлирен-изображения функции градиента плотности дисперсной фазы в моменты времени: *a* – 180; *b* – 250; *c* – 450; *d* – 650; *e* – 850; *f* – 1300 мкс

**Fig. 5.** Numerical schlieren-images of the function of density gradient for a dispersed phase at the time instants of (*a*) 180; (*b*) 250; (*c*) 450; (*d*) 650; (*e*) 850; and (*f*) 1300  $\mu\text{s}$

Скорость звука в газе выше, чем в газозвеси. Поэтому ударная волна внутри пузыря движется быстрее, чем в окружающей газодисперсной среде. В момент времени от начала расчета  $t=250$  мкс (рис. 5, *b*) взаимодействующая ударная волна прошла цилиндрическую неоднородность с образованием тройной точки. На рис. 5, *c* отмечается начало зарождающей неустойчивости Рихтмайера – Мешкова на поверхности комбинированного разрыва. Последующие моменты времени характеризуются более сложной ударно-волновой картиной и развитием крупномасштабной турбулентности, что хорошо видно на приведенных шпирен-изображениях (рис. 5, *d-f*).

### Выводы

Исследование проведено в рамках модели двухскоростной двухтемпературной динамики газозвеси. Для расчета использована разностная схема со вторым порядком точности по пространству и времени CDP2, пригодная для решения жестких задач. Высокая устойчивость схемы обеспечена неявным учетом межфазных взаимодействий. Схема верифицирована на тестовой задаче распада разрыва в газозвеси в сравнении с точным автомодельным решением в равновесной газозвеси, модифицированной задаче Карни и Кёрка, а также сопоставлены с данными других авторов по взаимодействию ударной волны с цилиндрической неоднородностью в виде гелиевого пузыря. Тесты подтвердили малую диссипацию и монотонность численных решений, полученных по схеме CDP2. Рассмотрены релаксирующие течения газозвесей при изменении размеров частиц и их сходимость к равновесным решениям. Численно решена задача о распространении ударной волны в мелкодисперсной газозвеси и ее взаимодействии с пузырем воздуха. Рассмотрены ударно-волновая картина, развитие неустойчивости Рихтмайера – Мешкова на поверхности раздела сред и образование крупномасштабной турбулентности. Проведенные исследования позволяют оценить численную диссипацию на заданных разрешениях сеток для корректного моделирования течений газозвесей в рамках Навье – Стокса при заданном числе Рейнольдса, что является направлением дальнейших исследований.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Crowe C.T., Schwarzkopf J.D., Sommerfeld M., Tsuji Y. Multiphase flows with droplets and particles. New York: CRC Press, 2012. 487 p.
2. Алхимов А.П., Клинков С.В., Косарев В.Ф., Фомин В.М. Холодное газодинамическое напыление. Теория и практика / под ред. В.М. Фомина. М.: Физматлит, 2010. 536 с.
3. Gidaspo D. Multiphase Flow and Fluidization. New York: Academic Press, 1994. 467 p.
4. Садин Д.В. Модифицированный метод крупных частиц для расчета нестационарных течений газа в пористой среде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 10. С. 158–164.
5. Садин Д.В. Метод расчета волновых гетерогенных течений с интенсивным межфазным взаимодействием // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 6. С. 1033–1039.
6. Садин Д.В. О сходимости одного класса разностных схем для уравнений нестационарного движения газа в дисперсной среде // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 9. С. 1572–1577.
7. Садин Д.В. О жесткости систем дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движения гетерогенных сред // Математ. моделир. 2002. Т. 14. № 11. С. 43–53.
8. Садин Д.В. Проблема жесткости при моделировании волновых течений гетерогенных сред с трехтемпературной схемой межфазного тепло- и массообмена // Прикл. механ. и техн. физ. 2002. Т. 43. № 2. С. 136–141. DOI: 10.1023/A:1014714012032.

9. Saurel R. and Abgrall R. A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows // *J. Comput. Phys.* 1999. 150(2). P. 425–467. DOI: 10.1006/jcph.1999.6187.
10. Gascon LL., Corberan J.M. Construction of Second-Order TVD Schemes for Nonhomogeneous Hyperbolic Conservation Laws // *J. Comput. Phys.* 2001. 172. P. 261–297. DOI: 10.1006/jcph.2001.6823.
11. Миньков Л.Л., Гольдина Н.В. Особенности численного решения задачи о распространении ударной волны по газозвеси с мелкими частицами // *Вестн Том. гос. ун-та. Математика и механика.* 2017. № 49. С. 94–104. DOI: 10.17223/19988621/49/9.
12. Toro E.F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics.* 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2009. 724 p. DOI: 10.1007/b79761.
13. Shi J., Zhang Y.-T., Shu C.-W. Resolution of high order WENO schemes for complicated flow structures // *J. Comput. Phys.* 2003. V. 186. P. 690–696. DOI: 10.1016/S0021-9991(03)00094-9.
14. Садин Д.В. TVD-схема для жестких задач волновой динамики гетерогенных сред негиперболического неконсервативного типа // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2016. Т 56. № 12. С. 2098–2109. DOI: 10.7868/S0044466916120152.
15. Coralic V. and Colonius T. Finite-volume WENO scheme for viscous compressible multi-component flows // *J. Comput. Phys.* 2014. V. 274. P. 95–121. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.06.003.
16. Нигматулин Р.И. *Динамика многофазных сред.* Ч. 1, 2. М.: Наука, 1987.
17. Ergun S. Fluid flow through packed columns // *Chem. Eng. Progress.* 1952. V. 48. No. 2. P. 89–94.
18. Чудновский А.Ф. *Теплообмен в дисперсных средах.* М.: Гостехтеориздат, 1954.
19. Стернин Л.Е., Маслов Б.П., Шрайбер А.А., Подвысоцкий А.М. *Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами.* М.: Машиностроение, 1980.
20. Садин Д.В. Схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами для численного моделирования течений газа и газозвесей // *Матем. моделирование.* 2017. Т. 29. № 12. С. 89–104.
21. Садин Д.В. Применение схемы с настраиваемыми диссипативными свойствами к расчету течений газа с развитием неустойчивости на контактной границе // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики.* 2018. Т. 18. № 1. С. 153–157. DOI: 10.17586/2226-1494-2018-18-1-153-157.
22. Gottlieb S. and Shu C.-W. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes // *Mathematics of Computation.* 1998. V. 67. No. 221. P. 73–85. DOI: 10.1090/S0025-5718-98-00913-2.
23. Christensen R.B. Godunov Methods on a Staggered Mesh – An Improved Artificial Viscosity. Technical Report UCRL-JC-105269. 1990. 11 p.
24. Иванов А.С., Козлов В.В., Садин Д.В. Нестационарное истечение двухфазной дисперсной среды из цилиндрического канала конечных размеров в атмосферу // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 1996. № 3. С. 60–66. DOI: 10.1007/BF02030221.
25. Abgrall R. How to Prevent Pressure Oscillations in Multicomponent Flow Calculations: A Quasi Conservative Approach // *J. Comput. Phys.* 1996. V. 125. P. 150–160. DOI: 10.1006/jcph.1996.0085.

Статья поступила 03.10.2018 г.

Sadin D.V., Davidchuk V.A. (2019) DISTINCTIVE FEATURES OF CALCULATING INTERACTION BETWEEN SHOCK WAVE AND GAS BUBBLE IN A FINELY DISPERSED GAS SUSPENSION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 57. pp. 100–111

DOI 10.17223/19988621/57/8

Keywords: shock wave, gas suspension, gas bubble, Richtmyer-Meshkov instability, difference scheme.

The problem of interaction between shock wave and gas bubble in a finely dispersed gas suspension is studied using a two-velocity two-temperature formulation. The numerical method, which is applicable for a simulation of multiphase flows governed by the stiff Euler equations, is utilized. Implementation of the scheme is split into two phases. The first uses the central differences of both deformation and gradient terms with Christensen-type artificial viscosity. The total variation diminishing (TVD)-type reconstructions of the fluxes are used in the second phase applying a weighted linear combination of upwind and central approximations of convective terms with flux limiters. The second-order TVD Runge-Kutta (RK) algorithm is employed to march the solution in time. A high stability is ensured by either implicit or semi-implicit calculating method for the source terms in the equations, which have been proposed and developed over the last decades. The properties of elaborated numerical method are verified by considering several challenging one- and two-dimensional test problems as compared to the exact self-similar equilibrium solutions and to the results of other authors. A convergence to the equilibrium solutions is confirmed at various particle sizes. The shock-wave pattern, the Richtmyer-Meshkov instability developing along the bubble interface, and the large-scale turbulence generation are studied.

*SADIN Dmitry Viktorovich* (Doctor of Technical Science, Professor, Mozhaysky Military Space Academy, Saint-Petersburg, Russian Federation). E-mail: sadin@yandex.ru

*DAVIDCHUK Viktor Aleksanlrovich* (Mozhaysky Military Space Academy, Saint-Petersburg, Russian Federation). E-mail: david\_lxii@mail.ru

#### REFERENCES

1. Crowe C.T., Schwarzkopf J.D., Sommerfeld M., Tsuji Y. (2012) *Multiphase Flows with Droplets and Particles*. New York: CRC Press.
2. Alkhimov A.P., Klinkov S.V., Kosarev V.F., Fomin V.M. (2010) *Kholodnoe gazodinamicheskoe napylenie. Teoriya i praktika* [Cold gas-dynamic spraying. Theory and practice]. Moscow: Fizmatlit.
3. Gidaspow D. (1994) *Multiphase Flow and Fluidization*. New York: Academic Press.
4. Sadin D.V. (1996) A modified large-particle method for calculating unsteady gas flows in a porous medium. *Comp. Maths Math. Phys.* 36(10). pp. 1453–1458.
5. Sadin D.V. (1998) A method for computing heterogeneous wave flows with intense phase interaction. *Comp. Maths Math. Phys.* 38(6). pp. 987–993.
6. Sadin D.V. (1998) On the convergence of a certain class of difference schemes for the equations of unsteady gas motion in a disperse medium. *Comp. Maths Math. Phys.* 38(9). pp. 1508–1513.
7. Sadin D.V. (2002) O zhestkosti sistem uravneniy v chastnykh proizvodnykh, opisyyayushchikh dvizheniya geterogennykh sred [On stiff systems of partial differential equations for motion of heterogeneous media]. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Models and Computer Simulations*. 14(11). pp. 43–53.
8. Sadin D.V. (2002) Stiffness problem in modeling wave flows of heterogeneous media with a three-temperature scheme of interphase heat and mass transfer. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 43(2). pp. 286–290. DOI: 10.1023/A:1014714012032.
9. Saurel R., Abgrall R. (1999) A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows. *J. Comput. Phys.* 150(2). pp. 425–467. DOI: 10.1006/jcph.1999.6187.
10. Gascon LL., Corberan J.M. (2001) Construction of second-order TVD schemes for nonhomogeneous hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.* 172(1). pp. 261–297. DOI: 10.1006/jcph.2001.6823.
11. Min'kov L.L., Gol'dina N.V. (2017) Osobennosti chislennogo resheniya zadachi o rasprostraneni udarnoy volny po gazovzvesi s melkimi chastitsami [Peculiarities of a numerical solution of the problem of shock wave propagation over a gas suspension with small particles]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk*

- State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 49. pp. 94–104. DOI: 10.17223/19988621/49/9.
12. Toro E.F. (2009) *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag. DOI: 10.1007/b79761.
  13. Shi J., Zhang Y.T., Shu C.W. (2003) Resolution of high order WENO schemes for complicated flow structures. *J. Comput. Phys.* 186. pp. 690–696. DOI: 10.1016/S0021-9991(03)00094-9.
  14. Sadin D.V. (2016) TVD scheme for stiff problems of wave dynamics of heterogeneous media of nonhyperbolic nonconservative type. *Comp. Maths Math. Phys.* 56(12). pp. 2068–2078. DOI: 10.7868/S0044466916120152.
  15. Coralic V., Colonius T. (2014) Finite-volume WENO scheme for viscous compressible multi-component flows. *J. Comput. Phys.* 274. pp. 95–121. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.06.003.
  16. Nigmatulin R.I. (1987) *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase media]. Part. 1, 2. Moscow: Nauka.
  17. Ergun S. (1952) Fluid flow through packed columns. *Chem. Eng. Progress*. 48(2). pp. 89–94.
  18. Chudnovsky A.F. (1954) *Teploobmen v dispersnykh sredakh* [Heat transfer in dispersed media]. Moscow: Gostekhteorizdat.
  19. Sternin L.E., Maslov B.P., Shrayber A.A., Podvysotskiy A.M. (1980) *Dvukhfaznye mono- i polidispersnye techeniya gaza s chastitsami* [Two-phase mono- and polydispersed flows of gas with particles]. Moscow: Mashinostroenie.
  20. Sadin D.V. (2017) Skhemy s nastraivaemymi dissipativnymi svoystvami dlya chislennogo modelirovaniya techeniy gaza i gazovzvesey [Schemes with customizable dissipative properties as applied to gas-suspensions flow simulation]. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Models and Computer Simulations*. 29(12). pp. 89–104.
  21. Sadin D.V. (2018) Application of scheme with customizable dissipative properties for gas flow calculation with interface instability evolution. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*. 18(1). pp. 153–157. DOI: 10.17586/2226-1494-2018-18-1-153-157.
  22. Gottlieb S., Shu C.W. (1998) Total variation diminishing Runge-Kutta schemes. *Mathematics of Computation*. 67(221). pp. 73–85. DOI: 10.1090/S0025-5718-98-00913-2.
  23. Christensen R.B. (1990) *Godunov Methods on a Staggered Mesh – An Improved Artificial Viscosity*. Technical Report UCRL-JC-105269.
  24. Ivanov A.S., Kozlov V.V., Sadin D.V. (1996) Unsteady flow of a two-phase disperse medium from a cylindrical channel of finite dimensions into the atmosphere. *Fluid Dynamics*. 31(3). pp. 386–391. DOI: 10.1007/BF02030221.
  25. Abgrall R. (1996) How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations: a quasiconservative approach. *J. Comput. Phys.* 125. pp. 150–160. DOI: 10.1006/jcph.1996.0085.

Received: October 3, 2018

УДК 536.242:534-143:531.7.08  
DOI 10.17223/19988621/57/9

И.О. Сбоев, М.М. Гончаров

## ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА ОТ ЛОКАЛИЗОВАННОГО ИСТОЧНИКА В УСЛОВИЯХ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ВИБРАЦИЙ<sup>1</sup>

Приводятся результаты измерений времени распространения теплового возмущения в цилиндрическом слое жидкости, созданного локализованным источником тепла. В ходе исследования измерялась температура жидкости над источником вблизи изотермической верхней границы. По регистрируемому датчиком температуры сигналу определялось время развития теплового возмущения с момента включения подогрева. Указанным методом исследованы особенности эволюции тепловых возмущений в жидкости как в отсутствие вибраций, так и в условиях продольных и поперечных колебаний плоскости с линейной частотой 6 Гц и амплитудой 4 мм, которые при небольших градиентах температуры оказываются высокочастотными. Обсуждается распределение температуры внутри столба нагретой жидкости при установившемся течении в условиях вибраций.

**Ключевые слова:** *теплоперенос, локальный источник тепла, высокочастотные вибрации, температурные измерения.*

При наличии в жидкости локализованных источников тепла в статическом гравитационном поле может возникнуть конвективное движение, причем тепло будет переноситься вместе с веществом вдоль выделенного направления и представлять собой струю с восходящим течением [1, 2]. Изучение таких процессов затруднено их особой чувствительностью к выбору условий подогрева, формой и размером источника тепла, а также свойствам исследуемых жидкостей и граничным условиям [3–6]. В связи с этим, рассматриваемые структуры представляют собой сложную динамическую систему, поэтому в ходе решения таких задач, как правило, прибегают к различным упрощениям, рассматривая осесимметричные и плоские приближения или идеализированные и стационарные модели [7–10].

Несмотря на ряд принципиальных трудностей, возникающих в ходе исследования конвекции от компактных нагретых тел, полученные в различных работах результаты находят применение как в практических вопросах теплопередачи [9, 11, 12], так и в фундаментальных задачах, например, временной эволюции известных конвективных структур [13, 14]. С другой стороны, процессы локального формирования и распространения одиночных мелкомасштабных конвективных структур можно считать некоторым промежуточным этапом организации течений более высоких масштабов, в том числе турбулентности [15–17]. При решении практических задач следует учитывать ряд таких дополнительных факторов, как наличие многокомпонентных [18] или химически активных сред [19], смешанные граничные условия [20], вращения или наклон [21–23], присутствие акустическо-

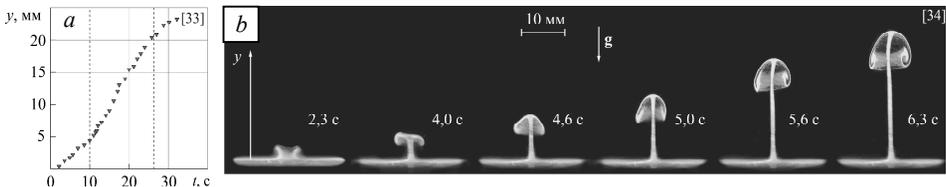
<sup>1</sup> Исследование выполнено при поддержке Правительства Пермского края (грант С-26/788), а также при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00165 (разработка и сертификация программного обеспечения для регулятора температуры (свидетельство №2018619163)).

го, в частности ультразвукового, воздействия [24, 25], а также модуляцию силы тяжести [26, 27]. Несмотря на актуальность подобных задач, они существенно осложнены большим количеством связанных параметров, что крайне затрудняет их систематическое экспериментальное исследование. Рассматривая, в частности, влияние вибраций можно обнаружить значительное число работ, однако к настоящему моменту в этой области чаще поднимается вопрос устойчивости течений к вибрационному возмущению [28]. В меньшей степени изучаются системы, в которых сам источник тепловыделения совершает гармонические колебания [29].

В вопросах конвекции и теплообмена от локализованного источника основное внимание уделяется распространению тепла в статическом случае. Для данной проблемы одной из разрабатываемых моделей является связь скорости продвижения тепловой неоднородности в бесконечном или ограниченном объеме жидкости, причем как для точечного, так и для протяженного источника. Важно указать на то, что в большинстве известных работ (в особенности, посвященных экспериментальному исследованию [30, 31]) интенсивность подогрева традиционно определяется мощностью тепловыделения. Поэтому даже современные модели устанавливают связь скорости с мощностью, а не температурой источника тепла, вследствие чего возникает проблема обобщения имеющегося материала и сопоставления с новыми экспериментальными данными. В частности, имеются трудности с выбором универсального безразмерного параметра задачи по аналогии с числом Рэлея [32].

В работах, выполненных нами ранее, проводился обзор методов наблюдения и измерения тепловых неоднородностей в узких полостях с различной геометрией [5, 33]. Обзор показал, что многие из приведенных методик не подходят для исследования течений в условиях высокочастотных вибраций. В этом случае для решения задач о теплопередаче в вибрационных полях разумнее использовать наиболее простой способ регистрации тепловых возмущений, такой, как термометрические измерения.

Одним из результатов предыдущих работ является описание сценария развития поля температуры в замкнутых полостях [6, 32, 33]. Присутствие в задаче вибрационного воздействия может сказаться на поведении теплового возмущения и его распространении в слое жидкости (рис. 1).



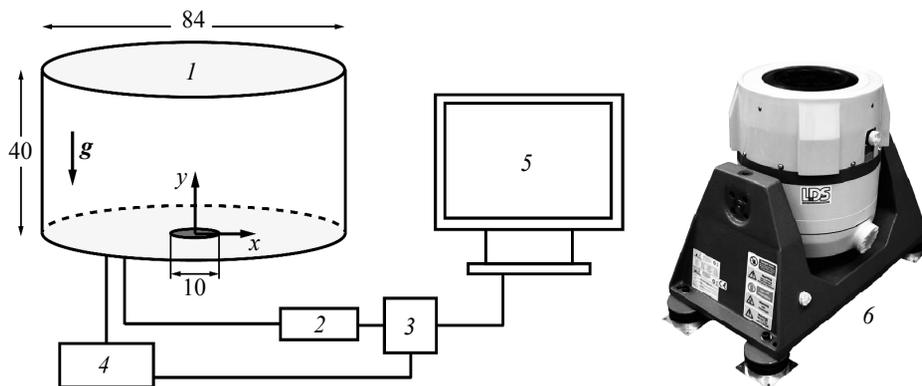
**Рис. 1.** Изменение с течением времени вертикальной координаты тепловой струи, полученное в узком вертикальном слое при мощности подогрева 0.01 Вт [33] (а); визуализация течения флуоресцирующим красителем, показывающая поведение жидкости вблизи источника на начальном этапе вдали от боковых границ (фрагмент из работы [34]) (б). При значительном перепаде температуры пограничный слой над поверхностью нагревателя способен деформироваться, что приводит к разделению течения на две струи

**Fig. 1.** Variation of a plume vertical coordinate with time observed in a narrow vertical layer at the heater power of 0.01 W [33] (a); visualization of the flow by fluorescent dye demonstrating the fluid behavior near the source at the initial stage and far from the lateral boundaries (the fragment is from [34]) (b). The boundary layer over the heater surface could be deformed at significant temperature drop which leads to a flow separation into two streams

Однако, как было сказано выше, исследование процессов в условиях вибраций осложняет методику визуализации течения, поэтому в ходе настоящей работы выполняются лишь температурные измерения. Для этого на известной высоте над нагревателем регистрируется перепад температуры, который позволяет судить о достижении тепловым возмущением спая термопары. Таким образом, цель работы заключается в измерении времени распространения теплового возмущения от локализованного источника в модулированном поле силы тяжести. Предполагается изучить и описать механизмы влияния продольных и поперечных высокочастотных вибраций на сценарий развития неоднородности температуры. Также планируется сопоставить температурные характеристики установившегося в слое течения в статическом случае и при наличии вибраций.

### Описание установки и методика проведения эксперимента

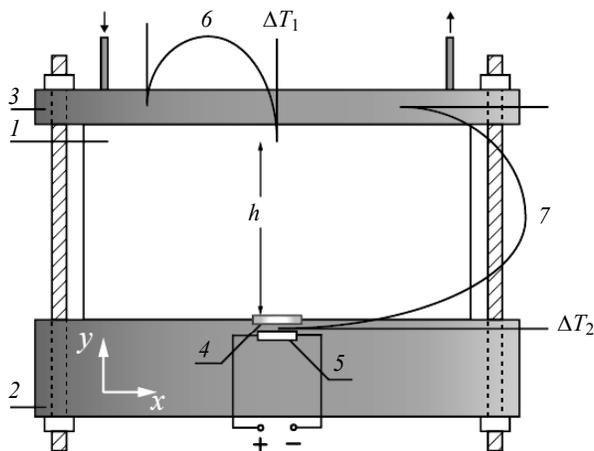
Для исследования характеристик конвективного течения от компактного источника тепла разработана экспериментальная установка, которая включает в себя цилиндрическую полость *1*, заполненную дистиллированной водой. Локальный подогрев обеспечивался за счет выделения тепла резистором, приведенным в тепловой контакт с медной пластиной в нижней части полости (рис. 2). Для измерения и регуляции температуры нагревателя использовалась схема, включающая в себя микровольтметр *2* (Термодат-38В1) с частотой опроса 4 Гц, регулятор мощности *3*, а также стабилизированный источник постоянного тока *4* (Б5-71/2). Полученный с приборов сигнал поступал и обрабатывался на компьютере *5*. Полость была ориентирована в пространстве таким образом, чтобы вектор *g* оставался перпендикулярен плоскости медного нагревателя, а диаметр полости, на порядок превышающий диаметр источника, уменьшал влияние боковых границ [33] при распространении тепла в жидкости.



**Рис. 2.** Схема экспериментальной установки: *1* – лабораторная модель с цилиндрической рабочей полостью, подогреваемая снизу медной пластиной; *2* – микровольтметр; *3* – микроконтроллер, необходимый для поддержания требуемой температуры подогрева; *4* – источник постоянного тока; *5* – компьютер. Вибрационные эффекты изучаются на электродинамическом вибростенде *6* (LDS V650)

**Fig. 2.** Scheme of the experimental setup: *1*, laboratory model with a cylindrical working cavity whose underside is heated by a copper plate; *2*, microvoltmeter; *3*, microcontroller maintaining the constant heating temperature; *4*, DC power supply; *5*, computer, and *6*, electrodynamic shaker (LDS V650) for studying the vibration effects

Рабочая полость (1 на рис. 2) образована поверхностью цилиндрической трубки круглого сечения из оргстекла с внутренним диаметром ( $84.1 \pm 0.2$ ) мм, толщиной стенок ( $2.95 \pm 0.15$ ) мм и высотой ( $40.0 \pm 0.2$ ) мм. Дном полости является плита 2 из оргстекла толщиной ( $24.98 \pm 0.13$ ) мм. Сверху слой жидкости ограничивается пластиной 3 из алюминия толщиной ( $7.14 \pm 0.01$ ) мм, которая обеспечивает необходимую изотермичность границы. Модель заполняется жидкостью через отверстия в верхнем теплообменнике. Кроме того, для уменьшения вероятности скопления на внутренней поверхности пузырьков воздуха стенки полости обрабатываются гидрофилизирующим раствором, а жидкость проходит процесс дегазации.



**Рис. 3.** Схематичное изображение лабораторной модели. В конструкции модели содержатся следующие элементы: 1 – рабочая полость, заполненная дистиллированной водой; 2 – основание из оргстекла; 3 – алюминиевая пластина; 4 – медный теплообменник в форме круга, соприкасающийся нижней стороной с резистором; 5 – резистор и соединительные провода; 6, 7 – сигнальная и измерительная дифференциальные медь-константановые термопары

**Fig. 3.** Scheme of the laboratory model. The model design contains the following elements: 1, working cavity filled with a distilled water; 2, plexiglass base; 3, aluminum plate; 4, circle copper heat exchanger whose underside is contiguous to a resistor; 5, resistor and connecting wires; 6, and 7, signaling and measuring differential copper-constantan thermocouples

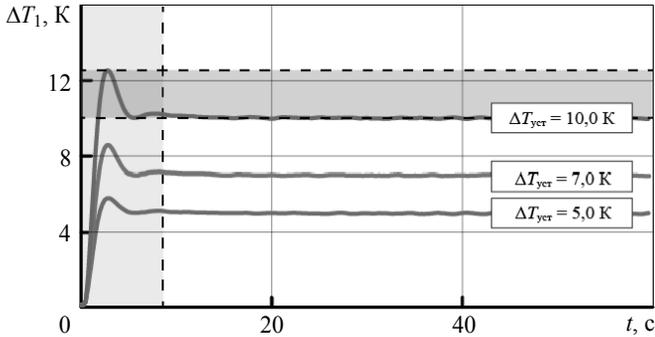
Изготовленный из меди теплообменник 4 имеет толщину ( $0.78 \pm 0.02$ ) мм и диаметр ( $9.94 \pm 0.07$ ) мм. Сопротивление резистора 5, приведенного в тепловой контакт с медной пластиной, составляет ( $130 \pm 4$ ) Ом. В основании полости для нагревателя высверлено углубление, диаметром немного больше диаметра медной пластины. Нагреватель целиком помещается в углубление так, чтобы поверхность медного теплообменника располагалась заподлицо с дном полости. Для герметичности зазор вокруг нагревателя заполняется эпоксидной смолой, которая к тому же обеспечивает тепловую изоляцию и снижает тепловой поток в радиальном направлении. Поэтому можно считать, что наиболее интенсивная теплоотдача происходит внутри слоя жидкости.

Температурные измерения выполняются при помощи системы из двух дифференциальных термопар: сигнальной 6 и измерительной 7. Один из спаев каждой термопары находится при комнатной температуре  $T_0 = 293$  К, которая с хорошей степенью точности в ходе работы остается постоянной. Сигнальная термопара 6 используется в качестве регистратора теплового возмущения  $\Delta T_1 = T_1 - T_0$ , дошедшего от источника до верхней границы полости. Для этого один из спаев термопары выставляется в рабочую полость приблизительно на 3 мм из верхнего теплообменника на оси симметрии слоя. Один из спаев измерительной термопары 7 располагается между резистором и медной пластиной, что позволяет измерять перепад  $\Delta T_2 = T_2 - T_0$  и контролировать температуру подогрева.

С целью достижения более точных измерений температуры и повышения надежности работы микроконтроллера сигнальная и измерительная термопары предварительно градуируются. Для этого одновременно с записью термоЭДС измеряется температура остывающей жидкости при помощи лабораторного термометра с ценой деления 0.5 К. Показания термометра записываются с интервалом 30 с. В ходе градуировки термопар определяется коэффициент пропорциональности между измеренным перепадом температуры и величиной термоЭДС между спаями. По результатам нескольких тестов коэффициент пропорциональности для каждой термопары находится в интервале  $(38 \pm 3)$  мкВ/К, а точность измерения температуры составляет 0.02 К.

Для решения задачи стабилизации температуры подогрева в ходе настоящего исследования используется стандартный регулятор (ШИМ) на базе 8-битного AVR-микроконтроллера ATtiny2313. Алгоритм регуляции разрабатывается в среде объектно-ориентированного программирования C#, и, в общем случае, позволяет рассчитывать подаваемый на источник питания сигнал для регуляции силы тока в цепи. Это позволяет изменять мощность источника так, чтобы обеспечить постоянную температуру резистора. Настройка контроллера заключается в выборе параметров регулирования (ПИД-коэффициентов), исходя из условия скорейшего выхода на требуемую температуру уставки  $\Delta T_{уст}$  и оптимальную величину перерегуляции (перегрева). После ручной подборки коэффициентов изменение температуры нагревателя со временем происходит так, как показано на рис. 4. В этом случае в переходной характеристике регулятора наблюдается выброс (перегрев показан горизонтальной заштрихованной областью, в которой находится пик графика при подогреве  $\Delta T_{уст} = 10.0$  К). В зависимости от заданной температуры уставки перегрев составляет от 10 до 30 %. Таким образом, для достижения необходимой температуры медного нагревателя равной, например, 5.0 К, используемому регулятору потребуется от 8 до 10 с. Однако в отсутствие регуляции температуры нагрев жидкости происходил бы на порядок медленнее [5, 33].

При изучении конвекции от локализованного нагревателя в переменном инерционном поле используется электродинамический вибростенд с воздушным охлаждением LDS V650. Лабораторная модель с жидкостью закрепляется на подвижном столике вибростенда, совершающего высокочастотные перемещения малой амплитуды. Частота колебаний задается с генератора сигнала GW Instek GFG-8219A, подключенного к усилителю мощности УМК-2000. Размах колебаний в текущей работе явно не контролируется, так как блок управления обеспечивает регуляцию выходной мощности с шагом 10, 20 % и т. д. от максимальной. Так как амплитуда колебаний зависит от нагрузки на подвижную часть вибростенда, перед измерениями выполняется калибровка вибростенда и для модели массой 1.22 кг составляется амплитудно-частотная характеристика для нескольких мощностей тока управления.



**Рис. 4.** Пропорциональный, интегральный и дифференциальный коэффициенты регуляции в условиях настоящей работы соответственно равны 6, 1 и 0. Выбранные коэффициенты обеспечивают хорошее быстродействие и оптимальное время выхода на заданную температуру

**Fig. 4.** In the framework of this study, the proportional, integral, and differential control coefficients are equal to 6, 1, and 0, respectively. The selected coefficients provide a high speed and optimal time of reaching the assigned temperature

Рассматриваются вертикальные (вектор  $\mathbf{g}$  ориентирован вдоль оси нагревателя) и горизонтальные вибрации (в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{g}$ ). Частота колебаний выбирается минимально допустимой и составляет 6 Гц, что позволяет для заданной нагрузки использовать 10, 20 и 30 % от пиковой мощности, однако в ходе решения текущей задачи рассматриваются колебания для 10 % мощности, при которой амплитуда составляет  $(4.0 \pm 0.2)$  мм. Для указанных параметров модуляция вертикальной составляющей ускорения, таким образом, имеет вид:  $a_y = 9.8 + 5.7 \sin(12\pi t)$ , а при горизонтальных вибрациях соответственно создается ускорение  $a_x = 5.7 \sin(12\pi t)$ . Характерные гидродинамическое и тепловое времена для изготовленной модели принимают следующие значения: тепловое время порядка  $10^4$  с, а гидродинамическое — порядка  $10^3$  с. При расчете этих величин в качестве характерного размера рассматривается высота рабочего слоя. Температурные измерения выполняются по прошествии 1.5–2 ч после включения вибростенда, когда в области работающей установки температура воздуха стабилизируется.

### Результаты экспериментов и их обсуждение

Ввиду того, что механизм развития конвективного течения при локализованном подогреве в однородном гравитационном поле достаточно хорошо изучен, основное внимание в рамках проводимого исследования уделяется особенностям распространения теплового возмущения в замкнутой полости в условиях высокочастотных вибраций. Метод регистрации температуры в некоторой точке над нагревателем позволяет измерить интервал времени, за которое возмущение температуры от локализованного источника достигнет верхней границы полости. Однако полученные в ходе работы результаты не учитывают время прогрева медного теплообменника, этап формирования конвективного течения, всплытие нагретой жидкости, а также взаимодействие теплового фронта с изотермической верхней границей. Поэтому результаты измерений продолжительности распространения

теплового возмущения в настоящей работе сопровождаются систематической погрешностью.

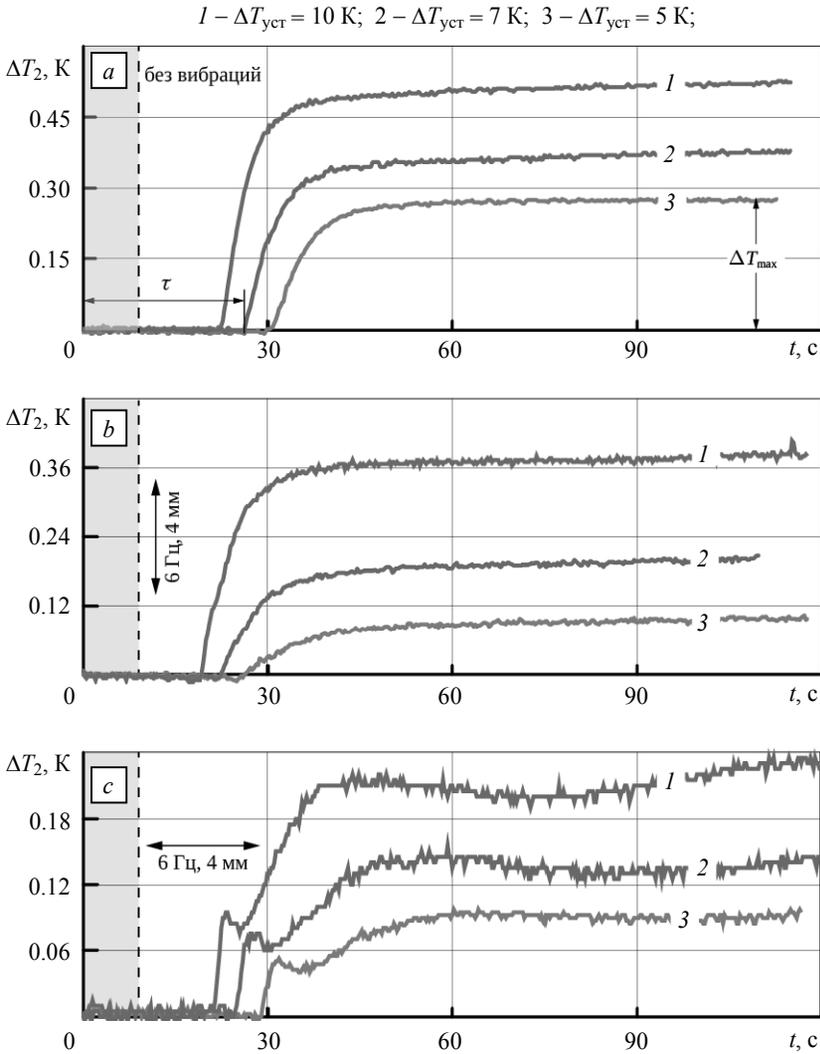
Результаты экспериментов представляют собой сигнал в виде изменения температуры спая измерительной термопары со временем. При отсутствии колебаний полости характерное изменение температуры в точке на оси нагревателя имеет следующий вид (рис. 5, *a*). До тех пор пока тепловое возмущение не достигло датчика, сигнал термопары совпадает с нулем, однако, по мере приближения тепла к термопаре возникает положительная термоЭДС. Как следует из полученного сигнала, в системе происходит плавное увеличение температуры жидкости за счет непрерывного притока тепла от нагревателя, однако со временем показания термопары устремляются к постоянному значению  $\Delta T_{\max}$ , что может являться признаком наступления в системе стационарного режима. Следует отметить, что характер изменения температуры в указанной точке слоя качественно повторяет процесс прогрева резистора, который наблюдался при отключенном регуляторе [5, 33]. Однако в рамках настоящего исследования имеет место более быстрое выравнивание температуры благодаря ШИМ-регуляции подаваемой мощности.

На приведенном графике отмечено характерное время  $\tau$  развития температурной неоднородности, за которое тепло вместе с нагретой жидкостью успевает достичь верхней границы [33]. Если предположить, что прогрев медной пластины, как и в работе [34], не превышает десяти секунд, то погрешность измерения времени  $\tau$  составит от 20 до 30 %. Данный способ оценки времени развития тепловых возмущений без визуализации оказывается наиболее рациональным при исследовании динамики тепловых процессов в условиях вибраций.

Под действием вертикальных вибраций с частотой 6 Гц и амплитудой 4 мм структура сигнала качественно остается прежней (рис. 5, *b*). Однако полученные в результате осреднения по пяти измерениям точки на графике выходят за пределы случайной погрешности, что позволяет установить влияние вертикальных вибраций на температуру в установившемся режиме. Так, согласно полученным результатам, установившаяся температура  $\Delta T_{\max}$  за счет вертикальных колебаний полости уменьшается на 65 % при перепаде 3 К и приблизительно на 20 % для перепада 10 К.

Горизонтальные вибрации с теми же характеристиками приводят к более существенным изменениям в регистрируемом сигнале (рис. 5, *c*). В этом случае уменьшение установившейся температуры жидкости становится еще более заметным по сравнению со стационарным режимом (здесь разница при тех же перепадах температуры может достигать 65 и 55 % соответственно), но и поведение температуры спая в отличие от рассмотренных выше случаев усложняется. Так, в первые несколько секунд после достижения тепловым возмущением датчика, температура в этой области увеличивается, однако затем наблюдается спад. Такой эффект возможно связан с расширением теплового пятна, из-за чего температура внутри вихря, развивающегося в жидкости в условиях горизонтальных вибраций, способна уменьшится. Последующее повышение температуры в сигнале обусловлено повышением средней температуры жидкости в полости.

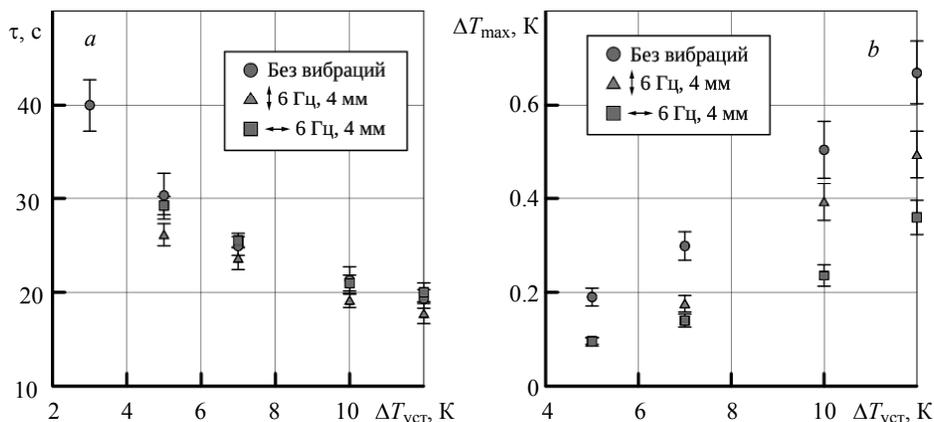
Другим важным результатом является отсутствие существенной зависимости времени развития температурного фронта от направления вибраций. На рис. 6, *a* отложены значения  $\tau$ , осредненные по пяти измерениям, для различных условий, в которых развивается температурное возмущение. Как показывают результаты измерений, в пределах погрешности время достижения теплом верхней границы слоя жидкости не зависит от того, развивается возмущение в отсутствие вибраций или в периодически изменяющемся инерционном поле.



**Рис. 5.** Изменение температуры жидкости внутри тепловой струи на высоте 37 мм над поверхностью медной пластины. Графики представляют собой результат осреднения по пяти экспериментам (*a* – статический случай, *b* – при вертикальных вибрациях, ориентированных вдоль вектора  $\mathbf{g}$ , *c* – при горизонтальных вибрациях с той же частотой и амплитудой). Здесь  $\Delta T_{\text{max}}$  – перепад температуры жидкости в верхней части струи в установившемся режиме; за время  $\tau$  тепловое возмущение достигает спая измерительной термопары

**Fig. 5.** Variation in the temperature of fluid inside the heat jet at a height of 37 mm above the copper plate. The plots represent the result averaged for five experiments: (*a*) the static case; (*b*) the case with vertical vibrations along the vector  $\mathbf{g}$ ; and (*c*) the case with horizontal vibrations of the same frequency and amplitude. Here,  $\Delta T_{\text{max}}$  is the difference between fluid temperature at the top of heat jet and room temperature at the steady-state; thermal perturbation reaches the junction of measuring thermocouple over the time  $\tau$

Следует отметить, что в условиях данного исследования (частота 6 Гц, амплитуда 4 мм) модуль вертикальной составляющей ускорения заключен в интервале между 4.1 и 15.5 м/с<sup>2</sup>. Важным в этом случае является отсутствие горизонтальной компоненты ускорения. Поэтому при распространении тепла в полости, совершающей колебания вдоль вектора ускорения свободного падения, показания измерительной термопары демонстрируют только понижение перепада температуры  $\Delta T_{\max}$  при развитии течения (рис. 6, *b*). Характер изменения температуры качественно повторяет прогрев жидкости без вибраций.



**Рис. 6.** Длительность распространения теплового возмущения от источника тепла до спая измерительной термопары в зависимости от степени подогрева (*a*); изменение установившейся температуры в верхушке тепловой струи на высоте 37 мм над поверхностью источника при наложении вибраций (*b*)

**Fig. 6.** (*a*) Duration of the thermal disturbance propagation from the heat source to the junction of measuring thermocouple as a function of heating intensity; (*b*) variation in a steady-state temperature at the top of heat jet at a height of 37 mm above the source at vibration conditions

В случае с горизонтальными вибрациями в системе возникает горизонтальная составляющая сил инерции. Оказываясь в плоскости, перпендикулярной оси симметрии тепловой струи, горизонтальные вибрации приводят к размыванию тепла в горизонтальном направлении, в результате чего термопара регистрирует меньшую по сравнению со статическим случаем температуру (рис. 6, *b*). Важно заметить, что наличие горизонтальных высокочастотных колебаний полости в пределах погрешности измерений не оказывает заметного влияния на продолжительность развития теплового возмущения в жидкости.

Приведенные выше графики также позволяют оценить величину тепловых потерь вдоль оси установившейся над нагревателем струи. Так, после достижения динамического теплового равновесия, например при  $\Delta T_{\text{уст}} = 5.0$  К, разница между температурой спая и комнатной оказывается близкой к 0.26 К. Резкое остывание может быть связано не только с присутствием алюминиевого массива, но также с тепловыми потерями через границу между струей всплывающей жидкости и менее нагретой окружающей областью. Как известно, внутри развивающейся тепловой струи температура уменьшается по мере удаления от поверхности источника по закону  $\Delta T(x=0) \sim 1/y$  [2]. Однако используемая методика не позволяет сравнить между собой интенсивности теплоотдачи от двух указанных механизмов. Так или

иначе, вследствие существенных тепловых потерь температура в верхней точке струи оказывается приблизительно на 95 % меньше температуры источника. Учитывая значительные тепловые потери внутри столба нагретой жидкости, находим, что для используемой лабораторной модели существует нижний порог значений температуры источника, при которых возможна регистрация момента достижения теплом верхней границы полости. В условиях настоящей работы таким пределом оказывается перепад температур равный  $(0.60 \pm 0.03)$  К.

### Заключение

Проведено экспериментальное исследование распространения температурной неоднородности, созданной локализованным источником тепла в условиях продольных и поперечных вибраций полости. Метод регистрации температуры позволил оценить время от включения источника тепла до достижения тепловым возмущением верхней границы, а также произвести измерения температуры при установившемся течении.

Показана необходимость учета времени прогрева медной пластины, выполняющей роль нагревателя, при расчете средней скорости распространения теплового возмущения. В рамках настоящей работы эта поправка может составлять 30 % от времени подъема струи. Тем не менее согласно результатам, в пределах погрешности измерения интервала времени  $\tau$ , рассмотренные вибрации частотой 6 Гц и амплитудой 4 мм не оказывают существенного влияния на время распространения тепла в жидкости. Показано, что вибрации способны повлиять на характер изменения температуры жидкости вблизи верхнего теплообменника, а также на величину максимальной температуры в установившемся потоке. В частности, продольные и вертикальные высокочастотные вибрации могут изменить структуру течения, что в условиях данной работы и приводит к уменьшению температуры.

Для установившегося течения получена оценка тепловых потерь вдоль основного потока жидкости. Согласно полученным результатам, уменьшение температуры в столбе нагретой жидкости достигает 95 %. Таким образом, в ходе измерений установлен нижний порог допустимой температуры подогрева, при которой удается регистрировать тепловое возмущение в жидкости.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Lappa M.* Thermal Convection: Patterns, Evolution and Stability. UK: Wiley, 2010. 670 p.
2. *Davaille A. et al.* Anatomy of a laminar starting thermal plume at high Prandtl number // Experiments in Fluids. 2011. V. 50. Iss. 2. P. 285–300.
3. *Majumder C.A Hier Yuen D.A. Vincent A.P.* Four dynamical regimes for a starting plume model // Physics of Fluids (1994-present). 2004. V. 16. Iss. 5. P. 1516–1531.
4. *Гаврилов К.А., Демин В.А., Попов Е.А.* Режимы всплытия тепловых плюмов в вертикальном слое // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т. 6. № 3. С. 261–268.
5. *Kondrashov A., Sboev I., Rybkin K.* Effect of boundary conditions on thermal plume growth // Heat and Mass Transfer. 2016. V. 52. Iss. 7. P. 1359–1368.
6. *Keken P.E., Davaille A., Vatteville J.* Dynamics of a laminar plume in a cavity: The influence of boundaries on the steady state stem structure // Geochemistry, Geophysics, Geosystems. 2013. V. 14. Iss. 1. P. 158–178.
7. *Whitehead J.A. et al.* Numerical calculations of two-dimensional large Prandtl number convection in a box // J. Fluid Mechanics. 2013. V. 729. P. 584–602.
8. *Marques F., Lopez J.M.* Spontaneous generation of a swirling plume in a stratified ambient // Journal of fluid mechanics. 2014. V. 761. P. 443–463.

9. Гибанов Н.С., Шеремет М.А. Влияние формы и размеров локального источника энергии на режимы конвективного теплопереноса в квадратной полости // Компьютерные исследования и моделирование. 2015. Т. 7. № 2. С. 271–280.
10. Sheremet M.A. Interaction of two-dimensional thermal «plumes» from local sources of energy under conditions of conjugate natural convection in a horizontal cylinder // J. Applied Mechanics and Technical Physics. 2012. V. 53. Iss. 4. P. 566–576.
11. Bergman T.L., Incropera F.P., Lavine A.S. Fundamentals of heat and mass transfer. 7th ed. UK: Wiley. 2011. 912 p.
12. Martynenko O.G., Khrantsov P.P. Free-convective heat transfer: with many photographs of flows and heat exchange. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. 518 p.
13. Lappa M. Some considerations about the symmetry and evolution of chaotic Rayleigh–Bénard convection: The flywheel mechanism and the “wind” of turbulence // Comptes Rendus Mécanique. 2011. V. 339. Iss. 9. P. 563–572.
14. Xi H.D., Lam S., Xia K.Q. From laminar plumes to organized flows: the onset of large-scale circulation in turbulent thermal convection // J. Fluid Mechanics. 2004. V. 503. P. 47–56.
15. Lappa M. Single- and multi-droplet configurations out of thermodynamic equilibrium: Pulsating, traveling, and erratic fluiddynamic instabilities // New Colloid and Surface Science Research. 2007. P. 1–58.
16. Kondrashov A., Burkova E. Stationary convective regimes in a thin vertical layer under the local heating from below // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2018. V. 118. P. 58–65.
17. Hernandez R.H. Natural convection in thermal plumes emerging from a single heat source // Int. J. Thermal Sciences. 2015. V. 98. P. 81–89.
18. Kumagai I., Davaille A., Kurita K. On the fate of thermally buoyant mantle plumes at density interfaces // Earth and Planetary Science Letters. 2007. V. 254. Iss. 1-2. P. 180–193.
19. Eckert K., Grahn A. Plume and finger regimes driven by an exothermic interfacial reaction // Physical review letters. 1999. V. 82. Iss. 22. P. 4436–4439.
20. Aminossadati S.M., Ghasemi B. A numerical study of mixed convection in a horizontal channel with a discrete heat source in an open cavity // Eur. J. Mechanics-B/Fluids. 2009. V. 28. Iss. 4. P. 590–598.
21. Elsherbiny S.M., Ragab E.H. Laminar natural convection in inclined rectangular cavities with a localized heat source // Alexandria Engineering J. 2013. V. 52. Iss. 3. P. 249–257.
22. Boubnov B.M., Heijst G.J.F. Experiments on convection from a horizontal plate with and without background rotation // Experiments in fluids. 1994. V. 16. Iss. 3-4. P. 155–164.
23. Бабушкин И.А., Демин В.А., Кондрашов А.Н., Пенелаяев Д.В. Тепловая конвекция в ячейке Хеле–Шоу при действии центробежных сил // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2012. Т. 47. № 1. С. 14–25.
24. Legay M. et al. Enhancement of heat transfer by ultrasound: review and recent advances // Int. J. Chemical Engineering. 2011. V. 2011. P. 1–17.
25. Elicer-Cortes J.C. et al. Experimental study of transition to turbulence of a round thermal plume by ultrasound scattering // Experimental thermal and fluid science. 2000. V. 20. Iss. 3-4. P. 137–149.
26. Fu W.S., Shieh W.J. Transient thermal convection in an enclosure induced simultaneously by gravity and vibration // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1993. V. 36. Iss. 2. P. 437–452.
27. Bronfenbrener L., Grinis L., Korin E. Experimental study of heat transfer intensification under vibration condition // Chemical Engineering & Technology: Industrial Chemistry-Plant Equipment-Process Engineering-Biotechnology. 2001. V. 24. Iss. 4. P. 367–371. DOI: [https://doi.org/10.1002/1521-4125\(200104\)24:4<367::AID-CEAT367>3.0.CO;2-P](https://doi.org/10.1002/1521-4125(200104)24:4<367::AID-CEAT367>3.0.CO;2-P)
28. Колмычков В.В. и др. Численное исследование устойчивости валиковой конвекции // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2009. № 4. С. 14–28.
29. Fu W.S., Tong B.H. Numerical investigation of heat transfer from a heated oscillating rectangular cylinder in a cross flow // Numerical Heat Transfer: Part A: Applications. 2001. V. 39. Iss. 6. P. 569–591.
30. Kaminski E., Jaupart C. Laminar starting plumes in high-Prandtl number fluids // J. Fluid Mech. 2003. V. 478. P. 287–298.

31. Moses E. et al. An experimental study of laminar plumes // J. Fluid Mechanics. 1993. V. 251. P. 581–601.
32. Cagney N. et al. Temperature and velocity measurements of a rising thermal plume // Geochemistry, Geophysics, Geosystems. 2015. V. 16. Iss. 3. P. 579–599.
33. Бабушкин И.А. и др. Развитие теплового плюма в узком вертикальном слое // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. Т. 2. № 34. С 41–51.
34. Kondrashov A., Sboev I., Dunaev P. Evolution of convective plumes adjacent to localized heat sources of various shapes // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. V. 103. P. 298–304.

Статья поступила 17.05.2018 г.

Sboev I.O., Goncharov M.M. (2019) DISTINCTIVE FEATURES OF THE HEAT PROPAGATION FROM A LOCALIZED SOURCE UNDER THE HIGH-FREQUENCY VIBRATION CONDITIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 57. pp. 112–125

DOI 10.17223/19988621/57/9

Keywords: heat transfer, local heat source, high-frequency vibrations, temperature measurements.

The results of studying the propagation time of thermal disturbance in a cylindrical fluid layer caused by a localized heating from below are obtained. The temperature of the fluid near the upper isothermal boundary is measured. By recording the temperature above the heater, the heat propagation time is measured from the moment the heater is turned on till the temperature sensor comes into action both in the static case and under conditions of high-frequency longitudinal and transverse vibrations (the frequency is equal to 6 Hz, the amplitude is equal to 4 mm). For the same conditions, a comparison of the temperature drop inside the column of heated fluid at a steady-state flow is carried out. The assessment of heat loss inside the heated fluid column is performed on the basis of temperature measurements for a steady-state jet. Although the paper emphasized the need to take into account the delay associated with the finite time of heat transfer from the heat source to the fluid, it was not possible to comprehend the development of the flow immediately after the heating was turned on due to the absence of visualizing particles or dye in the fluid.

**Financial support.** This study was supported by the Government of Perm Region (grant C-26/788), and by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR) under grant number 18-31-00165.

*SBOEV Ivan Olegovich* (Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: ivan-sboev@yandex.ru

*GONCHAROV Matvey Maksimovich* (Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: 123goncharov@mail.ru

#### REFERENCES

1. Lappa M. (2010) *Thermal Convection: Patterns, Evolution and Stability*. United Kingdom: Wiley.
2. Davaille A., Limare A., Touitou F., Kumagai I., Vatteville J. (2011) Anatomy of a laminar starting thermal plume at high Prandtl number. *Experiments in Fluids*. 50(2). pp. 285–300. DOI: 10.1007/s00348-010-0924-y.
3. Hier Majumder C.A., Yuen D.A. Vincent A.P. (2004) Four dynamical regimes for a starting plume model. *Physics of Fluids*. 16(5). pp. 1516–1531. DOI: 10.1063/1.1683151.
4. Gavrilov K.A., Demin V.A., Popov E.A. (2013) Rezhimy vsplytiya teplovykh plyumov v vertikal'nom sloe [Lifting regimes of thermal plumes in a vertical layer]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred – Computational Continuum Mechanics*. 2013. 6(3). pp. 261–268.

5. Kondrashov A., Sboev I., Rybkin K. (2016) Effect of boundary conditions on thermal plume growth. *Heat and Mass Transfer*. 52(7). pp. 1359–1368. DOI: 10.1007/s00231-015-1660-x.
6. Keken P.E., Davaille A., Vatteville J. (2013) Dynamics of a laminar plume in a cavity: The influence of boundaries on the steady state stem structure. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*. 14(1). pp. 158–178. DOI: 10.1029/2012GC004383.
7. Whitehead J.A., Cotel A.J., Hart S., Lithgow-Bertelloni C., Newsome W. (2013) Numerical calculations of two-dimensional large Prandtl number convection in a box. *Journal of Fluid Mechanics*. 729. pp. 584–602. DOI: 10.1017/jfm.2013.330.
8. Marques F., Lopez J.M. (2014) Spontaneous generation of a swirling plume in a stratified ambient. *Journal of Fluid Mechanics*. 761. pp. 443–463. DOI: 10.1017/jfm.2014.628.
9. Gibanov N.S., Sheremet M.A. (2015) Vliyanie form i razmerov lokal'nogo istochnika energii na rezhimy konvektivnogo teploperenosa v kvadratnoy polosti [Effect of shape and sizes of a local heat source on convective heat transfer in a square cavity]. *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie – Computer Research and Modeling*. 7(2). pp. 271–280.
10. Sheremet M.A. (2012) Interaction of two-dimensional thermal “plumes” from local sources of energy under conditions of conjugate natural convection in a horizontal cylinder. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 53(4). pp. 566–576. DOI: 10.1134/S0021894412040116.
11. Bergman T.L., Incropera F.P., Lavine A.S. (2011) *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. United Kingdom: Wiley.
12. Martynenko O.G., Khramtsov P.P. (2010) *Free-convective Heat Transfer: with Many Photographs of Flows and Heat Exchange*. Berlin; Heidelberg: Springer.
13. Lappa M. (2011) Some considerations about the symmetry and evolution of chaotic Rayleigh–Bénard convection: The flywheel mechanism and the “wind” of turbulence. *Comptes Rendus Mécanique*. 339(9). pp. 563–572. DOI: 10.1016/j.crme.2011.05.002.
14. Xi H.D., Lam S., Xia K.Q. (2004) From laminar plumes to organized flows: the onset of large-scale circulation in turbulent thermal convection. *Journal of Fluid Mechanics*. 503. pp. 47–56. DOI: 10.1017/S0022112004008079.
15. Lappa M. (2007) Single-and multi-droplet configurations out of thermodynamic equilibrium: Pulsating, traveling, and erratic fluiddynamic instabilities. *New Colloid and Surface Science Research*. pp. 1–58.
16. Kondrashov A., Burkova E. (2018) Stationary convective regimes in a thin vertical layer under the local heating from below. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 118. pp. 58–65. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.10.096.
17. Hernandez R.H. (2015) Natural convection in thermal plumes emerging from a single heat source. *International Journal of Thermal Sciences*. 98. pp. 81–89. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2015.06.010.
18. Kumagai I., Davaille A., Kurita K. (2007) On the fate of thermally buoyant mantle plumes at density interfaces. *Earth and Planetary Science Letters*. 254(1-2). pp. 180–193. DOI: 10.1016/j.epsl.2006.11.029.
19. Eckert K., Grahm A. (1999) Plume and finger regimes driven by an exothermic interfacial reaction. *Physical review letters*. 82(22). pp. 4436–4439. DOI: 10.1103/PhysRevLett.82.4436.
20. Aminossadati S.M., Ghasemi B. (2009) A numerical study of mixed convection in a horizontal channel with a discrete heat source in an open cavity. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*. 28(4). pp. 590–598. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2009.01.001.
21. Elsherbiny S.M., Ragab E.H. (2013) Laminar natural convection in inclined rectangular cavities with a localized heat source. *Alexandria Engineering Journal*. 52(3). pp. 249–257. DOI: 10.1016/j.aej.2013.03.001.
22. Boubnov B.M., Heijst G.J.F. (1994) Experiments on convection from a horizontal plate with and without background rotation. *Experiments in fluids*. 16(3-4). pp. 155–164. DOI: 10.1007/BF00206534.
23. Babushkin I.A., Demin V.A., Kondrashov A.N., Pepelyaev D.V. (2012) Teplovaya konvektsiya v yacheyke Khele-Shou pri deystvii tsentrobezhnykh sil [Thermal convection in a Hele-Shaw cell under the action of centrifugal forces]. *Fluid Dynamics*. 47(1). pp. 14–25. DOI: 10.1134/S0015462812010024.

24. Legay M., Gondrexon N., Le Person S., Boldo P., Bontemps A. (2011) Enhancement of heat transfer by ultrasound: review and recent advances. *International Journal of Chemical Engineering*. 2011. pp. 1–17. DOI: 10.1155/2011/670108.
25. Elicer-Cortes J.C., Fuentes J., Valencia A., Baudet C. (2000) Experimental study of transition to turbulence of a round thermal plume by ultrasound scattering. *Experimental thermal and fluid science*. 20(3-4). pp. 137–149. DOI: 10.1016/S0894-1777(99)00037-0.
26. Fu W.S., Shieh W.J. (1993) Transient thermal convection in an enclosure induced simultaneously by gravity and vibration. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 36(2). pp. 437–452. DOI: 10.1016/0017-9310(93)80019-Q.
27. Bronfenbrener L., Grinis L., Korin E. (2001) Experimental study of heat transfer intensification under vibration condition. *Chemical Engineering & Technology: Industrial Chemistry-Plant Equipment-Process Engineering-Biotechnology*. 24(4). pp. 367–371. DOI: [https://doi.org/10.1002/1521-4125\(200104\)24:4<367::AID-CEAT367>3.0.CO;2-P](https://doi.org/10.1002/1521-4125(200104)24:4<367::AID-CEAT367>3.0.CO;2-P)
28. Kolmychkov V.V., Mazhorova O.S., Popov Yu.P., Shcheritsa O.V. (2009) Chislennoe issledovanie ustoychivosti valikovoy konveksii [Numerical investigation of a roll convection stability]. *Fluid Dynamics*. 44(4). pp. 490–501. DOI: 10.1134/S0015462809040024.
29. Fu W.S., Tong B.H. (2001) Numerical investigation of heat transfer from a heated oscillating rectangular cylinder in a cross flow. *Numerical Heat Transfer: Part A: Applications*. 39(6). pp. 569–591. DOI: 10.1016/S0017-9310(02)00016-9.
30. Kaminski E., Jaupart C. (2003) Laminar starting plumes in high-Prandtl number fluids. *J. Fluid Mech.* 478. pp. 287–298. DOI: 10.1017/S0022112002003233.
31. Moses E., Zocchi G., Libchaberii A. (1993) An experimental study of laminar plumes. *Journal of Fluid Mechanics*. 251. pp. 581–601. DOI: 10.1017/S0022112093003532.
32. Cagney N., Newsome W.H., Lithgow-Bertelloni C., Cotel A., Hart S.R., Whitehead J.A. (2015) Temperature and velocity measurements of a rising thermal plume. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*. 16(3). pp. 579–599. DOI: 10.1002/2014GC005576.
33. Babushkin I.A., Kondrashov A.N., Rybkin K.A., Sboev I.O. (2015) Razvitie teplovogo plyuma v uzkom vertikal'nom sloye [Evolution of a thermal plume in a thin vertical layer]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(34). pp. 41–51. DOI: 10.17223/19988621/34/4.
34. Kondrashov A., Sboev I., Dunaev P. (2016) Evolution of convective plumes adjacent to localized heat sources of various shapes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 103. pp. 298–304. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.07.065.

Received: May 17, 2018

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**АНТОНОВ Егор Александрович** – аспирант кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин Национального исследовательского института «МЭИ», г. Москва. E-mail: Ve.no.m@yandex.ru

**БУБЕНЧИКОВ Алексей Михайлович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической механики Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: bubenchikov\_am@mail.ru

**БУБЕНЧИКОВ Михаил Алексеевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: michael121@mail.ru

**ГОНЧАРОВ Матвей Максимович** – студент Пермского государственного университета, г. Пермь. E-mail: 123goncharov@mail.ru

**ДАВИДЧУК Виктор Александрович** – адъюнкт Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург. E-mail: david\_lxii@mail.ru

**ИВАНОВ Дмитрий Юрьевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа Института пути, строительства и сооружений Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет транспорта (МИИТ)». E-mail: ivanovdu@yandex.ru

**КИРИЧЕВСКИЙ Ростислав Викторович** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной математики Луганского национального университета имени Тараса Шевченко, г. Луганск, Украина. E-mail: rost71@mail.ru

**КОРОЛЕВ Станислав Анатольевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического обеспечения информационных систем Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова, г. Ижевск. E-mail: stkj@mail.ru

**ЛАНДИК Лидия Владимировна** – инженер кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий Пермского государственного национального исследовательского университета, г. Пермь. E-mail: LidiaLandik@gmail.com

**ЛИПАНОВ Алексей Матвеевич** – доктор технических наук, профессор, академик Российской академии наук, главный научный сотрудник Института прикладной математики имени М.В. Келдыша Российской академии наук, заведующий кафедрой механики и моделирования Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова, г. Ижевск. E-mail: AML35@yandex.ru

**МЕРКУРЬЕВ Игорь Владимирович** – доктор технических наук, заведующий кафедрой робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин Национального исследовательского института «МЭИ», г. Москва. E-mail: merkuryeviv@ya.ru

**ПЕРЕЛЕВСКИЙ Святослав Сергеевич** – аспирант кафедры математического анализа и теории функций Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: slavaperelevskiy@mail.ru

**ПЕСТРЕНИН Валерий Михайлович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий Пермского государственного национального исследовательского университета, г. Пермь. E-mail: PestreninVM@mail.ru

**ПЕСТРЕНИНА Ирина Владимировна** – кандидат технических наук, доцент кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий Пермского государственного национального исследовательского университета, г. Пермь. E-mail: IPestrenina@gmail.com

**ПОДАЛКОВ Валерий Владимирович** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин Национального исследовательского института «МЭИ», г. Москва. E-mail: ve.no.m@yandex.ru

**ПЧЕЛИНЦЕВ Евгений Анатольевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: evgen-pch@yandex.ru

**РУСЯК Иван Григорьевич** – доктор технических наук, профессор, член-корреспондент Российской академии ракетных и артиллерийских наук, заведующий кафедрой математического обеспечения информационных систем Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова, г. Ижевск. E-mail: primat@istu.ru

**САДИН Дмитрий Викторович** – доктор технических наук, профессор, профессор Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург. E-mail: sadin@yandex.ru

**СБОЕВ Иван Олегович** – аспирант кафедры общей физики Пермского государственного национального исследовательского университета, г. Пермь. E-mail: ivan-sboev@yandex.ru

**СКРИННИКОВА Анна Владимировна** – старший преподаватель кафедры фундаментальной математики Луганского национального университета имени Тараса Шевченко, г. Луганск, Украина. E-mail: ann3005@rambler.ru

**ТЕНЕНЕВ Валентин Алексеевич** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова, г. Ижевск. E-mail: tenenev@istu.ru

**УКОЛОВ Антон Вадимович** – аспирант кафедры теоретической механики Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: Ukolov33@gmail.com

**УКОЛОВ Роман Юрьевич** – аспирант кафедры теоретической механики Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: roman\_ukolov@bk.ru

**ЧЕЛНОКОВА Анна Сергеевна** – аспирантка кафедры теоретической механики Томского государственного университета, г. Томск. E-mail: smolina-nyuta@mail.ru

**ЭЙСМОНТ Елена Романовна** – магистр кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий Пермского государственного национального исследовательского университета, г. Пермь. E-mail: eis-elena@yandex.ru

Оригинал-макет подготовлен

**ООО «Издательство научно-технической литературы»**  
634050, Томск, пл. Новособорная, 1, тел. +7(3822) 533-335

Редактор *Т.С. Портнова*  
Верстка *Д.В. Фортеса*

---

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.

Подписано к печати 12.02.2019. Выпуск в свет 18.02.2019.

Формат 70 × 100 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».

Усл. п. л. 10.16. Уч.-изд. л. 11.38. Тираж 250 экз. Заказ № 3. Цена свободная.

---

Отпечатано на оборудовании

**Издательского Дома Томского государственного университета,**  
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 3646.  
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru